Лекція 5. ТОЧКОВІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

5.1. Постановка задачі оцінювання параметрів розподілу

Статистики, які отримують за різними вибірками часто відрізняються одна від одної. Тому статистика, отримана за вибіркою, є тільки *оцінкою* невідомого параметра генеральної сукупності.

Параметри генеральної сукупності $M(x) = \bar{X}_Г, D_Г, \sigma_Г, Mo, Me, r_{xy}$ є величинами сталими, але їх числове значення невідоме. Ці параметри оцінюються параметрами вибірки: $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B, Mo^*, Me^*, r_B$, які дістають при обробці вибірки. Вони є величинами непередбачуваними, тобто випадковими.

Наближене значення шуканої величини генеральної сукупності, встановлене на основі вибіркового спостереження, називають *статистичною оцінкою параметра розподілу*.

Оцінка параметра – певна числова характеристика, отримана за вибіркою. Коли оцінка визначається одним числом, її називають ***точковою оцінкою***.

Для того, щоб будь-які статистики були хорошими оцінками параметрів генеральної сукупності, потрібно, щоб вони володіли рядом властивостей: *ефективність, незміщеність, спроможною (**консистентною**).*

Оцінка θ^* називається ***спроможною***, якщо при збільшенні обсягу вибірки n вона збігається за ймовірністю до значення параметра θ:

$$\theta^* \underset{n \to \infty}{\overset{p}{\to}} \theta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1, \forall\, \varepsilon > 0.$$

Оцінка θ^* називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання точно рівне параметру θ для будь-якого об’єму вибірки:

$$M\left(\theta^*\right) = \theta, \forall n$$

Різниця $\theta^* - \theta = \varepsilon$ називається *зміщенням статистичної оцінки* θ^*.

Ефективною називають таку незміщену оцінку, якщо її дисперсія мінімальна по відношенню до дисперсії будь-якої іншої оцінки цього параметра.

Генеральна дисперсія має дві точкові оцінки: D_B - вибіркова дисперсія; S^2 - виправлена вибіркова дисперсія. D_B обчислюється при $n \ge 30$, а S^2 - при $n < 30$. Причому в математичній статистиці доводиться, що

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{X}_Г - \bar{x}_B\right)}{n-1} = \frac{n}{n-1} D_B .$$

(поправка $\frac{n}{n-1}$ вводиться для усунення зміщеності у малих вибірках). При великих обсягах вибірки D_B та S^2 практично співпадають.

Генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_Г$ також має дві точкові оцінки: σ_B - вибіркове середнє квадратичне відхилення та S - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення. σ_B використовується для оцінювання $\sigma_Г$ при $n \ge 30$, а S для оцінювання $\sigma_Г$ при $n < 30$; при цьому $\sigma_B = \sqrt{D_B}$, а $S = \sqrt{S^2}$.

Приклад 5.1. 200 однотипних деталей були піддані шліфуванню. Результати вимірювання наведені як дискретний статистичний розподіл, поданий у табличній формі:

x_i, *мм*	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
n_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Знайти точкові незміщені статистичні оцінки для $\bar{X}_Г = M(x), \quad D_Г$.

Розв'язання: Оскільки точковою незміщеною оцінки для $\bar{X}_Г$ є $\bar{x}_B$, то обчислимо:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i n_i}{n} = \frac{3,7 \cdot 1 + 3,8 \cdot 22 + \ldots \cdot 4,4 \cdot 1}{200} = 4,004 \text{ мм}.$$

Для визначення точкової незміщеної статистичної оцінки для $D_Г$ обчислимо

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 n_i}{n} - \left(\bar{x}_B\right)^2 = 16,048 - 4,004^2 = 0,015984.$$

Тоді точкова незміщена статистична оцінка для $D_Г$ дорівнює:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{200}{200-1} \cdot 0,015984 = 0,01606 \text{ мм}^2.$$

Приклад 5.2. Граничне навантаження на сталевий болт x_i, що вимірювалось в лабораторних умовах, задано як інтервальний статистичний розподіл:

x_i, км/ мм^2	4,5-5,5	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-11,5	11,5-12,5	12,5-13,5	13,5-14,5
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Визначити точкові незміщені статистичні оцінки для $\bar{X}_Г = M(x), \quad D_Г$.

Розв'язання: Для визначення точкових незміщених статистичних оцінок $\bar{x}_B$, S^2 перейдемо від інтервального статистичного розподілу до дискретного, який набирає такого вигляду:

$x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Обчислюємо $\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i n_i}{n} = \frac{5 \cdot 40 + 6 \cdot 32 + \ldots \cdot 14 \cdot 4}{202} = 8,02$ кг/мм^2.

Отже, точкова незміщена статистична оцінка для $\bar{X}_Г = M(x)$, $\bar{x}_B = 8,02$ кг/мм^2.

Для визначення S^2 обчислимо D_B:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{8}\left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = 70,69 - 8,02^2 \approx 6,37 \text{ кг/мм}^2.$$

Тоді точкова незміщена статистична оцінка для $D_Г$ дорівнює:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{202}{202-1} \cdot 6,37 \approx 6,4 \text{ кг/мм}^2.$$

Існує ще такі поняття як *надійність* та *достатність*.

Надійною називають таку статистичну оцінку, яка ґрунтується на законі великих чисел, тобто із збільшенням кількості спостережень вона наближається до свого математичного сподівання.

Оцінку називають ***достатньою***, якщо вона забезпечує повноту використання всієї інформації про невідому характеристику генеральної сукупності, яка міститься у вибірці.

5.2. Методи визначення точкових статистичних оцінок параметрів генеральної сукупності

Метод моментів

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - вибірка з генеральної сукупності, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - реалізація вибірки.

Моментом порядку k називають середнє значення k -го степеня різниці $x_i - C$.

При $C = 0$ одержимо початковий момент порядку k вибірки:

$$\nu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k ,$$

зокрема $\nu_1^* = \overline{x}_B$.

При $C = \overline{x}_B$ одержимо центральний момент порядку k вибірки:

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^k ,$$

зокрема $\mu_1^* = D_B$

Оцінка одного параметра

Для оцінки одного параметра достатньо мати одне рівняння відносно цього параметра, тому прирівнюють початковий теоретичний момент першого порядку $\nu_1 = M(X)$ до початкового емпіричного моменту першого порядку $\nu_1^* = \overline{x}_B$:

$$\nu_1 = M(X) = \int x \cdot f(x,\theta)dx = \varphi(\theta) = \nu_1^* = \overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Розв'язавши рівняння $M(\theta) = \overline{x}_B$, одержують оцінку параметра θ, яка є функцією від $\overline{x}_B$, отже і від $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Оцінка двох параметрів

Нехай щільність розподілу $f(x,\theta_1,\theta_2)$ генеральної сукупності X визначається двома невідомими параметрами θ_1, θ_2. Для їх визначення потрібно мати два рівняння. Прирівняємо теоретичний та емпіричний початкові моменти першого порядку $\nu_1 = \nu_1^*$ і теоретичний та емпіричний центральні моменти другого порядку $\mu_2 = \mu_2^*$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} M(\theta_1) = \overline{x}_B \\ D(\theta_2) = D_B \end{cases}$$

одержимо оцінку параметрів θ_1, θ_2, які є функціями від $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Приклад 5.3. Випадкова величина X − час роботи елемента, вона має показниковий розподіл з параметром λ. Отримано статистичний розподіл середнього часу роботи 200 елементів.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

де x_i – середній час роботи елемента в годинах, частота n_i – кількість елементів, які пропрацювали в середньому x_i годин. Знайти методом моментів точкову оцінку параметра λ.

Розв'язання: Прирівнявши теоретичний і емпіричний моменти першого порядку і враховуючи, що для показникового закону $M\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}$, отримаємо $\lambda=\frac{1}{x}$. Отже, точковою оцінкою параметра λ є $\lambda^*=\frac{1}{x}$. Обчисливши $\overline{x}_B=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{6}n_i x_i=5$, одержимо $\lambda^*=\frac{1}{5}=0,2$.

Приклад 5.4. Число насінин буряну у пробах зерна має закон розподілу Пуассона. Результати вибірки із $N=130$ проб зерна занесені до таблиці. Знайти параметр λ по вибірці методом моментів.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	9	39	40	24	11	7

Розв'язання: Як відомо, параметр λ для закону Пуассона – це математичне сподівання, що за методом моментів оцінюється першим вибірковим моментом: $\lambda=\overline{x}_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}x_i n_i=\frac{1}{130}\cdot 270\approx 2,077$.

Приклад 5.5. Знайти методом моментів за вибіркою $x_1,x_2,\ldots,x_n$ точкові оцінки невідомих параметрів a та σ нормального розподілу, щільність якого

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{\left(2\sigma\right)^2}}.$$

Розв'язання: Для знаходження двох невідомих параметрів необхідно визначити два рівняння: прирівняємо початковий теоретичний момент першого порядку та центральний теоретичний момент другого порядку відповідними емпіричними моментами: $\nu_1^* = M_1, \mu_2^* = m_2$. Враховуючи, що $\nu_1^* = M(X), M_1 = \overline{x}_B, \mu_2^* = D(X), m_2 = D_B$, маємо:

$$\begin{cases} M(X) = \overline{x}_B \\ D(X) = D_B \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія нормального розподілу відомі, звідси отримаємо:

$$\begin{cases} M(X) = a = \overline{x}_B \\ D(X) = \sigma^2 = D_B \end{cases}$$

Тому знаходимо оцінки параметрів:

$$a = \overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum x_i n_i.$$

$$\sigma = \sqrt{D_B} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}.$$

Приклад 5.6. Нехай величина ξ має щільність $p(x) = \frac{1}{b-a}$, якщо $x \in (a;b)$ та $p(x) = 0$, якщо $x \notin (a;b)$. Проведена вибірка:

x_i	1	2	3	4	5	8	9
n_i	3	5	4	3	6	4	5

Використовуючи метод моментів знайти a та b.

Розв'язання: Прирівняємо математичне сподівання $M(X) = \frac{a+b}{2}$ та дисперсію $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ відповідними моментами та отримаємо систему рівнянь:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \nu_1^* = \frac{1}{n}\sum x_i n_i;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \mu_2^* = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i - \left(\frac{1}{n}\sum x_i n_i\right)^2.$$

Складемо таблицю для знаходження моментів:

x_i	1	2	3	4	5	8	9	сума
n_i	3	5	4	3	6	4	5	30
$x_i n_i$	3	10	12	12	30	32	45	144
$x_i^2 n_i$	3	20	36	48	150	256	405	918

$$\nu_1^* = \frac{1}{30} \cdot 144 = 4{,}8;$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{30} \cdot 918 - 4{,}8^2 = 7{,}56.$$

Підставимо знайдені значення до системи та отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 4{,}8; \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = 7{,}56. \end{cases} \qquad \begin{cases} a \approx 0{,}038; \\ b \approx 9{,}562. \end{cases}$$

Метод найменших квадратів

Згідно з цим методом статистичні оцінки визначаються з умови мінімізації суми квадратів відхилень варіант вибірки від статистичної оцінки θ^*.

Використовуючи метод найменших квадратів, можна, наприклад, визначити статистичну оцінку для $\overline{X}_Г = M(X)$. Для цього скористаємося функцією $u = \sum_{i=0}^{n} \left(x_i - \theta^*\right)^2 \cdot n_i$. Використовуючи умову екстремуму, дістанемо:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta^*} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \theta^*\right)^2 n_i = 0; \ \sum_{i=1}^{n} x_i n_i - \sum_{i=1}^{n} \theta^* n_i = 0, \text{ звідси } \theta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} = \overline{x}_B.$$

Отже для $\theta = \overline{X}_Г$ точковою статистичною оцінкою буде $\theta^* = \overline{x}_B$ — вибіркова середня.

Приклад 5.7. Експериментальні дані про значення змінних наведені у таблиці:

x_i	1	2	4	6	8
n_i	3	2	1	0,5	0

У результаті їх вирівнювання отримаємо функцію $y=\frac{5}{2x}$. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати табличні дані лінійно залежністю $y=ax+b$.

Розв'язання: Параметри a та b рівняння $y=ax+b$ за методом найменших квадратів потрібно знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}, \text{ де } i=\overline{1,n},\ n=5.$$

						сума
x_i	1	2	4	6	8	21
n_i	3	2	1	0,5	0	6б5
x_i^2	1	4	16	36	64	121
$x_i y_i$	3	4	4	3	0	14

Тоді, система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 121a + 21b = 14; \\ 21a + 5b = 6,5. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -0,405; \\ b = 3,003. \end{cases} \quad y = -0,405x + 3,003.$$

Метод максимальної правдоподібності

Цей метод посідає центральне місце в теорії статистичного оцінювання параметрів θ. На нього свого часу звертав увагу К. Гаусс, а розробив його Р. Фішер.

Нехай ознака генеральної сукупності X визначається лише одним параметром θ і має щільність імовірностей $f(x;\theta)$. У разі реалізації вибірки з варіантами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ щільність імовірностей вибірки буде такою:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta^*\right) = f\left(x_1, \theta^*\right) \cdot f\left(x_2, \theta^*\right) \cdot \ldots \cdot f\left(x_n, \theta^*\right). \quad (5.1)$$

Вона називається *функцією вірогідності* (правдопдібності) і позначається $L = L\left(\theta^*\right)$.

Суть цього методу полягає в тому, що, фіксуючи значення варіант $x_1, x_2, \ldots, x_n$, визначають таке значення параметра θ^*, при якому функція (5.1) максимізується. *Оцінкою максимальної вірогідності параметра* θ називають те значення параметра θ, при якому функція вірогідності досягає найбільшого значення при заданих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тобто є розв'язком рівняння $L\left(\theta^*\right) = \max L(\theta)$.

Так, наприклад, коли ознака генеральної сукупності X має нормальний закон розподілу, то функція максимальної правдоподібності набере такого вигляду:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*\right) = \frac{1}{\left(2\pi\theta_2^*\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1^*\right)^2}{2\theta_2^*}}. \tag{5.2}$$

Оскільки $L\left(\theta^*\right)$ і $\ln L\left(\theta^*\right)$ досягають найбільшого значення у одних і тих самих точках, то зручно від функції (5.2) перейти до її логарифма:

$$\ln f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*\right) =$$

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*\right) = -\frac{n}{2}\left(\ln\pi + \ln\theta_2^*\right) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1^*\right)^2}{2\theta_2^*}.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму для цієї функції, дістанемо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial\theta_1^*} = -\dfrac{1}{\theta_2^*}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1^*\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta_2^*} = -\dfrac{n}{2\theta_2^*} + \dfrac{1}{2\left(\theta_2^*\right)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \theta_1^*\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

З першого рівняння системи (5.3) дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -n\theta_1^* = 0,$$
$$\theta_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_B. \qquad (5.4)$$

з другого рівняння системи (5.3), враховуючи (5.4) маємо:

$$\theta_2^* \cdot n = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_B \right)^2,$$
$$\theta_2^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_B \right)^2 = D_B. \qquad (5.5)$$

Таким чином, для середнього генеральної сукупності $\overline{X}_Г = M\left(X\right)$ точковою статистичною оцінкою є вибіркове середнє $\overline{x}_B$, а для теоретичної дисперсії $D_Г$ - вибіркова дисперсія D_B.

Приклад 5.8. Зайти методом найбільшої правдоподібності оцінку параметра p біноміального розподілу $P_n\left(x_i\right) = C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k}$, якщо у n_1 незалежних випробувань подія A з'явилася m_1 раз та у n_2 незалежних випробувань подія A з'явилася m_2 раз.

Розв'язання: Складемо функцію правдоподібності:

$$L = P_{n_1}\left(m_1\right) \cdot P_{n_2}\left(m_2\right) = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot p^{m_1+m_2} \cdot \left(1-p\right)^{\left[\left(n_1+n_2\right)-\left(m_1+m_2\right)\right]}.$$

Про логарифмувавши функцію, отримуємо:

$$\ln L = \ln\left(C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}\right) + \left(m_1+m_2\right) \cdot \ln p + \left[\left(n_1+n_2\right) - \left(m_1+m_2\right)\right] \cdot \ln\left(1-p\right).$$

Обчислимо першу похідну за p:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{m_1+m_2}{p} - \frac{\left(n_1+n_2\right)-\left(m_1+m_2\right)}{1-p}.$$

Прирівняємо знайдену похідну до нуля та отримаємо:

$$\frac{m_1+m_2}{p}-\frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p}=0.$$

$$p=\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}.$$

У знайденій критичній точці p друга похідна від'ємна, це означає, що знайдена критична точка – є точкою максимуму, а отже її потрібно прийняти в якості оцінки за методом найбільшої правдоподібності невизначеної ймовірності p біноміального закону розподілу: $p^*=\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Приклад 5.9. Знайти методом найбільшої правдоподібності за вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точкову оцінку параметра p геометричного розподілу: $P(X=x_i)=(1-p)^{x_i-1}p$, де x_i - число випробувань, виконаних до появи події, p - ймовірність появи події в одному випробуванні.

Розв'язання: Функція правдоподібності має вигляд:

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=p^n\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}$$

Тоді,

$$\ln L(p)=\ln\left[\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}\right]=\ln\left[p^n\right]+\ln\left[\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}\right]=$$

$$=n\ln p+\sum_{i=1}^{n}\ln\left((1-p)^{x_i-1}\right)=n\ln p+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\ln(1-p)=$$

$$=n\ln p+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=n\ln p+\ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)=$$

$$=n\ln p+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i-n\ln(1-p).$$

Умова екстремуму:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p}=\left(n\ln p+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i-n\ln(1-p)\right)=n\frac{1}{p}+\frac{-1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\frac{-1}{1-p}=0,$$

$$n\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\frac{1}{p-1}=0.$$

Перетворимо:

$$\frac{1}{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)=-n\frac{1}{p};$$

$$-\frac{p-1}{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{n};$$

$$\frac{1}{p}-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-1;$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;$$

$$p=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}_B}.$$

Таким чином, у якості оцінки отримали: $p^*=\frac{1}{\overline{x}_B}.$

Приклад 5.10. Знайти оцінку максимальної правдоподібності параметрів a, σ нормального розподілу $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ за вибіркою $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Розв'язання: Складемо функцію правдоподібності

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,a,\sigma)=\frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}},$$

звідси $\ln L = -n\ln\sigma - \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^n - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2}{2\sigma^2}$.

Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = 0; \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - na = 0; \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_B; \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2 = D_B. \end{cases}$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку для визначення точки екстремуму:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{\sigma^2}; \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2}{\sigma^4}; \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \sigma} = -\frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)}{\sigma^3}.$$

Тоді

$$A = \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right|_{\substack{a = \overline{x}_B \\ \sigma = \sqrt{D_B}}} = -\frac{n}{D_B} < 0; \quad C = \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2}\right|_{\substack{a = \overline{x}_B \\ \sigma = \sqrt{D_B}}} = \frac{n}{D_B} - \frac{3\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}{D_B^2} = -\frac{2n}{D_B};$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \sigma}\right|_{\substack{a = \overline{x}_B \\ \sigma = \sqrt{D_B}}} = -\frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)}{\sqrt{D_B^3}} = 0, \quad \text{оскільки} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right) = 0.$$

Отже, $\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{n}{D_B}\right)\cdot\left(-\frac{2n}{D_B}\right) = \frac{2n^2}{D_B^2} > 0$ і $A < 0$, тому функція $\ln L$ в точці $\left(\overline{x}_B, D_B\right)$ має максимум. Для параметрів $\left(a, \sigma^2\right)$ оцінкою максимальної правдоподібності $\left(\overline{x}_B, D_B\right)$.

5.3. Граничні (Δ) та середні (Δ_c) похибки

Похибку репрезентативності можна подати як різницю між генеральними та вибірковими характеристиками досліджуваної сукупності: $\varepsilon = \overline{X}_{\Gamma} - \overline{x}_B$ або $\varepsilon = p - \omega$.

Про величину розбіжності між параметром і статистикою $\Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = t \cdot \Delta_c$, можна судити тільки з певною ймовірністю, від якої залежить величина t. Таким чином встановлюється зв'язок між *граничною похибкою* Δ, яка гарантується з деякою ймовірністю p, величино t та середньою похибкою вибірки $\Delta_c = \frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}$.

Із центральної граничної теореми Ляпунова випливає, що вибіркові розподіли статистик (при $n \geq 30$) будуть мати нормальний розподіл незалежно від того, який розподіл має генеральна сукупність. Отже, $P\left(\left|\overline{x}_B - \overline{X}_{\Gamma}\right| < t \cdot \Delta_c\right) \approx 2\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ - функція Лапласа.

Значення ймовірностей, які відповідають різним t, містяться в спеціальних таблицях: при $n \geq 30$ - в таблиці значень $\Phi(t)$ - функцій Лапласа, а при $n < 30$ - в таблиці розподілу t - Стьюдента. Невідоме значення σ_{Γ} при розрахунку похибки вибірки замінюється σ_B.

В залежності від способу відбору середня похибка вибірки визначається по різному:

Середня похибка (Δ_c)	Власне - випадковий відбір	
	повторний	безповторний
Для середньої	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$
Для частки	$\sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n}}$	$\sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

Де $\sigma^2 = D_B$ - вибіркова дисперсія; $\omega \cdot (1-\omega)$ - вибіркова дисперсія частки значень ознаки m; n - обсяг вибірки; N - обсяг генеральної сукупності; $\frac{n}{N}$ - частка досліджуваної сукупності; $1-\frac{n}{N}$ - поправка на скінченність сукупності.

З формули граничної похибки $\Delta = t \cdot \Delta_c$ та формул середніх похибок вибірки вивчаються формули необхідної чисельності вибірки для різних способів відбору:

Обсяг вибірки (n)	Власне - випадковий відбір	
	повторний	безповторний
Для середньої	$\frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$	$\frac{t^2 \cdot \sigma^2 \cdot N}{N \cdot \Delta^2 + t^2 \cdot \sigma^2}$
Для частки	$\frac{t^2 \cdot \omega \cdot (1-\omega)}{\Delta^2}$	$\frac{t^2 \cdot N \cdot \omega \cdot (1-\omega)}{N \cdot \Delta^2 + t^2 \cdot \omega \cdot (1-\omega)}$