Lista de Exercícios

Gramáticas Livres de Contexto (GLC) e Gramáticas Regulares (GR)

Resoluções

Linguagens Formais e Autômatos

9 de dezembro de 2025

Sumário

1 Exercício 1: GLCs sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$

1.1 Exercício 1a: $L = \{a^i b^j \mid i > j\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j \mid i > j\}$

Estratégia

Precisamos gerar mais a's do que b's. A ideia é:

- Gerar pelo menos um a extra no início
- Depois gerar pares a-b balanceados

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to aS \mid aA$$
$$A \to aAb \mid \varepsilon$$

Explicação

- $S \to aS$ gera a's extras (garantindo $i > j$)
- $S \to aA$ força pelo menos um a extra antes de balancear
- $A \to aAb$ gera pares balanceados $a^n b^n$
- $A \to \varepsilon$ termina a geração

Exemplo: $aaab$ $(i = 3, j = 1)$: $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaA \Rightarrow aaAb \Rightarrow aaab$

1.2 Exercício 1b: $L = \{a^i b^j \mid i < j\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j \mid i < j\}$

Estratégia

Precisamos gerar mais b's do que a's. Simétrico ao exercício anterior.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to Sb \mid Ab$$
$$A \to aAb \mid \varepsilon$$

Explicação

- $S \to Sb$ gera b's extras no final
- $S \to Ab$ força pelo menos um b extra
- $A \to aAb$ gera pares balanceados
- $A \to \varepsilon$ termina a geração

Exemplo: abb $(i = 1, j = 2)$: $S \Rightarrow Ab \Rightarrow aAbb \Rightarrow abb$

1.3 Exercício 1c: $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$

Estratégia

União das linguagens $i > j$ e $i < j$. Usamos um símbolo inicial que escolhe qual caso seguir.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, M, N, A\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$
\begin{aligned}
S &\to M \mid N \\
M &\to aM \mid aA && \text{(caso } i > j\text{)} \\
N &\to Nb \mid Ab && \text{(caso } i < j\text{)} \\
A &\to aAb \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Explicação

- S escolhe entre M (mais a's) ou N (mais b's)
- M gera pelo menos um a extra
- N gera pelo menos um b extra
- A gera a parte balanceada

1.4 Exercício 1d: $L = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Estratégia

Gerar palíndromos com marcador central c. Cada símbolo adicionado à esquerda deve ser espelhado à direita.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to aSa \mid bSb \mid c$$

Explicação

- $S \to aSa$ adiciona a em ambos os lados
- $S \to bSb$ adiciona b em ambos os lados
- $S \to c$ gera o marcador central e termina

Exemplo: $abcba$: $S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abcba$

1.5 Exercício 1e: $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0$ e $i = k\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \text{ e } i = k\}$
(Nota: O enunciado menciona b^*, interpretado como b^j com $j > 0$)

Estratégia

Balancear a's e c's enquanto permite qualquer quantidade positiva de b's no meio.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, B\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to aSc \mid aBC$$
$$B \to bB \mid b$$

Explicação

- $S \to aSc$ gera pares a-c balanceados
- $S \to aBc$ força pelo menos um par a-c e introduz os b's
- $B \to bB \mid b$ gera um ou mais b's

Exemplo: $aabbbcc$ ($i = k = 2, j = 3$): $S \Rightarrow aSc \Rightarrow aaBcc \Rightarrow aabBcc \Rightarrow aabbBcc \Rightarrow aabbbcc$

1.6 Exercício 1f: $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \text{ e } (i = j \text{ ou } j = k)\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \text{ e } (i = j \text{ ou } j = k)\}$

Estratégia

União de duas linguagens:

- $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i = j\}$: balancear a's e b's, c's livres
- $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j = k\}$: a's livres, balancear b's e c's

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, B, C, D\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned}
S &\to AC \mid DB && \\
A &\to aAb \mid ab && \text{(gera } a^n b^n\text{)} \\
C &\to cC \mid c && \text{(gera } c^+\text{)} \\
D &\to aD \mid a && \text{(gera } a^+\text{)} \\
B &\to bBc \mid bc && \text{(gera } b^n c^n\text{)}
\end{aligned}$$

Explicação

- $S \to AC$ escolhe o caso $i = j$
- $S \to DB$ escolhe o caso $j = k$
- Cada ramo garante a condição respectiva

1.7 Exercício 1g: $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \text{ e } k = 2(i + j)\}$

Enunciado

Construa uma GLC para a linguagem $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \text{ e } k = 2(i + j)\}$

Estratégia

Cada a e cada b contribuem com 2 c's. Precisamos garantir que para cada a ou b gerado, dois c's são adicionados.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, B\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to aAcc \mid aBcc \\ A &\to aAcc \mid aBcc \\ B &\to bBcc \mid bcc \end{aligned}$$

Explicação

- Cada a gerado adiciona cc no final
- Cada b gerado adiciona cc no final
- A permite mais a's ou transição para b's
- B gera os b's restantes (pelo menos um)
- Estrutura garante pelo menos um a e um b

Exemplo: $abcccc$ $(i = 1, j = 1, k = 4 = 2(1 + 1))$: $S \Rightarrow aAcc \Rightarrow abcccc$

2 Exercício 2: GLC para $a^n b^n c^m d^m$

Enunciado

Construa uma GLC que reconheça a seguinte linguagem: $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Estratégia

A linguagem é a concatenação de duas linguagens independentes:

- $L_1 = \{a^n b^n\}$
- $L_2 = \{c^m d^m\}$

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, C\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to AC \\ A &\to aAb \mid \varepsilon \\ C &\to cCd \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Explicação

- $S \to AC$ concatena as duas partes
- A gera $a^n b^n$ (incluindo ε quando $n = 0$)
- C gera $c^m d^m$ (incluindo ε quando $m = 0$)

Exemplo: $aabbcd$ $(n = 2, m = 1)$: $S \Rightarrow AC \Rightarrow aAbC \Rightarrow aaAbbC \Rightarrow aabbC \Rightarrow aabbcCd \Rightarrow aabbcd$

3 Exercício 3: GLCs Diversas

3.1 Exercício 3a: ER $(a^*b^*)^*$

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ pode ser descrito como a ER } (a^*b^*)^*\}$

Estratégia

$(a^*b^*)^* = \Sigma^*$ (todas as cadeias sobre $\{a, b\}$). Esta é uma linguagem regular.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to aS \mid bS \mid \varepsilon$$

Explicação

A gramática gera qualquer sequência de a's e b's, incluindo a palavra vazia.

3.2 Exercício 3b: Parênteses Balanceados

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \mid w \text{ é formado por parênteses balanceados}\}$
Exemplo: `()()`, `(())`, `((()))`

Estratégia

Parênteses balanceados podem ser:

- Vazios
- Um par contendo parênteses balanceados
- Concatenação de parênteses balanceados

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{(,)\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to (S) \mid SS \mid \varepsilon$$

Explicação

- $S \to (S)$ envolve expressão balanceada em parênteses
- $S \to SS$ concatena duas expressões balanceadas
- $S \to \varepsilon$ caso base (vazio é balanceado)

Exemplo: `(()())`: $S \Rightarrow (S) \Rightarrow (SS) \Rightarrow ((S)S) \Rightarrow (()(S)) \Rightarrow (()())$

3.3 Exercício 3c: Parênteses e Colchetes Balanceados

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \mid w \text{ é formado por parênteses e colchetes balanceados}\}$
Exemplo: `[()()]`, `([])`, `[](()[()])`

Estratégia

Extensão do exercício anterior para incluir colchetes. Cada tipo de delimitador deve casar corretamente.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{(,), [,]\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to (S) \mid [S] \mid SS \mid \varepsilon$$

Explicação

- $S \to (S)$ envolve em parênteses
- $S \to [S]$ envolve em colchetes
- $S \to SS$ concatenação
- $S \to \varepsilon$ caso base

Exemplo: `[([])]`: $S \Rightarrow [S] \Rightarrow [(S)] \Rightarrow [([S])] \Rightarrow [([])]$

3.4 Exercício 3d: $a^n b^n \cup b^n a^n$

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \mid w$ é formado por n a's seguidos de n b's, ou n b's seguidos de n a's$\}$

Estratégia

União de duas linguagens simétricas: $a^n b^n$ e $b^n a^n$.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, B\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to aAb \mid \varepsilon \\ B &\to bBa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Explicação

- S escolhe entre os dois casos
- A gera $a^n b^n$
- B gera $b^n a^n$

3.5 Exercício 3e: Palíndromos de Tamanho Ímpar

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \text{ e } |w| \text{ é ímpar}\}$

Estratégia

Palíndromos ímpares têm um símbolo central. Geramos simetricamente ao redor dele.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1$$

Explicação

- $S \to 0S0$ e $S \to 1S1$ adicionam símbolos simétricos
- $S \to 0$ e $S \to 1$ geram o símbolo central (tamanho ímpar)

Exemplo: 01010: $S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow 01S10 \Rightarrow 01010$

3.6 Exercício 3f: Palíndromos

Enunciado

Construa uma GLC para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$ (todos os palíndromos)

Estratégia

Incluir palíndromos de tamanho par e ímpar. Para pares, não há símbolo central.

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

Explicação

- $S \to 0S0$ e $S \to 1S1$ adicionam símbolos simétricos
- $S \to 0$ e $S \to 1$ para palíndromos ímpares
- $S \to \varepsilon$ para palíndromos pares e palavra vazia

Exemplo par: 0110: $S \Rightarrow 0S0 \Rightarrow 01S10 \Rightarrow 0110$

4 Exercício 4: Expressões Matemáticas

Enunciado

Construa uma GLC que reconheça a linguagem $L = \{w \mid w$ é uma expressão matemática bem formada que utiliza parênteses e as operações de soma e subtração$\}$ Use o terminal `d` para representar dígitos [1..9].
Exemplo: `d+d`, `d-d`, `(d+d)-d`, `(d+d)-d+d`, `(d+d-d)`

Estratégia

Uma expressão é:

- Um dígito
- Uma expressão entre parênteses
- Duas expressões conectadas por $+$ ou $-$

Gramática

$G = (V, \Sigma, P, E)$ onde:

- $V = \{E, T\}$
- $\Sigma = \{d, +, -, (,)\}$
- E é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} &E \to E + T \mid E - T \mid T \\ &T \to (E) \mid d \end{aligned}$$

Explicação

- E representa uma expressão completa
- T representa um termo (dígito ou expressão entre parênteses)
- Associatividade à esquerda para $+$ e $-$

Exemplo: `(d+d)-d`: $E \Rightarrow E{-}T \Rightarrow T{-}T \Rightarrow (E){-}d \Rightarrow (E{+}T){-}d \Rightarrow (T{+}T){-}d \Rightarrow (d + d) - d$

5 Exercício 5: Gramáticas Regulares (GR)

5.1 Exercício 5a: Pelo menos três 1's

Enunciado

Construa uma GR para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ possui pelo menos três 1's}\}$

Estratégia

Usar estados para contar o número de 1's vistos (0, 1, 2, 3+). Gramática linear à direita.

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to 0S \mid 1A \\ A &\to 0A \mid 1B \\ B &\to 0B \mid 1C \\ C &\to 0C \mid 1C \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Explicação

- S: nenhum 1 visto ainda
- A: um 1 visto
- B: dois 1's vistos
- C: três ou mais 1's vistos (estado final)

5.2 Diagrama do AFN Equivalente

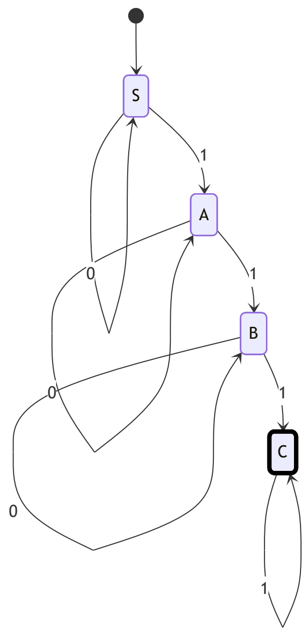

Figura 1: AFN equivalente à GR do Exercício 5a: Pelo menos três 1's

5.3 Exercício 5b: Começa com 0 e termina com 1

Enunciado

Construa uma GR para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ começa com 0 e termina com 1}\}$

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to 0A \\ A &\to 0A \mid 1A \mid 1 \end{aligned}$$

Explicação

- $S \to 0A$ força início com 0
- A processa o resto da cadeia
- $A \to 1$ termina com 1

Nota: A menor palavra aceita é "01".

5.4 Diagrama do AFN Equivalente

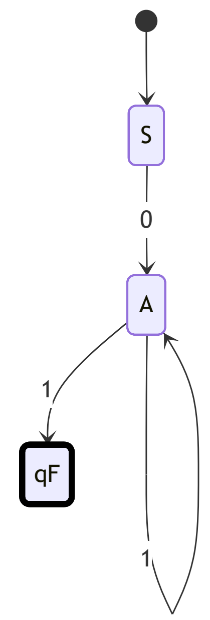

Figura 2: AFN equivalente à GR do Exercício 5b: Começa com 0 e termina com 1

5.5 Exercício 5c: ER $(0^*1^*)^*$

Enunciado

Construa uma GR para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ pode ser descrito como a ER $(0^*1^*)^*\}$

Estratégia

$(0^*1^*)^* = \Sigma^*$. Aceita qualquer cadeia.

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$S \to 0S \mid 1S \mid \varepsilon$$

5.6 Diagrama do AFN Equivalente

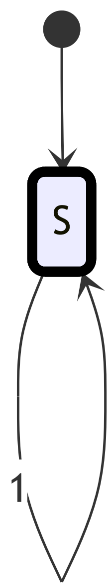

Figura 3: AFN equivalente à GR do Exercício 5c: $(0^*1^*)^* = \Sigma^*$

5.7 Exercício 5d: Número ímpar de ocorrências de "01"

Enunciado

Construa uma GR para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ possui um número ímpar de ocorrências consecutivas de "01"$\}$

Estratégia

Usar estados para rastrear:

- Paridade das ocorrências de "01" (par/ímpar)
- Se o último símbolo foi 0 (potencial início de "01")

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A, B, C\}$ (S=par/não-0, A=par/após-0, B=ímpar/não-0, C=ímpar/após-0)
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$
\begin{aligned}
S &\to 0A \mid 1S \\
A &\to 0A \mid 1B \\
B &\to 0C \mid 1B \mid \varepsilon \\
C &\to 0C \mid 1S \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Explicação

- S: contagem par, último não foi 0
- A: contagem par, último foi 0
- B: contagem ímpar, último não foi 0 (FINAL)
- C: contagem ímpar, último foi 0 (FINAL)

5.8 Diagrama do AFN Equivalente

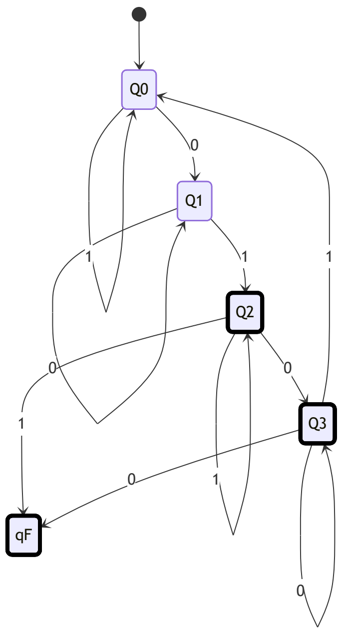

Figura 4: AFN equivalente à GR do Exercício 5d: Número ímpar de ocorrências de “01”

5.9 Exercício 5e: Número Binário Válido

Enunciado

Construa uma GR para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ é um número binário válido (sem zeros à esquerda)}\}$

Estratégia

Números binários válidos:

- "0" sozinho
- Começa com 1, seguido de qualquer sequência de 0's e 1's

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$\begin{aligned} S &\to 0 \mid 1A \\ A &\to 0A \mid 1A \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Explicação

- $S \to 0$ aceita apenas "0"
- $S \to 1A$ começa com 1
- A aceita qualquer continuação (incluindo vazia para "1" sozinho)

5.10 Diagrama do AFN Equivalente

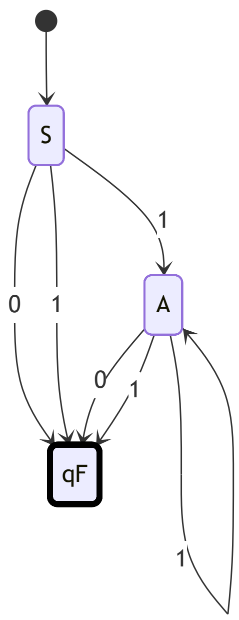

Figura 5: AFN equivalente à GR do Exercício 5e: Número binário válido

6 Exercício 6: Números de Ponto Flutuante

Enunciado

Construa uma GR que reconheça a linguagem $L = \{w \mid w \text{ é um número flutuante}\}$
Use o terminal `d` para representar dígitos [0..9] e `n` para [1..9].
Exemplo: `123.547`, `.75`, `0.87`, `445`

Estratégia

Números de ponto flutuante podem ter:

- Parte inteira seguida de ponto e parte decimal: `123.45`
- Apenas parte decimal: `.75`
- Apenas parte inteira: `445`
- Zero seguido de ponto: `0.87`

Gramática Regular (Linear à Direita)

$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:

- $V = \{S, I, D, F\}$
- $\Sigma = \{d, n, .\}$ onde $d \in \{0..9\}$, $n \in \{1..9\}$
- S é o símbolo inicial
- Produções P:

$$
\begin{aligned}
S &\to nI \mid 0 \mid 0.D \mid .D \\
I &\to dI \mid .D \mid \varepsilon \\
D &\to dF \\
F &\to dF \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Explicação

- S inicia: número começando com n (1-9), apenas 0, 0 seguido de decimal, ou decimal direto
- I continua parte inteira ou vai para decimal
- D requer pelo menos um dígito após o ponto
- F permite mais dígitos na parte decimal

Exemplos aceitos: 123, 0, 0.5, .75, 123.456

6.1 Diagrama do AFN Equivalente

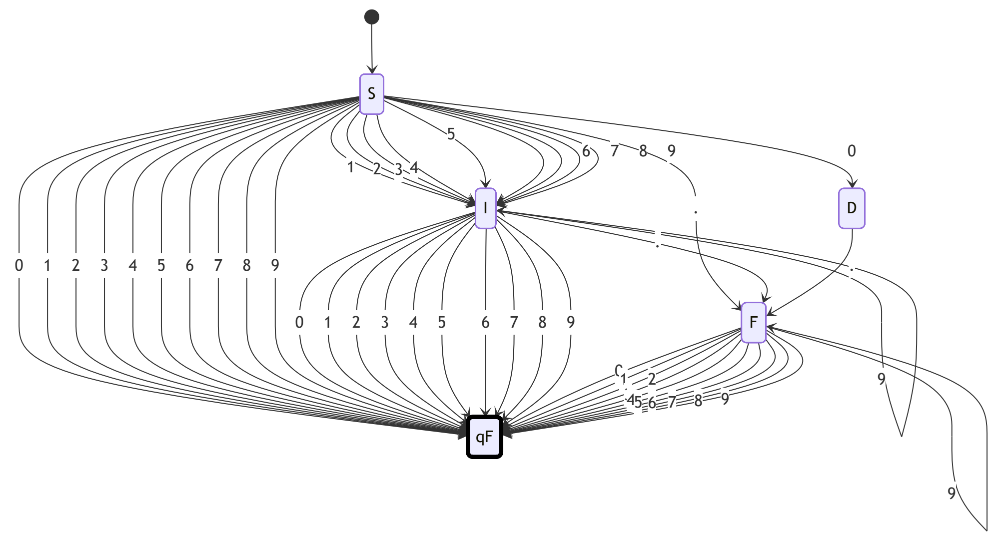

Figura 6: AFN equivalente à GR do Exercício 6: Números de ponto flutuante

7 Resumo dos Exercícios

Ex.	Linguagem	Alfabeto	Tipo
1a	$a^i b^j$, $i > j$	$\{a, b\}$	GLC
1b	$a^i b^j$, $i < j$	$\{a, b\}$	GLC
1c	$a^i b^j$, $i \neq j$	$\{a, b\}$	GLC
1d	wcw^R	$\{a, b, c\}$	GLC
1e	$a^i b^j c^k$, $i = k$	$\{a, b, c\}$	GLC
1f	$a^i b^j c^k$, $i = j \vee j = k$	$\{a, b, c\}$	GLC
1g	$a^i b^j c^k$, $k = 2(i + j)$	$\{a, b, c\}$	GLC
2	$a^n b^n c^m d^m$	$\{a, b, c, d\}$	GLC
3a	$(a^* b^*)^* = \Sigma^*$	$\{a, b\}$	GLC (Regular)
3b	Parênteses balanceados	$\{(,)\}$	GLC
3c	Parênteses e colchetes	$\{(,), [,]\}$	GLC
3d	$a^n b^n \cup b^n a^n$	$\{a, b\}$	GLC
3e	Palíndromos ímpares	$\{0, 1\}$	GLC
3f	Palíndromos	$\{0, 1\}$	GLC
4	Expressões matemáticas	$\{d, +, -, (,)\}$	GLC
5a	Pelo menos três 1's	$\{0, 1\}$	GR
5b	Começa com 0, termina com 1	$\{0, 1\}$	GR
5c	(0*1*)*	$\{0, 1\}$	GR
5d	Número ímpar de "01"	$\{0, 1\}$	GR
5e	Número binário válido	$\{0, 1\}$	GR
6	Números de ponto flutuante	$\{d, n, .\}$	GR

Legenda:

- **GLC**: Gramática Livre de Contexto
- **GR**: Gramática Regular (Linear à Direita)

Observações

- Gramáticas Livres de Contexto têm produções da forma $A \to \alpha$, onde A é um não-terminal e α é uma sequência de terminais e não-terminais
- Gramáticas Regulares (lineares à direita) têm produções da forma $A \to aB$ ou $A \to a$ ou $A \to \varepsilon$
- Toda GR é também uma GLC, mas nem toda GLC é uma GR
- Os exercícios 5 e 6 são gramáticas regulares que podem ser convertidas diretamente em AFDs
- ε representa a palavra vazia