Лекція 29. МАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Випадковий процес з дискретними станами ***називається марковським*** або процесом без наслідків, якщо в будь-який момент часу його характеристики залежать лише від поточного стану і не залежать від того як система у цей стан потрапила.

Розрізняють два типи марковських випадкових процесів: з дискретним часом і з неперервним часом. ***Марковським випадковим процесом з дискретним часом*** називають такий марковський процес, коли переходи з одного стану в інший можливі у чітко визначені наперед моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$, які називають ***кроками*** або ***етапами процесу***. У проміжки часу між суміжними кроками стан системи не змінюється.

Випадковий процес, що протікає в деякій системі S, називається ***Марковським випадковим процесом з неперервним часом***, якщо переходи системи з одного стану в інший можливі в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу t.

Випадковий процес Маркова з дискретними станами і дискретним часом називають ***ланцюгом Маркова***.

29.1. Дискретний ланцюги Маркова з дискретним часом

Нехай $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – можливі стани системи S. Переходи системи з одного стану в інший відбуваються тільки в моменти часу $t_0, t_1, \ldots, t_k$. У момент часу $t \in [t_k, t_k + 1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, система знаходиться в стані $S(t) = S(t_k)$ і процес можна розглядати як випадкову функцію кроків t_k або номерів кроків.

Позначимо $S_i(k) \left(i = \overline{1, n}; k = 1, 2, \ldots\right)$ подію, що складається в тому, що система S з k-го кроку до $(k+1)$-го перебуває в стані S_i. Тоді випадковий процес з дискретним часом можна представляти випадковою послідовністю (за індексом k) випадкових подій $S_i(k) \left(i = \overline{1, n}; k = 1, 2, \ldots\right)$, що зветься ***ланцюгом***.

Випадкова послідовність називається ***марківським ланцюгом***, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i в будь-який стан S_j не залежить від того коли і як система S опинилася в стані S_i.

29.2. Матриця перехідних ймовірностей

Основними характеристиками марківських ланцюгів є ймовірності $p_i(k) = p(S_i(k)), \left(i = \overline{1,n}; k = 1,2,\ldots\right)$ подій $S_i(k)$. Ймовірності $p_i(k), \left(i = \overline{1,n}; k = 1,2,\ldots\right)$ називаються ***ймовірностями станів***, тобто $p_i(k)$ - ймовірність того, що на k-тому кроці система знаходиться у стані S_i.

Перехідною ймовірністю $p_{ij}(k)$ з i-го стану в j-ий стан для k-го кроку $\left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}; k = 1,2,\ldots\right)$ називають ймовірність безпосереднього переходу системи S в момент часу t_k зі стану S_i в стан S_j, тобто $p_{ij}(k)$ - ймовірність того, що система, яка знаходилася на k-тому кроці у стані S_i, перейде на наступному кроці у стан S_j.

Якщо $i = j$, то перехідна ймовірність $p_{ij}(k) = p_{ii}(k)$ називають ймовірністю затримки системи S у стані S_i.

У будь-який момент часу i, система S може перебувати тільки в одному з станів $S_1, S_2, \ldots, S_n$, то при кожному $k = 1,2,\ldots$ події $S_1(k), S_2(k), \ldots, S_n(k)$ несумусні і утворюють ***повну групу подій***.

29.3. Однорідні Марківські ланцюги

Якщо перехідні ймовірності не залежать від кроків k, то марківський ланцюг називається ***однорідним***, $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

Перехідні ймовірності для однорідного марківського ланцюга можна представити у вигляді квадратної матриці n-го порядку.

$$P = \left(p_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \left\| p_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (29.1)$$

Елементи матриці P не залежать від номера кроку k і її порядок визначається числом можливих станів системи S, на головній діагоналі знаходяться ймовірності затримки стану системи S.

Перехідна ймовірність як ***умовна ймовірність***

$$p_{ij} = p\left(S_j(k) \,|\, S_i(k-1)\right) \qquad (29.2)$$

Події $S_1(k), S_2(k), \ldots, S_n(k)$ несумісні, утворюють повну групу подій, і

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (29.3)$$

що означає рівність 1 суми елементів кожного з рядків матриці P.

Матриця, кожен елемент якої невід'ємний і сума елементів кожного рядка дорівнює 1, називається ***стохастичною***.

Якщо стохастична матриця має властивість, яка визначається так: сума елементів кожного з стовпців дорівнює 1, то така матриця називається ***двостохастичною***.

Граф станів системи S із зазначенням перехідних ймовірностей називається ***розміченим***.

В силу властивостей стохастичної матриці P ймовірності затримки можна обчислити за формулою:

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (29.4)$$

Наприклад. Розглянемо технічну систему для якої визначені наступні стани:

S_1 – система справна і виконує певні операції;

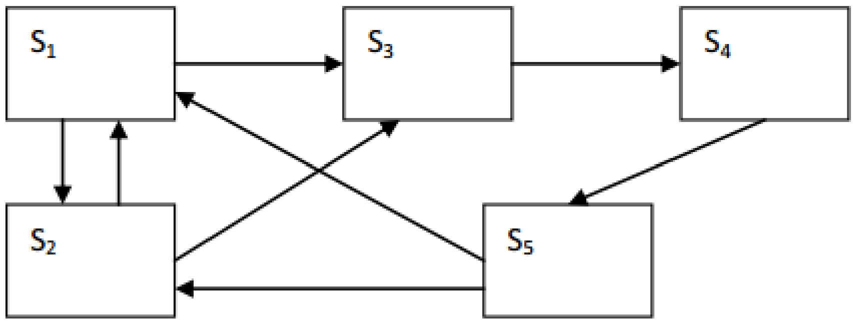
S_2 – система справна і знаходиться у стані очікування;

S_3 – система несправна, але факт несправності не встановлений;

S_4 – система несправна, факт несправності встановлений;

S_5 – виконуються ремонтні роботи після яких система знову стає до ладу.

Граф станів системи наведений на рис. 29.3.



Граф станів системи

Відповідна матриця перехідних ймовірностей буде мати вигляд:

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь (29.3) означає, що при k-му випробуванні система зі стану $S_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ обов'язково перейде в один з можливих станів $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Ланцюг Маркова називається ***скінченним***, якщо він характеризується скінченною множиною станів.

Ланцюг Маркова називається ***незвідним***, якщо кожен стан системи може бути досягнутий із будь-якого іншого стану.

Ланцюг Маркова називається ***періодичним***, якщо повернення системи в будь-який стан відбувається тільки через певну кількість кроків, кратну деякому цілому числу γ, більшому за 1 $(\gamma > 1)$.

Вектор-рядок ймовірностей стану $\left(p_1(0),\, p_2(0), \ldots, p_n(0)\right)$ в початковий момент часу $t=0$, що безпосередньо передує першому кроку, називається ***вектором початкового розподілу ймовірностей***.

Властивості вектору початкового розподілу ймовірностей:

1. Сума ймовірностей дорівнює 1:

$$p_1(0)+p_2(0)+\ldots+p_n(0)=1. \qquad (29.5)$$

2. Якщо в початковий момент часу $t=0$ система S перебувала в стані S_m, то $p_m(0)=1$ і початковий розподіл ймовірностей $p_1(0)=0$, $p_2(0)=0$, …, $p_m(0)=1$, $p_{m+1}(0)=0$, …, $p_n(0)=0$.

3. Якщо відомо початковий розподіл ймовірностей і матриця перехідних ймовірностей, то можна обчислити ймовірності стану системи для будь-якого k-го кроку.

Теорема 29.1. Для однорідного Марківського ланцюга вектор-рядок ймовірностей стану від k-го до $(k+1)$-го кроку дорівнює добутку вектор-рядку ймовірностей стану від $(k-1)$-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей.

$$\left[p_1(k),\, p_2(k), \ldots, p_n(k)\right]=\left[p_1(k-1),\, p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1)\right]\cdot P. \qquad (29.6)$$

Доказ

Добуток вектор-рядку ймовірностей стану розмірності $(1\times n)$ на матрицю розмірності $(n\times n)$ визначає вектор рядок розмірності $(1\times n)$ ймовірностей станів системи на k-му кроці.

Для кожного кроку $k=1,2,\ldots$ розглянемо n гіпотез $H_i(k-1), i=\overline{1,n}$, що складаються в тому, що від $(k-1)$-го кроку до k-го система S перебувала в стані S_i. Ці гіпотези для кожного кроку неспільні і утворюють повну групу подій, з ймовірностями стану з $\left(H_i(k-1)=p_i(k-1)\right)$.

Умовна ймовірність з $\left(S_j(k) \mid S_i(k-1)\right)$ є перехідною ймовірністю p_{ij} і за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$p_j(k)=\sum_{i=1}^{n} p\left(H_i(k-1)\right)\cdot p\left(S_j(k)\,|\,S_i(k-1)\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\,p_{ij},\; j=\overline{1,n}, \qquad (29.7)$$

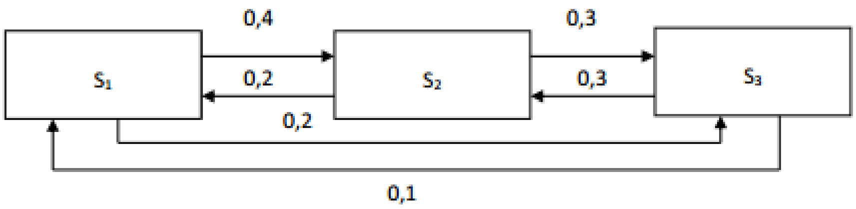
що і доводить справедливість формули (29.6), яка є рекурентною і дозволяє обчислювати ймовірності стану системи для будь-якого k-го кроку, і для однорідного Марківського ланцюга справедлива формула

$$\left[p_1(k),\, p_2(k),\ldots,p_n(k)\right]=\left[p_1(0),\, p_2(0),\ldots,p_n(0)\right]\cdot P^k,\; k=1,2,\ldots \qquad (29.8)$$

Приклад Дискретний марківський процес з дискретним часом для економічної системи. Стан комерційного банку характеризується однією з процентних ставок 2%, 3%, 4% які встановлюються на початку кожного кварталу і можуть змінюватися тільки на початку наступного кварталу.

Стан системи S_1-процентна ставка 2%, S_2-ставка 3%, S_3-ставка 4%.

Аналіз роботи у попередні роки показав, що зміна перехідних ймовірностей з плином часу мала. Визначити ймовірності станів банку на кінець поточного року, якщо в кінці минулого процентна ставка складала 3%, розмічений граф станів мав вигляд:



Розмічений граф марківського ланцюга

В даному випадку змоделювати поведінку банку на кінець року можна у вигляді однорідного Марківського дискретного випадкового процесу з дискретним часом, або у вигляді однорідного Марківського ланцюга.

За розміченим графом станів складемо матрицю перехідних ймовірностей.

$$P := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.207 & 0.404 & 0.389 \\ 0.202 & 0.402 & 0.396 \\ 0.195 & 0.396 & 0.409 \end{pmatrix}$$

$(p_1(4), p_2(4), p_3(4)) = (0, 1, 0) * P^4 = (0.2020, 0.4015, 0.3965)$
$p_1(4) = 0.2020, \quad p_2(4) = 0.4015, \quad p_3(4) = 0.3965$

Найбільш ймовірний стан процентної ставки на кінець року $p_2(4) = 0,4015$ тобто ставка 3%.

Зауважимо, що для практики найбільш цікавим є визначення саме граничних імовірностей станів $p(\infty)$. Ці границі в стовпці $p(\infty)$ існують за певних умов.

Визначимо ці умови.

Для цього розглянемо характеристичні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ матриці P переходів . Вони є коренями характеристичного рівняння:

$$|\lambda E - P| = 0, \qquad (29.9)$$

Граничні ймовірності $p(\infty)$ мають місце, якщо один з коренів рівняння (3.7.) дорівнює 1, тобто $\lambda_1 = 1$, а інші задовольняють таку умову:

$$|\lambda_s| < 1, \quad S = \overline{2, m}. \qquad (3.10)$$

У загальному випадку корені рівняння (29.9) задовольняють умову: $|\lambda_s| \le 1, \quad S = \overline{2, m}$.

Якщо виконується умова (29.10), то елементи стовпця $p(\infty)$ можна визначити із такої системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} \cdot p_j^{(\infty)}, \; j = \overline{1, m}. \qquad (29.11)$$

Оскільки ця система складається з лінійно залежних рівнянь, то її доповнюють очевидною умовою:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(\infty)} = 1. \qquad (29.12)$$

На закінчення зауважимо, що матриця: $P^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty}(P)^n$, називається матрицею граничних імовірностей переходів. При виконанні умови (29.10) усі рядки матриці $P^{(\infty)}$ однакові й кожен з них збігається зі стовпцем $p(\infty)$.

Приклад 29.4. Однорідний марковський ланцюг описується матрицею переходів, яка має такий вигляд:

$$P = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{vmatrix}$$

Знайти вектор імовірностей граничних станів $p(\infty)$.

Розв'язування: Спочатку необхідно визначити, чи існує вектор $p(\infty)$, тобто перевірити умову (29.10).

Для знаходження коренів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ рівняння: $|\lambda E - P| = 0$, складемо це рівняння для нашого випадку:

$$\begin{vmatrix} 0{,}1-\lambda & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2-\lambda & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}1-\lambda)(0{,}2-\lambda)(0{,}4-\lambda) + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6 -$$

$$-0{,}3\cdot 0{,}6(0{,}1-\lambda) - 0{,}25(0{,}4-\lambda) = -\lambda^3 + 0{,}7\lambda^2 + 0{,}29\lambda + 0{,}01 = 0.$$

Таким чином, рівняння (29.9) набуває такого вигляду:

$$\lambda^3 - 0{,}7\lambda^2 - 0{,}29\lambda - 0{,}01 = 0.$$

Знайдемо його корені. Оскільки $\lambda_1 = 1$, то для визначення інших коренів поділимо вихідне рівняння на $(\lambda - 1)$, тобто

$$
\begin{array}{l|l}
\;\lambda^3-0{,}72\lambda^2-0{,}29\lambda-0{,}01 & \lambda-1 \\
-\underline{\lambda^3-\lambda^2\qquad\qquad\qquad\quad} & \lambda^2+0{,}3\lambda+0{,}01 \\
\qquad\;\; 0{,}3\lambda^2-0{,}29\lambda & \\
\qquad -\underline{0{,}3\lambda^2-0{,}3\lambda} & \\
\qquad\qquad\quad 0{,}01\lambda\;-0{,}01 & \\
\qquad\qquad -\underline{0{,}01\lambda\;-0{,}01} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 &
\end{array}
$$

і розв'яжемо отримане рівняння: $\lambda^2+0{,}3\lambda+0{,}01=0$.

Його корені $\lambda_2=-0{,}0382$, $\lambda_3=-0{,}2618$.

Оскільки $|\lambda_S|<1$, коли $S=\overline{2{,}3}$, то умови (3.8) виконуються. Отже, вектор $p(\infty)$ існує.

Тепер знайдемо елементи вектора: $p(\infty)=\begin{vmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{vmatrix}$, з рівнянь (3.9) і (3.10).

Відповідна система записується таким чином:

$$
\begin{cases}
0{,}1p_1+0{,}5p_2+0\cdot p_3=p_1,\\
0{,}5p_1+0{,}2p_2+0{,}6p_3=p_2,\\
\qquad p_1+p_2+p_3=1.
\end{cases}
$$

Розв'язучи її, знаходимо, що $p_1=0{,}229$; $p_2=0{,}4122$; $p_3=0{,}3588$; тобто вектор $p(\infty)=\begin{vmatrix}0{,}229\\0{,}4122\\0{,}3588\end{vmatrix}$, і гранична матриця переходів набуває такого вигляду:

$$
P^\infty=(P)^\infty=\begin{vmatrix}0{,}229 & 0{,}4122 & 0{,}3588\\0{,}229 & 0{,}4122 & 0{,}3588\\0{,}229 & 0{,}4122 & 0{,}3588\end{vmatrix}.
$$

29.4. Неоднорідні марківські ланцюги

Нехай в системі S протікає дискретний Марківський процес з дискретним часом $t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots$ і можливими станами $S_1,S_2,\ldots,S_m$.

Марківський ланцюг називається ***неоднорідним***, якщо перехідні ймовірності залежать від номера кроку k.

Перехідні ймовірності для неоднорідного марківського процесу позначаються $P_{ij}(k)$. Матриця перехідних ймовірностей

$$P(k) = \left(p_{ij}(k)\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

і як і матриця перехідних ймовірностей для однорідного марківського ланцюга має властивість стохастичної матриці:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1 \qquad i = 1, 2, \dots, n \;\; k = 1, 2, \dots .$$

Визначення вектора стану системи S для неоднорідного марківського ланцюга виконується на підставі результату теореми.

Теорема 6.2.

Для неоднорідного Марківського ланцюга вектор ймовірностей стану від k-го до (k + 1)-го кроку дорівнює добутку вектора ймовірностей від (k – 1)-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей від k-го до (k + 1)-го кроку.

$$(p_1(k), \dots, p_n(k)) = (p_1(k-1), \dots, p_n(k-1)) * P(k),\ k = 1, 2, \dots$$

Приклад. Нехай ми перебуваємо в умовах поведінки банківських відсоткових ставок для випадку однорідних марківських ланцюгів, але перехідні ймовірності залежать від моменту встановлення відсоткових ставок і мають вигляд:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \end{pmatrix} \qquad P(2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$P(3) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad P(4) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

У даному прикладі зміна відсоткових ставок є дискретним марківським неоднорідним ланцюгом. Розмічені графи стану для кожного з чотирьох кроків будуть мати вигляд:

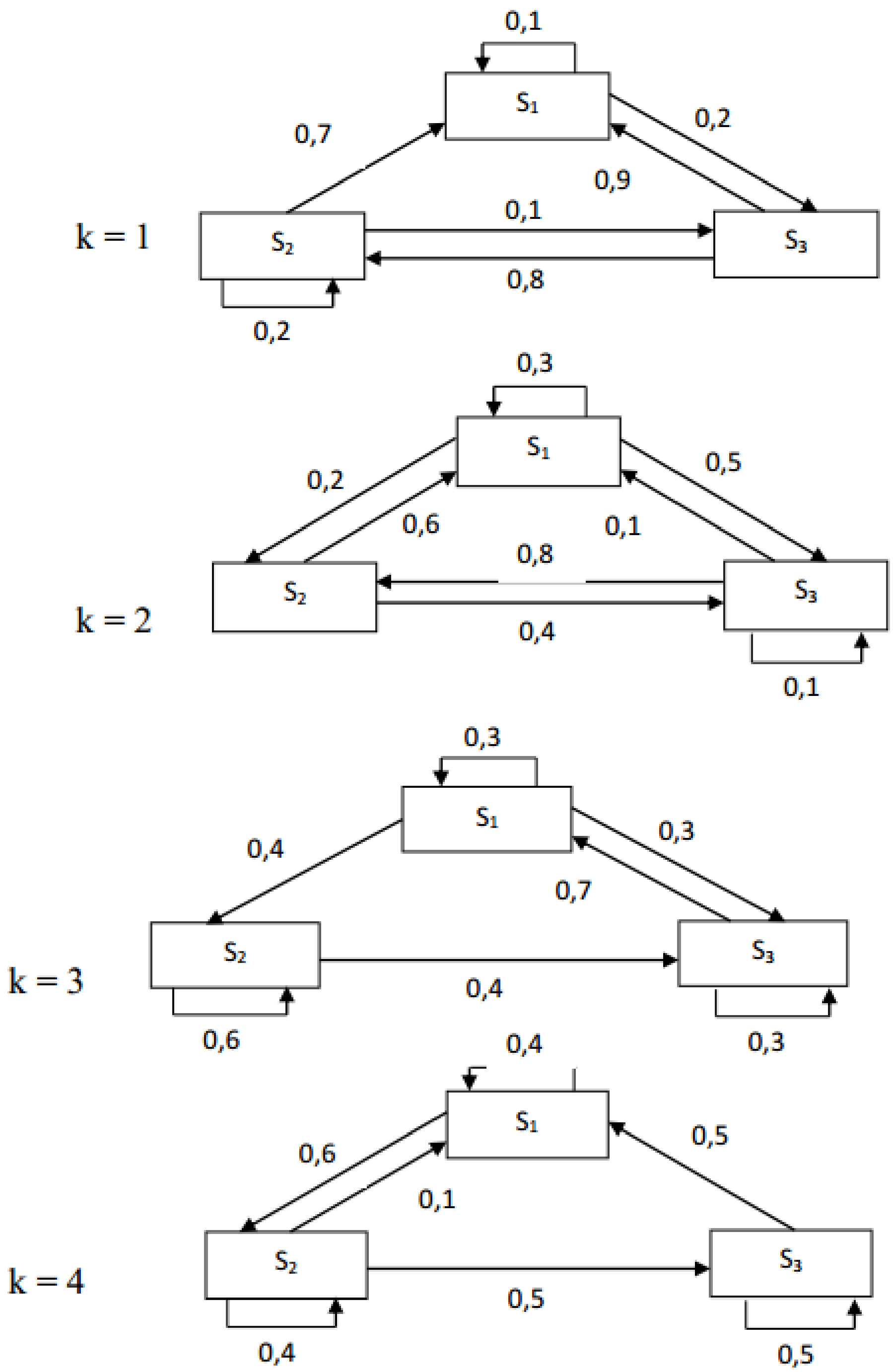


Рис. 29.3 – Розмічені графи

Згідно умови прикладу ймовірності стану для t = 0 мають вигляд:

$$p(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0)) = (0, 0, 1)$$

Знаходимо

$$P(1)\cdot P(2) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,9 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,1\cdot 0,3+0,0\cdot 0,6+0,9\cdot 0,1 & 0,1\cdot 0,2+0,0\cdot 0,0+0,9\cdot 0,8 & 0,1\cdot 0,5+0,0\cdot 0,4+0,9\cdot 0,1 \\ 0,7\cdot 0,3+0,2\cdot 0,6+0,1\cdot 0,1 & 0,7\cdot 0,2+0,2\cdot 0,0+0,1\cdot 0,8 & 0,7\cdot 0,5+0,2\cdot 0,4+0,1\cdot 0,1 \\ 0,2\cdot 0,3+0,8\cdot 0,6+0,0\cdot 0,1 & 0,2\cdot 0,2+0,8\cdot 0,0+0,0\cdot 0,8 & 0,2\cdot 0,5+0,8\cdot 0,4+0,0\cdot 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,12 & 0,74 & 0,14 \\ 0,34 & 0,22 & 0,44 \\ 0,54 & 0,04 & 0,42 \end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3) = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,74 & 0,14 \\ 0,34 & 0,22 & 0,44 \\ 0,54 & 0,04 & 0,42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,0 & 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,12\cdot 0,3+0,74\cdot 0,0+0,14\cdot 0,7 & 0,12\cdot 0,4+0,74\cdot 0,6+0,14\cdot 0,0 & 0,12\cdot 0,3+0,74\cdot 0,4+0,14\cdot 0,3 \\ 0,43\cdot 0,3+0,22\cdot 0,0+0,44\cdot 0,7 & 0,34\cdot 0,4+0,22\cdot 0,6+0,44\cdot 0,0 & 0,34\cdot 0,3+0,22\cdot 0,4+0,44\cdot 0,3 \\ 0,54\cdot 0,3+0,04\cdot 0,0+0,42\cdot 0,7 & 0,54\cdot 0,2+0,04\cdot 0,6+0,42\cdot 0,0 & 0,54\cdot 0,3+0,04\cdot 0,4+0,42\cdot 0,3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,134 & 0,492 & 0,374 \\ 0,410 & 0,268 & 0,322 \\ 0,456 & 0,240 & 0,304 \end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)\cdot P(4) = \begin{pmatrix} 0,134 & 0,492 & 0,374 \\ 0,410 & 0,268 & 0,322 \\ 0,456 & 0,240 & 0,304 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,134\cdot 0,4+0,492\cdot 0,1+0,374\cdot 0,5 & 0,134\cdot 0,6+0,492\cdot 0,4+0,374\cdot 0,0 & 0,134\cdot 0,0+0,492\cdot 0,5+0,374\cdot 0,5 \\ 0,410\cdot 0,4+0,268\cdot 0,1+0,322\cdot 0,5 & 0,410\cdot 0,6+0,268\cdot 0,4+0,322\cdot 0,0 & 0,410\cdot 0,0+0,268\cdot 0,5+0,322\cdot 0,5 \\ 0,456\cdot 0,4+0,240\cdot 0,1+0,304\cdot 0,5 & 0,456\cdot 0,6+0,240\cdot 0,4+0,304\cdot 0,0 & 0,456\cdot 0,0+0,240\cdot 0,5+0,304\cdot 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2898 & 0,2772 & 0,4330 \\ 0,3518 & 0,3532 & 0,2950 \\ 0,3584 & 0,3996 & 0,2720 \end{pmatrix}.$$

$$P1\cdot P2\cdot P3\cdot P4 = \begin{pmatrix} 0.2898 & 0.2772 & 0.433 \\ 0.3518 & 0.3532 & 0.295 \\ 0.3584 & 0.3696 & 0.272 \end{pmatrix}$$

$(p_1(4),p_2(4),p_3(4)) = (p_1(0),p_2(0),p_3(0))\cdot p(1)\cdot p(2)\cdot p(3)\cdot p(4) = (0.3584\ 0.3696\ 0.272)$

Найбільш вірогідним станом буде S_2 3% ставки.