**Исследование модели, описываемой автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений**

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x = yz, \\ &\frac{d}{dt}y = x - y, \\ &\frac{d}{dt}z = 1 - xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Стационарные точки системы (1) находятся из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} yz &= 0, \\ x - y &= 0, \\ 1 - xy &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система уравнений (2) имеет 2 решения:

$$M_1(1, 1, 0), \tag{3}$$
$$M_2(-1, -1, 0). \tag{4}$$

Изучим поведение траекторий решения системы уравнений (1) в окрестности особых точек (3), (4). Матрицы Якоби в этих точках имеют вид:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$
$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

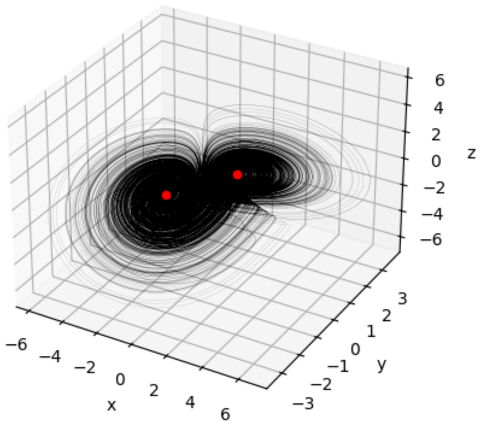
Собственные значения матриц (5) и (6) определяются из уравнения:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0, \tag{7}$$

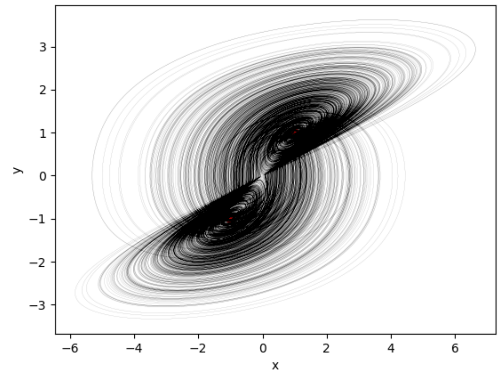
они равны:

$$\lambda_1 \approx -1.3532, \quad \lambda_{2,3} \approx 0.17660 \pm 1.20282i. \tag{8}$$

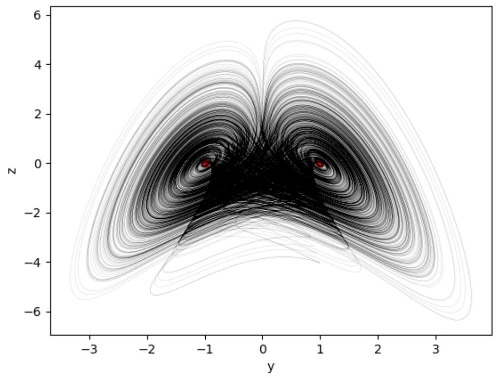
Можно заметить, что $|\lambda_1| > 1$, это говорит о том, что обе точки не устойчивы.



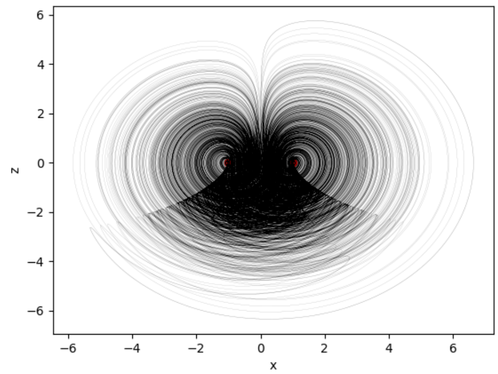

$(a)\ x - y - z$




$(b)\ x - y$

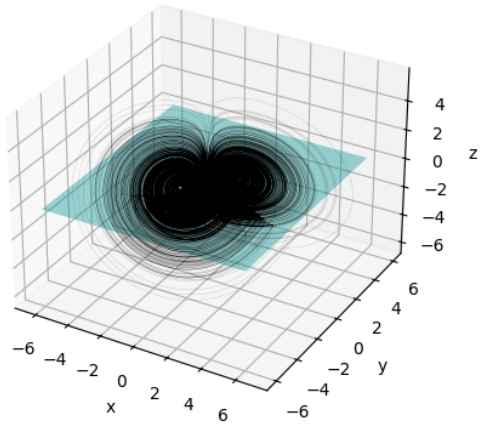



$(c)\ y - z$

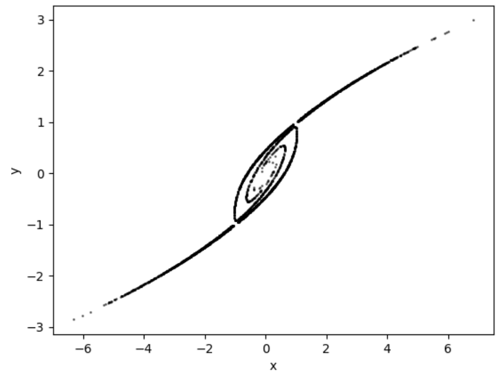



$(d)\ x - z$

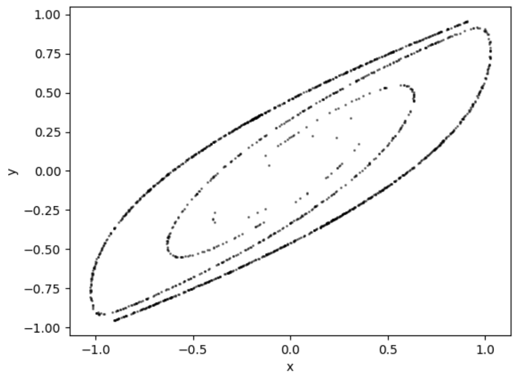
Рис. 1: Фазовые портреты аттрактора рассматриваемой системы (1) в проекциях на различные оси. Красным обозначены стационарные точки



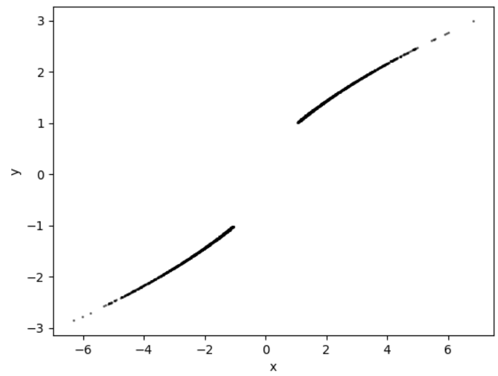

$(a)$ Аттрактор и плоскость сечения




$(b)$ Двустороннее сечение

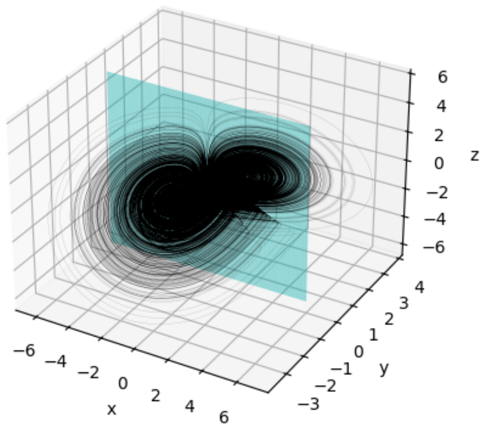



$(c)$ Одностороннее сечение в направлении убывания z

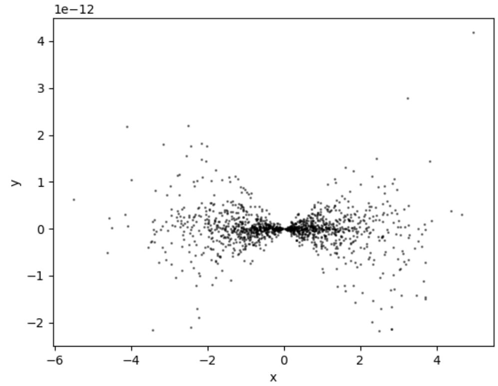



$(d)$ Одностороннее сечение в направлении возрастания z

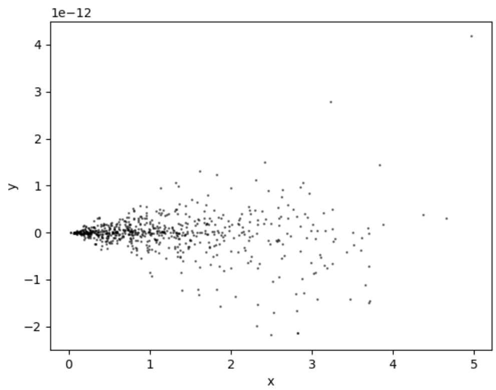
Рис. 2: Примеры сечений Пуанкаре аттрактора системы (1) плоскостью $z = 0$



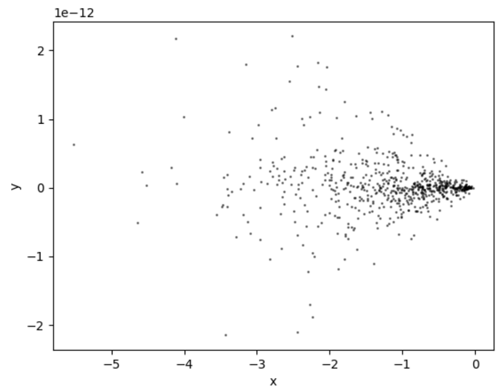

$(a)$ Аттрактор и плоскость сечения




$(b)$ Двустороннее сечение




$(c)$ Одностороннее сечение в направлении убывания y




$(d)$ Одностороннее сечение в направлении возрастания y

Рис. 3: Примеры сечений Пуанкаре аттрактора системы (1) плоскостью $y = 0$

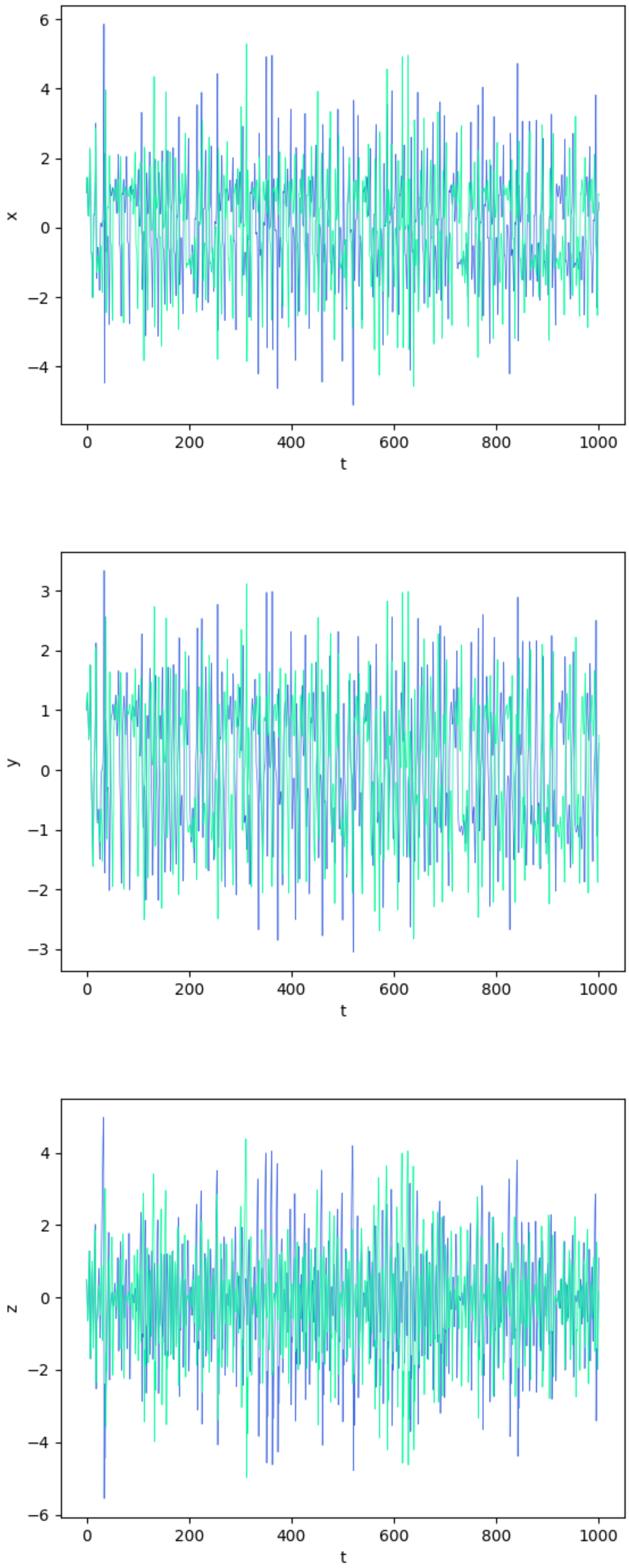



Рис. 4: Расхождение двух близлежащих траекторий системы (1) для начальных условий (1, 1, 0.5) и (1.01, 1.01, 0.5)

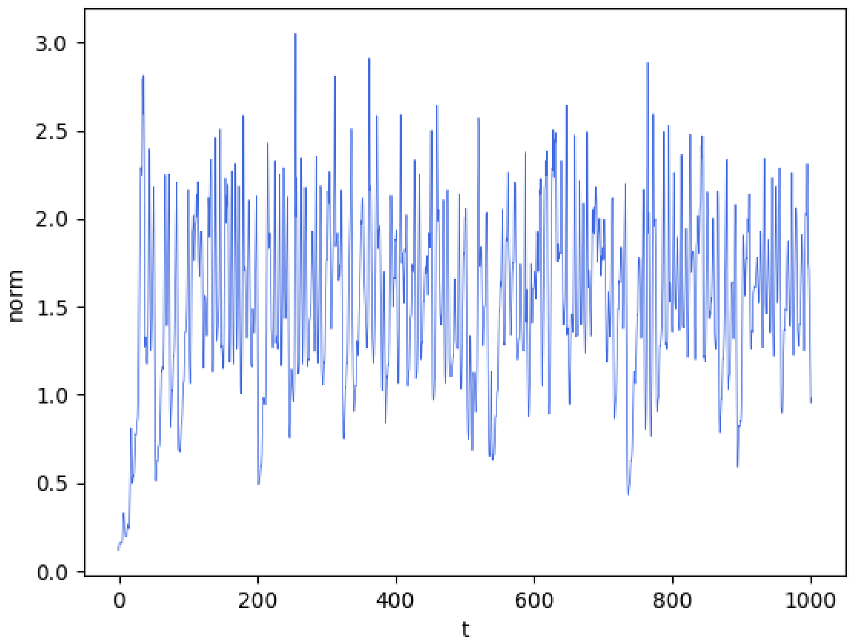



Рис. 5: Расстояние между двумя траекториями системы (1) с близкими начальными условиями с графиков выше в евклидовой норме в зависимости от времени

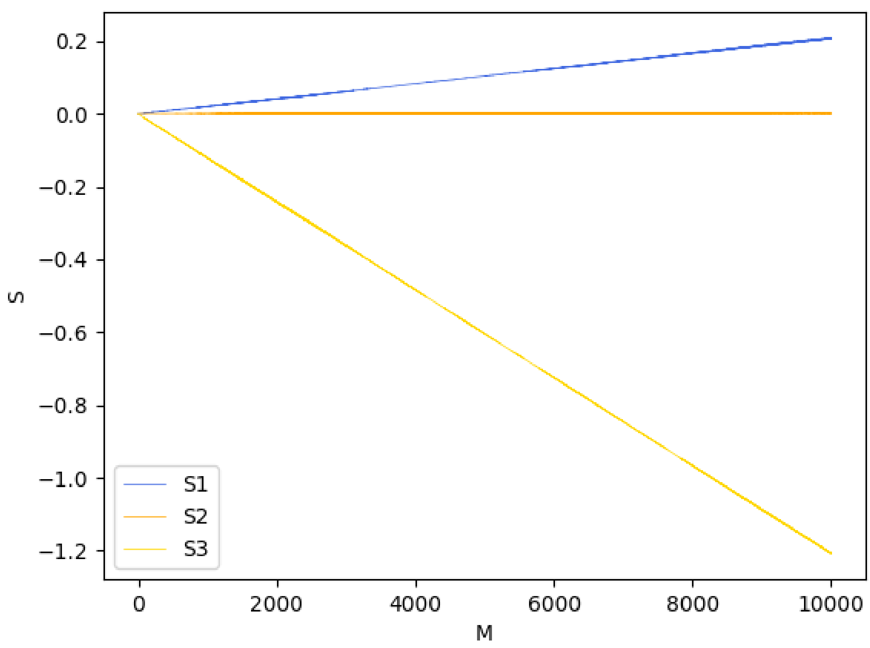



Рис. 6: Зависимость сумм в формулах для вычисления показателей Ляпунова от количества шагов $M$ ($\lambda_1 = 0.21016129275920375, \quad \lambda_2 = 0.00032336916363194453, \quad \lambda_3 = -1.2084127902749147$)