Исследование устойчивости стационарных точек динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x = x(x(1-x)-y), \\ &\frac{d}{dt}y = y(x-a), \\ &x, y \geq 0, \quad a \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Стационарные точки системы (1) находятся из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x(x(1-x)-y) &= 0, \\ y(x-a) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В общем случае система уравнений (2) имеет 3 решения:

$$M_1(0,0), \tag{3}$$
$$M_2(1,0), \tag{4}$$
$$M_3(a, a-a^2). \tag{5}$$

Изучим поведение траекторий решения системы уравнений (1) в окрестности особых точек (3), (4), (5). Матрицы Якоби в этих точках имеют вид:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \tag{6}$$
$$J_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1-a \end{bmatrix}, \tag{7}$$
$$J_3 = \begin{bmatrix} a-2a^2 & a-a^2 \\ -a & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Собственные значения матрицы (6):

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -a. \tag{9}$$

Собственные значения матрицы (7):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1-a. \tag{10}$$

Собственные значения матрицы (8):

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{a-2a^2 \pm ai\sqrt{3-4a^2}}{2}, & a \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}), \\ \frac{a-2a^2}{2}, & a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{a-2a^2 \pm a\sqrt{4a^2-3}}{2}, & a \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty). \end{cases} \tag{11}$$

При $a = 0$ собственные значения (6) совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, существуют два собственных вектора, значит (3) - полный покой. Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) совпадает с (3).

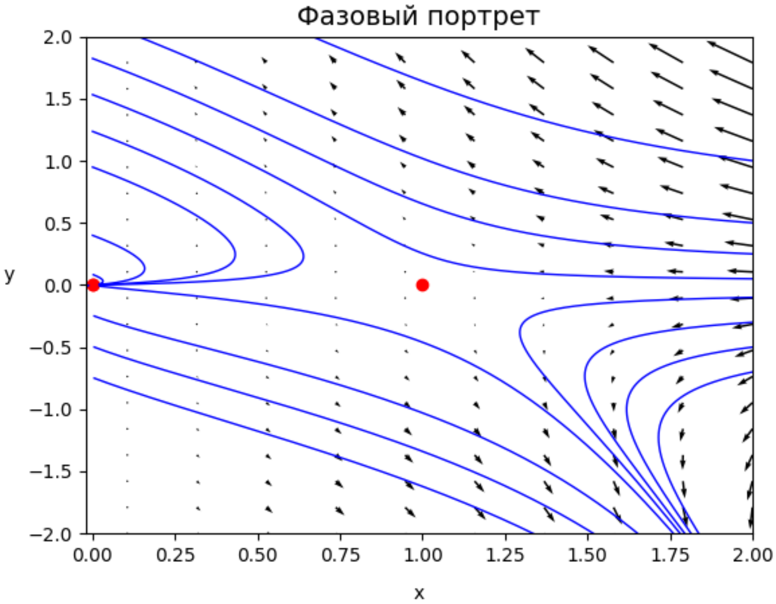

Рис. 1: Фазовый портрет при $a = 0$

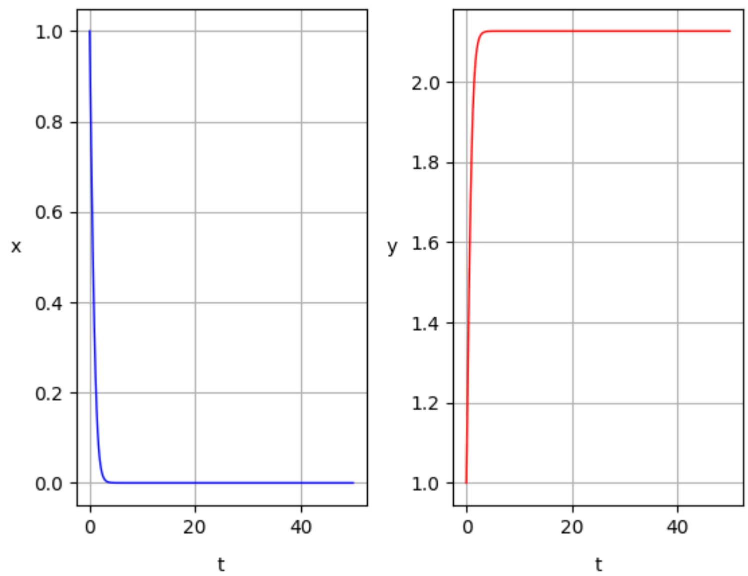

Рис. 2: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $0 < a < \frac{1}{2}$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1\lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) является фокусом (неуст.).

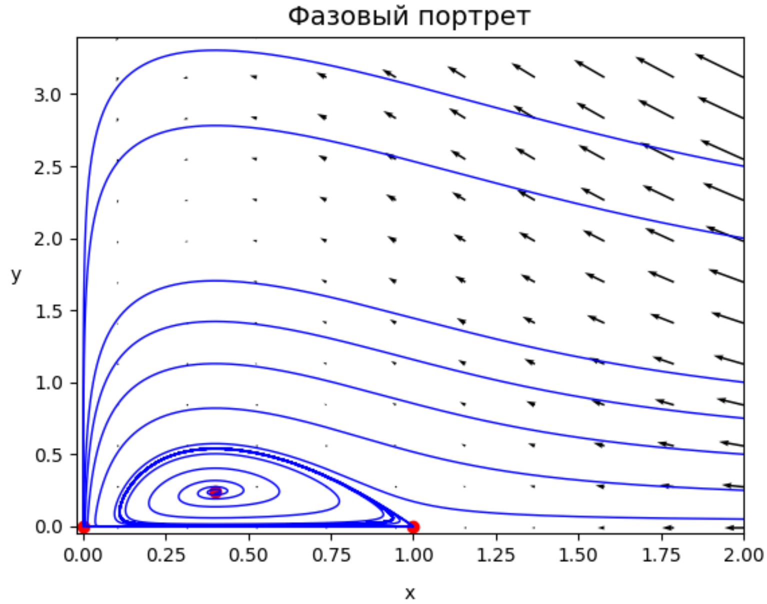

Рис. 3: Фазовый портрет при $a = 0.4$

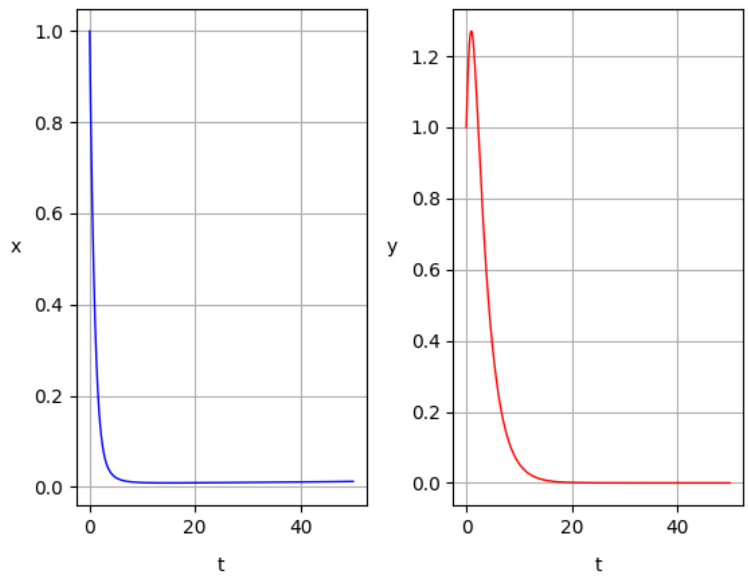

Рис. 4: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $a = \frac{1}{2}$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) является центром (уст.).

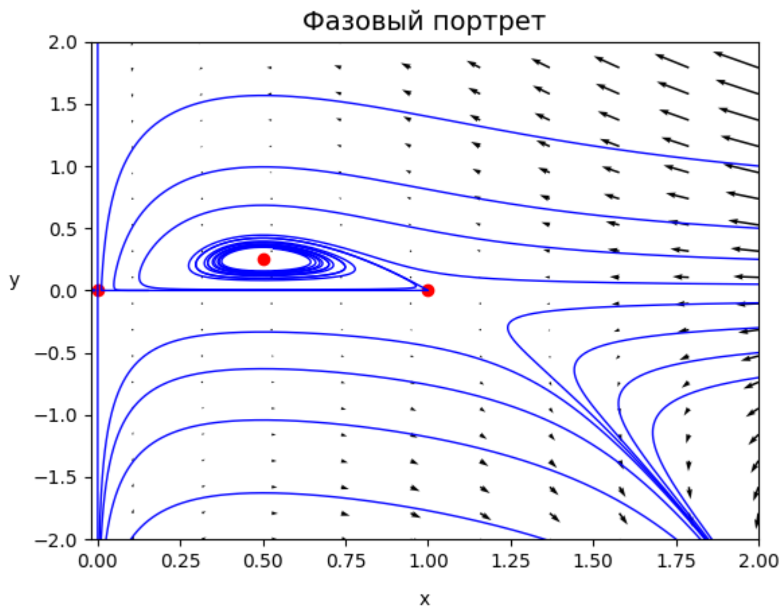

Рис. 5: Фазовый портрет при $a = 0.5$

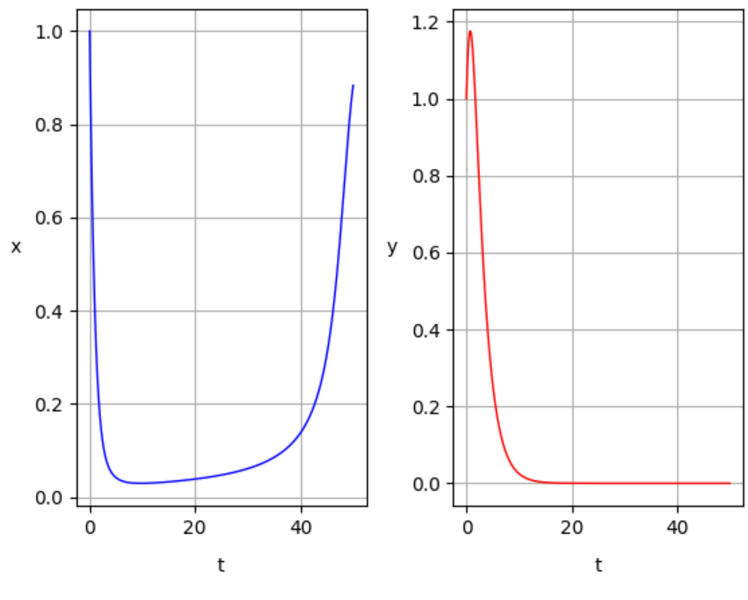

Рис. 6: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1\lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) является фокусом (уст.).

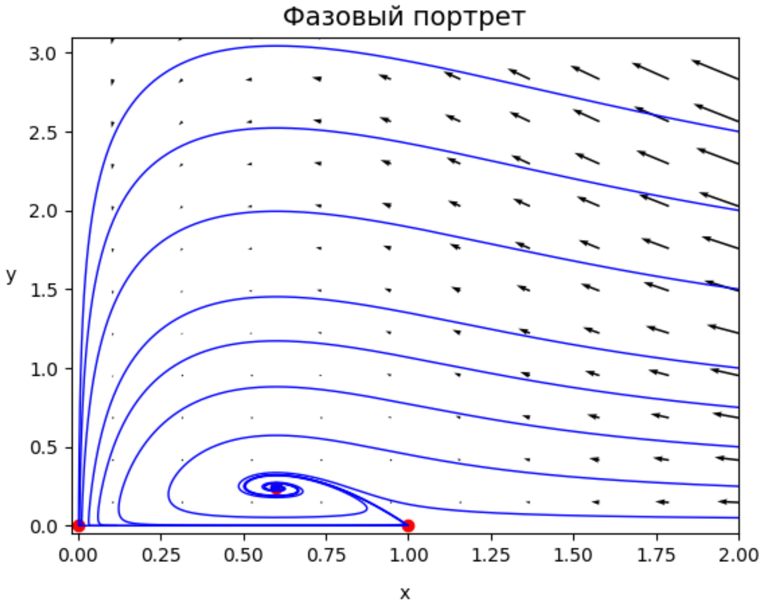

Рис. 7: Фазовый портрет при $a = 0.6$

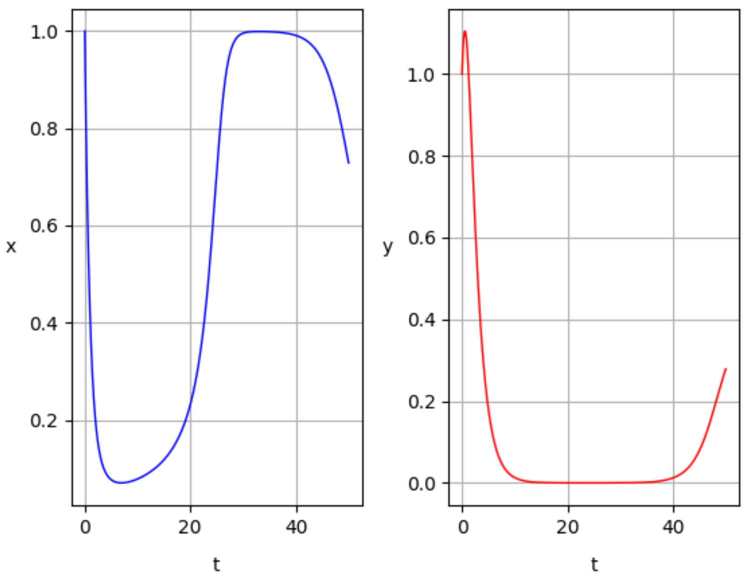

Рис. 8: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) является вырожденным узлом (уст.).

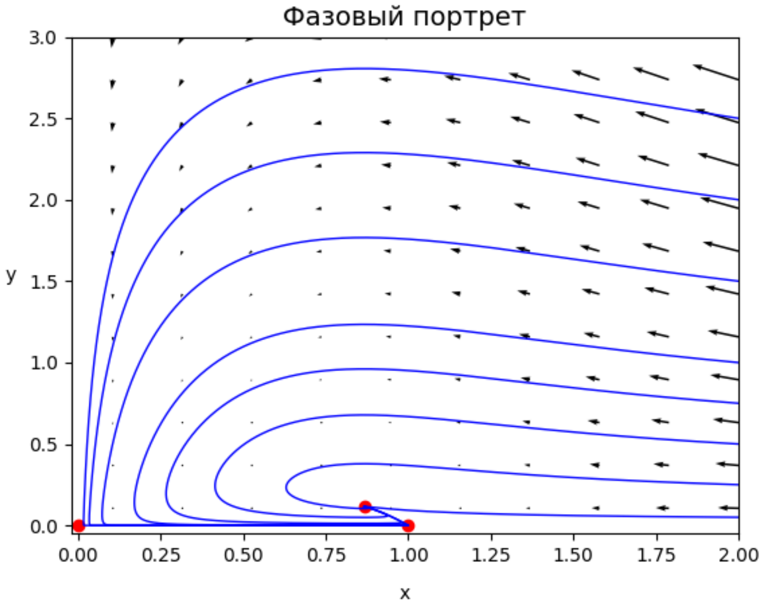

Рис. 9: Фазовый портрет при $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

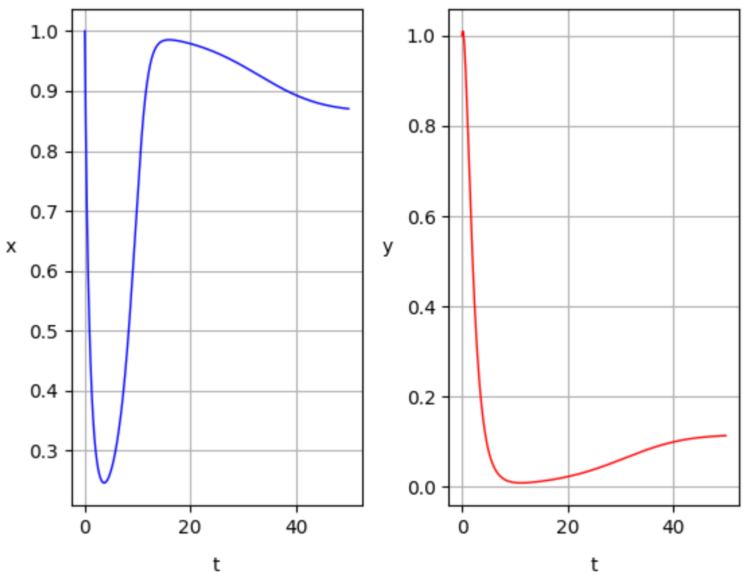

Рис. 10: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1\lambda_2 < 0$, следовательно, (4) - седло. Точка (5) является узлом (уст.).

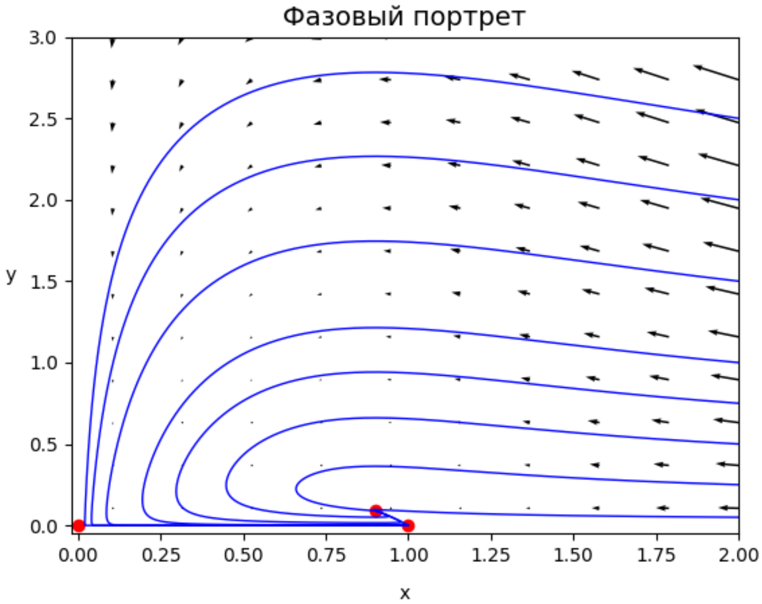

Рис. 11: Фазовый портрет при $a = 0.9$

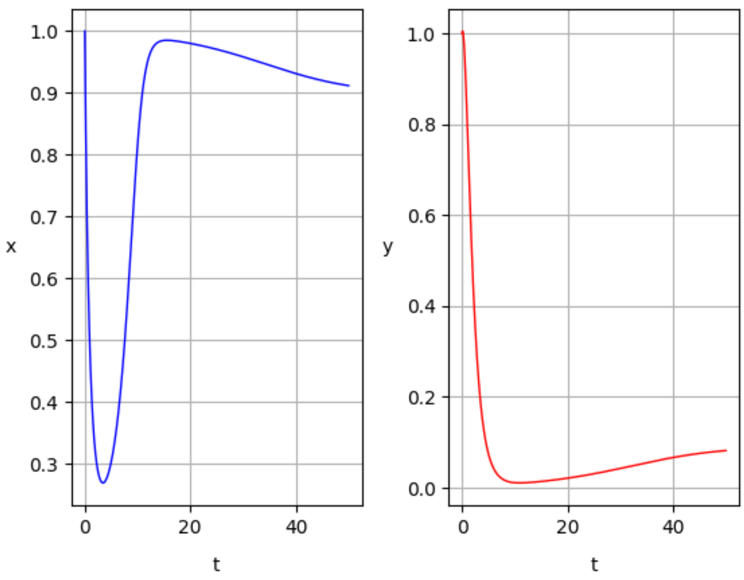

Рис. 12: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $a = 1$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, следовательно, (4) - параллельные лучи (уст.). Точка (5) совпадает с (4).

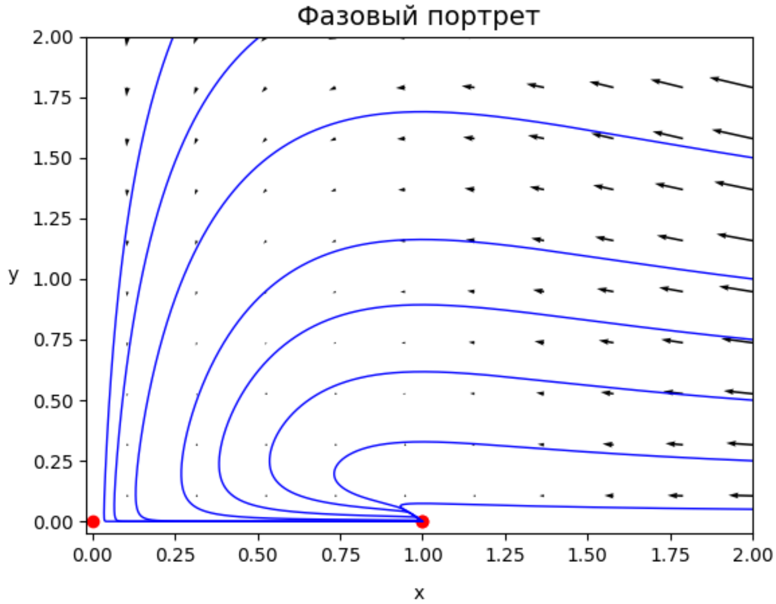

Рис. 13: Фазовый портрет при $a = 1$

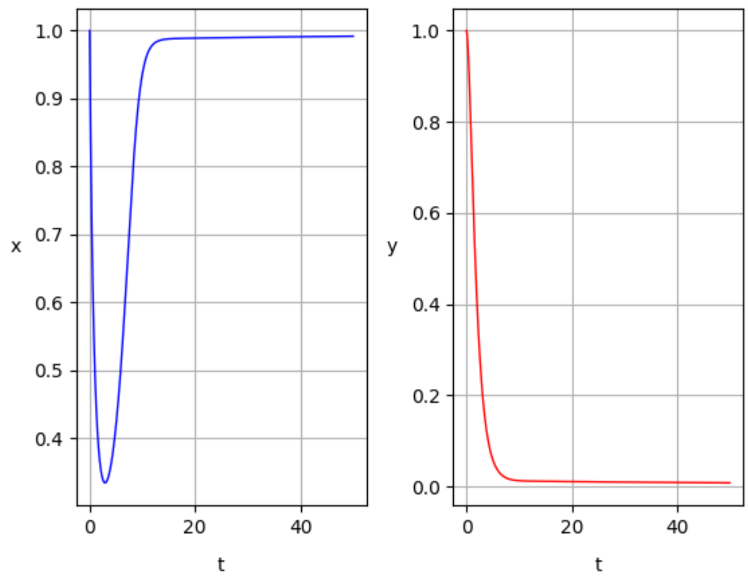

Рис. 14: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени

При $a > 1$ одно из собственных значений (6) равно нулю, а второе меньше нуля, значит (3) - параллельные лучи (уст.). Собственные значения (7) таковы, что (4) - узел (уст.). Точка (5) - седло.

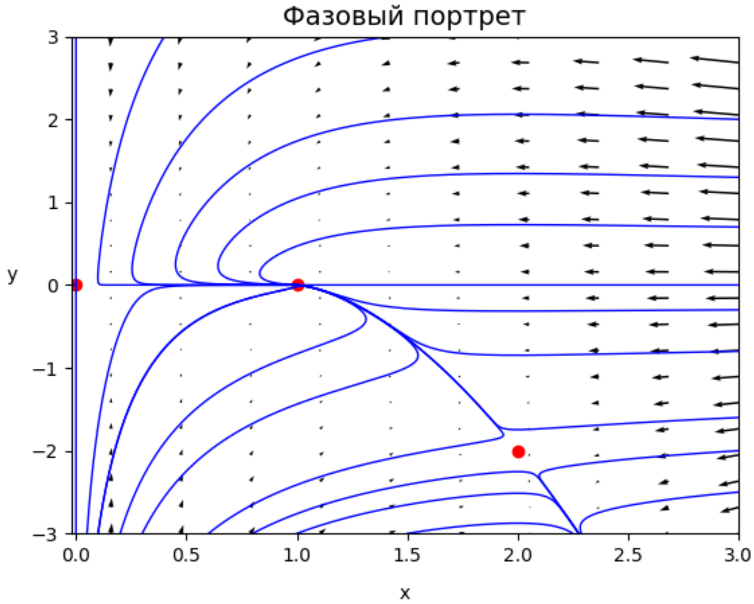

Рис. 15: Фазовый портрет при $a = 2$

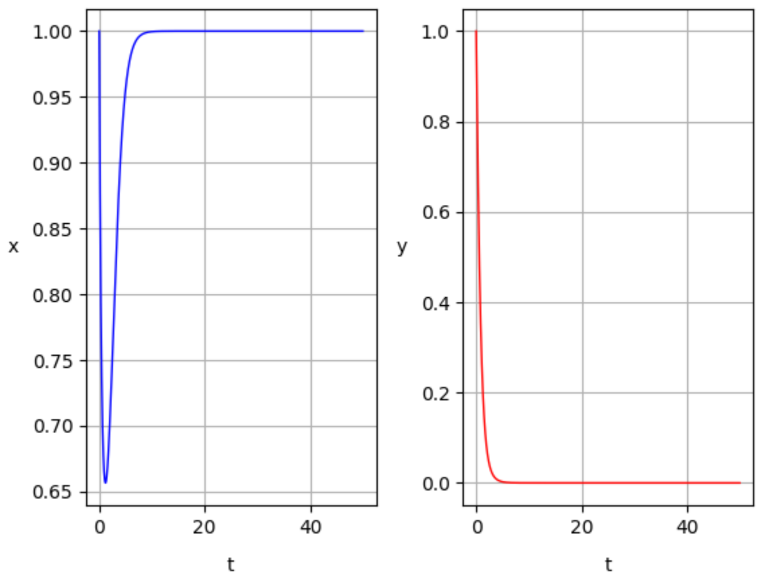

Рис. 16: Пример зависимости решений $x(t)$ и $y(t)$ системы уравнений (1) от времени