

# Lista de Exercícios

## Máquinas de Turing

Linguagens Formais e Autômatos

CEFET

Dezembro 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Exercício 1: Construção de Máquinas de Turing</b>	<b>2</b>
1.1	1.a) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \text{ e } w \text{ começa com } ab\}$	2
1.2	1.b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$	3
1.3	1.c) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \text{ e } n = 2m\}$	4
1.4	1.d) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$	5
1.5	1.e) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ e } n_a(w) = n_b(w)\}$	6
1.6	1.f) $L = \{1^n 0^{n+3} \mid n \geq 0\}$	7
1.7	1.g) $L = \{a^n b^{2n} c^{n-1} \mid n > 0\}$	8
1.8	1.h) $L = \{a^i b^j a^k \mid j = \max(i, k)\}$	9
1.9	1.i) $L = \{a^i b^j a^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$	10
<b>2</b>	<b>Exercício 2: Análise de Máquina de Turing</b>	<b>11</b>
2.1	Diagrama de Estados da MT	11
2.2	Definição Formal da MT	11
2.3	Função de Transição ( $\delta$ )	12
2.4	Questão a) Sequência de Configurações	13
2.5	Resumo da Questão a)	14
2.6	Questão b) Linguagem Aceita	15
<b>3</b>	<b>Exercício 3: MT Multifita</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Exercício 4: MT Não-Determinística</b>	<b>17</b>

# 1 Exercício 1: Construção de Máquinas de Turing

**Enunciado:** Construa Máquinas de Turing padrão que aceitem as seguintes linguagens:

**1.1 1.a)**  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \text{ e } w \text{ começa com } ab\}$

## Descrição

Esta MT verifica se a cadeia de entrada começa com os símbolos  $ab$  em sequência.

## Algoritmo

1. Verifica se o primeiro símbolo é  $a$
2. Move para a direita e verifica se o segundo símbolo é  $b$
3. Se ambos estiverem corretos, aceita
4. Caso contrário, rejeita

## Diagrama de Estados

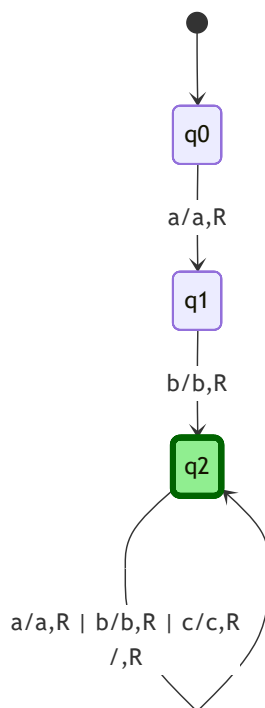


Figura 1: MT para  $L = \{w \mid w \text{ começa com } ab\}$

## 1.2 1.b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

### Descrição

Esta MT aceita cadeias com igual quantidade de  $a$ 's,  $b$ 's e  $c$ 's em sequência.

### Algoritmo

1. Marca um  $a$  com  $X$
2. Busca e marca um  $b$  com  $Y$
3. Busca e marca um  $c$  com  $Z$
4. Retorna ao início e repete até não haver mais símbolos não marcados
5. Se sobrar algum símbolo não pareado, rejeita

### Diagrama de Estados

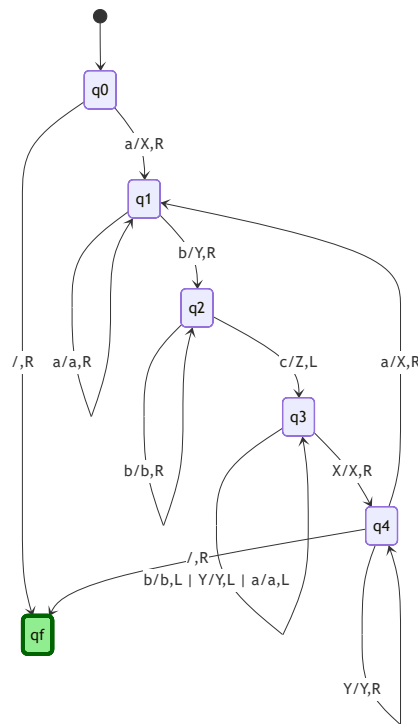


Figura 2: MT para  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

### 1.3 1.c) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \text{ e } n = 2m\}$

#### Descrição

Esta MT aceita cadeias onde o número de  $a$ 's é o dobro do número de  $b$ 's.

#### Algoritmo

1. Marca dois  $a$ 's com  $X$
2. Busca e marca um  $b$  com  $Y$
3. Retorna e repete
4. Aceita se todos os símbolos forem pareados corretamente

#### Diagrama de Estados

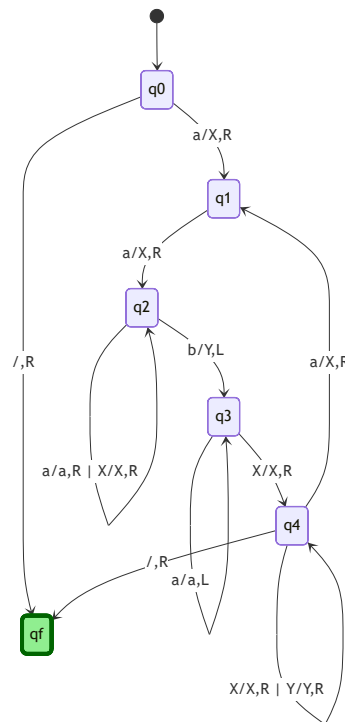


Figura 3: MT para  $L = \{a^n b^m \mid n = 2m\}$

### 1.4 1.d) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

#### Descrição

Esta MT aceita palíndromos pares, ou seja, cadeias que são iguais lidas da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

#### Algoritmo

1. Memoriza e marca o primeiro símbolo
2. Vai até o último símbolo não marcado
3. Verifica se é igual ao memorizado
4. Marca e retorna ao início
5. Repete até todos estarem marcados

#### Diagrama de Estados

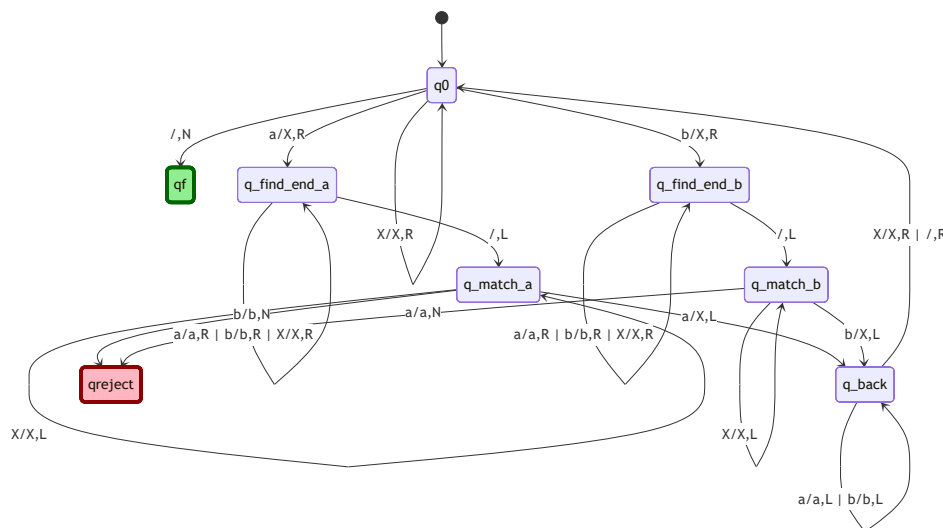


Figura 4: MT para  $L = \{ww^R\}$  (palíndromos pares)

### 1.5 1.e) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ e } n_a(w) = n_b(w)\}$

#### Descrição

Esta MT aceita cadeias com igual quantidade de  $a$ 's e  $b$ 's, em qualquer ordem.

#### Algoritmo

1. Encontra um  $a$  não marcado, marca com  $X$
2. Busca um  $b$  não marcado, marca com  $X$
3. (Ou vice-versa: encontra  $b$  primeiro, depois  $a$ )
4. Retorna ao início e repete
5. Aceita se todos os símbolos forem pareados

#### Diagrama de Estados

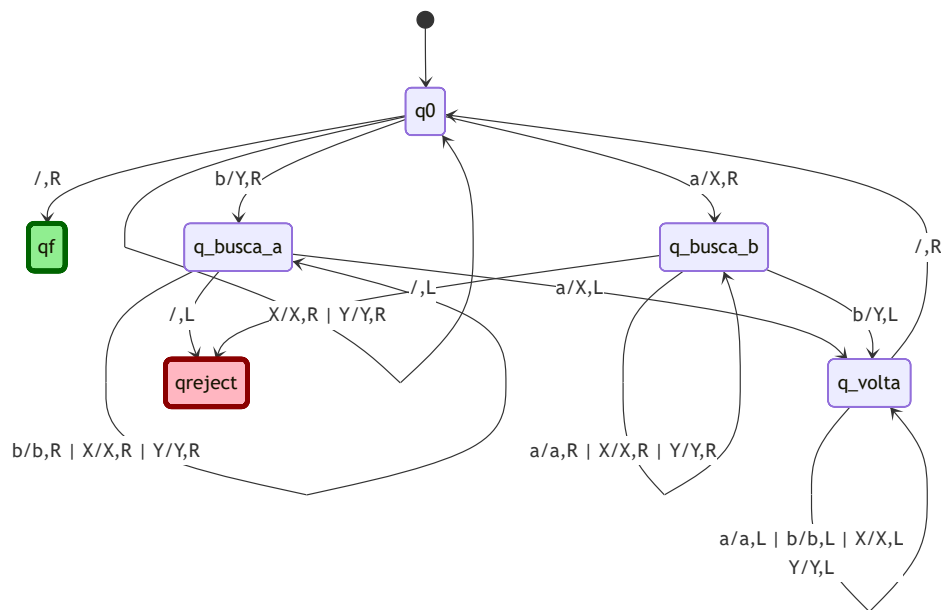


Figura 5: MT para  $L = \{w \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

## 1.6 1.f) $L = \{1^n 0^{n+3} \mid n \geq 0\}$

### Descrição

Esta MT aceita cadeias com  $n$  uns seguidos de  $n + 3$  zeros.

### Algoritmo

1. Verifica que existem pelo menos 3 zeros no início (após os 1's)
2. Para cada 1, marca e busca um 0 correspondente
3. Aceita se a contagem estiver correta

### Diagrama de Estados

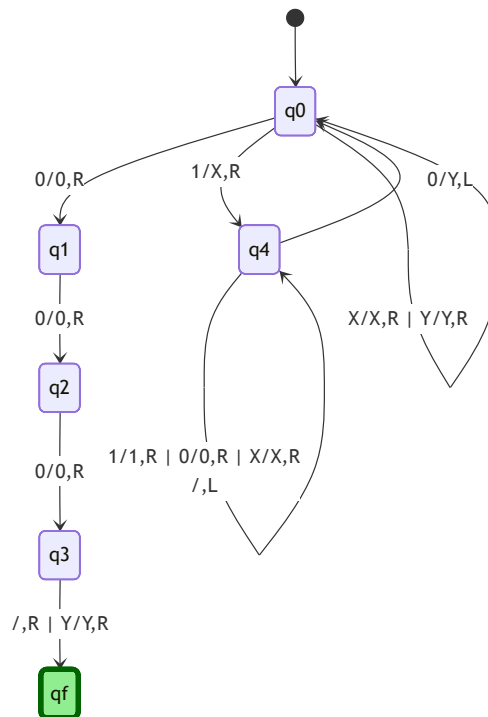


Figura 6: MT para  $L = \{1^n 0^{n+3}\}$

## 1.7 1.g) $L = \{a^n b^{2n} c^{n-1} \mid n > 0\}$

### Descrição

Esta MT aceita cadeias onde:

- Número de  $b$ 's é o dobro do número de  $a$ 's
- Número de  $c$ 's é um a menos que o número de  $a$ 's

### Algoritmo

1. Para cada  $a$ : marca dois  $b$ 's e um  $c$  (exceto o primeiro  $a$  que não marca  $c$ )
2. Verifica que a contagem está correta

### Diagrama de Estados

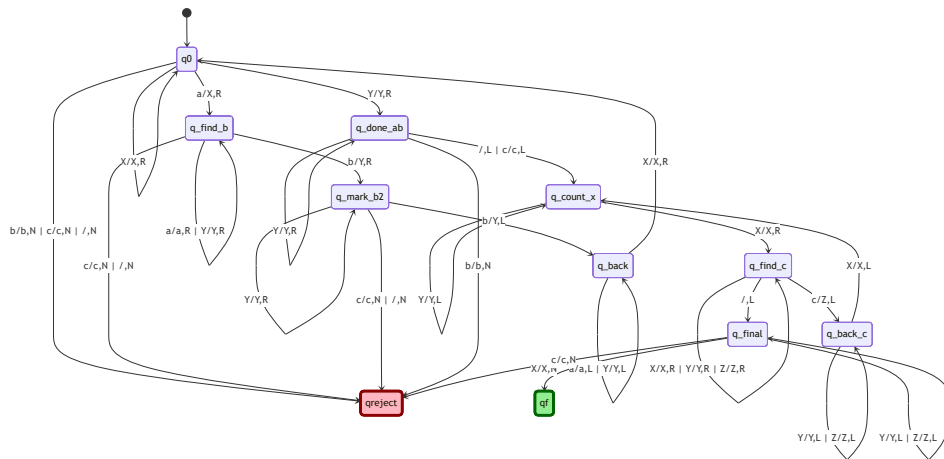


Figura 7: MT para  $L = \{a^n b^{2n} c^{n-1}\}$



## 1.8 1.h) $L = \{a^i b^j a^k \mid j = \max(i, k)\}$

### Descrição

Esta MT aceita cadeias onde o número de  $b$ 's é igual ao máximo entre o número de  $a$ 's à esquerda e à direita.

### Algoritmo

1. Pareia  $a$ 's da esquerda com  $a$ 's da direita
2. O excedente (se houver) deve ser igual aos  $b$ 's
3. Os  $b$ 's pareados com  $a$ 's dos dois lados devem bater

### Diagrama de Estados

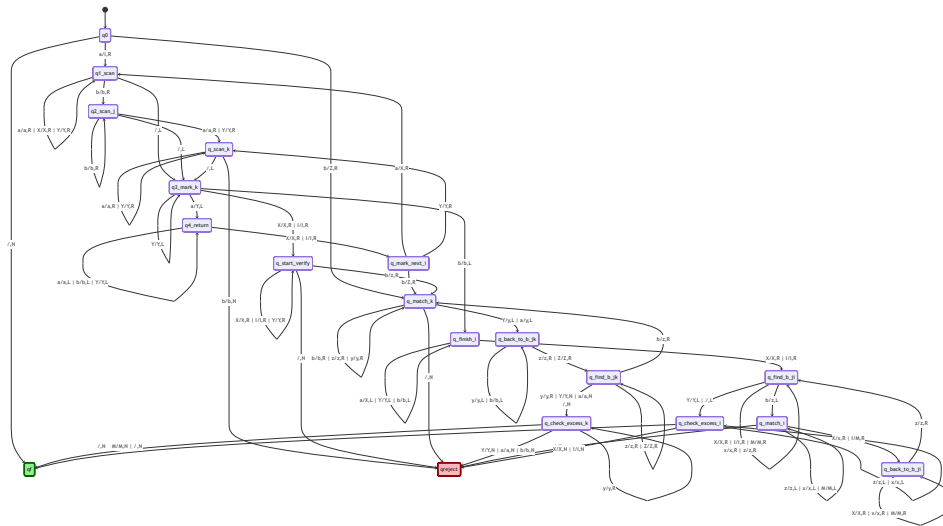


Figura 8: MT para  $L = \{a^i b^j a^k \mid j = \max(i, k)\}$

## 1.9 1.i) $L = \{a^i b^j a^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$

### Descrição

Esta MT aceita cadeias onde o número de  $b$ 's é igual ao número de  $a$ 's à esquerda **OU** ao número de  $a$ 's à direita.

### Algoritmo

A MT verifica ambas as condições:

1. **Caso  $i = j$ :** Pareia cada  $a$  da esquerda com um  $b$
2. **Caso  $j = k$ :** Pareia cada  $b$  com um  $a$  da direita
3. Aceita se qualquer uma das condições for satisfeita

### Complexidade

- **Estados:** 27
- **Transições:** 116

### Diagrama de Estados

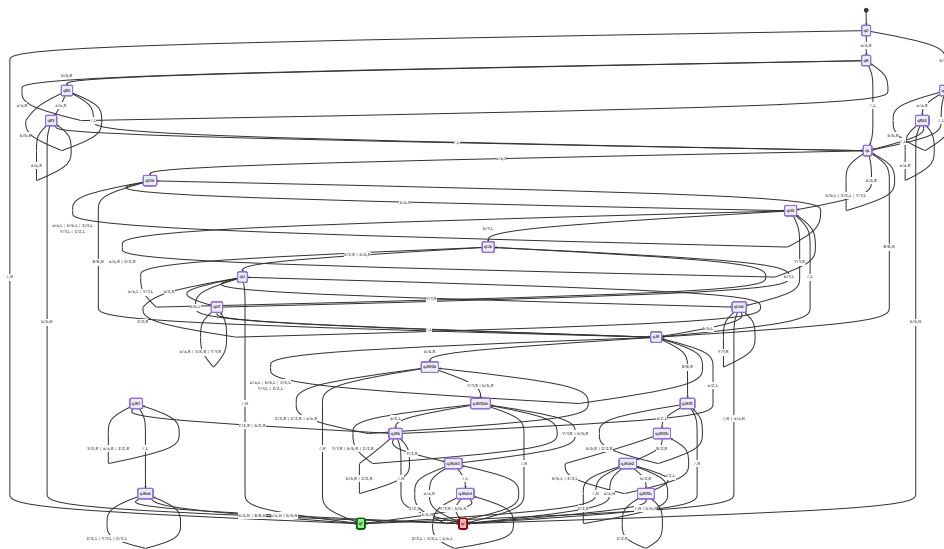


Figura 9: MT para  $L = \{a^i b^j a^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$

## Versão sem Estado de Rejeição Explícito

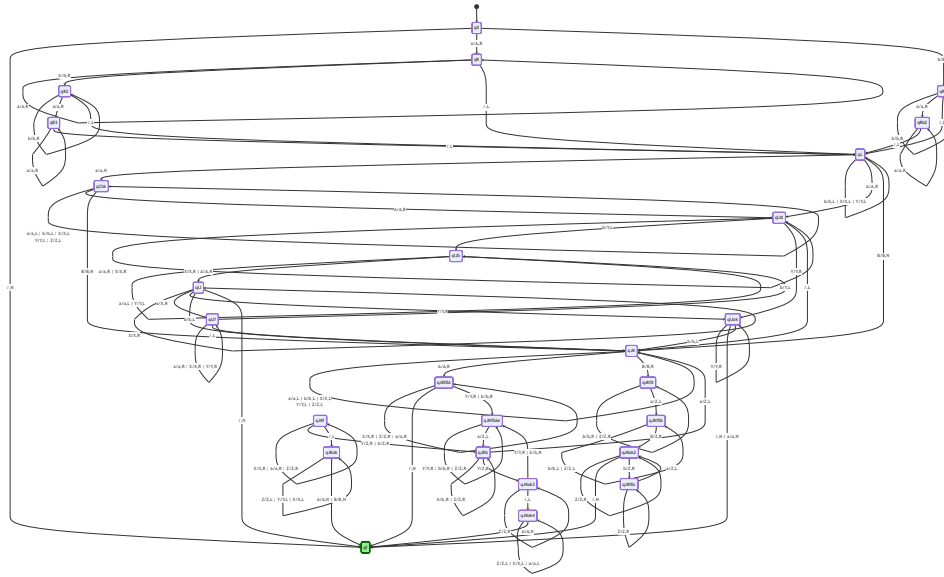


Figura 10: MT para  $L = \{a^i b^j a^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$  (sem transições para  $q_r$ )

## 2 Exercício 2: Análise de Máquina de Turing

**Enunciado:** Dada a MT da figura abaixo, sobre o alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ , responda:

*O símbolo # não pertence ao alfabeto e foi inserido somente para marcar o início da fita.*

### 2.1 Diagrama de Estados da MT

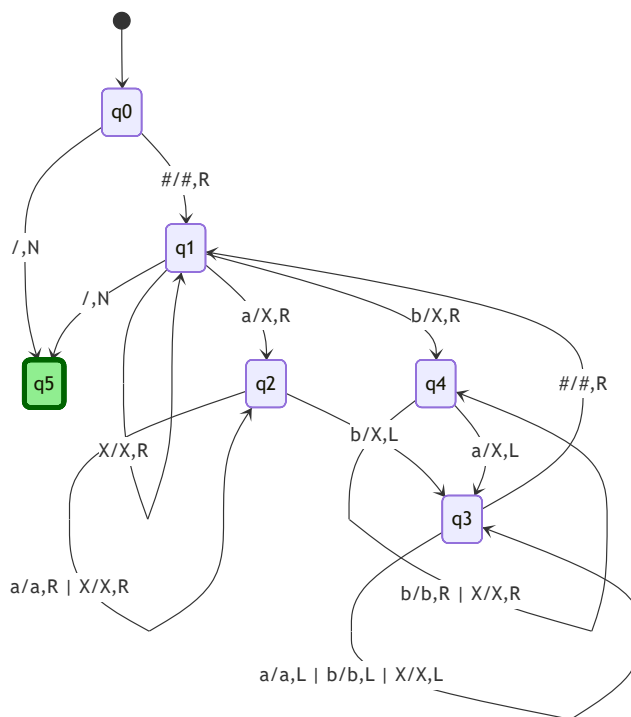


Figura 11: Máquina de Turing para  $L = \{w \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

### 2.2 Definição Formal da MT

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$$

Componente	Valor
Estados ( $Q$ )	$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_r\}$
Alfabeto de Entrada ( $\Sigma$ )	$\{a, b\}$
Alfabeto da Fita ( $\Gamma$ )	$\{a, b, \#, X, \_ \}$
Símbolo Branco	$\_$
Estado Inicial	$q_0$
Estado de Aceitação	$q_5$
Estado de Rejeição	$q_r$ (implícito)

Tabela 1: Componentes da Máquina de Turing

### Notação Formal das Transições

A função de transição  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$  é definida pelas seguintes regras:

$$\delta(q_0, \#) = (q_1, \#, R) \quad (1)$$

$$\delta(q_0, \_) = (q_5, \_, N) \quad (2)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_2, X, R) \quad (3)$$

$$\delta(q_1, b) = (q_4, X, R) \quad (4)$$

$$\delta(q_1, X) = (q_1, X, R) \quad (5)$$

$$\delta(q_1, \_) = (q_5, \_, N) \quad (6)$$

$$\delta(q_2, a) = (q_2, a, R) \quad (7)$$

$$\delta(q_2, X) = (q_2, X, R) \quad (8)$$

$$\delta(q_2, b) = (q_3, X, L) \quad (9)$$

$$\delta(q_3, a) = (q_3, a, L) \quad (10)$$

$$\delta(q_3, b) = (q_3, b, L) \quad (11)$$

$$\delta(q_3, X) = (q_3, X, L) \quad (12)$$

$$\delta(q_3, \#) = (q_1, \#, R) \quad (13)$$

$$\delta(q_4, b) = (q_4, b, R) \quad (14)$$

$$\delta(q_4, X) = (q_4, X, R) \quad (15)$$

$$\delta(q_4, a) = (q_3, X, L) \quad (16)$$

### 2.3 Função de Transição ( $\delta$ )

Estado	Lê	Próximo	Escreve	Move	Descrição
$q_0$	$\#$	$q_1$	$\#$	R	Início: Move para direita
$q_0$	$\_$	$q_5$	$\_$	N	String vazia: aceita
$q_1$	$a$	$q_2$	$X$	R	Marca $a$ e busca $b$
$q_1$	$b$	$q_4$	$X$	R	Marca $b$ e busca $a$
$q_1$	$X$	$q_1$	$X$	R	Pula marcados
$q_1$	$\_$	$q_5$	$\_$	N	Todos pareados: aceita
$q_2$	$a$	$q_2$	$a$	R	Pula $a$ 's
$q_2$	$X$	$q_2$	$X$	R	Pula $X$ 's
$q_2$	$b$	$q_3$	$X$	L	Encontrou $b$ : marca e retorna
$q_3$	$a$	$q_3$	$a$	L	Retorna pulando $a$
$q_3$	$b$	$q_3$	$b$	L	Retorna pulando $b$
$q_3$	$X$	$q_3$	$X$	L	Retorna pulando $X$
$q_3$	$\#$	$q_1$	$\#$	R	Chegou ao início
$q_4$	$b$	$q_4$	$b$	R	Pula $b$ 's
$q_4$	$X$	$q_4$	$X$	R	Pula $X$ 's
$q_4$	$a$	$q_3$	$X$	L	Encontrou $a$ : marca e retorna

Tabela 2: Função de Transição (16 transições)

## 2.4 Questão a) Sequência de Configurações

Cadeia: #abab

**ACEITA**

**Resultado: ACEITA** (2 *a*'s e 2 *b*'s pareados)

Passo 0:  $q_0, [\#]abab \rightarrow (q_0, \#) \rightarrow (q_1, \#, R)$   
 Passo 1:  $q_1, \#[a]bab \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$   
 Passo 2:  $q_2, \#X[b]ab \rightarrow (q_2, b) \rightarrow (q_3, X, L)$   
 Passo 3:  $q_3, \#[X]Xab \rightarrow (q_3, X) \rightarrow (q_3, X, L)$   
 Passo 4:  $q_3, [\#]XXab \rightarrow (q_3, \#) \rightarrow (q_1, \#, R)$   
 Passo 5:  $q_1, \#[X]Xab \rightarrow (q_1, X) \rightarrow (q_1, X, R)$   
 Passo 6:  $q_1, \#X[X]ab \rightarrow (q_1, X) \rightarrow (q_1, X, R)$   
 Passo 7:  $q_1, \#XX[a]b \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$   
 Passo 8:  $q_2, \#XXX[b] \rightarrow (q_2, b) \rightarrow (q_3, X, L)$   
 ... (retorno para #)  
 Passo 17:  $q_1, \#XXXX[_] \rightarrow (q_1, \_) \rightarrow (q_5, \_, N)$

Cadeia: #aabba

**REJEITA**

**Resultado: REJEITA** (3 *a*'s e 2 *b*'s - sobrou 1 *a* sem par)

Passo 0:  $q_0, [\#]aabba \rightarrow (q_0, \#) \rightarrow (q_1, \#, R)$   
 Passo 1:  $q_1, \#[a]abba \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$   
 Passo 2:  $q_2, \#X[a]bba \rightarrow (q_2, a) \rightarrow (q_2, a, R)$   
 Passo 3:  $q_2, \#Xa[b]ba \rightarrow (q_2, b) \rightarrow (q_3, X, L)$   
 ... (pareamento de a-b, a-b)  
 Passo 19:  $q_1, \#XXXX[a] \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$   
 Passo 20:  $q_2, \#XXXXX[_] \rightarrow \text{SEM TRANSIÇÃO!}$

Cadeia: #bbabaa

**ACEITA**

**Resultado: ACEITA** (3 *a*'s e 3 *b*'s pareados)

Passo 0:  $q_0, [\#]bbabaa \rightarrow (q_0, \#) \rightarrow (q_1, \#, R)$   
 Passo 1:  $q_1, \#[b]babaa \rightarrow (q_1, b) \rightarrow (q_4, X, R)$   
 Passo 2:  $q_4, \#X[b]abaa \rightarrow (q_4, b) \rightarrow (q_4, b, R)$   
 Passo 3:  $q_4, \#Xb[a]baa \rightarrow (q_4, a) \rightarrow (q_3, X, L)$   
 ... (pareamento de b-a, b-a, b-a)  
 Passo 35:  $q_1, \#XXXXXX[_] \rightarrow (q_1, \_) \rightarrow (q_5, \_, N)$

Cadeia: #abaabab

**REJEITA**

**Resultado: REJEITA** (4 *a*'s e 3 *b*'s - sobrou 1 *a* sem par)

Passo 0:  $q_0, [\#]abaabab \rightarrow (q_0, \#) \rightarrow (q_1, \#, R)$

Passo 1:  $q_1, \#[a]baabab \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$

Passo 2:  $q_2, \#X[b]aabab \rightarrow (q_2, b) \rightarrow (q_3, X, L)$

... (pareamento de a-b, a-b, a-b)

Passo 34:  $q_1, \#XXXXX[a]X \rightarrow (q_1, a) \rightarrow (q_2, X, R)$

Passo 35:  $q_2, \#XXXXXX[X] \rightarrow (q_2, X) \rightarrow (q_2, X, R)$

Passo 36:  $q_2, \#XXXXXXX[_] \rightarrow \text{SEM TRANSIÇÃO!}$

## 2.5 Resumo da Questão a)

Cadeia	# de <i>a</i> 's	# de <i>b</i> 's	Resultado
#abab	2	2	<b>ACEITA</b>
#aabba	3	2	<b>REJEITA</b>
#bbabaa	3	3	<b>ACEITA</b>
#abaabab	4	3	<b>REJEITA</b>

Tabela 3: Resultados para as cadeias da questão a)

## 2.6 Questão b) Linguagem Aceita

### Resposta

A linguagem  $L$  aceita por essa Máquina de Turing é:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$$

Onde:

- $n_a(w)$  = número de ocorrências de  $a$  na cadeia  $w$
- $n_b(w)$  = número de ocorrências de  $b$  na cadeia  $w$

### Descrição

A MT aceita todas as cadeias sobre  $\{a, b\}$  que contêm **exatamente o mesmo número de  $a$ 's e  $b$ 's**, independente da ordem em que aparecem.

### Exemplos de cadeias aceitas

- $\epsilon$  (cadeia vazia)
- $ab, ba$
- $aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa$
- $aaabbb, ababab, aababb, \text{etc.}$

### Exemplos de cadeias rejeitadas

- $a, b$
- $aab, abb, aaa, bbb$
- $aabba, abbba, \text{etc.}$

### Funcionamento do Algoritmo

1. **Início ( $q_0$ ):** Lê o marcador  $\#$  e vai para  $q_1$
2. **Busca de par ( $q_1$ ):**
  - Se encontra  $a$ : marca com  $X$ , vai para  $q_2$  (buscar  $b$ )
  - Se encontra  $b$ : marca com  $X$ , vai para  $q_4$  (buscar  $a$ )
  - Se encontra  $\_$ : todos pareados  $\rightarrow$  **ACEITA**
3. **Busca de  $b$  ( $q_2$ ):** Avança até encontrar  $b$ , marca e retorna
4. **Busca de  $a$  ( $q_4$ ):** Avança até encontrar  $a$ , marca e retorna
5. **Retorno ( $q_3$ ):** Volta ao início para próximo par
6. **Aceitação ( $q_5$ ):** Estado final



### 3 Exercício 3: MT Multifita

**Enunciado:** Refaça os exercícios usando MT multifita com uma complexidade de tempo inferior à MT padrão.

*A ser implementado...*

## 4 Exercício 4: MT Não-Determinística

**Enunciado:** Refaça os exercícios usando MT Não-Determinísticas com uma complexidade de tempo inferior à MT padrão.

*A ser implementado...*

## Anexo: Comandos CLI para Testes

Os arquivos JSON das Máquinas de Turing podem ser testados usando o CLI:

```
# Testar exercicio 1.a
```

```
node cli.js --def input/MT_exe1_a.json --test "ab,abc,abcc,ba,a"
```

```
# Testar exercicio 1.i
```

```
node cli.js --def input/MT_exe1_i.json --test "ab,aab,abb,aabb" --verbose
```

```
# Testar exercicio 2 (cadeias da questao a)
```

```
node cli.js --def input/MT_exe2.json --test "#abab,#aabba,#bbabaa,#abaabab"
```

```
# Teste com saida detalhada
```

```
node cli.js --def input/MT_exe2.json --test "#abab" --verbose
```