Исследование динамической системы, описываемой неавтономным обыкновенным дифференциальным уравнением

Рассматривается следующее уравнение периодически возмущенного осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta e^{-x}(1 - e^{-x}) = f\cos(\omega t). \tag{1}$$

В каноническом виде:

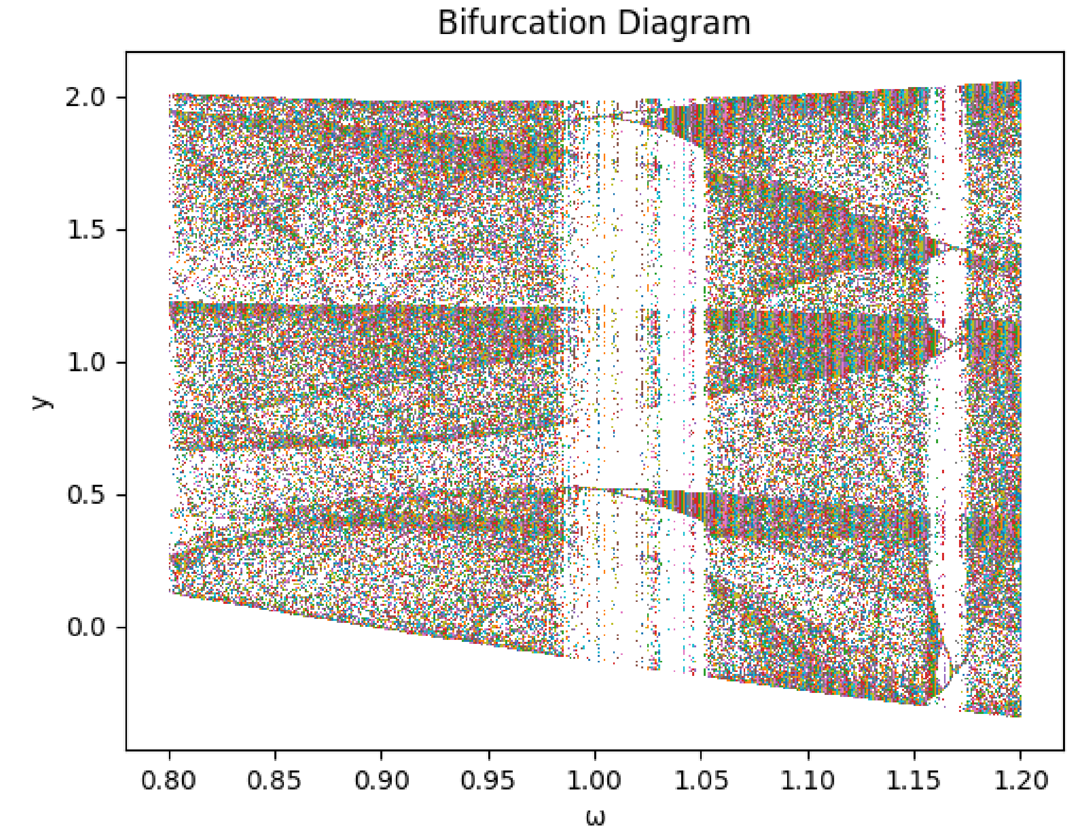
$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y - \beta e^{-x}(1 - e^{-x}) + f\cos(\omega t), \quad \frac{dz}{dt} = \omega. \tag{2}$$

В данном примере рассматривается случай с $\omega \in [0.8, 1.2]$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 8$, $f = 3.07$.

Бифуркационная диаграмма динамической системы (1) представлена на Рис. 1. Для ее построения по оси абсцисс были отложены $\omega \in [0.8, 1.2]$ с шагом 10^{-4}, а по оси ординат точки $\frac{dx}{dt}$ из сечения Пуанкаре аттрактора динамической системы, описываемой уравнением (1), было отброшено 100 периодов для начального условия (3, 0, 0).

Некоторые выводы, которые можно сделать из диаграммы:

- **при** $\omega \in [0.80, 0.98]$ **-** хаотическая динамика;
- **при** $\omega \in [0.98, 1.05]$ **-** окно периода два с бифуркациями удвоения периода и переходом к хаосу;
- **при** $\omega \in [1.05, 1.15]$ **-** хаотическая динамика;
- **при** $\omega \in [1.15, 1.17]$ **-** окно периода три с бифуркациями удвоения периода и переходом к хаосу;
- **при** $\omega \in [1.17, 1.2]$ **-** хаотическая динамика.



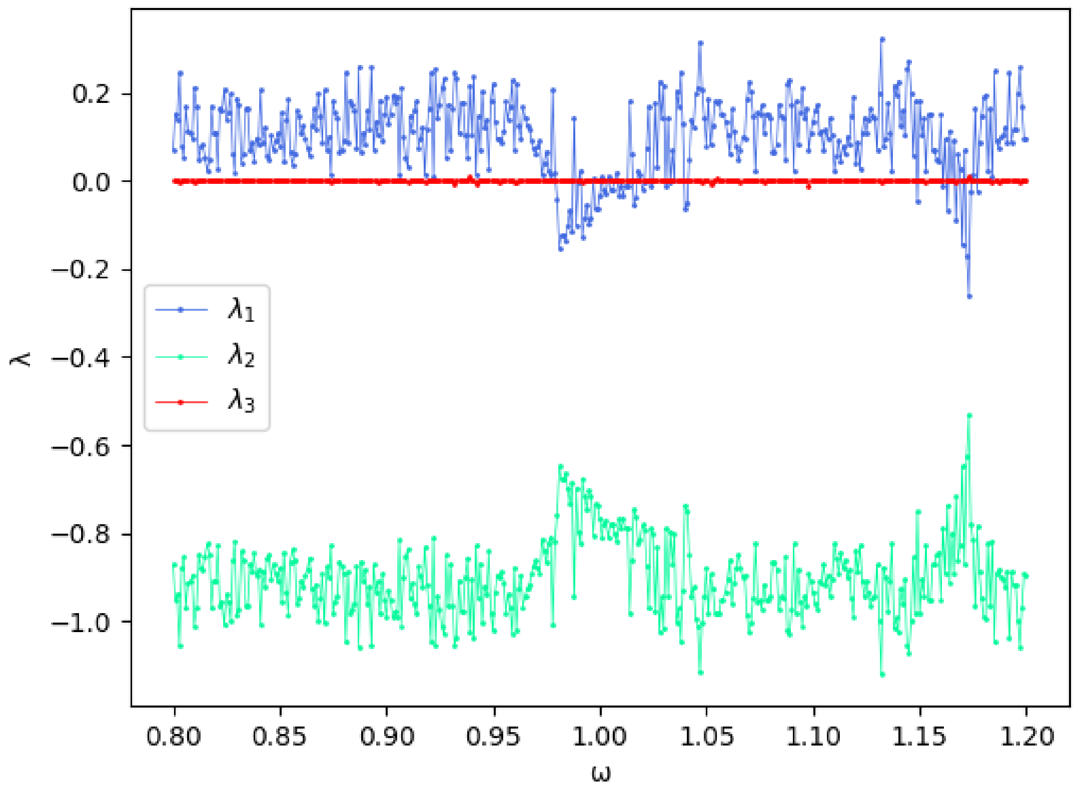
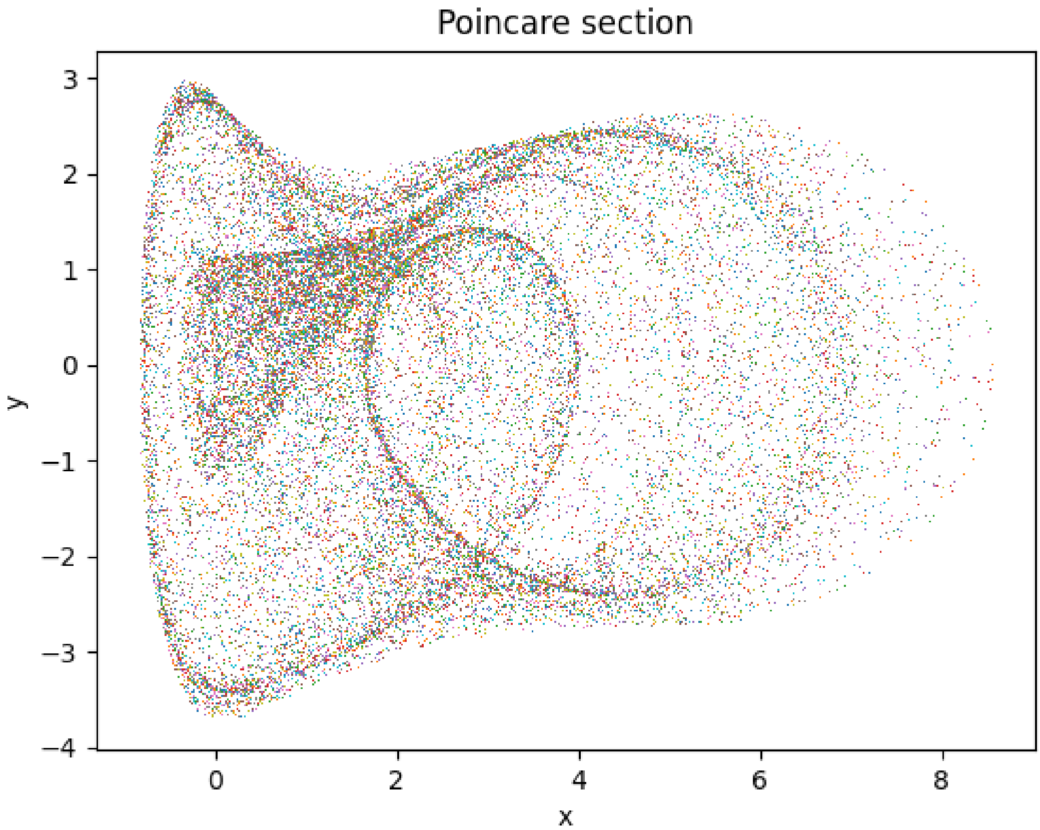


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма и спектр показателей Ляпунова в зависимости от параметра ω. Здесь $y = \frac{dx}{dt}$. Размерность аттрактора, посчитанная по формуле Каплана-Йорка: 1.1050997056448435



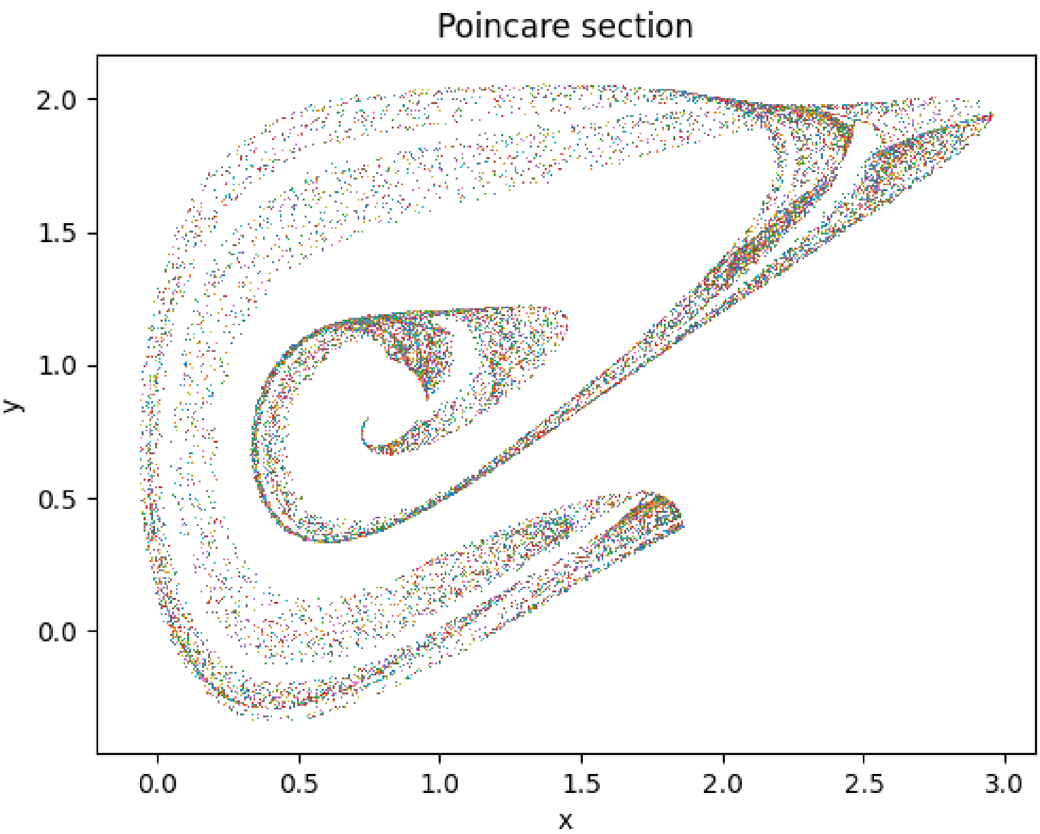
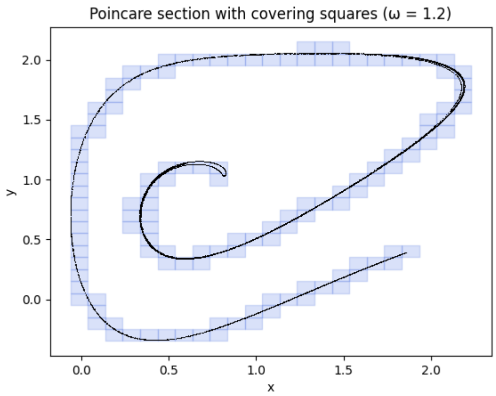
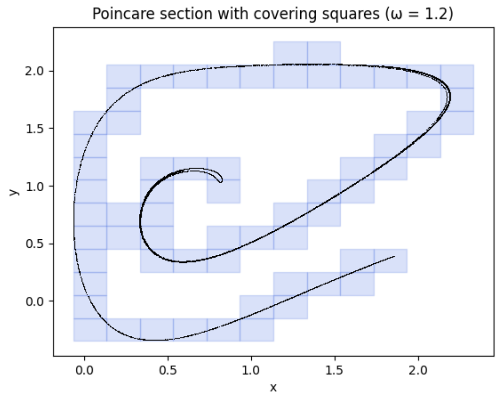


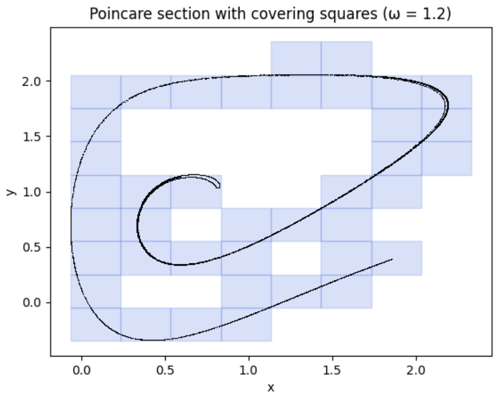
Рис. 2: Сечения Пуанкаре, если угол берется не по модулю 2π и если берется по модулю 2π



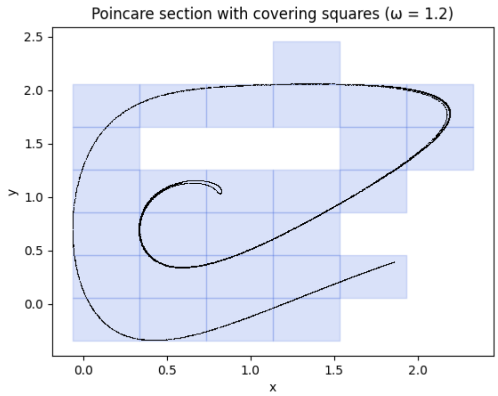
$(a) \quad \epsilon = 0.1$



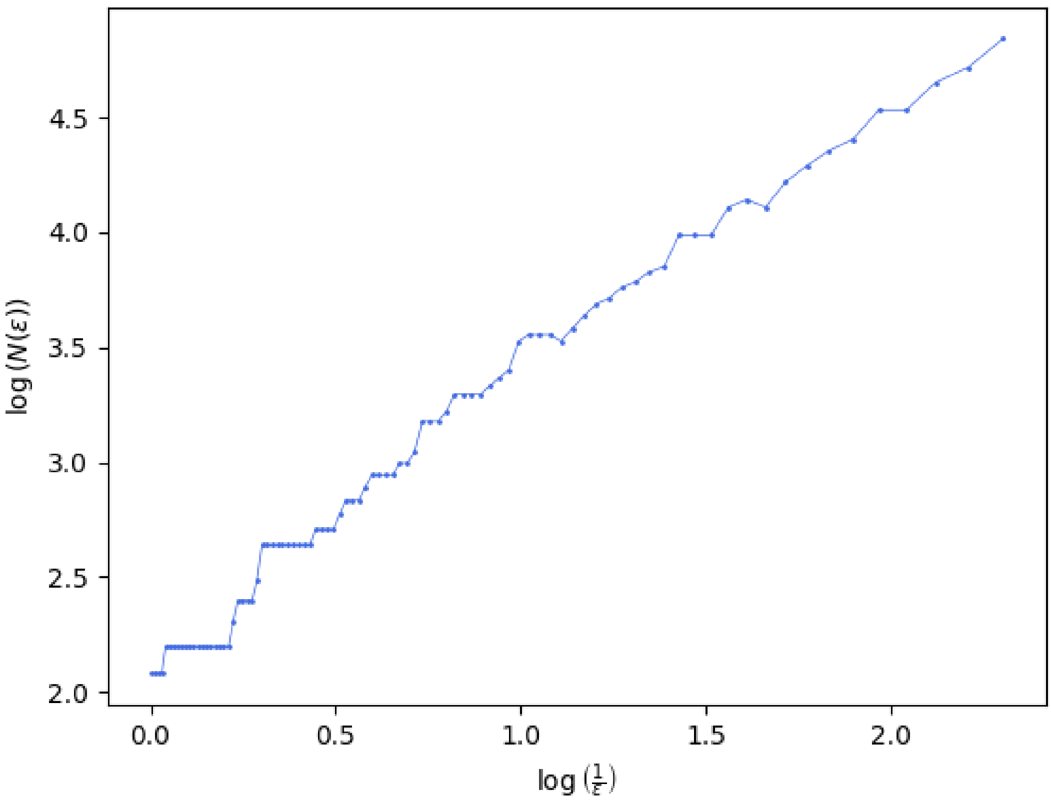
$(b) \quad \epsilon = 0.2$



$(c) \quad \epsilon = 0.3$



$(d) \quad \epsilon = 0.4$



(e) Зависимость $N(\epsilon)$ от $\frac{1}{\epsilon}$ при $\omega = 1.2$

Рис. 3: К вычислению размерности аттрактора (1.2007137339640135)