Лекція 25. Статистичні ігри

25.1 Елементи теорії статистичних рішень

Теорія ігор – це теорія математичних моделей, інтереси учасників яких різні, причому вони досягають своєї мети різними шляхами.

У *теорії стратегічних ігор* передбачалося, що в них беруть участь два гравці, інтереси яких протилежні. Тому дії гравців спрямовані на збільшення виграшу одного гравця і зменшення програшу другого.

Статистик (*гравець А*) намагається діяти обачно, використовуючи, наприклад, мінімаксну стратегію, що дозволяє одержати найменший програш.

Гравець-природа діє зовсім випадково, можливість стратегії визначається як її стан, наприклад, умови погоди в даному районі, попит на продукцію, обсяг перевезень, вантажопотік і т. д.

Отже, основними відмінностями статистичної гри від стратегічної є:

- відсутність прагнення до виграшу в гравця-природи, тобто відсутність антагоністичного супротивника;
- можливість другого гравця-статистика провести статистичний експеримент для одержання додаткової інформації про стратегії природи.

25.2. Основні поняття теорії статистичних ігор

У статистичних іграх використовуються такі поняття: функція ризику, функція втрат, функція рішень. Умови гри задаються у вигляді матриці $A = \|a_{ij}\|$ — це множина рішень статистика. $B = \|b_{ij}\|$ це множина рішень природи. Елемент a_{ij} дорівнює виграшу гравця A, якщо він використовує стратегію A_i, а природа має стан B_j. У ряді випадків при розв’язанні гри розглядають матрицю ризиків $R = \|r_{ij}\|$.

Елементи **матриці ризику** r_{ij} — це різниця між виграшем, що одержав би статистик A, якби знав стан природи B_j, і виграшем, який він одержить у тих же умовах, застосовуючи стратегію A_i.

$$r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij};$$
$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

Наприклад, розглянемо матрицю прибутків гравця A:

$$A = \begin{array}{r|ccc|} & 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 7 & 8 \\ & 9 & 1 & 2 \\ \hline \max & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

Побудуємо матрицю ризиків:

$$R = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Тому що, наприклад,
$r_{11} = 9 - 3 = 6$;
$r_{12} = 7 - 4 = 3$ і т. д.

Розглянемо ряд критеріїв, використовуваних при розв'язанні ігор із природою. При відомому розподілі ймовірностей станів природи критерієм прийняття рішення є максимізація виграшу чи мінімізація очікування ризику.

Нехай імовірності стану природи дорівнюють $\left(\sum p_j = 1\right)$.

Вибір i-ої стратегії забезпечує математичне очікування виграшу, що дорівнює $\sum_j a_{ij} p_j$.

У ряді випадків, коли ймовірності стану природи невідомі, для їхньої оцінки використовують принцип недостатнього обґрунтування Лапласа.

Відповідно до нього, усі стани природи вважаються рівноймовірними, тоді вибір рішення можна робити по мінімуму середньозваженого показника ризику.

Якщо R — критерій ризику; H_i — величина втрат; P_i — імовірність настання ризикових ситуацій, то

$$R_i = \sum_{i=1}^{n} H_{ij} p_j = \sum_{i=1}^{n} H_{ij} \cdot \frac{1}{n},$$

n — кількість розглянутих варіантів станів природи.

Однак у цих випадках не можна стверджувати, що прийняте рішення є оптимальним. Оптимальним воно є тільки щодо прийнятого розподілу імовірностей станів природи. Якщо ж питання розподілу ймовірності і природи невідоме, можна скористатися:

1. Максимінним критерієм Вальда чи критерієм крайнього песимізму;

2. Мінімаксним критерієм Севіджа (теж критерій крайнього песимізму);

3. Критерієм крайнього оптимізму;

4. Критерієм узагальненого максиміна Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму).

25.3 Критерій Вальда

Один з них — критерій Вальда, критерій крайнього песимізму.

Відповідно до критерію Вальда, якщо розглядається **матриця виграшів** гравця A, то найкращим рішенням буде те, для якого виграш виявиться максимальним із усіх мінімальних, при різних варіантах умов. Цей принцип називається **критерієм максиміна**.

Формалізований вираз **максиміна** виглядає так:

$$H_w = \max_i \min_j a_{ij},$$
$$H_w = \max_i \alpha_i$$
$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Максимінний критерій Вальда збігається з критерієм вибору стратегії, що дозволяє одержати нижню ціну гри для двох осіб з нульовою сумою. Відповідно до цього критерію вибирається стратегія, що гарантує за будь-яких умов виграші не менші ніж $\max_i \min_j a_{ij}$.

Якщо розглядається **матриця програшів** гравця A, то найкращим рішенням відповідно до критерію Вальда буде те, для якого програш виявиться мінімальним із усіх максимальних, при різних варіантах умов. Цей принцип називається **критерієм мінімакса**.

Формалізований вираз ***мінімакса*** виглядає так:

$$H_w = \min_i \max_j a_{ij},$$
$$H_w = \max_i \beta_i$$
$$\beta_i = \min_j a_{ij}$$

Приклад 25.1. Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Вальда. Дана матриця виграшів (див. табл. 25.1), де A_1, A_2, A_3 — прийняті гравцем рішення; P_1, P_2, P_3 — стану природи; a_{ij} — виграші за відповідних умовах.

Таблиця 1

МАТРИЦЯ ВИГРАШІВ (прибутків)

	P_1	P_2	P_3	min
A_1	5	3	1	1
A_2	6	4	8	4
A_3	2	9	6	2

Знайдемо мінімальні виграші в кожному рядку: $\alpha_i = (1,4,2)$.

Тепер серед них знайдемо максимальне значення:

$H_w = \max(1,4,2) = 4$.

З прикладу випливає, що $\max\min = 4$, значить перевагу треба віддати рішенню A_2 У цьому випадку ми незалежно від варіантів обстановки P одержимо виграш не менше 4.

За будь-якого іншого рішення, у разі несприятливої обстановки, може бути отриманий виграш менше 4.

Приклад 25.2 Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Вальда. Нехай дана матриця збитків:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Запишемо вихідні дані в табл. 25.2.

Таблиця 2

МАТРИЦЯ ПРОГРАШІВ (збитків)

	P_1	P_2	P_3	max
A_1	2	4	9	9
A_2	1	7	2	7
A_3	8	9	1	9

Знайдемо максимальні збитки в кожному рядку:

$\beta_i = (9,7,9)$.

Тепер серед них знайдемо мінімальне значення:

$H_w = \min(9,7,9) = 7$.

З прикладу випливає, що $\min\max = 7$, значить перевагу треба віддати рішенню A_2. У цьому випадку ми, незалежно від варіантів обстановки P, одержимо збитки не більше 7. При будь-якому іншому рішенні, у випадку несприятливої обстановки, може бути отриманий програш більше 7.

25.4. Критерій крайнього оптимізму (кращий із кращих)

Якщо дана **матриця виграшів**, тоді формально критерій оптимізму буде виглядати так:

$$H_o = \min_i \max{}_j \, a_{ij},$$

$$H_o = \max_i \alpha_i$$

$$\alpha_i = \min{}_j \, a_{ij}$$

Відповідно до критерію крайнього оптимізму, якщо розглядається **матриця виграшів** гравця A, то найкращим рішенням буде те, для якого виграш виявиться максимальним із усіх максимальних, при різних варіантах умов.

Приклад 25.3. Для матриці прибутку

	P_1	P_2	P_3	α_i
A_1	5	3	1	5
A_2	6	4	8	8
A_3	2	9	6	9

одержимо $H_0 = \max\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 9$, отже, слід вибрати стратегію A_3.

Для ***матриці збитків***:

$$H_o = \min_i \min_j a_{ij},$$
$$H_o = \min_i \beta_i$$
$$\beta_i = \min_j a_{ij}$$

Приклад 25.4. Для матриці збитків

	P_1	P_2	P_3	β_j
A_1	2	4	9	2
A_2	1	7	2	1
A_3	8	9	1	1

одержимо $H_0 = \min\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 1$, виходить отже, слід вибрати стратегію $H_o = 1$, слід вибирати стратегію A_2 чи A_3.

25.5. Мінімаксний критерій Севіджа

На відміну від критерію Вальда, тут для прийняття рішення розглядається *матриця ризику чи матриця втрат прибутку*.

Побудуємо спочатку матрицю втрат (недоодержання) прибутку.

У загальному випадку **втрати** прибутку p_{ij} визначаються, як різниця між максимальним виграшем і виграшем щодо конкретного рішення за даної обстановки.

$$p_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Побудуємо матрицю втрат:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & p_{ij} & \dots \\ p_m & \dots & p_{mn} \end{vmatrix}$$

Відповідно до **критерію Севіджа**, перевагу слід віддавати рішенню, для якого **втрати** максимальні за різних варіантів умов виявляються мінімальними.

$$H_s = \min_i \max_j p_{ij},$$
$$H_s = \min_i \alpha_i$$
$$\alpha_i = \max_j p_{ij}$$

де p_{ij} — втрати, що відповідають i-тому рішенню, при j-тому варіанті обстановки.

Якщо як вихідні дані розглядається матриця програшів (збитків), то для розрахунку за критерієм Севіджа потрібно побудувати матрицю ризику.

Ризиком називається різниця між мінімальним програшем, який сплатив би статистик, знаючи ситуацію P_i, і фактичним програшем при рішенні A_i.

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}.$$

Тоді матриця ризику

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & r_{ij} & \dots \\ r_m & \dots & r_{mn} \end{vmatrix}.$$

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати стратегію, при якій величина ризику набирає найменше значення у найнесприятливішій ситуації, тобто $\min_i \max_j r_{ij}$.

$$H_s = \min_i \max_j r_{ij},$$
$$H_s = \min_i \beta_i$$
$$\beta_i = \max_j r_{ij}.$$

Як критерій Вальда, так і критерій Севіджа засновані на найпесимістичнішій оцінці обстановки. Однак на відміну від критерію Вальда, що спрямований на одержання гарантованого виграшу, критерій Севіджа **мінімізує можливі втрати**.

Приклад 25.5. Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Севіджа, якщо відома матриця прибутку:

$$\Pi = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

Для матриці прибутку побудуємо спочатку матрицю прибутку, далі знайдемо максимальні елементи в кожному стовпці:

	P_1	P_2	P_3
A_1	5	3	1
A_2	6	4	8
A_3	2	9	6
$\max_i$	6	9	8

Тепер побудуємо матрицю втрат:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & p_{ij} & \cdots \\ p_m & \cdots & p_{mn} \end{vmatrix},$$

де $p_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$.

Тоді:

$$P = \begin{array}{ccc|c} & & & \max_j \\ \hline 1 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Відповідно до критерію Севіджа, перевагу слід надавати рішенню, для якого втрати, максимальні за різних варіантів умов, виявляються мінімальними.

$$H_s = \min_i \max_j p_{ij},$$
$$H_s = \min_i \alpha_i$$
$$\alpha_i = \max_j p_{ij},$$

тоді $H_s = \min(7, 5, 4) = 4$ — найбільш сприятлива стратегія $P_3 \Rightarrow A_3$.

Вибір рішення A_3 гарантує, що у випадку несприятливої обстановки, утрати не перевищать 4 одиниці.

Приклад 25.6

Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Севіджа, якщо відома матриця збитків:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Знайдемо спочатку мінімальні елементи в кожному стовпці:

	P_1	P_2	P_3
A_1	2	4	9
A_2	1	7	2
A_3	8	9	1
$\min_i$	1	4	1

Оскільки як вихідні дані розглядається матриця програшів, то для розрахунку за критерієм Севіджа потрібно побудувати матрицю ризику.

$$R = \begin{array}{ccc|c} & & & \max_j \\ \hline 1 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 7 \end{array}.$$

$H_s = 3$, що відповідає стратегії A_2.

25.6. Критерій узагальненого максиміна Гурвіца

На відміну від критерію Вальда і критерію Севіджа, критерій Гурвіца враховує як песимістичний, так і оптимістичний підхід до ситуації.

Розглянемо критерій Гурвіца для матриці виграшів. У цьому випадку перевага надається варіанту рішень, для якого виявиться максимальним показник G, що визначається з виразу:

$$\begin{aligned}
&\max_i G_i = (x\alpha_i + (1-x)\beta_i) \\
&H_G = \max_i G_i \\
&H_G = \max_i (x\alpha_i + (1-x)\beta_i) \\
&\textit{де} \\
&\alpha_i = \min_j a_{ij}, \\
&\beta_i = \max_j a_{ij},
\end{aligned}$$

де a_{ij} — виграш, що відповідає i-му рішенню при j-ім варіанті обстановки, x — показник оптимізму ($0 < x < 1$), при $x = 0$ — лінія поводження в розрахунку на краще, $x = 1$ — лінія поводження в розрахунку на гірше.

Якщо дана матриця програшів, то перевага надається варіанту рішень, для якого виявиться мінімальним показник G, що визначається з виразу:

$$H_G = \min_i (x\alpha_i + (1-x)\beta_i)$$
де
$$\alpha_i = \max_j a_{ij},$$
$$\beta_i = \min_j a_{ij},$$
де $0 \le x \le 1$ показник песимізму.

При x = 1 приходимо до песимістичного критерію Вальда.

При x = 0 — до гранично оптимістичного критерію.

Значення x вибирають на підставі суб'єктивних розумінь. Чим більше бажання підстрахуватися в даній ситуації, тим ближче до одиниці значення x.

Приклад 25.7

Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Гурвіца, якщо відома матриця прибутку:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij},$$
$$\beta_i = \max_j a_{ij},$$

Знайдемо спочатку величини α_i і β_j, де

P_1	P_2	P_3	α_i	β_i
5	3	1	1	5
6	4	8	4	8
2	9	6	2	9

Тепер приймається рішення про вибір стратегії, при якій має місце формула:

$$H_G = \max_i (x \cdot \min_j a_{ij} + (1-x)\max_j a_{ij})$$
$$H_G = \max_i \begin{bmatrix} (x \cdot 1 + (1-x) \cdot 5) \\ (x \cdot 4 + (1 - x \cdot 8) \\ (x \cdot 2 + (1-x) \cdot 9) \end{bmatrix}$$

Тоді

x — показник оптимізму ($0 \le x \le 1$).

Тепер побудуємо графік статистики. Для цього побудуємо пряму ОХ, відкладемо на ній точки α і β, побудуємо перпендикуляри з цих точок до осі ОХ (див. рис. 13.1).

Відкладемо точки на прямих α і β.

Прямій № 1 відповідають точки 1 і 5.

Прямій № 2 відповідають точки 4 і 8.

Прямій № 3 відповідають точки 2 і 9.

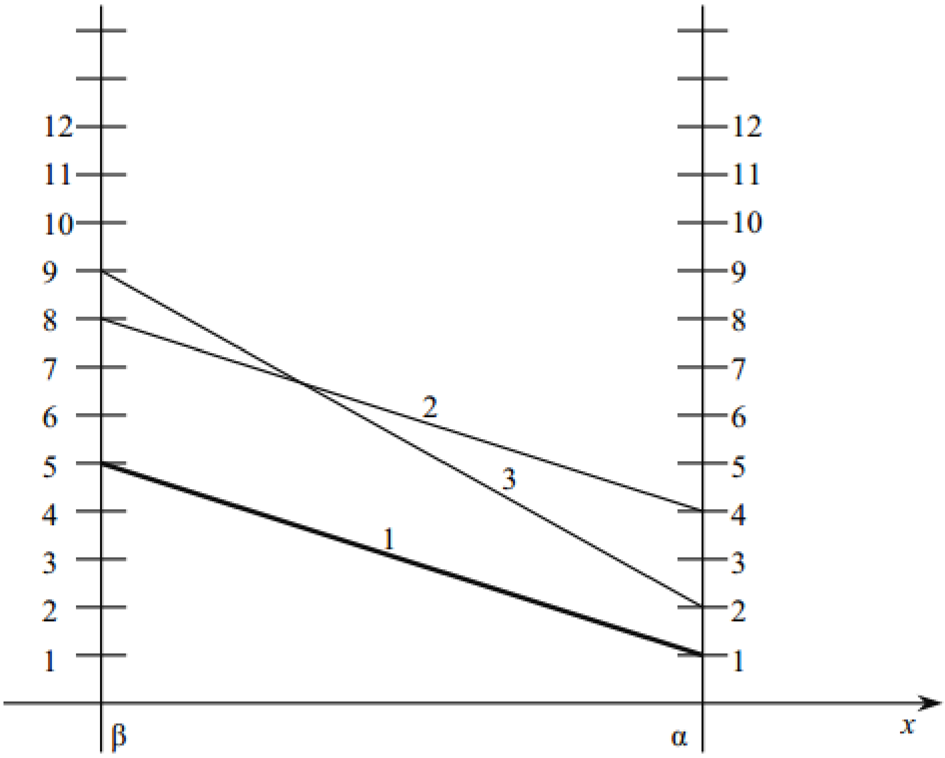

Рис. Графічний розв'язок для критерію Гурвіца

Нижньою ціною гри буде пряма № 1, отже потрібно вибрати стратегію 1. При x = 1 виграш буде дорівнювати 1, при x = 0 мінімальний виграш буде дорівнювати 5.

25.7. Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа

Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа використовується у випадку, якщо можна припустити, що будь-який з варіантів обстановки не більше ймовірний, ніж інший. Тоді імовірності обстановки можна вважати рівними і робити вибір рішення так само, як і в умовах ризику - по мінімуму середньозваженого показника ризику. Тобто перевагу слід надати варіанту, який забезпечує мінімум у виразі:

$$\overline{R_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{n}, \ i = 1, m,$$

де n — кількість розглянутих варіантів обстановки.

Приклад 25.8

Розглянемо вибір варіантів в умовах невизначеності з використанням принципу недостатнього обґрунтування Лапласа на вихідних даних, наведених у табл. 25.3.

Таблиця 3

ВИХІДНІ ДАНІ

Варіанти рішень	Продукція		
	Q_1	Q_2	Q_3
P_1,	0,55	0,47	0,00
P_2	0,05	0,62	0,10
P_3	0,45	0,00	0,30
P_4	0,00	0,62	0,05

Оскільки розглядалися три види продукції (n = 3), то ймовірність кожного варіанта становить 0,33 (рівноймовірна).

Тоді, з урахуванням наведених даних про втрати прибутку для кожної пари сполучень рішень P і випуску продукції (табл. 25.3), а також імовірності кожного варіанта обстановки, рівної 0,33, розрахуємо середньозважений показник ризику для кожного з рішень.

Отже, середньозважений показник ризику для кожного з рішень становитиме:

$R_1 = 0,55 \cdot 0,33 + 0,47 \cdot 0,33 + 0,00 \cdot 0,33 = 0,3366$
$R_2 = 0,05 \cdot 0,33 + 0,62 \cdot 0,33 + 0,10 \cdot 0,33 = 0,2541$
$R_3 = 0,45 \cdot 0,33 + 0,00 \cdot 0,33 + 0,3 \cdot 0,33 = 0,2475$
$R_4 = 0,00 \cdot 0,33 + 0,72 \cdot 0,33 + 0,05 \cdot 0,33 = 0,2541$

Як оптимальний слід вибрати варіант рішення P_3.

Приклад 25.9

Можливе будівництво чотирьох типів електростанцій: A_1 (теплових), A_2 (пригребельних), A_3 (безгребельних) і A_4 (шлюзових). Ефективність кожного з типів електростанцій залежить від різних факторів: режиму рік, вартості палива і його перевезення тощо. Припустимо, що виділено чотири різних стани, кожен з яких означає певне сполучення факторів, що впливають на ефективність енергетичних об'єктів. Стани природи позначимо через P_1, P_2, P_3 і P_4. Економічна ефективність будівництва окремих типів електростанції змінюється залежно від станів природи і заданої матриці.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Знайти найменш ризиковану стратегію, користуючись критеріями оптимізму і песимізму.

Розв'язання

Як вихідні дані розглядається матриця програшів:

$$\begin{array}{l|cccc|c|c} & & & & & \min \alpha_i & \max \beta_i \\ & 5 & 2 & 8 & 4 & 2 & 8 \\ & 2 & 3 & 4 & 12 & 2 & 12 \\ & 8 & 5 & 3 & 10 & 3 & 10 \\ & 1 & 4 & 2 & 8 & 1 & 8 \\ \hline \min & 1 & 2 & 2 & 4 & & \end{array}$$

$\longleftarrow$(це для побудови матриці ризиків)

Відповідно до критерію Вальда:

$$H_w = \min \max a_{ij} = \min \alpha_i = \min \{8; 12; 10; 8\} = 8.$$

Отже, найменш ризикованою є стратегія A_1 і слід передбачити будівництво безшлюзової ГЕС.

Скористаємося критерієм Севіджа.

Побудуємо матрицю ризику: $r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}.$

$$R = \begin{array}{cccc|c} & & & & \max r_{ij} \\ \hline 4 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}.$$

Покажемо, наприклад, як були отримані елементи першого стовпця матриці R:

маємо $\min a_{i1} = a_{41} = 1$,

тому $r_{11} = a_{41} — a_{11} = 4$, $r_{21} = a_{41} - a_{21} = 1$, $r_{31} = a_{41} - a_{31} = 7$, $r_{41} = = a_{41} - a_{41} = 0$.

Відповідно до критерію Севіджа:

$$H_s = \min_i \max_j r_{ij}$$
$$H_s = \min_i \beta_i$$
$$\beta_i = \max_j r_{ij}$$

визначаємо

$$\min \max r_{ij} = \min \{4; 8; 7; 4\} = 4.$$

Відповідно до цього критерію передбачається рішення A_1 і A_4.

Скористаємося критерієм Гурвіца.

Оскільки значення x вибирають на підставі суб'єктивних міркувань (чим більше бажання підстрахуватися в даній ситуації, тим ближче до одиниці значення x), припустимо, що $x = 0,5$.

Тоді

$$H_G = \min_i (x\alpha_i + (1-x)\beta_i)$$

де

$$\alpha_i = \max_j a_{ij},$$
$$\beta_i = \min_j a_{ij},$$

тоді

$$H_G = \min_i (x \cdot \alpha_i + (1-x)\beta_i)$$

$$H_G = \min_i \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 2 \\ 7 \\ 6,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 4,5,$$

тобто слід прийняти рішення про будівництво шлюзових ГЕС.

Якщо припустити відомим розподіл імовірностей для різних станів природи, наприклад, вважати ці стани рівноймовірними ($q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1/4$), то для прийняття рішення слід знайти математичні очікування програшу:

$$M_1 = 5 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 8 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 = 4\,{}^3\!/\!_4$$

$$M_2 = 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 12 \cdot 1/4 = 5\,{}^1\!/\!_4$$

$$M_3 = 8 \cdot 1/4 + 5 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 10 \cdot 1/4 = 6\,{}^1\!/\!_2$$

$$M_4 = 1 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 8 \cdot 1/4 = 3\,{}^3\!/\!_4$$

Оскільки максимальне значення має M_4, то слід вибрати рішення A_4.