Лекція 30. Дискретний марківський процес з неперервним часом

Випадковий процес, що протікає в системі, називається процесом з безперервним часом, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

Нехай $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – стани системи S.

Ймовірність події $S_i(t)$ складається в тому, що система в момент часу t перебуває в стані S_i, називається ймовірністю i-го стану системи в момент часу t.

$$p_i(t) = p\left[S_i(t)\right], i = \overline{1,n}, t \geq 0 \quad (30.1)$$

Ймовірність стану $p_i(t)$ є ***ймовірнісною функцією часу*** $t \geq 0$.

Дискретний марківський процес з безперервним часом вважається повністю визначеним, якщо знайдені всі ймовірності стану $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Події $S_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. є несумісними, утворюють повну групу подій і

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1 \quad (30.2)$$

Нехай $P_{ij}(t)$ ймовірності переходу системи S у момент часу t зі стану S_i в стан S_j при $i \neq j$ і ймовірності затримки, якщо $i = j$.

Якщо в момент часу t система знаходиться в i-му стані, то можна вважати, що в цей момент часу відбулась затримка стану i, тобто $P_{ii}(t) = 1$.

З урахуванням виконання нормувальної умови $P_{i1}(t) + P_{i2}(t) + \ldots + P_{in}(t) = 1$ ймовірність переходу системи S в інший j-й стан точно в момент часу t дорівнює нулю $P_{ij}(t) = 0, i \neq j$.

Нехай $p_{ij}(t; \Delta t)$, $i \neq j$, $\Delta t > 0$ ймовірність того, що система S, яка знаходиться в момент часу t в стані S_i, за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$ перейде в інший $(i \neq j)$ стан (зі стану S_i в стан S_j).

Рівність $p_{ij}(t; \Delta t) = 0$, $(i \neq j)$ буде виконуватися якщо:

- система S в момент часу t не перебуває в стані S_i;

- система S в момент часу t перебуває в стані S_i, але за час Δt $\left(\left[t, t+\Delta t\right]\right)$ вона перейшла в стан S_k, який відмінний від стану S_j: $j \neq k$;

- система S в момент часу t перебуває в стані S_i і протягом проміжку часу Δt залишається в цьому ж стані: $p_{ii}\left(t;\Delta t\right)=0, i=\overline{1,n}$.

Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану S_i в стан S_j в момент часу t називається величина

$$\lambda_{ij}\left(t\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}\left(t;\Delta t\right)}{\Delta t}. \tag{30.3}$$

З цієї рівності маємо $p_{ij}\left(t;\Delta t\right)\approx\lambda_{ij}\left(t\right)\cdot\Delta t; \Delta t\to 0$ (30.4)

Отже, в загальному випадку $\lambda_{ij}\left(t\right)$ є функцією від t; $\lambda_{ij}\left(t\right)$ набуває невід'ємних значень, на відміну від $p_{ij}\left(t;\Delta t\right)$, може приймати значення, які більші за 1; $\lambda_{ij}\left(t\right)=0$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 30.1. Щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}\left(t\right)$ системи S зі стану S_i у стан S_j у момент часу t під впливом пуассонівського потоку Π_{ij} дорівнює інтенсивності $\lambda\left(t\right)$ потоку Π_{ij}.

Означення. Процес Маркова з дискретними станами і неперервним часом називається ***однорідним***, якщо для будь-яких i та j, $i\neq j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}\left(t\right)$ системи зі стану S_i до стану S_j не залежить від часу t, тобто $\lambda_{ij}\left(t\right)=\lambda_{ij}=const$.

Якщо ж хоча б для однієї пари $\left(i;j\right)$; $i\neq j$ щільність ймовірності переходу $\lambda_{ij}\left(t\right)$ залежить від t, то процес називається ***неоднорідним.***

Зокрема, на рис. 30.1 показано граф системи, у якій відбувається процес з неперервним часом. Відсутність стрілки між станами S_2 і S_1 вказує на те, що щільність ймовірності відповідного переходу дорівнює нулю: $\lambda_{21}=0$. Аналогічно маємо $\lambda_{31}=0, \lambda_{14}=0, \lambda_{43}=0$.

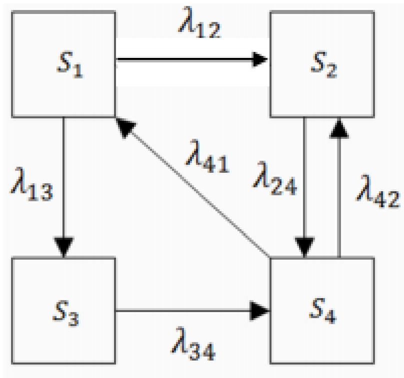

Рис. 30.1

Щільності ймовірностей переходів λ_{ij}, як і перехідні ймовірності p_{ij} у випадку ланцюга Маркова, можна записати у вигляді квадратної матриці

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

де $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \ldots = \lambda_{nn} = 0$.

30.1 Диференціальні рівняння Колмогорова

Нехай досліджується деяка система S, яка в кожний фіксований момент часу $t = t_i$ і може перебувати в одному з несумісних станів $S_1, S_2, ..., S_n$

Для опису випадкового процесу, який відбувається в системі, використовують ймовірності станів системи (30.1): $p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)$.

Якщо для кожної пари станів S_i і S_j відомі інтенсивності пуассонівського потоку подій λ_{ij}, то можна скласти диференціальні рівняння для ймовірностей станів.

Теорема 30.2. Ймовірності станів $p_i(t)$, де $i=\overline{1,n}$ системи S, у якій відбувається однорідний марковський процес з неперервним часом, є розв'язком системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)\cdot p_i(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t). \qquad (30.5)$$

Якщо розглядається однорідний процес Маркова, тобто λ_{ij} не залежить від t, то система (30.5) є системою n звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо ж процес Маркова є неоднорідним, тобто хоча б один із коефіцієнтів λ_{ij} залежить від t, то маємо систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Правило І. Для того, щоб скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова *за розміченим графом станів*, необхідно для кожної функції $p_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ у лівій частині рівняння записати похідну $\frac{dp_i(t)}{dt}$, а в правій – добуток ймовірності $p_i(t)$ стану s_i, взятої зі знаком "–", на суму щільностей ймовірностей λ_{ij} переходу зі стану s_i в інші стани s_j, плюс суму добутків ймовірностей всіх станів $p_j(t)$, із яких можливий перехід до стану s_i, на щільності ймовірностей відповідних переходів λ_{ji}, тобто

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}p_j(t).$$

Зокрема, для розміченого графа станів, зображеного на рис. 30.1, система диференціальних рівнянь Колмогорова матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1(t) + \lambda_{41}p_4(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{42}p_4(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}p_3(t) + \lambda_{13}p_1(t), \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{42})p_4(t) + \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{34}p_3(t). \end{cases}$$

Правило II. Для того, щоб скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова *за матрицею щільностей ймовірностей переходу,* необхідно для кожної функції $p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ у лівій частині рівняння записати похідну $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$, а в правій – добуток ймовірності $p_i(t)$ стану s_i, взятої зі знаком “–”, на суму $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ елементів λ_{ij} i-го рядка матриці Λ, плюс суму $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t)$ добутків $\lambda_{ji} p_j(t)$ елементів i-го стовпця матриці Λ на відповідні їм ймовірності $p_j(t)$, тобто

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} \right) p_i(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j(t).$$

Зокрема, система диференціальних рівнянь Колмогорова для матриці щільностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -5p_1(t) + 6p_2(t) + 1{,}5p_3(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -6p_2(t) + 2p_1(t) + 4p_3(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -5{,}5p_3(t) + 3p_1(t). \end{cases}$$

Зауважимо, що оскільки для довільного t виконується умова $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$, то будь-яку ймовірність $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ можна виразити через інші ймовірності, що дозволить зменшити на одне число рівнянь системи (30.5).

Для того, щоб розв'язати систему (30.5), потрібно задати початковий розподіл ймовірностей

$$p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0) \qquad (30.6)$$

сума яких дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$.

Зокрема, якщо в початковий момент $t = 0$ система перебувала у стані S_1, тобто $p_1(0) = 1$, то всі інші ймовірності (30.6) дорівнюють нулю:

$$p_2(0) = p_3(0) = ... = p_n(0) = 0.$$

Приклад 30.1. Досліджується надійність роботи лічильника банкнот, який може перебувати в таких трьох станах: S_1 – лічильник справний, але не експлуатується; S_2 – лічильник справний та експлуатується; S_3 – лічильник несправний. Будемо вважати, що лічильник може вийти з ладу під час його експлуатації, при цьому негайний ремонт лічильника не відбувається. Зауважимо, що проміжок часу, протягом якого досліджується робота лічильника, невеликий, а щільності ймовірностей переходів практично не залежать від часу. Розмічений граф станів системи має вигляд (рис. 30.2).

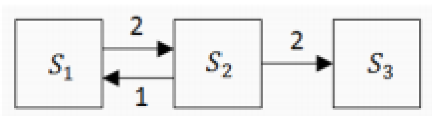

Рис. 30.2

Потрібно знайти ймовірності станів лічильника в момент часу $t = 1$, якщо в початковий момент часу, при $t = 0$, лічильник був справним, але не експлуатувався.

Розв'язання:

За розміченим графом станів системи складемо матрицю щільностей ймовірностей переходів, яка матиме вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ймовірності станів системи $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ як функції часу t. Складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -3p_2(t) + 2p_1(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = 2p_2(t). \end{cases}$$

Оскільки в початковий момент часу (при $t = 0$) лічильник був справний, але не експлуатувався, то $p_1(0) = 1, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0.$

Перші два рівняння системи не містять функції $p_3(t)$, тому розглянемо їх як систему двох рівнянь з двома невідомими функціями $p_1(t)$ і $p_2(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} + 2p_1(t) - p_2(t) = 0, \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} - 2p_1(t) + 3p_2(t) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді $p_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $p_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda t}$, де γ_1, γ_2, λ – невідомі сталі, які потрібно знайти. Після підстановки значень $p_1(t)$, $p_2(t)$ в систему і виконання перетворень отримаємо лінійну однорідну систему двох алгебраїчних рівнянь з невідомими γ_1 і γ_2:

$$\begin{cases}(2+\lambda)\gamma_1-\gamma_2=0,\\ -2\gamma_1+(3+\lambda)\gamma_2=0.\end{cases}$$

Система має ненульовий розв'язок, якщо

$$\begin{vmatrix}2+\lambda & -1\\ -2 & 3+\lambda\end{vmatrix}=0.$$

звідки

$$\lambda^2+5\lambda-4=0,$$

$$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=-1.$$

Якщо $\lambda=\lambda_2=-4$, то система має вигляд

$$\begin{cases}-2\gamma_1-\gamma_2=0,\\ -2\gamma_1-\gamma_2=0,\end{cases}$$

звідки $\gamma_2=-2\gamma_1$. Зокрема, якщо $\gamma_1=1$, то $\gamma_2=-2$. Отже,

$$p_1^{(1)}(t)=e^{-4t},\ p_2^{(1)}(t)=-2e^{-4t}.$$

Аналогічно, якщо $\lambda=\lambda_1=-1$, то система має вигляд

$$\begin{cases}\gamma_1-\gamma_2=0,\\ -2\gamma_1+2\gamma_2=0,\end{cases}$$

звідки $\gamma_2=\gamma_1$. Зокрема, якщо $\gamma_1=1$, то $\gamma_2=1$. Отже,

$$p_1^{(2)}(t)=e^{-t},\ p_2^{(2)}(t)=e^{t}.$$

знайдемо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases}p_1(t)=C_1p_1^{(1)}(t)+C_2p_1^{(2)}(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-t},\\ p_2(t)=C_1p_2^{(1)}(t)+C_2p_2^{(2)}(t)=-2C_1e^{-4t}+C_2e^{-t}\end{cases}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

знайдемо частинний розв'язок системи
який задовольняє початкові умови $p_1(0)=1,\ p_2(0)=0$:

$$\begin{cases} p_1(0)=C_1+C_2=1, \\ p_2(0)=-2C_1+C_2=0, \end{cases}$$

звідки $C_1=\frac{1}{3},\ C_2=\frac{2}{3}$. Підставивши , отримаємо
частинний розв'язок системи , що задовольняє початкові умови:

$$\begin{cases} p_1(t)=\frac{1}{3}e^{-4t}+\frac{2}{3}e^{-t}, \\ p_2(t)=-\frac{2}{3}e^{-4t}+\frac{2}{3}e^{-t}. \end{cases}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} p_i(t)=1$, то

$$p_3(t)=1-\left(p_1(t)+p_2(t)\right)=\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t}+1.$$

Зауважимо, що $p_3(t)$ можна було також знайти з третього рівняння системи

Таким чином,

$$\begin{cases} p_1(t)=\frac{1}{3}e^{-4t}+\frac{2}{3}e^{-t}, \\ p_2(t)=-\frac{2}{3}e^{-4t}+\frac{2}{3}e^{-t}, \\ p_3(t)=\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t}+1. \end{cases}$$

Отже, ймовірності станів системи S у момент часу $t=1$ дорівнюють

$$p_1(1)=\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{2}{3}e^{-1}\approx 0{,}252,$$

$$p_2(1)=-\frac{2}{3}e^{-4}+\frac{2}{3}e^{-1}\approx 0{,}234,$$

$$p_3(1)=\frac{1}{3}e^{-4}-\frac{4}{3}e^{-1}+1\approx 0{,}514.$$

Таким чином, при заданому розміченому графі станів системи (див. рис. 2) і початкових умовах $p_1(0)=1$, $p_2(0)=0$, $p_3(0)=0$ ймовірність того, що в момент часу $t=1$ лічильник

- був справним, але не експлуатувався, наближено дорівнює $0{,}252$;
- був справним та експлуатувався, наближено дорівнює $0{,}234$;
- був несправний, наближено дорівнює $0{,}514$.

Отже, для заданих умов якість роботи лічильника на момент часу $t=1$ потребує покращення.

30.2 Стаціонарний режим. Граничні ймовірності станів системи

У випадку застосування теорії марковських процесів до дослідження фінансово-економічних систем розглядаються процеси, які відбуваються в системах протягом достатньо великого проміжку часу, тобто коли початкові умови вже не мають значного впливу на перебіг процесу. За таких умов виникає питання про граничні ймовірності станів системи $p_i(t)$ при $t \to \infty$. В окремих випадках у системі може встановитися *граничний стаціонарний режим процесу*, коли ймовірності станів системи не залежать ні від часу, ні від початкового розподілу ймовірностей.

Нехай у системі S з дискретними станами $S_1, S_2, ..., S_n$ відбувається марковський процес із неперервним часом. Якщо всі потоки подій, що переводять систему зі стану в стан, є найпростішими (стаціонарними пуассонівськими потоками зі сталими інтенсивностями λ_{ij}), в окремих випадках існують *граничні (фінальні) ймовірності станів*

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{30.7}$$

які не залежать від того, у якому стані знаходилася система S у початковий момент. Це означає, що в системі встановився *граничний стаціонарний режим*, при якому система переходить зі стану в стан, але ймовірності станів вже не змінюються.

Означення. Ймовірності станів системи в граничному стаціонарному режимі називаються граничними (фінальними, стаціонарними) ймовірностями і позначаються $p_1, p_2, ..., p_n$ а вектор $p = (p_1, p_2, ..., p_k, ...)$ координатами якого є граничні ймовірності, називається граничним (фінальним, стаціонарним) вектором.

Для марковського процесу з неперервним часом умови існування граничного стаціонарного режиму визначає наступна теорема.

Теорема 30.2. Якщо число станів системи S скінченне, система є ергодичною, потоки подій, під впливом яких відбувається перехід системи зі стану в стан, є найпростішими, то існують граничні ймовірності станів, які не залежать ні від часу, ні від початкового стану системи S.

Якщо граничні ймовірності (30.7) існують, то для них виконується *нормувальна умова*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (30.8)$$

Нагадаємо, що система називається *ергодичною*, якщо з будь-якого стану за скінченне число кроків може перейти в будь-який інший стан.

Наприклад, граф станів ергодичної системи показано на рис. 30.3, а на рис. 30.4 – граф неергодичної системи.

Рис. 30.3.

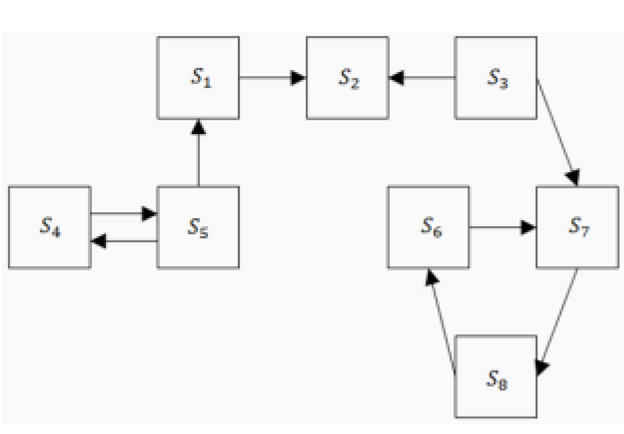

Рис. 30.4.

Граничну ймовірність p_i можна розглядати як середній відносний час перебування системи S у стані S_i після того, як у системі встановився граничний стаціонарний режим.

Граничні ймовірності станів (якщо вони існують) можна знайти із системи диференціальних рівнянь Колмогорова (30.5), яка перетворюється в систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих p_i, якщо врахувати, що похідні сталих дорівнюють нулю:

$$-\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij}\right) p_i + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j = 0; \quad i = \overline{1,n} \qquad 30.9$$

Однорідна система (30.9) має безліч ненульових розв'язків $(p_1, p_2, ..., p_n)$ З цих розв'язків потрібно знайти той, що задовольняє *нормувальну умову* (30.8).

Запишемо систему (30.9) у вигляді

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} p_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j; \quad i = \overline{1,n} \qquad (30.10)$$

Скласти дану систему (30.10) можна, користуючись таким правилом.

Правило I. Сума $\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ij} p_i$ добутків щільностей ймовірностей переходів λ_{ij} зі стану S_i в інші стани S_j на граничні ймовірності p_i стану S_i дорівнює сумі $\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \lambda_{ji} p_j$ добутків щільностей ймовірностей переходів λ_{ji} зі стану S_j в стан S_i на граничні ймовірності p_j станів S_j, тобто для кожного стану сумарний вихідний потік ймовірності дорівнює сумарному вхідному потоку.

Наприклад, для системи S, розмічений граф станів якої показано на рис. 30.5.

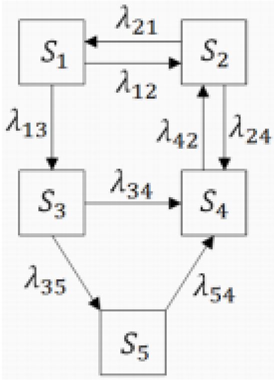

Рис. 30.5.

система рівнянь для фінальних ймовірностей станів має вигляд

$$\begin{cases} (\lambda_{12}+\lambda_{13})\,p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ (\lambda_{21}+\lambda_{24})\,p_2 = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4, \\ (\lambda_{34}+\lambda_{35})\,p_3 = \lambda_{13}p_1, \\ \lambda_{42}p_4 = \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3 + \lambda_{54}p_5, \\ \lambda_{54}p_5 = \lambda_{35}p_3. \end{cases}$$

Систему (30.9) можна скласти за матрицею щільностей ймовірностей переходів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1i} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2i} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \cdots & \lambda_{ii} & \cdots & \lambda_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{ni} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Правило II. Для того, щоб скласти i-те рівняння системи (30.10) за матрицею Λ, необхідно суму $\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{n} \lambda_{ij}p_i$ добутків елементів i-го рядка матриці Λ на граничну ймовірність p_i дорівняти до суми $\sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{n} \lambda_{ji}p_j$ добутків елементів i-го стовпця матриці Λ на відповідні граничні ймовірності p_j.

Зауважимо, що якщо система S зі скінченним числом станів, в якій відбувається однорідний марковський процес із неперервним часом, не є ергодичною, то для неї також існують граничні ймовірності станів, але вони залежать від початкового розподілу ймовірностей.