Лекція 8. Статистична перевірка гіпотез.

8.1. Загальні поняття перевірки статистичних гіпотез

Статистичними називаються гіпотези про вигляд розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.

Співставлення висунутої гіпотези щодо генеральної сукупності за вибірковими даними, яке супроводжується кількісною оцінкою ступеня достовірності отримуваного результату і здійснюється за допомогою того чи іншого статистичного критерію, називається *перевірка статистичних гіпотез*.

8.2. Нульові та альтернативні гіпотези

Нехай X – спостережувана дискретна або неперервна випадкова величина. Статистичною гіпотезою H називають будь-яке припущення про вигляд невідомого розподілу або параметри відомого розподілу випадкової величини X. Висунуту гіпотезу *називають основною* або *нульовою* і позначають H_0.

Гіпотезу, що суперечить нульовій, називають *конкуруючою*, або *альтернативною гіпотезою* (H_1) або (H_α).

Для однієї нульової гіпотези у загальному випадку можна сформулювати багато різних альтернативних гіпотез.

Припустимо, що розглядається головна гіпотеза про те, що деяка змінна a дорівнює константі a_1, тобто, H_0: $a = a_0$. Як альтернативну гіпотезу H_1 можна розглянути декілька гіпотез, які не є рівнозначними, наприклад:

1. $H_1 : a < a_0$; 2. $H_1 : a > a_0$; 3. $H_1 : a \neq a_0$; 4. $H_1 : a = a_1$.

Мета статистичної перевірки гіпотез полягає в тому, щоб на основі вибіркових даних прийняти рішення про справедливість основної гіпотези H_0.

8.3. Параметричні і непараметричні статистичні гіпотези

Статистичні гіпотези поділяють на параметричні та непараметричні. У *параметричних статистичних гіпотезах* містяться твердження про значення параметрів генеральної сукупності. Гіпотези, які тестують дані, що не мають стосунку до числових значень параметрів генеральної сукупності називають *непараметричними*.

8.4. Прості та складні статистичні гіпотези

Гіпотези можуть містити припущення стосовно одного або більше одного числових значень параметра генеральної сукупності

Простою називають гіпотезу, яка містить тільки одне припущення, що однозначно визначає розподіл випадкової величини (ВВ) *X*. Гіпотезу, яка складається із скінченної або нескінченної кількості простих гіпотез, називають *складною*. Наприклад, якщо λ – невідомий параметр показникового розподілу, то гіпотеза H_0: $\lambda = 2$ буде простою, а гіпотеза H_0: $\lambda > 2$ – складною, оскільки складається з безлічі простих гіпотез H_i: $\lambda = \lambda_i$, де λ_i – будь-яке додатне число більше 2.

Основна нульова гіпотеза, яка на початковому етапі перевірки завжди вважається правильною, насправді вона може бути як правильною, так і хибною. Тому за результатами статистичної перевірки нульової гіпотези може бути прийнято як вірне, так і помилкове рішення. У результаті прийняття помилкового рішення можуть бути допущені помилки двох типів:

1) буде відхилено правильну нульову гіпотезу (помилка першого типу);

2) не буде відхилено хибну нульову гіпотезу (помилка другого типу).

8.5. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

Помилка першого типу (роду) має місце за умови відхилення істинної нульової гіпотези.

Помилка другого типу має місце за умови невідхилення помилкової нульової гіпотези.

Імовірність помилки першого типу позначається α та *називається рівнем значущості*. Імовірність помилки другого типу позначається β. Імовірності помилок α та β є взаємопов'язаними.

Зменшення ймовірності помилки першого роду водночас призводить до підвищення ймовірності помилки другого роду β. З огляду на це додатково вводять *поняття потужності* критерію $1-\beta$, яка є ймовірністю відхилення помилкової нульової гіпотези. Замість рівня значущості можна використовувати також *довірчий рівень* (*рівень надійності*) $\gamma = 1-\alpha$.

Якщо, наприклад, $\alpha = 0{,}05$, то це означає, що в 5 випадках із 100 є ризик допустити помилку першого роду (відкинути гіпотезу H_0).

Означення 1. Ймовірність припущення помилки першого типу - це ймовірність невідхилення альтернативної гіпотези за умови, що нульова гіпотеза справедлива:

$$\alpha = P\left(H_1 / H_0\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = P\left(\text{\textit{невідхилення}}\ H_1 / H_0\ \text{\textit{правильна}}\right)$$

або через рівень надійності - ймовірність не припуститися помилки першого типу:

$$\gamma = 1-\alpha = 1-P\left(H_1 / H_0\right) = P\left(H_0 / H_0\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma = P\left(\text{\textit{невідхилення}}\ H_0 / H_0\ \text{\textit{правильна}}\right)$$

Означення 2. Імовірність припущення помилки другого типу — це ймовірність невідхилення хибної гіпотези H_0:

$$\beta = P\left(H_0 / H_1\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$\beta = P\left(\text{\textit{невідхилення}}\ H_0 / H_1\ \text{\textit{правильна}}\right)$$

або через потужність критерію -це ймовірність відхилення хибної гіпотези H_0, або ймовірність запобігання помилки другого типу:

$$1-\beta = P\left(H_1 / H_1\right),$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\beta = P\left(\textit{невідхилення } H_1 / H_1 \textit{ правильна}\right)$$

8.6. Критерії для перевірки гіпотез та їх властивості

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише на основі даних вибірки. Для цього використовують спеціально підібрану випадкову величину K, точний або наближений розподіл якої відомий. Цю величину називають *статистичним критерієм* або просто *критерієм* чи *статистикою*. Значення критерію, обчислене за даними вибірки, називають його *спостережуваним (емпіричним) значенням* і позначають K_{cn}.

Сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється, називають *критичною областю*, а сукупність значень, при яких гіпотезу приймають, – *областю прийняття гіпотези* або *областю допустимих значень*.

Оскільки критерій K – випадкова величина, то всі її можливі значення належать деякому інтервалу числової прямої (або всій числовій прямій). Отже, існують точки, які відокремлюють критичну область від області допустимих значень. Ці точки називають *критичними точками* критерію K і позначають $K_{кр}$.

8.7. Порядок визначення критичних точок та критичних областей

Критичні точки — межі критичних областей — знаходять із таблиць розподілу ймовірностей випадкової величини K, відповідно до заданого рівня значущості.

Розрізняють три види критичних областей: правостороння, лівостороння і двостороння.

Означення 3. Правосторонньою критичною областю є критична область, яка задається нерівністю: $K > K_{kp}$ (рис. 8.1).

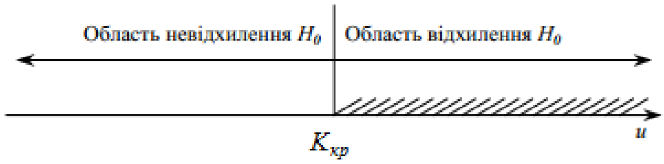

Рис. 8.1

Критичну точку $K_{кр}$ цієї області за обраного рівня значущості α визначають зі співвідношення:

$$P\left(K > K_{kp}\right) = \alpha \tag{8.1}$$

Означення 4. Лівосторонньою критичною областю є критична область, яка задається нерівністю: $K < K_{kp}$ (рис. 8.2).

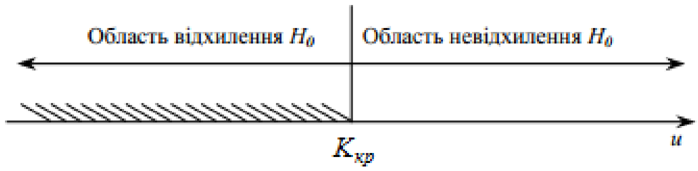

Рис. 8.2.

Значення $K_{кр}$ знаходять за умовою:

$$P\left(K < K_{kp}\right) = \alpha \tag{8.2}$$

Означення 5. Двосторонньою критичною областю є критична область, яка задається двома нерівностями : $K < K_{кр}^{лів}$, $K > K_{кр}^{пр}$ (рис. 8.3).

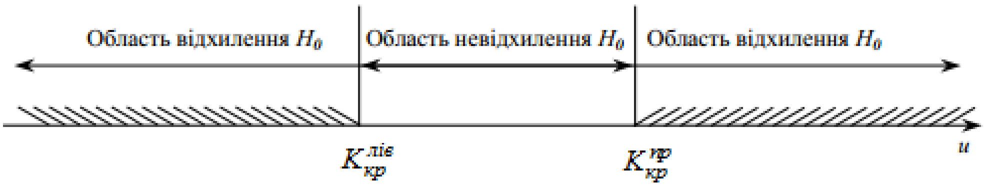

Рис. 8.3

Критичні точки $K_{кр}^{лів}$, $K_{кр}^{пр}$ знаходять за умови:

$$P\left(K < K_{кр}^{лів}\right) + P\left(K > K_{кр}^{пр}\right) = \alpha \tag{8.3}$$

У разі, коли двостороння критична область симетрична відносно нуля:

$$P\left(K < K_{кр}^{лів}\right) = P\left(K > K_{кр}^{пр}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ і } K_{кр}^{пр} = -K_{кр}^{лів} = K_{кр},$$

де $K_{кр}$ визначається з умов

$$P\left(K > K_{кр}\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad (8.4)$$