Лекція 9. Параметричні статистичні гіпотези

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область за умови, що вірна конкуруюча гіпотеза.

Потужність критерію перевірки основної гіпотези $H_0 : a = a_0$ про рівність генерального середнього a гіпотетичному значенню a_0 при відомому середньому квадратичному відхиленні σ знаходять залежно від вигляду альтернативної гіпотези.

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a > a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1 > a_0$ потужність правостороннього критерію

$$1-\beta = \frac{1}{2} - \Phi\left(u_{кр} - \lambda\right),$$

де $u_{кр}$ знаходять з рівності $\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1}{2} - \alpha,\quad \alpha = \frac{\left(a_1 - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію, якщо позначити через $\pi = 1-\beta$, то

$$\pi_1\left(a_1\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(u_{кр} - \lambda\right)$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha = a \neq a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1$ потужність двостороннього критерію

$$1-\beta = 1 - \left[\Phi\left(u_{кр} - \lambda\right) + \Phi\left(u_{кр} + \lambda\right)\right],$$

де $u_{кр}$ знаходять з рівності $\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2},\quad \lambda = \frac{\left(a_1 - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію

$$\pi_2\left(a_1\right) = 1 - \left[\Phi\left(u_{кр} - \lambda\right) + \Phi\left(u_{кр} + \lambda\right)\right].$$

9.1. Критерій для перевірки гіпотези про ймовірність події

Нехай проведене n незалежних випробувань (n - досить велике число), в кожному з яких деяка подія A з'являється з однією і тією ж, але невідомою ймовірністю p, і знайдена відносна частота $\frac{m}{n}$ появи події A в цій серії випробувань. Перевіримо при заданому рівні значущості α нульову гіпотезу H_0, що полягає в тому, що ймовірність р дорівнює деякому значенню p_0.

Приймемо як статистичний критерій випадкову величину

$$Z = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}, \text{ де } q_0 = 1 - p_0,$$

що має нормальний розподіл з параметрами $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$ (тобто нормовану).

Критична область будується залежно від виду конкуруючої гіпотези.

1. Якщо $H_0 : p = p_0$, а $H_1 : p \neq p_0$, то критичну область треба побудувати так, щоб ймовірність попадання критерію в цю область дорівнювала заданому рівню значущості α.

При цьому найбільша потужність критерію досягається тоді, коли критична область складається з двох інтервалів, ймовірність попадання в кожен з яких рівна $\frac{\alpha}{2}$. Оскільки Z симетрична відносно осі Oy, ймовірність її попадання в інтервали $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ рівна 0,5, отже, критична область теж має бути симетрична відносно Oy. Тому $z_{кр}$ визначається по таблиці значень функції Лапласа з умови $\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$, а критична область має вигляд $(-\infty; -z_{кр}) \cup (z_{кр}; +\infty)$.

Зауваження. Передбачається, що використовується таблиця значень функції Лапласа, заданої у виді $\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, де нижня границя інтегрування дорівнює 0, а не $-\infty$. Функція Лапласа, задана таким чином, є непарною, а її значення на 0,5 менше, ніж значення стандартної функції $\Phi(x)$.

Далі треба вичислити спостережуване значення критерію:

$$Z_{спост} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

Якщо $|Z_{спост}| < z_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається.

Якщо $|Z_{спост}| > z_{кр}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

2. Якщо конкуруюча гіпотеза $H_1 : p > p_0$, то критична область визначається нерівністю $Z > z_{кр}$, тобто є правобічною, причому $p\left(Z > z_{кр}\right) = \alpha$. Тоді $p\left(0 < Z < z_{кр}\right) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1-2\alpha}{2}$. Отже, $z_{кр}$ можна знайти по таблиці значень функції Лапласа (додаток 2) за умови, що $\Phi\left(z_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}$. Вичислимо спостережуване значення критерію по вказаній вище формулі.

Якщо $Z_{спост} < z_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається.

Якщо $Z_{спост} > z_{кр}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

3. Для конкуруючої гіпотези $H_1 : p < p_0$ критична область є лівобічною і задається нерівністю $Z < -z_{кр}$, де $z_{кр}$ обчислюється так само, як у попередньому випадку.

Якщо $Z_{спост} > -z_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається.

Якщо $Z_{спост} < -z_{кр}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

9.2. Перевірка правильності нульової гіпотези про значення генеральної середньої (про математичне сподівання)

Нехай генеральна сукупність X має нормальний розподіл, і необхідно перевірити припущення про те, що її математичне сподівання дорівнює деякому числу a_0.

Розглянемо два випадки.

1) Відома дисперсія σ_{Γ}^{2} генеральної сукупності.

Тоді по вибірці об'єму n знайдемо вибіркове середнє $\overline{x}_B$ і перевіримо нульову гіпотезу $H_0 : M\left(X\right) = a_0$.

Враховуючи, що вибіркове середнє $\overline{X}_{\Gamma}$ є незміщеною оцінкою $M\left(X\right)$, тобто $M\left(\overline{X}_{\Gamma}\right) = M\left(X\right)$, можна записати нульову гіпотезу так: $M\left(\overline{X}_{\Gamma}\right) = a_0$. Для її перевірки виберемо критерій

$$U = \frac{\overline{X}_{\Gamma} - a_0}{\sigma\left(\overline{X}_{\Gamma}\right)} = \frac{\overline{X}_{\Gamma} - a_0}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_{\Gamma} - a_0\right)}{\sigma_{\Gamma}}$$

Це випадкова величина, що має нормальний розподіл, причому, якщо нульова гіпотеза справедлива, то $M\left(U\right) = 0$, $\sigma\left(U\right) = 1$.

Виберемо критичну область залежно від виду конкуруючої гіпотези :

При розв’язуванні такого класу задач можливий один із трьох випадків:

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{\Gamma}\right) \neq a_0$, то $u_{кр}$ визначається з умови: $\Phi\left(u_{kp}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$, критична область двобічна, $U_{спост} = \frac{\left(\overline{x}_B - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma_B}$, і якщо $\left|U_{спост}\right| < u_{kp}$, то нульова гіпотеза приймається; якщо $\left|U_{спост}\right| > u_{kp}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{\Gamma}\right) > a_0$, то $u_{кр}$ визначається з умови: $\Phi\left(u_{kp}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}$, критична область правобічна, і якщо $U_{спост} > u_{kp}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{\Gamma}\right) < a_0$, то $u_{кр}$ визначається з умови: $\Phi\left(u_{kp}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}$, критична область лівобічна, і якщо $U_{спост} > -u_{kp}$, то нульова гіпотеза приймається.

2. У випадку, коли значення $\sigma_{Г}$ є невідомим, В цьому випадку виберемо в якості критерію випадкову величину

$$T = \frac{\left(\overline{X}_{Г} - a_0\right)\sqrt{n}}{S},$$

де S - виправлене середнє квадратичне відхилення. Така випадкова величина має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи. Розглянемо ті ж, що і у попередньому випадку, конкуруючі гіпотези і критичні області, що відповідають їм. Заздалегідь вичислимо спостережуване значення критерію:

$$T_{спост} = \frac{\overline{x}_B - a_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{Г}\right) \neq a_0$, то $t_{кр.}$ - двобічна критична точка та знаходиться по таблиці критичних точок розподілу Стьюдента по відомих α і $k = n - 1$.

Якщо $\left|T_{спост}\right| < t_{кр.}$, то нульова гіпотеза приймається.

Якщо $\left|T_{спост}\right| > t_{кр.}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{Г}\right) > a_0$, то по відповідній таблиці знаходять $t_{кр.}\left(\alpha, k\right)$ - критичну точку правобічної критичної області. Нульова гіпотеза приймається, якщо в $T_{спост} < t_{kp}$, інакше відхиляють.

- якщо $H_1 : M\left(\overline{X}_{Г}\right) < a_0$, критична область є лівобічною, і нульова гіпотеза приймається за умови $T_{спост} > -t_{kp}$. Якщо $T_{спост} < -t_{kp}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

<u>Зауваження:</u> При великих обсягах вибірки $\left(n > 40\right)$ статистичний критерій $z = \frac{\overline{x}_B - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$, що має закон розподілу Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи, наближається асимптотично до нормованого нормального закону $N\left(0;1\right)$. У цьому разі критичні точки визначаються з умов $\Phi\left(u_{кр}\right)$.

Приклад. Проведено 10 незалежних експериментів над випадковою величиною X, що має нормальний закон розподілу з невідомими значеннями a, σ. Наслідки експериментів подано у вигляді статистичного ряду:

x_i	2,5	2	-2,3	1,9	-2,1	2,4	2,3	-2,5	1,5	-1,7
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези, $H_0 : a = 0{,}9$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0{,}9$.

Розв'язання: Запишемо статистичний ряд у вигляді статистичного розподілу й обчислимо $\overline{x}_B, S$:

x_i	-2,5	-2,3	-2,1	-1,7	1,5	1,9	2	2,3	2,4	2,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-2{,}5 - 2{,}3 - 2{,}1 - 1{,}7 + 1{,}5 + 1{,}9 + 2 + 2{,}3 + 2{,}4 + 2{,}5}{10} = 0{,}4.$$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}_B^2 = 4{,}6 - 0{,}4^2 = 4{,}44.$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{10}{9} \cdot 4{,}44 = 4{,}933.$$

$$S = \sqrt{4{,}933} \approx 2{,}22.$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0{,}9$ будується лівобічна критична область. Для цього необхідно знайти критичну точку:

$$t_{kp}\left(\alpha = 0{,}001; \quad k = n - 1 = 10 - 1 = 9\right) = 4{,}78.$$

Оскільки щільність ймовірностей для розподілу Стьюдента є парною, то $t_{kp} = -4{,}78$.

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$T_{спост} = \frac{\overline{x}_B - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}4 - 0{,}9}{\dfrac{2{,}22}{\sqrt{10}}} = -0{,}712.$$

Висновок. Оскільки $T_{спост} \in \left[-4,78; \infty\right[$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези $H_0 : a = 9$ мм. Отже, нульова гіпотеза приймається.

Приклад Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_Г = 4,8$ отримано вибірку об'єму $n = 144$, за якою знайдено вибіркове середнє $\overline{x}_В = 16$. Потрібно при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = 15$ при конкуруючій гіпотезі:

а) $H_\alpha : a \neq 15$.

б) $H_\alpha : a > 15$.

в) $H_\alpha : a < 15$.

Крім того, необхідно знайти потужність правостороннього та двохстороннього критеріїв.

Розв'язання. Обчислимо спочатку спостережуване значення критерію:

$$U_{спост} = \frac{\overline{x}_В - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}} = \frac{\left(\overline{x}_В - a\right)\sqrt{n}}{\sigma_Г} = \frac{\left(16 - 15\right)\sqrt{144}}{4,8} = 2,5.$$

а) Знайдемо двобічну критичну точку з рівності $\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2} = 0,475$; $u_{кр} = \pm 1,96$.

Оскільки $\left|U_{спост}\right| > u_{кр}$, то основна гіпотеза відхиляється. Тобто, вибіркове та генеральні середні суттєво відрізняються.

б) Знайдемо критичну точку з рівності: $\Phi\left(u_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,45$. За таблицею функції Лапласа визначимо правобічну критичну точку: $u_{кр} = 1,64$.

Оскільки $U_{спост} > u_{кр}$, то основна гіпотеза відхиляється. Тобто, вибіркове та генеральні середні суттєво відрізняються.

в) Критична точка буде такою ж, як і в пункті б), але з протилежним знаком (лівобічна): $u_{кр} = -1,64$.

Оскільки $U_{спост} > u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Тобто вибіркове та гіпотетичне генеральне середні несуттєво відрізняються.

Тепер знайдемо потужності правостороннього та двохстороннього критеріїв. Нагадаємо, що критичні точки у цих випадках різні та дорівнюють 1,64 і 1,96 відповідно.

Знайдемо параметр λ, який входить в обидва рівняння для визначення потужності критеріїв:

$$\lambda = \frac{(\overline{x}_B - a)\sqrt{n}}{\sigma_Г} = \frac{(16-15)\sqrt{144}}{4,8} = 2,5.$$

Отже, потужності відповідно правостороннього та двостороннього критеріїв наступні:

- потужність для правостороннього критерію:

$$1-\beta = \pi_1^{правост}(16) = \frac{1}{2} - \Phi\left(u_{кр} - \lambda\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1,64-2,5) =$$
$$= \frac{1}{2} + \Phi(0,86) = 0,5 + 0,3051 = 0,8051.$$

- потужність для двостороннього критерію:

$$1-\beta = \pi_1^{двост}(16) = 1 - \left[\Phi\left(u_{кр} - \lambda\right) + \Phi\left(u_{кр} + \lambda\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2} - \left[\Phi(1,96-2,5) + \Phi(1,64+2,5)\right] =$$
$$= 1 - \left[-\Phi(0,54) + \Phi(4,14)\right] = 1 + 0,2054 - 0,5 = 0,7054.$$

Тобто ймовірності того, що нульова гіпотеза буде відхилена, якщо правильною є конкуруюча гіпотеза, дорівнюють 0,8051 і 0,7054 відповідно для правостороннього та двостороннього критеріїв.

9.3. Перевірка рівності виправленої вибіркової дисперсії генеральної сукупності

Нехай з нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму n, для якої знайдено виправлену вибіркову дисперсію S^2.

1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ про рівність невідомої генеральної дисперсії σ^2 гіпотетичному (прогнозованому) значенню σ_0^2 при конкуруючій гіпотезі $H_\alpha : \sigma^2 > \sigma_0^2$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{спост} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α і кількості ступенів вільності $k = n-1$ знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$.

Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

2. При конкуруючій гіпотезі $H_\alpha : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ знаходять ліву $\chi^2_{лів\ кр}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$ і праву $\chi^2_{прав\ кр}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ критичні точки.

Якщо $\chi^2_{лів\ кр} < \chi^2_{спост} < \chi^2_{прав\ кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{лів\ кр}$ або $\chi^2_{спост} > \chi^2_{прав\ кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

3. При конкуруючій гіпотезі $H_\alpha : \sigma^2 < \sigma_0^2$ знаходять критичну точку $\chi^2_{кр}(1-\alpha;k)$.

Якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.