Лекція 28. Класифікація випадкових процесів

За аналогією з теорією випадкових величин у теорія ймовірності, якщо система S в момент t описується однією випадковою величиною $\xi(t)$, то процес називають ***скалярним випадковим процесом*** $\xi(t)$. Якщо ж стан системи S у момент t описується декількома ВВ $\xi_1(t),\xi_2(t),\ldots,\xi_k(t)$, то відповідний процес ***називають векторним ВП*** $\xi(t)$, або ***системою ВП*** із k складовими, або k ***- вимірним ВП***.

В залежності від характеру зміни аргументу і будови фазового простору усі випадкові процеси ділять на чотири класи (групи):

1. Дискретний процес (дискретне стан) з дискретним часом.
2. Дискретний процес з неперервним часом.
3. Неперервний процес (неперервний стан) з дискретним часом.
4. Неперервний процес з неперервним часом.

Елементарною класифікацією випадкових процесів є класифікація за ознаками часу та стану.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається ***процесом з дискретним часом***, якщо система, у якій він відбувається, може змінювати свої стани тільки у визначені, наперед відомі моменти часу $t_1,t_2,\ldots,t_n$ які називають ***кроками*** (або ***етапами***) цього процесу. Область визначення (існування) ВП – множина T – може бути скінченною або зліченною.

ВП $\xi(t)$ із дискретним часом називають також ***випадковою послідовністю***: $\xi_1(t),\xi_2(t),\ldots,\xi_k(t)$, або ***випадковим ланцюгом***. Часто в позначенні такого ВП моменти часу замінюють їх індексами: $\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(k)$.

Перетини випадкового процесу з дискретним часом утворюють послідовність випадкових величин, тому випадкові процеси з дискретним часом називають також ***випадковою послідовністю або часовими рядами***.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається ***процесом з неперервним часом***, якщо переходи системи із стану в стан можуть відбуватись у довільний момент часу обраного періоду. Для процесу з неперервним часом множина T − множина моментів часу, коли система змінює свої стани, є незліченою, тобто T − деякий проміжок дійсної осі.

Випадковий процес $\xi(t)$, який задано в деякій системі S, називається ***процесом з дискретними станами***, якщо у довільний момент часу $t \in T$ множина станів є скінченою або зліченою множиною, іншими словами, якщо його переріз у будь-який момент t описується однією дискретною ВВ – $\xi(t)$ в одновимірному випадку та k- вимірною ВВ – $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_k(t)$ – в багатовимірному випадку.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається ***процесом з неперервними станами***, якщо множина можливих станів системи S незліченна; іншими словами, якщо переріз процесу в будь -який момент часу t описується неперервною (або мішаною) випадковою величиною – в одновимірному випадку та векторною ВВ – у багатовимірному випадку (неперервною або мішаною).

Коли спостерігаються випадкові процеси, перебіг яких у часі приблизно однаковий, тобто середнє значення процесу залишається сталим, а його характеристики не змінюються. Такі випадкові процеси називаються ***стаціонарними***.

Стаціонарні процеси є частковим випадком більш широкого класу – нестаціонарних процесів. У ***нестаціонарних випадкових процесах*** характеристики змінюються в часі.

Оскільки математичний опис СВП та їхнє перетворення значно спрощуються, порівняно з нестаціонарними процесами, широкого застосування на практиці набула теорія СВП (теорія стаціонарних ВФ).

Стаціонарні ВП (однорідні у часі) – ВП, статистичні (усереднені) характеристики яких не змінюються з часом, тобто незмінні (інваріантні) відносно часових "зсувів": $(t \to t+\tau) \Rightarrow (\xi(t) \to \xi(t+\tau))$. Інакше кажучи, якщо розглядати дві довільні пари перерізів: $(\xi(t_1), \xi(t_2))$ і $(\xi(t_1+\tau), \xi(t_2+\tau))$, то їх розподіли будуть однакові.

Випадкова функція $\xi(t)$ називається стаціонарною, якщо вона має:

1) $m_\xi(t) = const$;

2) $D_\xi(t) = K_\xi(0) = const$;

3) $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi\eta}(t_2 - t_1) = K_{\xi\eta}(\tau)$, де $\tau = t_2 - t_1$.

Виразним прикладом стаціонарного $\xi(t)$ є гармонічне коливання з випадковими параметрами: $\xi(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, де φ – випадкова початкова фаза, рівномірно розподілена на інтервалі $(-\pi; \pi)$; $A(t)$ – випадкова амплітуда, яка не залежить від φ і є, у свою чергу, стаціонарним ВП.

Застосовують стаціонарні ВП при вивченні реальних явищ: пульсацій струму чи напруги в електричному колі (електричний "шум"), коливання виробничого процесу в економіці тощо.

Якщо математичне сподівання мінливе, тобто ***процес не є стаціонарним***, то можна перейти до центрованого процес $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ та розглядати його як стаціонарний.

Властивості кореляційної функції СВФ:

1. $K_\xi(\tau) = K_\xi(-\tau)$.

2. $|K_\xi(\tau)| \le K_\xi(0)$

Для оцінювання ступеня залежності між розрізами СВФ можна також використовувати нормовану автокореляційну функцію СВП, яка є невипадковою функцією аргументу τ: $r_\xi(\tau) = \dfrac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)} = \dfrac{K_\xi(\tau)}{D_\xi(t)}$.

Оскільки $D_\xi(t)=K_\xi(t,t)=K_\xi(0)=const$, то $r_x(0)=1$. Отже, абсолютна величина нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці та має місце нерівність $|r_\xi(\tau)|\le 1$.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *стаціонарним у вузькому розумінні*, статистичні характеристики якого незмінні в часі.

Випадковий процес називається *стаціонарним у широкому розумінні*, якщо його математичне сподівання не залежить від часу та є сталою величиною, а автокореляційна функція залежить лише від різниці аргументів $t_2-t_1=\tau$.

Нестаціонарні ВП

Серед нестаціонарних випадкових процесів, які часто використовуються в дослідженнях, зазначимо процеси з незалежними приростами (неоднорідні та однорідні).

Випадковий процес $\xi(t)$, $t\in T$, є ***процесом з незалежними приростами (ВПн.п.)***, якщо для довільних двох різних значень t, $t+\tau\in T$ перерізи $\xi(t)$ і $\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]$ є незалежними випадковими величинами.

Процес з незалежними приростами $\xi(t)$, $t\in T$ називається ***однорідними процесами з незалежними приростами***, якщо для довільних двох різних значень t, $t+\tau$ часового параметра $(t, t+\tau\in T)$ закон розподілу ймовірностей випадкової величини $\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]$ не залежить від конкретного значення параметра часу t, а залежить лише від довжини часового приросту τ.