ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/UyOard2MfNU

Partie 1 : Vocabulaire

Addition :	36,3 + 43,96	=	80,26
	Les termes		La somme
Soustraction :	29,13 – 12,6	=	16,53
	Les termes		La différence
Multiplication :	844,7 $\times$ 3,68	=	3 108,496
	Les facteurs		Le produit

Facteur vient du latin « factor » = celui qui fait

Méthode : Utiliser le vocabulaire sur les opérations

Vidéo https://youtu.be/tIqzLiwmeOg

1) Calculer :
a) la somme de 7 et de 9 ;
b) le produit de 4 par 10 ;
c) la différence de 11 et de 3.

2) Compléter :
a) Le/La ... de 5 par 7 vaut 35.
b) Le/La ... de 34 et de 10 vaut 24.
c) Le/La ... de 39 et de 11 vaut 50.

Correction
1) a) 7 + 9 = 16
b) 4 $\times$ 10 = 40
c) 11 – 3 = 8

2) Compléter :
a) Le produit de 5 par 7 vaut 35.
b) La différence de 34 et de 10 vaut 24.
c) La somme de 39 et de 11 vaut 50.

Partie 2 : Règles de calculs

1) Calculs avec des additions et des soustractions uniquement

Lorsqu'il y a que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Méthode : Effectuer un calcul avec des additions et des soustractions

Vidéo https://youtu.be/6_UeJI7JWTU

Calculer : $A = 25 + 6 - 5$ $B = 45 - 5 + 2$

Correction

On commence par effectuer le calcul le plus à gauche :

$A = 25 + 6 - 5$
$= 31 - 5$
$= 26$

$B = 45 - 5 + 2$
$= 40 + 2$
$= 42$

2) Calculs avec des parenthèses

On commence par effectuer les calculs entre parenthèses.

Méthode : Calculer une expression avec des parenthèses

Vidéo https://youtu.be/LN-SKmgrt-w

Calculer : $A = 20 - (2 + 8)$ $B = 3 \times (10 - 2)$

Correction

$A = 20 - (2 + 8)$
$= 20 - 10$
$= 10$

$B = 3 \times (10 - 2)$
$= 3 \times 8$
$= 24$

3) Qui a la priorité +, – ou x ?

Exemple : On effectue mentalement : $3 + 7 \times 5$. On trouve 50 car $3 + 7 = 10$ et $10 \times 5 = 50$.
On effectue le même calcul à l'aide d'une calculatrice scientifique. Elle affiche 38.
La calculatrice a raison, la réponse n'est pas 50 !
En effet : $3 + 7 \times 5 = 3 + 35 = 38$
La multiplication est prioritaire.

La multiplication est effectuée avant l'addition et la soustraction.

Méthode : Appliquer la priorité de la multiplication

Vidéo https://youtu.be/a-IG_bjKeJc

Calculer : $A = 5 + 2 \times 6$ $\quad\quad\quad B = 21 - 8 \times 2$

Correction

$$\begin{aligned} A &= 5 + 2 \times 6 \\ &= 5 + 12 \\ &= 17 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} B &= 21 - 8 \times 2 \\ &= 21 - 16 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Partie 3 : Calculs posés

1) Addition et soustraction

Méthode : Poser une addition et une soustraction

Vidéo https://youtu.be/ytLe8aUq2ZM
Vidéo https://youtu.be/CFKUxlh6R9s

Poser et calculer : 36,3 + 43,96 et 29,13 – 12,6.

Correction

$$\begin{array}{r} {}^{1}3\,{}^{1}6,30 \\ +\ 43,96 \\ \hline 80,26 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 29,{}^{1}13 \\ -\ 1\overset{1}{2},60 \\ \hline 16,53 \end{array}$$

↑ Aligner les virgules ↑ Aligner les virgules

2) Multiplication

Méthode : Poser une multiplication

Vidéo https://youtu.be/4YQi_icWTTI

Poser et calculer : 844,7 × 3,68.

Correction

$$
\begin{array}{r}
844{,}7 \\
\times \quad 3{,}68 \\
\hline
67576 \\
50682 \\
+\,25341 \\
\hline
3108{,}496
\end{array}
$$

← 3 chiffres après la virgule, donc…

← … 3 chiffres après la virgule.

Multiplications curieuses :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/MULT_CUR.pdf

COURS : DIVISION

Extrait du programme de la classe de Sixième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES
Division euclidienne	– Reconnaître les situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne et interpréter les résultats obtenus. – Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). – Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste). – Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 4, 5, 3 et 9.
Division décimale	– Calculer une valeur approchée décimale du quotient de deux entiers ou d'un décimal par un entier, dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). – Diviser par 10, 100, 1 000

1 Division euclidienne

Définition :
Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier a par un nombre entier non nul b, c'est :
- déterminer combien de paquets de b unités sont contenus dans a : ce nombre de paquets est appelé **quotient**, et sera ici noté q.
- déterminer le nombre d'unités qui restent : ce nombre est appelé **reste**, et sera ici noté r.

Par exemple :

$$\begin{array}{rr|ll} \text{dividende } a \rightarrow & 23 & 7 & \longleftarrow \text{diviseur } b \\ \cline{3-3} \text{reste } r \longrightarrow & 2 & 3 & \longleftarrow \text{quotient } q \end{array}$$

On vérifie la division en posant :
dividende = diviseur × quotient + reste
Ici, on a bien $23 = 7 \times 3 + 2$
⚠ **Attention :**
le reste est toujours **inférieur** au diviseur.

Définitions :
Lorsque le reste de la division de a par b est égal à zéro (*c'es-à-dire lorsque "la division tombe juste"*), on dit que a est un **multiple** de b, ou bien que b est un **diviseur** de a, ou encore que a est **divisible** par b.

Par exemple :
► 15 est un **multiple** de 3, car $15 = 3 \times 5$
Autrement dit, 3 est un **diviseur** de 15, ou encore 15 est **divisible** par 3.
► 17 n'est pas un multiple de 3, car $17 = 3 \times 5 + 2$

Il est possible, grâce à quelques règles très simples, de savoir si un nombre entier est un multiple de 2, 3, 4, 5, ou 9. Ces règles sont appelées **critères de divisibilité** :

Critères de divisibilité :
- Un nombre sera **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
- Un nombre sera **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre sera **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre sera **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre sera **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Par exemple :
726 est divisible par 2, car il se termine par 6.
726 est divisible par 3, car $7+2+6=15$ est un multiple de 3.
726 n'est pas divisible par 4, car 26 n'est pas un multiple de 4.
726 n'est pas divisible par 5 (car il ne se termine ni par 5, ni par 0).
726 n'est pas divisible par 9, car $7+2+6=15$ n'est pas un multiple de 9.

2 Division décimale

Définition :
Le **quotient** d'un nombre décimal a par un nombre entier non nul b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. Autrement dit, ce quotient est le facteur manquant dans la multiplication à trous suivante : $b \times ? = a$.
Effectuer la **division décimale** du nombre a par le nombre b, c'est calculer la valeur exacte (ou une valeur approchée) de ce quotient.

Technique :

Le quotient de 23 par 5 est 4,6 ; on a $5 \times 4{,}6 = 23$. **On écrit $23 \div 5 = 4{,}6$**

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2\;3{,}0 & 5 \\ \cline{3-3}
- & 2\;0\phantom{{,}0} & 4{,}6 \\ \cline{2-2}
 & 3\;0 & \\
- & 3\;0 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Le quotient de 472,8 par 16 est 29,55 ; on a $16 \times 29{,}55 = 472{,}8$. **On écrit $472{,}8 \div 16 = 29{,}55$**

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4\;7\;2{,}8\;0 & 1\;6 \\ \cline{3-3}
- & 3\;2 & 2\;9{,}5\;5 \\ \cline{2-2}
 & 1\;5\;2 & \\
- & 1\;4\;4 & \\ \cline{2-2}
 & \;\;8\;8 & \\
- & \;\;8\;0 & \\ \cline{2-2}
 & \;\;8\;0 & \\
- & \;\;8\;0 & \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;0 &
\end{array}$$

A retenir : :
au moment où l'on abaisse le chiffre des dixièmes dans le dividende, on pose une virgule dans le quotient.

Lorsque, comme dans l'exemple ci-dessous, la division "ne s'arrête jamais", ou encore lorsque le quotient comporte un grand nombre de décimales, il est nécessaire de donner une **valeur approchée** du quotient.

$$
\begin{array}{r|l}
52 & 7 \\
-49 & \overline{7{,}42857\ldots} \\
\overline{30} & \\
-28 & \\
\overline{20} & \\
-14 & \\
\overline{60} & \\
-56 & \\
\overline{40} & \\
-35 & \\
\overline{50} & \\
-49 & \\
\overline{1} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Il y a plusieurs manières de donner une valeur approchée de ce quotient :

Troncature au dixième	$52 \div 7 \approx 7{,}4$	On "coupe" (*on "tronque"*) le nombre juste après le chiffre des dixièmes
Troncature au centième	$52 \div 7 \approx 7{,}42$	On "coupe" (*on "tronque"*) le nombre juste après le chiffre des centièmes
Arrondi au dixième	$52 \div 7 \approx 7{,}4$	On prend le nombre décimal ayant un chiffre après la virgule qui soit **le plus proche** du quotient
Arrondi au centième	$52 \div 7 \approx 7{,}43$	On prend le nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule qui soit **le plus proche** du quotient

En fait, pour déterminer un arrondi, c'est le dernier chiffre de la troncature qui est important. Si ce chiffre est 0, 1, 2, 3 ou 4 alors l'arrondi est la troncature elle-même. Mais si ce chiffre est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors, pour trouver l'arrondi, on augmente ce dernier chiffre de 1.

Remarque : On ne peut **jamais diviser un nombre par 0** ; en effet, si on voulait diviser un nombre non nul a par zéro, cela reviendrait à chercher le facteur manquant dans la multiplication à trous suivante : $0 \times ? = a$. Or on sait que, quel que soit la valeur que l'on donne au symbole " ?", le produit $0 \times ?$ sera toujours égal à 0... et sûrement jamais à a ! !

3 Division par 10, 100, 1000

Règle de calcul :
Pour diviser un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule de 1 rang vers la gauche.
Pour diviser un nombre décimal par 100, il suffit de décaler la virgule de 2 rangs vers la gauche.
Pour diviser un nombre décimal par 1 000, il suffit de décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche. etc...
(on complètera par des zéros si nécessaire)

Exemples :
$56 \div 10 = 5{,}6$ $\qquad 14{,}4 \div 100 = 0{,}144$ $\qquad 52 \div 1\,000 = 0{,}52$

I- PUISSANCES D'UN NOMBRE

1) Puissance d'exposant positif

<u>Définition</u> : Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et a un nombre relatif.

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n\ facteurs}}$$

a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n ».

<u>Exemples</u> :

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$2\,000^1 = 2\,000$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -\,27$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \dfrac{8}{27}$

$0^{32} = 0$

<u>Remarque</u> : a^2 se lit « a au carré » ; a^3 se lit « a au cube ».

<u>Remarque</u> : Attention à ne pas confondre $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$.

2) Produit de deux puissances d'un même nombre

<u>Ex</u> :

$2^3 \times 2^4 = 2\times2\times2 \times 2\times2\times2\times2 = 2^7$

$5^2 \times 5^1 = 5\times5 \times 5 = 5^3$

$3^6 \times 3^2 = 3\times3\times3\times3\times3\times3 \times 3\times3 = 3^8$

<u>Règle de calcul</u> : Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et a un nombre relatif.

$\boxed{\mathbf{a^n \times a^p = a^{n+p}}}$ On somme les deux exposants.

<u>Rq</u> :

$8^3 \times 8^2 \times 8^4 = 8^{3+2+4} = 8^9$ Il y a en tout 9 facteurs 8.

$5^2 \times 4^3 = 5\times5 \times 4\times4\times4$ Ce ne sont pas les mêmes facteurs.
On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

$3^6 + 3^2 =$ C'est une somme.
On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

<u>Conséquence</u> : <u>Puissance 0</u>

$5^0 \times 5^4 = 5^{0+4} = 5^4$ et $1 \times 5^4 = 5^4$

Il faut donc que $5^0 = 1$.

Pour tout nombre relatif a, on a : $\boxed{\mathbf{a^0 = 1}}$.

En particulier : $0^0 = 1$.

<u>Conséquence</u> : <u>Puissance de puissance</u>

$(2^3)^2 = (2^3) \times (2^3) = 2^{3+3} = 2^6$

$(7^6)^3 = (7^6) \times (7^6) \times (7^6) = 7^{6+6+6} = 7^{18}$

Pour tout nombre relatif a, on a : $\boxed{\mathbf{(a^n)^p = a^{n \times p}}}$

3) Puissance d'exposant négatif

Ex : $2^3 \times \frac{1}{2^3} = 2\times2\times2 \times \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2} = 1$

$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$ donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Définition : Soient n un entier et a un nombre relatif non nul.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ex : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$ (L'inverse de a se note donc a^{-1}.)

4) Quotient de deux puissances d'un même nombre

Ex : $\frac{2^5}{2^2} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2} = 2\times2\times2 = 2^3$

$\frac{4^3}{4^1} = \frac{4\times4\times4}{4} = 4^2$

$\frac{3^4}{3^6} = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3\times3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

Règle de calcul : Soient n et p deux entiers et a un nombre relatif non nul.

$$\boxed{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$$

Ex : $\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$

$\frac{11^3}{11^7} = 11^{3-7} = 11^{-4} = \frac{1}{11^4}$

$\frac{7^{24}}{7} = 7^{24-1} = 7^{23}$

$\frac{4^{-2}}{4^3} = \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^2\times4^3} = \frac{1}{4^5} = 4^{-5} = 4^{-2-3}$

5) Puissance d'un produit, d'un quotient

Ex : $(2\times3)^4 = 2\times3 \times 2\times3 \times 2\times3 \times 2\times3 = 2\times2\times2\times2 \times 3\times3\times3\times3 = 2^4 \times 3^4$

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{2\times2\times2}{5\times5\times5} = \frac{2^3}{5^3}$

Règle de calcul : Soient n un entier, a et b deux nombres non nuls.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ex : $4^3 \times 7^3 = (4\times7)^3 = 28^3$

$\frac{36^7}{3^7} = \left(\frac{36}{3}\right)^7 = 12^7$

II- PUISSANCE DE 10

Ex : $10^3 = 10\times10\times10 = 1\,000$ $\qquad$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Propriété : Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

$10^n = 10\times10\times\ldots\times10 = 100\ldots0$ (un chiffe 1 suivi de n chiffres 0)

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{100\ldots0} = 0{,}00..01$ (n chiffre après la virgule)

Ex : $10^5 = 100\,000$ $\qquad$ $10^{-4} = 0{,}000\,1$ $\qquad$ $10^0 = 1$ $\qquad$ $10^1 = 10$ $\qquad$ $10^{-1} = 0{,}1$

Règles de calcul : Soient n et p deux entiers.

	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{n+p}$	$10^3 \times 10^4 = 10^7$ $10^{-6} \times 10^4 = 10^{-2}$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$	$\frac{10^7}{10^3} = 10^4$ $\frac{10^{-5}}{10^8} = 10^{-13}$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{n\times p}$	$(10^5)^2 = 10^{10}$ $(10^3)^{-4} = 10^{-12}$

Propriété : Soit n un entier positif.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de n rangs vers la droite.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, on déplace la virgule de n rang vars la gauche.

Ex : $25{,}1 \times 10^5 = 2\,510\,000$
$25{,}1 \times 10^{-5} = 0{,}000\,251$

Ex : La distance entre le Soleil et la planète Mars est $2{,}29 \times 10^8$ km.
Celle entre le Soleil et la Terre est 150×10^6 km
La planète la plus proche du soleil est la Terre car $150 \times 10^6 = 150\,000\,000$ km
$2{,}29 \times 10^8 = 229\,000\,000$ km
Pour comparer facilement de tels nombres, on va les écrire sous une forme particulière : l'écriture scientifique.

III- ECRITURE SCIENTIFIQUE

Définition : L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre relatif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$
où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule
et n est un entier relatif.

Ex : $A = 8{,}56 \times 10^7$ A est écrit en notation scientifique.
$B = 0{,}45 \times 10^{-2}$ B n'est pas écrit en notation scientifique car le chiffre avant la virgule est 0.
$C = 9{,}1 \times 5^3$ C n'est pas écrit en notation scientifique car le $2^{ième}$ facteur n'est pas une puissance de 10.

Ex : Ecrire en notation scientifique
$D = 732 = 7{,}32 \times 10^2$
$E = 0{,}043 = 4{,}3 \times 10^{-2}$
$F = 345\,756 = 3{,}457\,56 \times 10^5$
$G = 0{,}000\,673 = 6{,}73 \times 10^{-4}$
$H = 345 \times 10^3 = 3{,}45 \times 10^2 \times 10^3 = 3{,}45 \times 10^5$
$I = 0{,}067\,3 \times 10^4 = 6{,}73 \times 10^{-2} \times 10^4 = 6{,}73 \times 10^2$

Ex : Comparer.
a) $A = 6{,}04 \times 10^5$ et $B = 2{,}03 \times 10^7$ $A < B$ car $5 < 7$
b) $A = 9{,}1 \times 10^{-3}$ et $B = 8{,}4 \times 10^{-2}$ $A < B$ car $-3 < -2$
c) $A = 4{,}51 \times 10^7$ et $B = 6{,}7 \times 10^7$ $A < B$ car $7 = 7$ et $4{,}51 < 6{,}7$.
On compare d'abord les puissances, puis en cas d'égalité, on compare les nombres décimaux.

Ex : a) Effectuer à la calculatrice $623\,452 \times 786\,549$.
On obtient 4.903755471 E 11.
Cela signifie $4{,}903\,755\,71 \times 10^{11}$. Quand le nombre est trop grand, la calculatrice donne la valeur la plus précise possible en utilisant une notation scientifique.
b) Effectuer à la calculatrice 0,012 345 : 915 234.
On obtient 1.34883538 E -8.
Cela signifie $1{,}348\,835\,38 \times 10^{-8}$.

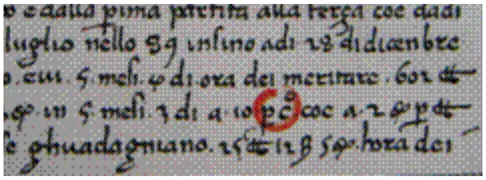
<u>Règles de calcul</u> : Soient n et p deux entiers.

	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{\cdots\cdots}$	$10^3 \times 10^4 =$ $10^{-6} \times 10^4 =$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots\cdots}$	$\frac{10^7}{10^3} =$ $\frac{10^{-5}}{10^8} =$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{\cdots\cdots}$	$(10^5)^2 =$ $(10^3)^{-4} =$

<u>Règles de calcul</u> : Soient n et p deux entiers.

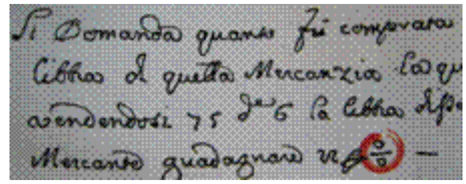
	Règle	Exemples
Produit	$10^n \times 10^p = 10^{\cdots\cdots}$	$10^3 \times 10^4 =$ $10^{-6} \times 10^4 =$
Quotient	$\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots\cdots}$	$\frac{10^7}{10^3} =$ $\frac{10^{-5}}{10^8} =$
Puissance de puissance	$(10^n)^p = 10^{\cdots\cdots}$	$(10^5)^2 =$ $(10^3)^{-4} =$

POURCENTAGES



← **Manuscrit italien de 1490**
« pc° »signifiait « per cento ».

Manuscrit italien de 1684 →
On trouve le symbole $\frac{o}{o}$ proche de la notation actuelle.



Partie 1 : Définition

Exemples :
- Si dans un exercice, un élève répond à 40 questions sur 100 questions, on dit qu'il a fait 40 pour 100 de l'exercice. 40 pour 100 se note 40 %.

- Si une tablette de chocolat de 100 g contient 75 g de cacao, on dit qu'elle contient 75 pour 100 de cacao et on note : 75 % de cacao.

Méthode : Exprimer un pourcentage
Vidéo **https://youtu.be/hY-2J9zJJEw**

a) Dans un groupe de 100 personnes, 25 personnes portent des lunettes.
Quel est le pourcentage de personnes portant des lunettes ?

b) Sur ses 50 oursons en chocolat, Mia en a donné 42 à ses copains. Quel pourcentage d'oursons en chocolat Mia a-t-elle donné à ses copains ?

Correction
a) 25 pour 100 des personnes du groupe portent des lunettes.
Donc on note : 25 % des personnes du groupe portent des lunettes.

b) Si Mia avait eu 100 oursons (50 × 2), elle en aurait donné 84 (42 × 2). Mia a donc donné 84 % de ses oursons en chocolat.

Partie 2 : Calculer mentalement les pourcentages

Pourcentage	**10 %**	**25 %**	**50 %**	**75 %**	**100 %**
Prendre …	Le dixième	Le quart	La moitié	Les trois quarts	Le tout
Revient à …	: 10	: 4	: 2	: 4 puis × 3	× 1

Méthode : Effectuer du calcul mental avec les pourcentages

Vidéo https://youtu.be/ixjag8jXLXk

Calculer :
a) 50 % de 40 €
b) 25 % de 8 km
c) 10 % de 30 L
d) 75 % de 1 000
e) 200 % de 7 kg

Correction

a) 50 % de 40 €
= La moitié de 40 €
= 40 : 2
= 20 €

b) 25 % de 8 km
= Le quart de 8 km
= 8 : 4
= 2 km

c) 10 % de 30 L
= Le dixième de 30 L
= 30 : 10
= 3 L

d) 75 % de 1 000
= Les trois quarts de 1 000
= $(3 : 4) \times 1\,000$
= 750

e) 200 % de 7 kg
= Le double de 7 kg
= 2×7
= 14 kg

Partie 3 : Appliquer un pourcentage

84 % des enfants aiment les maths cela signifie que :
sur 100 enfants, il y en aurait 84 qui aiment les maths.

Toutes les écritures suivantes sont égales :

84 %
= 84 pour 100
= 84 sur 100
= $\frac{84}{100}$
= $84 : 100$
= 0,84

Méthode : Appliquer un pourcentage (1)

Vidéo https://youtu.be/Ce6E56gsbY0

Si 84 % des enfants aiment les mathématiques : sur un groupe de 25 enfants, combien d'entre eux devraient aimer les maths ?

Correction

On cherche les 84 % de 25 élèves.

84 % de 25 = $\frac{84}{100} \times 25$
= $(84 : 100) \times 25$
= $0{,}84 \times 25$
= 21

Dans ce contexte, 21 enfants sur 25 devraient aimer les maths.

Méthode : Appliquer un pourcentage (2)

Vidéo https://youtu.be/2UVaPRdSMl0

Un article coûte 89 €. Son prix est réduit de 20 %.
Calculer le nouveau prix.

Correction

● Calcul de la réduction : 20 % de 89 €
= $\frac{20}{100} \times 89$
= $0{,}2 \times 89$
= 17,80 €

● Calcul du nouveau prix : 89 – 17,80 = 71,20 €

Méthode : Appliquer un pourcentage (3)

Vidéo https://youtu.be/GI-x8mTHJbo

On réduit le prix d'un pantalon de 40 %. Son nouveau prix est de 32,40 €.
Calculer le prix avant réduction.

Correction

On construit un tableau de proportionnalité :

Prix avant réduction	100	x
Nouveau prix	60	32,40

$\times 0{,}6$

Calcul du coefficient de proportionnalité :
$60 : 100 = 0{,}6$

Une réduction de 40 % signifie qu'un prix de 100 € est réduit de 40 €
et donc le nouveau prix est :
100 – 40 = 60 €

Calcul du prix avant réduction : $32{,}40 : 0{,}6 = 54$ €

Partie 4 : Calculer un pourcentage

Méthode : Calculer un pourcentage

Vidéo https://youtu.be/_TcFaeFb6sI
Vidéo https://youtu.be/vAK1NWWINi8

Le collège René Descartes compte 650 élèves. Parmi eux, 351 sont demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires au collège ?

Correction
Le nombre d'élèves demi-pensionnaires est de 351 sur un total de 650 élèves, soit :
$$\frac{351}{650} = 0{,}54 = \frac{54}{100} = 54\ \%$$

Le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires au collège René Descartes est de 54 %.

Partie 5 : Pourcentage et TVA

Méthode : Appliquer des taxes

Vidéo https://youtu.be/iL_U6er_l2Y
Vidéo https://youtu.be/s4GTUFJ6MZ8

1) Le prix HT *(Hors Taxe)* d'une caméra est de 436 €.
Sachant que la TVA *(Taxe à valeur ajoutée)* est de 19,6 % du prix HT, calculer le prix TTC *(Toutes Taxes Comprises)* de cette caméra. Arrondir au centième d'euro.

2) Un anorak est vendu en magasin 65,78 €. Quel est son prix HT ?

3) La taxe sur les cigarettes est différente de celle appliquée sur les autres biens de consommation.
Un paquet vendu 4,60 € comprend une taxe reversée à l'état de 3,68 €.
a) Quel est le taux en % de la taxe sur les cigarettes ?
b) Quel est le pourcentage de la taxe par rapport au prix TTC ?

Correction

1) 19,6 % de 436
= 19,6/100 x 436 = 85,456
Prix TTC = 436 + 85,456 ≈ 521,46 €

2)

Prix TTC	119,6	65,78
Prix HT	100	x

x = 65,78 x 100 : 119,6 = 55 (Quatrième proportionnelle)
Son prix HT est de 55 €.

3) a)

Prix HT	0,92	**100**
Taxe	3,68	x

On veut un pourcentage, soit pour 100.

x = 100 x 3,68 : 0,92 = 400 (Quatrième proportionnelle)
La taxe sur les cigarettes s'élève à 400 %.

b)

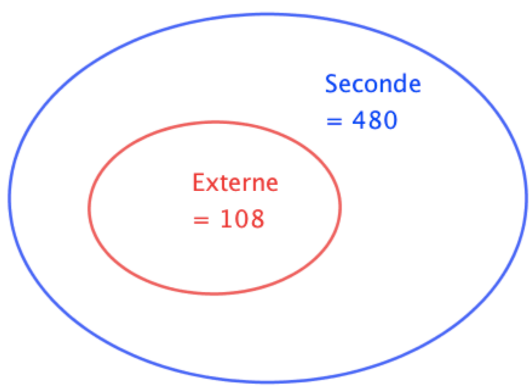
Prix TTC	4,60	100
Taxe	3,68	x

x = 100 x 3,68 : 4,60 = 80.
La taxe sur les cigarettes représente 80 % du prix TTC.

Partie 6 : Proportion et pourcentage

1. Proportion

Exemple :
Sur les 480 élèves inscrits en classe de 2nde, 108 d'entre eux sont externes.



La **population totale** des élèves de 2nde compte 480 élèves. C'est la population de référence.
La **sous-population** des élèves externes compte 108 élèves.

- La **proportion** d'élèves externes parmi tous les élèves de 2nde est :

$p = \frac{108}{480} = \frac{9}{40} = 0{,}225.$

Cette proportion peut s'exprimer en **pourcentage** : $p = 22{,}5\ \%$.

- Parmi les 480 élèves de 2nde, 15 % ont choisi l'option grec.

15 % *de* 480 ont choisi l'option grec, soit :

$15\ \% \times 480 = \frac{15}{100} \times 480 = 72$ élèves.

Méthode : Associer effectif, proportion et pourcentage

Vidéo https://youtu.be/r8S46rk9x9k

Une société de 75 employés compte 12 % de cadres et le reste d'ouvriers.
35 employés de cette société sont des femmes et 5 d'entre elles sont cadres.
a) Calculer l'effectif des cadres.
b) Calculer la proportion de femmes dans cette société.
c) Calculer la proportion, en %, de cadres parmi les femmes. Les femmes cadres sont-elles sous ou surreprésentées dans cette société ?

Correction

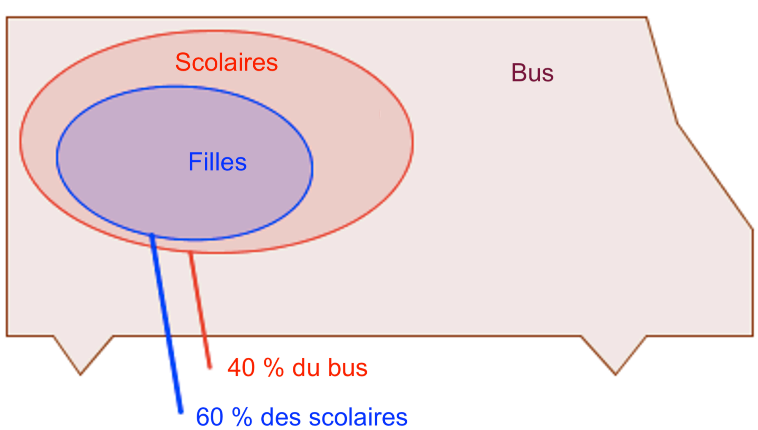
a) 12 % de 75 = $\frac{12}{100} \times 75 = 9$.
Cette société compte 9 cadres.

b) La proportion de femmes est donc égale à $p_1 = \frac{35}{75} = \frac{7}{15} \approx 0{,}47$.
La société compte environ 47 % de femmes.

c) La population de référence est maintenant « les femmes ».
La proportion de cadres parmi les femmes est égale à $p_2 = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14 = 14\%$.
$14\ \% > 12\ \%$ donc les femmes cadres sont surreprésentées dans cette société.

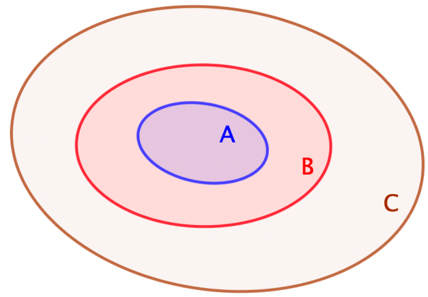
2. Pourcentage de pourcentage

Exemple :
Dans un bus, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



La proportion de scolaires filles dans le bus est donc égale à :
$60\ \%\ de\ \ 40\ \% = 60\ \% \times 40\ \% = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24 = 24\ \%$.
Il y a donc 24 % de filles scolaires dans le bus.

Propriété :
A⊂B et B⊂C.
p_1 est la proportion de A dans B.
p_2 est la proportion de B dans C.
Alors $p_1 \times p_2$ est la proportion de A dans C.



Remarque :
Pour calculer un pourcentage de pourcentage, on multiplie les pourcentages entre eux.

Méthode : Calculer un pourcentage de pourcentage

Vidéo https://youtu.be/nPPRsOW2veU

Sur 67 millions d'habitants en France, 66 % de la population est en âge de travailler (15-64 ans).
La population active représente 70 % de la population en âge de travailler.
a) Calculer la proportion de population active par rapport à la population totale.
b) Combien de français compte la population active ?

Correction
a) Le pourcentage de population active par rapport à la population totale est égal à :
$70\ \% \times 66\ \% = 0{,}7 \times 0{,}66 = 0{,}462 = 46{,}2\ \%$.
46,2 % des français sont actifs.

b) $46{,}2\ \%\ de\ 67 = 0{,}462 \times 67 = 30{,}954$.
La France compte environ 31 millions d'actifs.

Partie 7 : Évolution exprimée en pourcentage

1. Calculer une évolution

Propriétés :
- Augmenter un nombre de 25 % revient à le multiplier par $\mathbf{1 + 0,25}$.
- Diminuer un nombre de 25 % revient à le multiplier par $\mathbf{1 - 0,25}$.

$1 + 0{,}25 = 1{,}25$ et $1 - 0{,}25 = 0{,}75$ sont appelés les **coefficients multiplicateurs**.

Exemples :

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
$+ 38\ \%$	$1 + 0{,}38 = 1{,}38$
$+ 5\ \%$	$1 + 0{,}05 = 1{,}05$
$- 45\ \%$	$1 - 0{,}45 = 0{,}55$
$- 4\ \%$	$1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Remarque : Cette propriété se généralise pour tout pourcentage :

- Augmenter un nombre de T % revient à le multiplier par $1 + \frac{T}{100}$.
- Diminuer un nombre de T % revient à le multiplier par $1 - \frac{T}{100}$.

$1 + \frac{T}{100}$ et $1 - \frac{T}{100}$ sont appelés les **coefficients multiplicateurs**.

Méthode : Appliquer une augmentation ou une diminution en %

Vidéo https://youtu.be/UVXFEDUnSjI
Vidéo https://youtu.be/-5QmcMuzy5I

a) Le prix d'un blouson qui coutait 160 € est réduit de 35 %.
Calculer le nouveau prix du blouson.
b) Le prix d'un survêtement qui coûtait 49 € est augmenté de 8 %.
Calculer le nouveau prix du survêtement.

Correction
a) 160 € est le nombre de départ. Le prix est diminué de 35 %.
Diminuer un nombre de **35 %**, revient à le multiplier par $\mathbf{1 - 0,35}$.
Calcul du nouveau prix après diminution :
$160 \times (1 - 0{,}35)$
$= 160 \times 0{,}65$
$= 104$ €.
Le nouveau prix du blouson est de 104 €.

b) 49 € est le nombre de départ. Le prix est augmenté de 8 %.
Augmenter un nombre de **8 %**, revient à le multiplier par $\mathbf{1 + 0,08}$.
Calcul du nouveau prix après augmentation :
$49 \times (1 + 0{,}08)$
$= 49 \times 1{,}08$
$= 52{,}92$ €.
Le nouveau prix du survêtement est de 52,92 €.

2. Calculer un taux d'évolution

Définition :
On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1.
Le **taux d'évolution** est égal à : $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Remarque :
Si $t > 0$, l'évolution est une augmentation.
Si $t < 0$, l'évolution est une diminution.

Méthode : Calculer un taux d'évolution

Vidéo https://youtu.be/Y48-iK7Cp20

La population d'un village est passé de 8500 à 10400 entre 2018 et 2022.
Calculer le taux d'évolution de la population en %.

Correction
La population de départ V_0 est égale à 8500.
La population d'arrivée V_1 est égale à 10400.

$$t = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{10400 - 8500}{8500} \approx 0{,}224.$$
Le taux d'évolution de la population est environ égal à 22,4 %.

Partie 8 : Évolutions successives, évolution réciproque

1. Évolutions successives

Exemple :
On augmente un prix de 5 %, puis on l'augmente à nouveau de 20 %. On a effectué deux **évolutions successives**.
Attention : $+5$ % suivi de $+20$ % n'équivaut pas à $+25$% !
Pour calculer le taux d'évolution global, on fait :

$$1{,}05 \times 1{,}20 = 1{,}26 \quad \rightarrow \quad \text{Augmentation globale de } 26\ \%$$

Propriété : Pour calculer le coefficient multiplicateur global d'évolutions successives, on multiplie les coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution global

Vidéo https://youtu.be/qOg2eXd8Hv0

En 2021, la boulangerie-pâtisserie *Aux délices* a augmenté ses ventes de 10%. En 2022, elle a diminué ses ventes de 5%.
Calculer le taux d'évolution global des ventes sur les deux années.

Correction

● Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation en 2021 est égal à :
$1+0{,}10=1{,}1$.

● Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution en 2022 est égal à :
$1-0{,}05=0{,}95$.

● Le coefficient multiplicateur global sur les deux années est égal à :
$1{,}1\times 0{,}95=1{,}045=1+0{,}045$.

Multiplier un nombre par $1+0{,}045$, revient à l'augmenter de $4{,}5\ \%$.
Le taux d'évolution global des ventes sur les deux années est donc égal à $4{,}5\ \%$.

2. Évolution réciproque

Exemple :
On augmente un prix de 25 %. Puis on diminue ce prix pour qu'il retrouve le prix de départ. Cette diminution s'appelle une **évolution réciproque**.

Pour calculer le taux d'évolution réciproque, on fait :

$$\frac{1}{1{,}25}=0{,}80=1-0{,}20 \quad \rightarrow \quad \text{Diminution de } 20\ \%$$

Propriété : Pour calculer le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque, on prend l'inverse du coefficient multiplicateur.

Méthode : Calculer un taux d'évolution réciproque

Vidéo https://youtu.be/NiCxHYkpNiM

a) Un magasin a des ventes en diminution de 8% sur l'année 2022.
Quel devrait être le pourcentage d'évolution sur l'année 2023 pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale ?
b) La population d'un village a augmenté de 3% sur une année puis retrouve sa valeur initiale l'année suivante. Quel est le pourcentage de baisse sur la 2^e année ?

Correction

1) ● Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 8 % est égal à :
$1-0{,}08=0{,}92$.

● Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à :
$\frac{1}{0{,}92}\approx 1{,}087=1+0{,}087$.

Multiplier un nombre par $1+0{,}087$, revient à l'augmenter de 8,7 %.
Pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale, il faudrait qu'elles augmentent d'environ 8,7 % sur l'année 2023.

2) ● Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation de 3 % est égal à :
$1+0{,}03=1{,}03$.

● Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à :
$\frac{1}{1{,}03}\approx 0{,}971=1-0{,}029$ $(*)$.

Multiplier un nombre par $1-0{,}029$, revient à le diminuer de 2,9 %.
Sur la 2^{e} année, la population diminue d'environ 2,9 %.

$(*)$ Pour trouver $0{,}029$, on a fait $1-0{,}971$!

ÉQUATIONS

Tout le cours sur les équations en vidéo : https://youtu.be/WoTpA2RyuVU

Partie 1 : Équations du premier degré

But : Trouver x !
C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
x = nombre

Méthode : Résoudre une équation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre les équations : a) $-5x+3=-3x+2$
b) $3(x+4)=-(x+5)+2$

Correction

1) $-5x+3=-3x+2$

$-5x+3x=2-3$ ← On ramène les « x » à gauche et les « nombres » à droite.

$-2x=-1$ ← Réduire

$x=\dfrac{-1}{-2}$ ← On divise par -2.

$x=\dfrac{1}{2}$

2) $3(x+4)=-(x+5)+2$

$3x+12=-x-5+2$ On applique la distributivité

$3x+x=-12-5+2$

$4x=-15$

$x=-\dfrac{15}{4}$

Partie 2 : Équation-produit

➤ Équation du type : $P(x)\times Q(x)=0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales.

Propriété : Si $A\times B=0$ alors $A=0$ ou $B=0$.

Autre formulation :
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
b) $(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
c) $5x^2-4x=0$

Correction
a) $(4x+6)(3-7x)=0$
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Soit : $4x+6=0$ ou $3-7x=0$

$4x=-6$ $\quad$ $-7x=-3$

$x=-\frac{6}{4}$ $\quad$ $x=\frac{-3}{-7}$

$x=-\frac{3}{2}$ $\quad$ $x=\frac{3}{7}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.

On note : $S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{7}\right\}$.

b) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :
$(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
$(3x+1)[(1-6x)-(3x+7)]=0$
$(3x+1)(1-6x-3x-7)=0$
$(3x+1)(-9x-6)=0$
Soit : $3x+1=0$ ou $-9x-6=0$

$3x=-1$ $\quad$ $-9x=6$

$x=-\frac{1}{3}$ $\quad$ $x=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

On note : $S=\left\{-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right\}$.

c) $5x^2-4x=0$
$x(5x-4)=0$
Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

$5x=4$

$$x = \frac{4}{5}$$

L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

On note : $S = \left\{0\ ;\ \frac{4}{5}\right\}$.

Partie 3 : Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Démonstration :
- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$, soit encore : $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$

  Soit $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$

  $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

L'équation possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Méthode : Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Vidéo https://youtu.be/ef15aeQRs6w

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $(x + 2)^2 = 9$.

Correction
a) L'équation $x^2 = 16$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{16} = -4$ et $x = \sqrt{16} = 4$.
On note : $S = \{-4\ ;\ 4\}$.

b) L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car -8 est négatif.
On note : $S = \emptyset$.

c) L'équation $(x + 2)^2 = 9$ possède deux solutions :
$x + 2 = -\sqrt{9}$ et $x + 2 = \sqrt{9}$
Soit : $x = -3 - 2 = -5$ et $x = 3 - 2 = 1$
L'équation a deux solutions : -5 et 1. On note : $S = \{-5\ ;\ 1\}$.

Partie 4 : Équation-quotient

➤ Équation du type : $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales ($Q(x) \neq 0$).

Propriété : Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple :
L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$

e) *Pour les experts :* $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

Correction

a) L'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ n'est pas définie pour $x - 1 = 0$, soit pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x + 5 = 0$

$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}.$$

On note : $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

b) L'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ n'est pas définie pour $x - 4 = 0$, soit pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$

Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$2x = -1$ $\qquad x = 3$

$x = -\frac{1}{2}$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

On note : $S = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 3\right\}$.

c) L'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ n'est pas définie pour $x + 3 = 0$, soit pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = -\sqrt{9} = -3$ ou $x = \sqrt{9} = 3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

On note : $S = \{3\}$.

d) L'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ n'est pas définie pour : $x - 3 = 0$, soit pour $x = 3$.

Pour $x \neq 3$, l'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ équivaut à : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 0$.

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{x+3-2}{x-3} = 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} = 0$$

Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à $x + 1 = 0$.

D'où $x = -1$.

On note : $S = \{-1\}$.

e) L'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(2-x)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$.

D'où $x = \frac{3}{2}$.

On note : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

SECOND DEGRE (Partie 2)

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c.

Exemple :
L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté Δ, égal à b^2-4ac.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- Si Δ < 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- Si Δ = 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Propriété démontrée dans le paragraphe II.

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$:
a = 2, b = -1 et c = -6 donc Δ = b^2 – 4ac = (-1)^2 – 4 x 2 x (-6) = 49.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$:

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$ donc Δ = b^2 – 4ac = (-3)^2 – 4 x 2 x $\frac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$:
a = 1, b = 3 et c = 10 donc Δ = b^2 – 4ac = 3^2 – 4 x 1 x 10 = -31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.

II. Factorisation d'un trinôme

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x)=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Si Δ < 0 : L'équation $f(x)=0$ peut s'écrire :

  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

  Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, l'équation n'a pas de solution.

- Si Δ = 0 : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

  L'équation $f(x)=0$ peut s'écrire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$

- Si Δ > 0 : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  L'équation $f(x)=0$ peut s'écrire :

  $$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

  L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.

- Si Δ = 0 : Pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si Δ > 0 : Pour tout réel x, on a : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

Remarque : Si Δ < 0, on n'a pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1Iisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : Δ = 19^2 – 4 x 4 x (-5) = 441

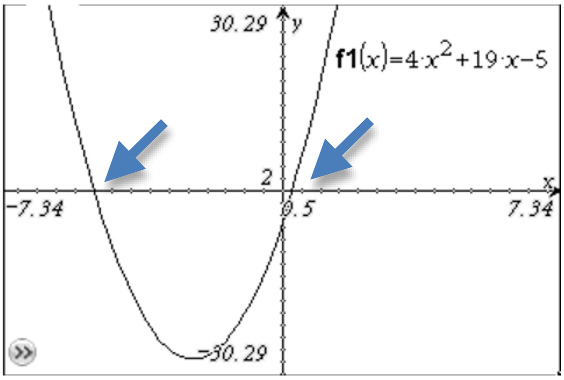
Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4}=\frac{1}{4}$

On a donc :

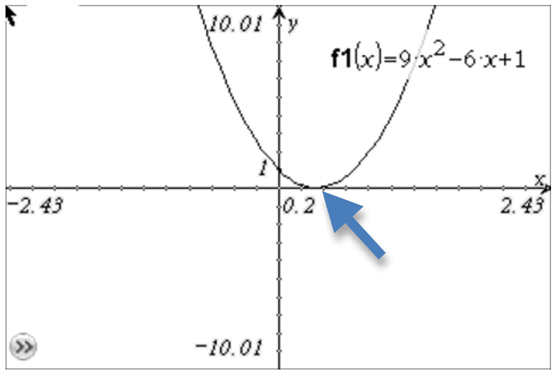
$$4x^2+19x-5=4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right).$$

$$=\left(x+5\right)\left(4x-1\right)$$

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.



b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:



Calcul du discriminant : Δ = (-6)^2 – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : $x_0=-\frac{-6}{2\times 9}=\frac{1}{3}$

On a donc : $9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$.
$=\left(3x-1\right)^2$

Méthode : Résoudre une équation

Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$

- On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est Δ = (-3)^2 – 4 x 2 x (-2) = 25 et ses racines sont :
$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$
On a donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)=\left(2x+1\right)\left(x-2\right)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est Δ' = 13^2 – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :
$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$
On a donc : $2x^2+13x+6=2\left(x+6\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+6\right)\left(2x+1\right)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\dfrac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\dfrac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur. On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-6;-\dfrac{1}{2};2\right\}$:

(E) s'écrit : $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

$$\dfrac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\dfrac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$$

$$\dfrac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$$

$$x+6-x^2=0$$

car $x\neq-\dfrac{1}{2}$ et $x\neq-6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est Δ" = 1^2 – 4 x (-1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x_1"=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=3$ et $x_2"=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=-2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3.

III. Signe d'un trinôme

Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY

Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x)=ax^2+bx+c$:

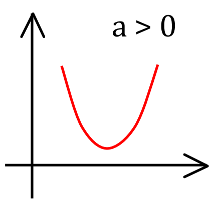
- si a > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 

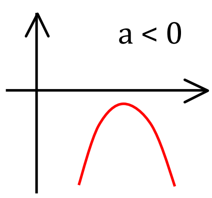
- si a < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.

- Si Δ < 0 :

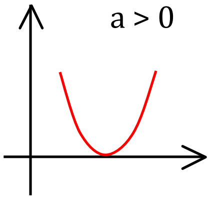
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

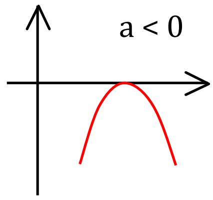




- Si $\Delta = 0$:

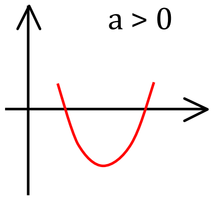
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

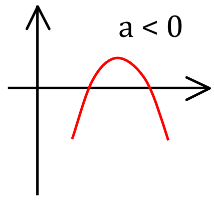




- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	





Méthode : Résoudre une inéquation

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre les inéquations suivantes : a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ b) $\dfrac{1}{x^2 - x - 6} \geq 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

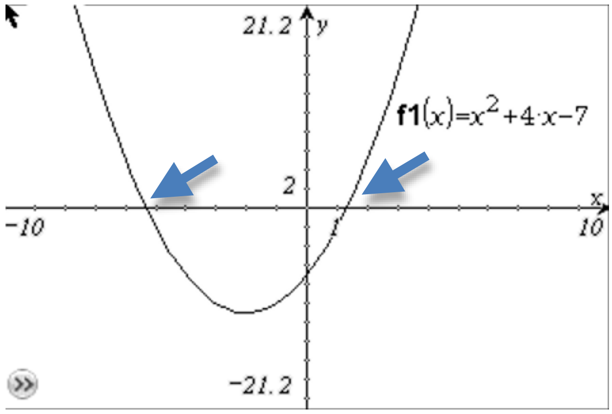
$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $\left]-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}\right[$.

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.



Un logiciel de calcul formel permet également de contrôler le résultat :

solve$\left(x^2+3\cdot x-5<-x+2,x\right)$

$$-\left(\sqrt{11}+2\right)<x<\sqrt{11}-2$$

b) $\dfrac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ équivaut à $\dfrac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$

Soit : $\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0$

- On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :
Le discriminant est Δ = $(-1)^2$ – 4 x 1 x (-6) = 25 et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{25}}{2\times 1}=3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-2;3\right\}$.

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:
Le discriminant est Δ' = 2^2 – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2'=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
x^2-x-6		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		−	0	+	||	−	||	+	0	−	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est :

$$\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right].$$

Un logiciel de calcul formel permet de contrôler le résultat :

$$\text{solve}\left(\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2, x\right)$$

$$\frac{-(3\cdot\sqrt{3}-1)}{2} \leq x < -2 \text{ or } 3 < x \leq \frac{3\cdot\sqrt{3}+1}{2}$$