Лекція 27. Характеристики випадкових функцій

Математичним сподіванням випадкової функції $\xi(t)$ $t \in T$, називається невипадкова числова функція $m_\xi(t)$, яка при довільному значенні $t_0 \in T$ дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу $\xi(t_0)$ випадкового процесу:

$$m_x(t_0) = M\left[\xi(t_0)\right].$$

Центрованим випадковим процесом називається різниця між випадковим процесом та його математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t),$$

Будь-який випадковий процес можно як сукупність регулярної складової (математичного сподівання) та центрованої випадкової складової

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \overset{\circ}{\xi}(t).$$

Якщо переріз $\xi(t)$ - випадкова величина дискретного типу зі значеннями $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$, тобто випадковий процес зі дискретними значеннями та має одновимірний закон розподілу:

$\xi(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$\cdots$	$x_i(t)$	$\cdots$
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$\cdots$	$p_i(t)$	$\cdots$

то
$$m_\xi(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i(t) \cdot p_i(t).$$

Якщо значення перетинів випадкового процесу не залежать від аргументу t, від t залежать лише їх ймовірності, тобто закон розподілу має вигляд:

$\xi(t)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$\cdots$	$p_i(t)$	$\cdots$

то у цьому випадку $m_\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i(t)$.

Якщо перетин випадкового процесу $\xi(t)$ при заданому значенні t є неперервною випадковою величиною, щільність якої $f_1(x,t)$, то його математичне сподівання обчислюють за формулою:

$$m_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x,t)\,dx.$$

Властивості математичного сподівання

1. $M\left[c(t)\right] = m_c(t) = c(t)$.

2. $M\left[\overset{\circ}{\xi}(t)\right] = M\left[\xi(t) - m_\xi(t)\right] = M\left[\xi(t)\right] - m_\xi(t) = 0$.

3. $M\left[c(t)\cdot\xi(t)\right] = c(t)\cdot M\left[\xi(t)\right] = c(t)\cdot m_\xi(t)$.

4. $M\left[\xi(t) + \eta(t)\right] = m_\xi(t) + m_\eta(t)$.

У частковому випадку, якщо $\xi(t)$ – випадкова функція, $\eta(t)$ – невипадкова функція, то $M\left[\xi(t)+\eta(t)\right] = M\left[\xi(t)\right] + M\left[\eta(t)\right] = m_\xi(t) + \eta(t)$.

5. $M\left[\xi(t)\cdot\eta(t)\right] = m_\xi(t)\cdot m_\eta(t)$.

Дисперсія випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$ називається невід'ємна невипадкова числова функція $D_\xi(t)$, яка при кожному фіксованому значенні $t_0 \in T$ параметра $t \in T$ дорівнює дисперсії відповідного перерізу цього процесу $\xi(t_0)$: $D_\xi(t_0) = D\left[\xi(t_0)\right]$. Отже,

$$D_\xi(t) = D\left[\xi(t)\right] = \sigma_\xi^2(t).$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіяння можливих реалізацій цього процесу навколо математичного сподівання.

$$D_\xi(t) = M\left[\overset{\circ}{\xi}{}^2(t)\right].$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу (флуктуацією, стандартом процесу) називають арифметичний корінь із дисперсії випадкового процесу:

$$\sigma_\xi(t) = \sigma\left[\xi(t)\right] = \sqrt{D_\xi(t)}\,.$$

Якщо переріз $\xi(t)$ - випадкова величина дискретного типу зі значеннями $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$, тобто випадковий процес зі дискретними значеннями та має одновимірний закон розподілу (1.1):

$\xi(t)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$\cdots$	$p_i(t)$	$\cdots$

то дисперсія: $D_\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{k}\left[x_i - m_\xi(t)\right]^2 \cdot p_i(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i(t) - m_\xi^2(t)$

Якщо переріз випадкового процесу $\xi(t)$ з неперервним значенням та має щільність якої $f_1(x,t)$, то дисперсію визначають за формулою:

$$D_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x - m_\xi(t)\right]^2 \cdot f_1(x,t)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x,t)dx - m_\xi^2(t)$$

Властивості дисперсії

1. $D_\xi(t) > 0$.

2. $D\left[c(t)\right] = D_c(t) = 0$.

3. $D\left[\xi(t) + c(t)\right] = D_\xi(t)$.

4. $D\left[\xi(t) \cdot c(t)\right] = c^2(t) \cdot D_\xi(t)$.

5. $D_\xi(t) = M\left[\xi^2(t)\right] - m_\xi^2(t)$.

6. $D\left[\xi(t) + \eta(t)\right] = D_\xi(t) + D_\eta(t)$.

Для того щоб врахувати стохастичний зв'язок між різними перерізами випадкового процесу, використовують *кореляційні функції*.

Автокореляційною функцією випадкового процесу $\xi(t)$ називається невипадкова функція $K_\xi(t_1,t_2)$, яка при кожній парі значень t_1 і t_2 аргументу t є кореляційним моментом відповідних перерізів цього процесу:

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right]-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right].$$

Префікс «авто» означає, що йдеться що йдеться про один ВП $\xi(t)$ з різними перерізами (значеннями) в моменти часу t_1, t_2. У разі вивчення двох чи більше ВП сумісно префікс відкидається й додається термін "взаємно".

Властивості автокореляційної функції (а.к.ф.)

1. $K_\xi(t_1,t_2)=K_\xi(t_2,t_1)$.
2. $K_\xi(t,t)=D_\xi(t)$.
3. $K_{\xi+c}(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2)$.
4. $K_{\xi c}(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2)\cdot c(t_1)\cdot c(t_2)$.
5. $\left|K_\xi(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_\xi(t_1)\cdot D_\xi(t_2)}$.

У теорії випадкових процесів аналогом коефіцієнт кореляції характеристики є нормована автокореляційна функція.

Нормованою автокореляційною функцією $r_\xi(t_1,t_2)$ випадкового процесу $\xi(t)$ називається невипадкова функція двох аргументів t_1, t_2 яка при кожній фіксованій парі їх значень дорівнює коефіцієнту автокореляції відповідних перерізів

$$r_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)}.$$

Враховуючи, що

$$\sigma_\xi(t_1)=\sqrt{D_\xi(t_1)}=\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)} \text{ та } \sigma_x(t_2)=\sqrt{D_x(t_2)}=\sqrt{K_x(t_2,t_2)}$$

отримаємо: $r_\xi(t_1,t_2)=\dfrac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_\xi(t_2,t_2)}}$.

Приклад 1.12. Знайти нормовану автокореляційну функцію випадкової функції $\xi(t)$, якщо відома її автокореляційна функція $K_\xi(t_1,t_2)=8\cdot\cos(t_2-t_1)$.

Розв'язання: За означенням

$$r_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_\xi(t_2,t_2)}}.$$

За умовою $K_\xi(t_1,t_2)=8\cdot\cos(t_2-t_1)$, тоді

$$K_\xi(t_1,t_1)=8\cdot\cos(t_1-t_1)=8,\ K_\xi(t_2,t_2)=8\cdot\cos(t_2-t_2)=8.$$

Отже, $r_\xi(t_1,t_2)=\dfrac{8\cdot\cos(t_2-t_1)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\cos(t_2-t_1)$.

Таким чином, $r_\xi(t_1,t_2)=\cos(t_2-t_1)$.

Властивості нормованої автокореляційної функції

1. $r_\xi(t_1,t_2)=r_\xi(t_2,t_1)$.

2. $|r_\xi(t_1,t_2)|\le 1$.

3. $|r_\xi(t,t)|=1$.

Щоб описати систему з двох випадкових функцій, крім зазначених характеристик, використовують також взаємну кореляційну функцію.

Нехай $\xi(t_1)$ та $\eta(t_2)$ є перетинами випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ при відповідних значеннях аргументу $t=t_1$, $t=t_2$.

Взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називається невипадкова функція $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 і t_2, значення якої є кореляційним моментом відповідних перерізів цих випадкових процесів, тобто

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right).$$

Корельованими називаються два стохастичні процеси, взаємна кореляційна функція яких тотожно не дорівнює нулю: $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)\neq 0$.

Некорельованими називаються два стохастичні процеси, взаємна кореляційна функція яких тотожно дорівнює нулю: $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=0$.

Властивості взаємної кореляційної функції

1. $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=R_{\eta\xi}(t_2,t_1)$

2. $R_{\xi+\varphi,\,\eta+\psi}(t_1,t_2)=R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - невипадкові функції.

3. $R_{\xi\varphi,\,\eta\psi}(t_1,t_2)=\varphi(t)\cdot\psi(t)\cdot R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$.

4. $\left|R_{\xi\eta}(t_1,t_2)\right|\leq\sqrt{D_\xi(t_1)\cdot D_\eta(t_2)}$.

5. $R_\nu(t_1,t_2)=R_\xi(t_1,t_2)+R_\eta(t_1,t_2)+R_{\xi\eta}(t_1,t_2)+R_{\eta\xi}(t_2,t_1)$.

Наслідки:

1. Якщо $t_1=t_2=t$, то $D_\nu(t)=D_\xi(t)+D_\eta(t)+2\cdot R_{\xi\eta}(t,t)$.

2. Якщо випадковий процес $\xi(t)$ і $\eta(t)$ некорельовані, то

$$R_\nu(t_1,t_2)=R_\xi(t_1,t_2)+R_\eta(t_1,t_2),\; D_\nu(t)=D_\xi(t)+D_\eta(t)$$

Нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називають невипадкову функцію двох незалежних аргументів t_1 і t_2, яка визначається за формулою:

$$\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_\eta(t_2,t_2)}}=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\eta(t_2)}=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_\xi(t_1)\cdot D_\eta(t_2)}}.$$

Нормована взаємна кореляційна функція має такі самі властивості, що й взаємна кореляційна функція, окрім однієї: модуль нормованої взаємної кореляційної функції не перевищує одиниці: $\left|\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)\right|\leq 1$.