31. ОДНОРІДНІ ПРОЦЕСИ РОЗМНОЖЕННЯ ТА ВИМИРАННЯ

3.1 Процеси розмноження та вимирання. Основні означення

Означення. Марковський процес із неперервним часом, який відбувається в системі S зі скінченним числом станів, називається *процесом розмноження та вимирання,* якщо граф станів системи має структуру, зображену на рис. 3.1.

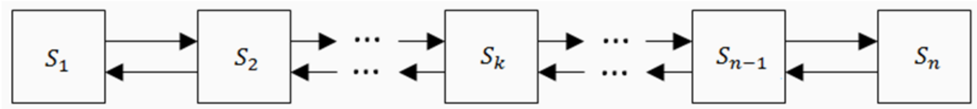

Рисунок 3.1

Таким чином, система S, в якій відбувається процес розмноження та вимирання, може з будь-якого свого стану (окрім крайніх) перейти лише в один із сусідніх станів (попередній і наступний), при цьому під "розмноженням" розуміють процес переходу системи зі стану s_i у наступний стан s_{i+1}, під "вимиранням" – процес переходу зі стану s_i у попередній стан s_{i-1}.

Описаний клас випадкових процесів почали вивчати у зв'язку з необхідністю дослідження динаміки зміни чисельності популяцій, де стан популяції s_k означає наявність у популяції k одиниць; поширення епідемій, зміни складу населення у зв'язку з його міграцією; зміни радіаційного фону, зміни кількості фірм в умовах конкуренції тощо. Якщо вважати, що стани системи описують кількісний склад деякої популяції, то перехід зі стану s_i у стан s_{i+1} означає збільшення популяції на одного індивіда, а перехід зі стану s_i у стан s_{i-1} – зменшення популяції на одного індивіда. У зв'язку з такою інтерпретацією стохастичного процесу всі процеси, що вкладаються в таку схему, називаються *процесами розмноження та вимирання.*

Зауважимо, що число станів системи n може бути як скінченним, так і нескінченним (зчисленним).

Означення. Марковським *процесом розмноження та вимирання з неперервним часом* називається випадковий процес, який може набувати лише цілих невід'ємних значень; зміни цього процесу можуть відбуватися в будь-які моменти часу t, при цьому він може або збільшитися на одиницю, або зменшитися на одиницю, або залишитися без змін.

Розглянемо розмічений граф процесу розмноження та вимирання з неперервним часом (рис. 3.2).

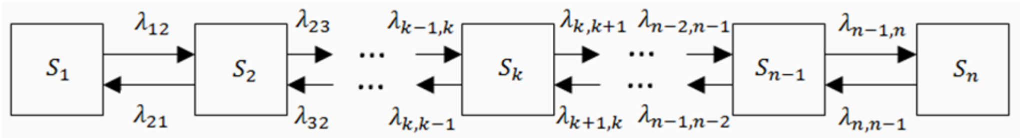

Рисунок 3.2

Матриця щільностей ймовірностей переходів процесу розмноження та вимирання має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1n-2} & 0 & \lambda_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Користуючись правилом складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова (див. теорему 2.1), отримаємо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів $p_1(t),\ p_2(t),\ \dots,\ p_n(t)$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t), \\ p_k'(t) = -\left(\lambda_{kk-1} + \lambda_{kk+1}\right)p_k(t) + \lambda_{k-1k}p_{k-1}(t) + \\ +\lambda_{k+1k}p_{k+1}(t), \quad k = 2,3,\ \dots,\ n-1, \\ p_n'(t) = -\lambda_{nn-1}p_n(t) + \lambda_{n-1n}p_{n-1}(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Зауважимо, що якщо марковський процес є однорідним (стаціонарні пуассонівські потоки), то щільності ймовірностей переходів (інтенсивності потоків) λ_{ij} у системі (3.2) не залежать від часу t; якщо марковський процес неоднорідний, то λ_{ij} є функціями часу: $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$.

Для інтегрування системи (3.2) необхідно задати початкові ймовірності $p_1(0),\ p_2(0),\ \dots,\ p_n(0)$, які задовольняють умову $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$

Розв'язок системи (3.2) також у будь-який момент часу t повинен задовольняти *нормувальну умову*:

$$p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_n(t) = 1.$$

Аналіз розміченого графа (див. рис. 3.2) показує, що система S є ергодичною; усі потоки, які переводять систему зі стану в стан, – найпростіші, тому за теоремою 2.2 робимо висновок про існування граничних ймовірностей станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$.

Теорема 3.1. Граничні ймовірності станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ процесу розмноження і вимирання з неперервним часом обчислюються за такими формулами:

$$\begin{cases} p_1 = \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}, \\ p_k = \alpha_k \cdot p_1, \quad k = 2,\ \ldots,\ n \end{cases} \tag{3.3}$$

де $$\alpha_k = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{kk-1} \cdot \lambda_{k-1k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}},\ k = 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.4}$$

Доведення

За розміченим графом станів системи, у якій відбувається процес розмноження та вимирання (див. рис. 3.2), складемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{21} p_2 = 0, \\ -\left(\lambda_{kk-1} + \lambda_{kk+1}\right) p_k + \lambda_{k-1k} p_{k-1} + \lambda_{k+1k} p_{k+1} = 0, \\ k = 2, 3, \ldots, n-1, \\ -\lambda_{nn-1} p_n + \lambda_{n-1n} p_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих системи (3.5) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & -\lambda_{21} & \lambda_{32} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{23} - \lambda_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{n-2n-3} - \lambda_{n-2\,n-1} & \lambda_{n-1n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-2\,n-1} & -\lambda_{n-1n-2} - \lambda_{n-1n} & \lambda_{nn-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{n-1n} & -\lambda_{nn-1} \end{pmatrix}$$

Виконаємо елементарні перетворення:

- 1-й рядок додамо до 2-го рядка;
- отриманий 2-й рядок додамо до третього рядка і т.д.;
- отриманий $(n-1)$-й рядок додамо до n-го рядка.

У результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{23} & \lambda_{32} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{34} & \lambda_{43} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{n-2n-1} & \lambda_{n-1n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_{n-1n} & \lambda_{nn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

За матрицею (3.6) запишемо систему лінійних рівнянь для граничних ймовірностей станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$:

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ -\lambda_{23}p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0, \\ -\lambda_{34}p_3 + \lambda_{43}p_4 = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -\lambda_{n-2n-1}p_{n-2} + \lambda_{n-1n-2}p_{n-1} = 0, \\ -\lambda_{n-1n}p_{n-1} + \lambda_{nn-1}p_n = 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Нормувальна умова для ймовірностей $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ має вигляд

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n = 1. \qquad (3.8)$$

З першого рівняння системи (3.7), враховуючи (3.4) при $k = 2,$ маємо

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \alpha_2 p_1. \qquad (3.9)$$

З другого рівняння системи (3.7), враховуючи (3.9) і (3.4) при $k = 3,$ маємо

$$p_3 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_3 p_1. \qquad (3.10)$$

З третього рівняння системи (3.7), враховуючи (3.10) і (3.4) при $k = 4,$ маємо

$$p_4 = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \lambda_{34}}{\lambda_{43} \cdot \lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_4 p_1. \qquad (3.11)$$

Виконуючи аналогічні перетворення, отримаємо

$$p_n = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1n}}{\lambda_{nn-1} \cdot \lambda_{n-1n-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}} p_1 = \alpha_n p_1. \tag{3.12}$$

Отже, справедливість формули $p_k = \alpha_k \cdot p_1,\ k = 2,\ \ldots,\ n$ доведена.

Підставивши (3.9), (3.10), (3.12) в нормувальну умову (3.8), отримаємо

$$p_1 + \alpha_2 p_1 + \alpha_3 p_1 + \ldots\ldots + \alpha_n p_1 = 1,$$

звідки

$$p_1 \cdot \left(1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n p\right) = 1,$$

$$p_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}.$$

Таким чином, теорема доведена.

Зауважимо, що у формулах (3.3) всі граничні ймовірності виражені через граничну ймовірність p_1. При розв’язуванні системи (3.7) їх можна було виразити і через іншу граничну ймовірність.

Достатньо часто нумерацію станів системи S починають не з одиниці, а з нуля: $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n$. У цьому випадку формули (3.3) і (3.4) набувають вигляду

$$\begin{cases} p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{-1}, \\ p_k = \alpha_k \cdot p_0, \quad k = 1,\ \ldots,\ n \end{cases} \tag{3.13}$$

де $\alpha_k = \dfrac{\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{kk-1} \cdot \lambda_{k-1k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{10}},\ k = 1,\ \ldots,\ n.$ (3.14)

Аналіз формул (3.3) і (3.13) показує, що правило обчислення граничних ймовірностей станів $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ процесу розмноження та вимирання з неперервним часом можна сформулювати таким чином: *гранична ймовірність будь-якого стану в схемі процесу розмноження та вимирання дорівнює дробу, в чисельнику якого міститься добуток всіх інтенсивностей “розмноження”, розташованих лівіше s_k, а в знаменнику – добуток всіх інтенсивностей “вимирання”, розташованих лівіше s_k, помножений на ймовірність крайнього лівого стану* (p_1 для (3.3) і p_0 для (3.13)).

3.2 Процеси чистого розмноження та вимирання

На практиці достатньо часто зустрічаються процеси чистого розмноження та чистого вимирання.

Означення. Процесом чистого розмноження називається такий процес розмноження та вимирання, у якого інтенсивності всіх потоків вимирання дорівнюють нулю.

Розмічений граф станів процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів показано на рис. 3.3.

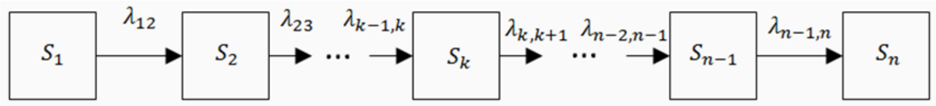

Рисунок 3.3

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів може бути отримана із системи (3.2) за умови, якщо $\lambda_{k+1k} \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12} p_1(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1k} p_{k-1}(t) - \lambda_{kk+1} p_k(t), \\ \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = \lambda_{n-1n} p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.15}$$

з початковою умовою $p_1(0) = 1$.

Означення. Процесом чистого вимирання називається такий процес розмноження та вимирання, у якого інтенсивності всіх потоків розмноження дорівнюють нулю.

Розмічений граф станів процесу чистого розмноження зі скінченним числом станів зображено на рис. 3.4.

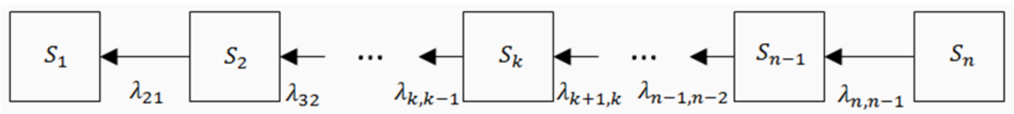

Рисунок 3.4

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для процесу чистого вимирання зі скінченним числом станів може бути отримана із системи (3.2) за умови, якщо $\lambda_{k\,k+1} \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} p_2(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k+1k} p_{k+1}(t) - \lambda_{kk-1} p_k(t), \\ k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = -\lambda_{nn-1} p_n(t), \end{cases} \tag{3.16}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Зауважимо, що при дослідженні найпростіших процесів розмноження та вимирання нумерацію станів системи S починають з нуля: $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n$; “інтенсивності розмноження” позначають через $\lambda_i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, а “інтенсивності вимирання” – через μ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

У цьому випадку розмічений граф *процесу чистого розмноження* має вигляд (рис. 3.5):

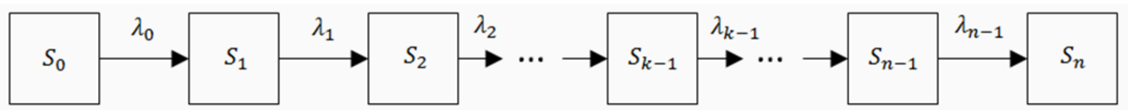

Рисунок 3.5

Розмічений граф *процесу чистого вимирання* матиме вигляд (рис. 3.6).

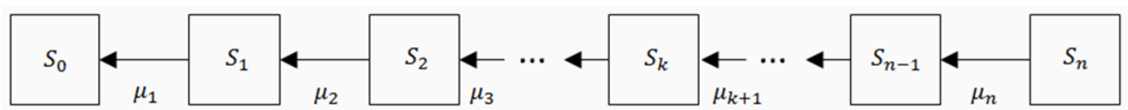

Рисунок 3.6

3.2.1 Процеси чистого розмноження

Розглянемо процес виробництва деяких виробів (банкоматів, автомашин, холодильників тощо). Нехай $X(t)$ – число виробів, виготовлених до моменту часу t, якщо $X(0) = 0$. Припустимо, що потік виготовлених виробів – найпростіший з параметром λ_k.

Потрібно знайти одновимірний закон розподілу випадкового процесу $X(t)$, а також математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

Зазначений процес моделюється процесом чистого розмноження, розмічений граф якого зображено на рис. 3.5. Система диференціальних рівнянь Колмогорова (3.15) матиме вигляд

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t), \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \lambda_k p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.17}$$

з початковою умовою $p_0(0) = 1$.

Знайдемо розв'язок першого рівняння системи, що задовольняє початкову умову $p_0(0) = 1$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda_0 p_0,$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\lambda_0 dt,$$

$$\int \frac{dp_0}{p_0} = \int -\lambda_0 dt,$$

$$\ln p_0 = -\lambda_0 t + \ln C,$$

$$\ln \frac{p_0}{C} = -\lambda_0 t,$$

$$p_0(t) = C \cdot e^{-\lambda_0 t},$$

тоді, враховуючи початкову умову, маємо

$$p_0(0) = 1 \Rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1.$$

Отже, частинний розв'язок першого рівняння системи (3.17) має вигляд

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}. \tag{3.18}$$

Розглянемо k-те рівняння системи (3.17), де $k = 1, 3, \ldots, n-1$, та знайдемо його розв'язок методом варіації довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$p_k'(t) + \lambda_k p_k(t) = 0,$$
$$p_k'(t) = -\lambda_k p_k(t),$$
$$\int \frac{dp_k}{p_k} = \int -\lambda_k dt,$$
$$\ln p_k = -\lambda_k t + \ln C_k,$$
$$\ln \frac{p_k}{C_k} = -\lambda_k t,$$
$$p_k(t) = C_k \cdot e^{-\lambda_k t}.$$

Нехай $C_k = C_k(t)$, тоді

$$p_k(t) = C_k(t) \cdot e^{-\lambda_k t}, \tag{3.19}$$

звідки

$$p_k'(t) = C_k{}'(t) \cdot e^{-\lambda_k t} - \lambda_k C_k(t) e^{-\lambda_k t}.$$

Після підстановки значень $p_k(t)$ і $p_k'(t)$ у k-те рівняння маємо

$$C_k'(t) \cdot e^{-\lambda_k t} - \lambda_k C_k(t) e^{-\lambda_k t} = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \lambda_k C_k(t) e^{-\lambda_k t}$$
$$C_k'(t) \cdot e^{-\lambda_k t} = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t),$$
$$C_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) e^{\lambda_k t}.$$

Таким чином,

$$C_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) e^{\lambda_k t}. \tag{3.20}$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності (3.20) від 0 до t, отримаємо

$$\begin{gathered} C_k(t) - C_k(0) = \int_0^t \lambda_{k-1} p_{k-1}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau, \\ C_k(t) = C_k(0) + \int_0^t \lambda_{k-1} p_{k-1}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau. \end{gathered} \tag{3.21}$$

З урахуванням значення $C_k(t)$ (3.21) розв'язок (3.19) матиме вигляд

$$p_k(t) = \left(C_k(0) + \int_0^t \lambda_{k-1} p_{k-1}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau \right) \cdot e^{-\lambda_k t}.$$

Згідно з початковою умовою $p_k(0) = C_k(0) = 0.$ Отже, отримаємо рекурентну формулу

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t} \int_0^t \lambda_{k-1} p_{k-1}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau, \tag{3.22}$$

яка разом з (3.18) дозволяє послідовно знайти ймовірності $p_0(t)$, $p_1(t)$, …, $p_{n-1}(t)$. Якщо $n < \infty$, тоді

$$p_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t). \tag{3.23}$$

Математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу $X(t)$ знаходять, використовуючи формули:

$$m_x(t) = M(X(t)) = \sum_{k=1}^{n} k p_k(t),$$

$$D_x(t) = D(X(t)) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k(t) - M^2(X(t)).$$

Розглянемо окремі випадки процесу чистого розмноження.

I. Процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k = \lambda$.

Розглянемо процес чистого розмноження зі сталою інтенсивністю $\lambda_k = \lambda$ *(пуассонівський процес чистого розмноження)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.7.

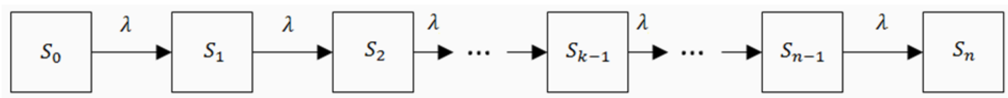

Рисунок 3.7

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.17), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \\ k = 1, 3, \ldots, n-1, \\ p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t), \end{cases} \tag{3.24}$$

Згідно з (3.18)

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.22), отримаємо

$$k=1 \Rightarrow p_1(t)=e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda p_0(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\cdot e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda d\tau = \lambda t e^{-\lambda t};$$

$$k=2 \Rightarrow p_2(t)=e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda p_1(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda^2\tau e^{-\lambda\tau}\cdot e^{\lambda\tau}d\tau = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda^2\tau d\tau = \frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad t>0,\ k\ge 0.$$

Таким чином, *процес чистого розмноження зі сталою інтенсивністю* λ в момент часу t є випадкове число народжень $X(t)$ в інтервалі $(0;\ t)$, яке розподілене за законом Пуассона з параметром λt. Отже,

- $p_n(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t),\ n<\infty;$
- $M(X(t))=D(X(t))=\lambda t;$
- інтервал між сусідніми народженнями – випадкова величина, розподілена за показниковим законом з параметром λ.

II. Процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k=k\lambda,\ k\ge 1.$

Розглянемо процес чистого розмноження з інтенсивністю $\lambda_k=k\lambda$ *(геометричний процес чистого розмноження)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.8.

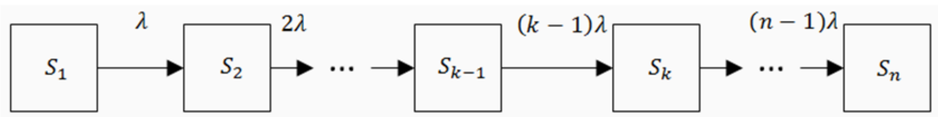

Рисунок 3.8

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.17), яка для цього випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_1'(t)=-\lambda p_1(t), \\ p_k'(t)=(k-1)\lambda p_{k-1}(t)-k\lambda p_k(t), \\ k=1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_n'(t)=(n-1)\lambda p_{n-1}(t). \end{cases} \qquad (3.25)$$

Згідно з (3.18)

$$p_1(t)=e^{-\lambda t},\ t>0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.22), отримаємо

$$k=2\Rightarrow p_2(t)=e^{-2\lambda t}\int_0^t \lambda p_1(\tau)e^{2\lambda\tau}d\tau=e^{-2\lambda t}\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\cdot e^{2\lambda\tau}d\tau=\lambda e^{-2\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}d\tau=$$

$$=e^{-2\lambda t}\cdot\left(e^{\lambda t}-1\right)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right);$$

$$k=3\Rightarrow p_3(t)=e^{-3\lambda t}\int_0^t 2\lambda p_2(\tau)e^{3\lambda\tau}d\tau=e^{-3\lambda t}\int_0^t 2\lambda\cdot e^{-\lambda\tau}\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)e^{3\lambda\tau}d\tau=$$

$$=2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t e^{2\lambda\tau}\cdot\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)d\tau=2\lambda e^{-3\lambda t}\int_0^t\left(e^{2\lambda\tau}-e^{\lambda\tau}\right)d\tau=2\lambda e^{-3\lambda t}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\lambda}e^{2\lambda t}-\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right)=e^{-\lambda t}\left(1-2e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}\right)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2.$$

Аналогічно $p_k(t)=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1},\quad t>0,\ 1\le k\le n-1.$

Таким чином, *процес чистого розмноження з інтенсивністю* $\lambda=k\lambda$ в момент часу t є випадкове число народжень $X(t)$ в інтервалі $(0;t)$, яке розподілене за геометричним законом з ймовірністю успіху $p=e^{-\lambda t}$. Отже,

- $p_n(t)=1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}p_k(t),\ n<\infty;$
- $M\left(X(t)\right)=\dfrac{1}{p}=e^{\lambda t};$
- $D\left(X(t)\right)=\dfrac{1-p}{p^2}=e^{\lambda t}\left(1-e^{\lambda t}\right).$

3.2.2 Процеси чистого вимирання

Розглянемо процес експлуатації деяких виробів (банкоматів, автомашин, комп’ютерів тощо) на підприємстві. Нехай $X(t)$ – число виробів, які знаходяться в експлуатації на момент часу t, при цьому $X(0)=n$ та $X(t)$ набуває значень $k=n,\ n-1,\ \ldots,\ 0.$ Припустимо, що нові вироби на підприємство не надходять, а ті, що виходять з ладу, – списуються. Вважаємо, що потік списаних виробів – найпростіший з параметром μ_k.

Потрібно знайти одновимірний закон розподілу випадкового процесу $X(t)$, а також математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

Зазначений процес моделюється процесом чистого вимирання, розмічений граф якого зображено на рис. 3.6. Система диференціальних рівнянь Колмогорова (3.16) матиме вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu_n p_n(t), \\ p_k'(t) = \mu_{k+1} p_{k+1}(t) - \mu_k p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu_1 p_1(t), \end{cases} \tag{3.26}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Знайдемо розв’язок n-го рівняння системи, що задовольняє початкову умову $p_n(0) = 1$:

$$\frac{dp_n}{dt} = -\mu_n p_n,$$
$$\frac{dp_n}{p_n} = -\mu_n dt,$$
$$\int \frac{dp_n}{p_n} = \int -\mu_n dt,$$
$$\ln p_n = -\mu_n t + \ln C,$$
$$\ln \frac{p_n}{C} = -\mu_n t,$$
$$p_n(t) = C \cdot e^{-\mu_n t},$$

тоді, враховуючи початкову умову, маємо

$$p_n(0) = 1 \Rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1.$$

Отже, частинний розв’язок n-го рівняння системи (3.26) має вигляд

$$p_n(t) = e^{-\mu_n t},\ t > 0. \tag{3.27}$$

Розглянемо k-те рівняння системи (3.26), $k=1,\ 3,\ \ldots,\ n-1$ та знайдемо його розв'язок методом варіації довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$\begin{aligned}
&p_k'(t)+\mu_k p_k(t)=0,\\
&p_k'(t)=-\mu_k p_k(t),\\
&\int\frac{dp_k}{p_k}=\int-\mu_k dt,\\
&\ln p_k=-\mu_k t+\ln C_k,\\
&\ln\frac{p_k}{C_k}=-\mu_k t,\\
&p_k(t)=C_k\cdot e^{-\mu_k t}.
\end{aligned}$$

Нехай $C_k=C_k(t)$, тоді

$$p_k(t)=C_k(t)\cdot e^{-\mu_k t}, \tag{3.28}$$

звідки

$$p_k'(t)=C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}-\mu_k C_k(t)e^{-\mu_k t}.$$

Після підстановки значень $p_k(t)$ і $p_k'(t)$ в k-те рівняння маємо

$$\begin{gathered}
C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}-\mu_k C(k)e^{-\mu_k t}=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)-\mu_k C_k(t)e^{-\mu_k t},\\
C_k'(t)\cdot e^{-\mu_k t}=\mu_{k+1}p_{k+1}(t),\\
C_k'(t)=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)e^{\mu_k t}.
\end{gathered}$$

Таким чином,

$$C_k'(t)=\mu_{k+1}p_{k+1}(t)e^{\mu_k t}. \tag{3.29}$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності (3.29) від 0 до t, матимемо

$$\begin{aligned}
&C_k(t)-C_k(0)=\int_0^t\mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau,\\
&C_k(t)=C_k(0)+\int_0^t\mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ураховуючи значення $C_k(t)$ (3.30), розв'язок (3.28) матиме вигляд

$$p_k(t)=\left(C_k(0)+\int_0^t \mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau\right)\cdot e^{-\mu_k t}.$$

Згідно з початковою умовою $p_k(0)=C_k(0)=0$. Отже, для $1\le k\le$ $\le n-1$ отримаємо рекурентну формулу

$$p_k(t)=e^{-\mu_k t}\cdot\int_0^t \mu_{k+1}p_{k+1}(\tau)e^{\mu_k\tau}d\tau. \tag{3.31}$$

яка разом з (3.27) дозволяє послідовно знайти ймовірності $p_n(t), p_{n-1}(t)$, ..., $p_1(t)$, а також

$$p_0(t)=1-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t). \tag{3.32}$$

Математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу $X(t)$ знаходять, використовуючи формули

$$m_x(t)=M\left(X(t)\right)=\sum_{k=1}^{n}kp_k(t);$$

$$D_x(t)=D\left(X(t)\right)=\sum_{k=1}^{n}k^2p_k(t)-M^2\left(X(t)\right).$$

Розглянемо окремі випадки процесу чистого вимирання.

І. Процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k=\mu,\ 1\le k\le n.$

Розглянемо процес чистого вимирання зі сталою інтенсивністю $\mu_k=\mu$ *(пуассонівський процес чистого вимирання)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.9.

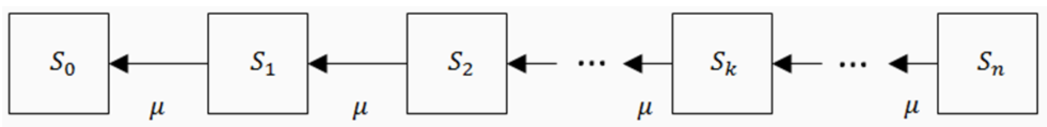

Рисунок 3.9

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.26), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -\mu\, p_n(t), \\ p_k'(t) = \mu\, p_{k+1}(t) - \mu\, p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu\, p_1(t) \end{cases} \tag{3.33}$$

Згідно з (3.27)

$$p_n(t) = e^{-\mu t},\ t > 0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.31)

$$p_k(t) = e^{-\mu_k t} \cdot \int_0^t \mu_{k+1} p_{k+1}(\tau) e^{\mu_k \tau} d\tau,$$

отримаємо

$$k = n-1 \Rightarrow p_{n-1}(t) = e^{-\mu t} \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} e^{\mu\tau} d\tau = \mu t e^{-\mu t}, t > 0;$$

$$k = n-2 \Rightarrow p_{n-2}(t) = e^{-\mu t} \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \mu\tau e^{\mu\tau} d\tau = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t}.$$

Аналогічно

$$p_k(t) = p_{n-(n-k)}(t) = \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t}, \quad t > 0,\ 1 \le k \le n, \tag{3.34}$$

звідки

$$p_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k(t).$$

Таким чином, *процес чистого вимирання зі сталою інтенсивністю* μ в момент часу t є випадкове число $X(t)$ живих індивідуумів, що залишилися, яке розподілене за аналогом закону розподілу Пуассона з параметром $\mu t.$ При цьому випадкове число індивідуумів, які загинули $Y(t) = n - X(t),$ має закон розподілу Пуассона. Отже,

$$P\big(Y(t) = k\big) = P\big((n - X(t)) = k\big) = P\big(X(t) = n - k\big) = p_{n-k}(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}.$$

Звідки

$$M\big(X(t)\big) = n - \mu t, D\big(X(t)\big) = \mu t. \tag{3.35}$$

II. Процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = k\mu$, $1 \le k \le n$.

Розглянемо процес чистого вимирання з інтенсивністю $\mu_k = k\mu$ *(біноміальний процес чистого вимирання)*, розмічений граф якого зображено на рис. 3.10.

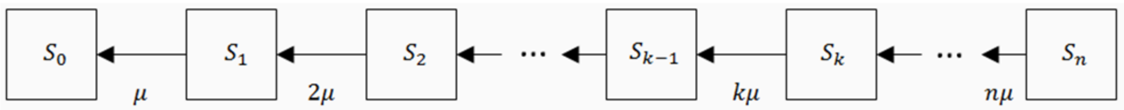

Рисунок 3.10

Знайдемо частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова (3.26), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{cases} p_n'(t) = -n\mu\, p_n(t), \\ p_k'(t) = (k+1)\mu\, p_{k+1}(t) - k\mu\, p_k(t), \\ k = 1,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \\ p_0'(t) = \mu\, p_1(t), \end{cases} \tag{3.36}$$

з початковою умовою $p_n(0) = 1$.

Згідно з (3.27)

$$p_n(t) = e^{-n\mu t},\ \ t > 0.$$

Використовуючи рекурентну формулу (3.31), яка матиме вигляд

$$p_k(t) = e^{-n\mu t} \cdot \int_0^t (k+1)\mu\, p_{k+1}(\tau) e^{k\mu\tau} d\tau,$$

отримаємо:

$$k = n-1 \Rightarrow p_{n-1}(t) = e^{-(n-1)\mu t} \cdot \int_0^t n\mu e^{(n-1)\mu\tau} e^{-n\mu\tau} d\tau = ne^{-(n-1)\mu t} \cdot \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} d\tau =$$

$$= ne^{-(n-1)\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right) = C_n^1 \left(e^{-\mu t}\right)^{n-1} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-(n-1)}, \quad t > 0;$$

$$k = n-2 \Rightarrow p_{n-2}(t) = e^{-(n-2)\mu t} \int_0^t (n-1)\mu e^{-(n-2)\mu\tau} ne^{-(n-1)\mu\tau} \left(1 - e^{-\mu t}\right) d\tau =$$

$$= n(n-1) e^{-(n-2)\mu t} \int_0^t \mu e^{-\mu\tau} \left(1 - e^{-\mu t}\right) d\tau = C_n^2 \left(e^{-\mu t}\right)^{n-2} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-(n-2)}, \quad t > 0.$$

Аналогічно

$$p_{n-k}(t)=C_n^k\left(e^{-\mu t}\right)^{n-k}\left(1-e^{-\mu t}\right)^{n-(n-k)}, \quad t>0. \qquad (3.37)$$

За умови, якщо $i=n-k$, отримаємо

$$p_i(t)=C_n^i\left(e^{-\mu t}\right)^i\left(1-e^{-\mu t}\right)^{n-i}, \ 0\le i\le n.$$

Таким чином, *процес чистого вимирання з інтенсивністю* $\mu=k\mu$ в момент часу t є випадкове число $X(t)$ живих індивідуумів, що залишилися, яке розподілене за біноміальним законом з ймовірністю успіху $e^{-\mu t}$. При цьому випадкове число індивідуумів, які загинули до моменту часу t: $Y(t)=n-X(t)$, розподілене за біноміальним законом з ймовірністю успіху $1-e^{-\mu t}$. Отже,

$$M\left(X(t)\right)=ne^{-\mu t}, \ D\left(X(t)\right)=ne^{-\mu t}\left(1-e^{-\mu t}\right).$$

3.3 Процеси розмноження та вимирання в системі з *n* вузлами

Розглянемо окремий вид процесу розмноження та вимирання. Нехай система S складається з n вузлів. Як вузли можна розглянути комп'ютери, банкомати, станки тощо. Кожен із вузлів може незалежно від інших виходити з ладу, тобто на кожен із вузлів діє найпростіший "потік відмов", подіями якого є відмови вузла. У проміжку між двома сусідніми відмовами вузол працює безвідмовно. Середній час безвідмовної роботи кожного з вузлів позначимо через $\overline{T}_\delta$. Якщо в початковий момент часу вузол був справним, то після появи першої події потоку відмов, що діє на вказаний вузол, він виходить з ладу. Зауважимо, що при розгляді цього виду процесу розмноження та вимирання розглядають "весь" потік відмов, що дозволяє говорити про інтенсивність потоку відмов.

Вузол, який вийшов з ладу, починає відразу ремонтуватися. Будемо вважати, що на кожний вузол діє найпростіший потік "відновлення", подіями якого є відновлення роботи вузла, тобто закінчення ремонту вузла. На інтервалі між двома сусідніми відновленнями вузол знаходиться в ремонті. Середній час відновлення (ремонту) позначимо через $\overline{T}_в$. Вузол, що знаходиться в ремонті, відновлюється після появи першої події потоку відновлень, що діє на вказаний вузол. Як і у випадку потоку відмов, розглядають "весь" потік відновлень, що дозволяє говорити про інтенсивність цього потоку.

Розглянемо стан системи S:

s_0 – всі n вузлів справні;

s_1 – 1 вузол відмовив (ремонтується), інші $n-1$ вузли справні;

s_2 – 2 вузли відмовили (ремонтуються), інші $n-2$ вузли справні;

...

s_{n-1} – $n-1$ вузли відмовили (ремонтуються), 1 вузол справний;

s_n – всі n вузлів відмовили (ремонтуються).

Відповідний граф станів системи S показано на рис. 3.11.

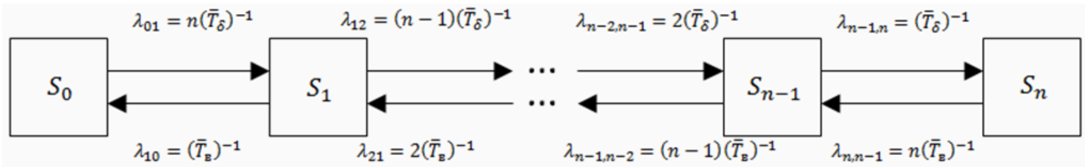

Рисунок 3.11

Оскільки перехід системи S зі стану в стан відбувається під дією найпростіших потоків, то в системі S відбувається однорідний дискретний марковський процес із неперервним часом. Аналіз розміченого графа дозволяє зробити висновок, що відповідний процес є процесом розмноження та вимирання. Фінальні ймовірності p_0, p_1, …, p_n станів системи можна знайти за формулами (3.13), (3.14), якщо відомі щільності ймовірностей переходу системи зі стану в стан. Достатньо часто простіше визначити середній час безвідмовної роботи кожного з вузлів $\overline{T}_\delta$ та середній час відновлення $\overline{T}_в$, ніж щільності ймовірностей переходів. Отже, виникає задача знаходження залежностей між фінальними ймовірностями і середнім часом $\overline{T}_\delta$ та середнім часом $\overline{T}_в$. Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 3.2. Граничні ймовірності станів $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$ процесу розмноження та вимирання в системі з n вузлами обчислюються за такими формулами:

$$p_k = C_n^k \left(\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^{-n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ n \tag{3.38}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сполучень з n елементів по k.

Доведення

Оскільки потік відмов вузлів є найпростішим, то неперервна випадкова величина T – проміжок часу між двома послідовними відмовами в цьому потоці, тобто час безвідмовної роботи вузла, розподілена за показниковим законом з параметром λ, що дорівнює інтенсивності потоку відмов. З урахуванням характеристик показникового розподілу $\lambda = \frac{1}{M(T)}$. Враховуючи, що математичне сподівання $M(T)$ дорівнює середньому часу безвідмовної роботи вузла $\overline{T}_\delta$, отримаємо $\lambda = \left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$. Таким чином, на систему S у стані s_0 впливає сумарний потік відмов з сумарною інтенсивністю $n\lambda = n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$, що дорівнює щільності ймовірності переходу λ_{01} системи S зі стану s_0 у стан s_1: $\lambda_{01} = n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$.

У стані s_1 функціонують $n-1$ вузлів. Отже, зі стану s_1 у стан s_2 систему S переводить сумарний потік відмов із сумарною інтенсивністю $(n-1)\lambda = (n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$, звідки $\lambda_{12} = (n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}$.

Таким чином,

$$\lambda_{k-1\,k} = \left(n-(k-1)\right)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.39)$$

Розглянемо потік відновлень. Оскільки потік відновлень є найпростішим, то інтенсивність цього потоку визначається як обернена величина середнього часу відновлення, тобто $\lambda = \left(\overline{T}_в\right)^{-1}$. Якщо система знаходиться у стані s_n – всі n вузлів відмовили, то на кожен з них діє потік “відновлення”. Отже, на систему S у стані s_n діє сумарний потік відновлення, з сумарною інтенсивністю $n\lambda = n\left(\overline{T}_в\right)^{-1}$. Під дією цього потоку система S переходить зі стану s_n у стан s_{n-1}, тобто $\lambda_{n\,n-1} = n\left(\overline{T}_в\right)^{-1}$.

Здійснюючи аналогічні міркування, отримаємо

$$\lambda_{k\,k-1} = k\left(\overline{T}_в\right)^{-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (3.40)$$

Підставляючи формули (3.39) та (3.40) у (3.14), знайдемо вираз для α_k:

$$\alpha_k = \frac{n\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}\cdot(n-1)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}}{k\left(\overline{T}_в\right)^{-1}\cdot(k-1)\left(\overline{T}_в\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(\overline{T}_в\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(n-(k-1)\right)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot\left(\frac{\left(\overline{T}_\delta\right)^{-1}}{\left(\overline{T}_в\right)^{-1}}\right)^k = C_n^k\left(\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (3.41)$$

Підставляючи знайдені значення α_k (3.41) у (3.13) та враховуючи, що $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, отримаємо

$$p_k = C_n^k\left(\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^k\cdot\left(1+\frac{\overline{T}_в}{\overline{T}_\delta}\right)^{-n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ n.$$