3.3. Линейное уравнение переноса

Метод конечных объемов

Для гиперболического уравнения (или системы уравнений), записанного в консервативной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \tag{3.7}$$

можно выписать численную схему в потоковой форме. Величина $f(u)$ называется потоком величины u. Для линейного уравнения переноса $f(u) = au$. Численная схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 0 \tag{3.8}$$

соответствует методу конечных объемов в одномерном случае. В этом случае построение численных схем сводится к определению численных потоков $F_{i\pm\frac{1}{2}}$.

Схема уголок (при $a > 0$):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0, \tag{3.9}$$

численный поток (при $a > 0$):

$$F_{i+\frac{1}{2}} = au_i. \tag{3.10}$$

Схема Лакса—Вендроффа (при любых a):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = \frac{\tau a^2}{2h^2}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right], \tag{3.11}$$

численный поток (также при любых a):

$$F_{i+\frac{1}{2}} = a\left(u_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + u_{i+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \qquad \alpha = \frac{a\tau}{h}. \tag{3.12}$$

Схема Лакса—Вендрофа с коррекцией потоков. Численный поток считается как комбинация численных потоков, посчитанных по схемам низкого и высокого порядков:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{up}} + \phi\left(r_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{lax}} - F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{up}}\right), \tag{3.13}$$

здесь F^{up} — численный поток по схеме уголок (upwind), а F^{lax} — численный поток по схеме Лакса—Вендроффа. Функция $\phi \in [0, 1]$ позволяет регулировать точность метода. На гладких решениях ϕ должна быть близка к единице, чтобы использовался поток, вычисленный по схеме высокого порядка. На негладких решениях $\phi \to 0$ и должна использоваться монотонная схема низкого порядка (уголок).

Параметр $r_{i+\frac{1}{2}}$ — соотношение наклонов (наклон — *slope*):

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}, \tag{3.14}$$

Выражение выше справедливо при $a > 0$. Функция $\phi(r)$ называется ограничителем потоков (flux limiter или slope limiter). В википедии на английском в статье *flux limiter* приведено большое число вариантов, можно смело использовать любой вариант из этого зоопарка при выполнении лабораторной.

Лаба 1. Реализовать схему уголок (она же схема с разностями против потоков). Продемонстрировать, что схема имеет первый порядок аппроксимации на достаточно гладких решениях $\varphi_4(x)$. Также показать диссипацию схемы при сохранении монотонности на негладких решениях (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$).

Лаба 2. Реализовать схему Лакса—Вендроффа или любую другую схему второго порядка. Продемонстрировать, что схема имеет второй порядок аппроксимации на достаточно гладких решениях $\varphi_4(x)$. Также показать, что схема допускает осцилляции в численном решении, то есть ведет себя немонотонно, что особенно заметно на негладких решениях (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$).

Лаба 3. Реализовать схему Лакса—Вендроффа с коррекцией потоков (с лимитерами). Продемонстрировать, что схема имеет порядок аппроксимации между первым и вторым на достаточно гладких решениях $\varphi_4(x)$. Также показать, что схема предотвращает осцилляции даже на разрывных функциях.

Тестовые функции:

$$\varphi_1(x) = \eta(1 - \xi(x)), \qquad \text{где} \quad \xi(x) = \tfrac{|x - x_0|}{\varepsilon}, \tag{3.15}$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \cdot \left(1 - \xi^2\right), \tag{3.16}$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_1(x) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{|1-\xi^2|}}, \tag{3.17}$$

$$\varphi_4(x) = \varphi_1(x) \cdot \cos^3 \frac{\pi \xi}{2}. \tag{3.18}$$

Первая функция задает прямоугольный импульс, $\varphi_1(x) = 1$ при $x \in D = (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$, вне интервала равна нулю.

Вторая функция — перевернутая парабола на интервале D, вне интервала ноль. Функция является всюду непрерывной, но не гладкой в точках $x = x_0 \pm \varepsilon$.

Третья функция $\varphi_3(x)$ по математике является бесконечно-дифференцируемой, включая точки $x_0 \pm \varepsilon$, однако производные высоких порядков имеют очень большие значения. Вероятно, это и сказывается на плохой аппроксимации.

Четвертая функция $\varphi_4(x)$ имеет гладкую вторую производную, поэтому может использоваться при тестировании численных методов со вторым порядком точности.

Далее я буду ссылаться на анимации, которые воспроизводят качественное выполнение лабораторных работ. Постановка задачи, которую я решаю, приведена в файле. Используется как начальное условие, так и граничное. Все анимации соответствуют данной постановке. Если анимация не открывается в вашем стандартном видео проигрывателе, попробуйте открыть браузером.

На верхнем графике выводится анимация точного решения и двух численных решений на сетках с шагом 10^{-2} и 10^{-3}, то есть соотношение шагов равно 10. При аппроксимации с первым порядком точности следует ожидать уменьшения погрешности в 10 раз, при аппроксимации со вторым порядком следует ожидать уменьшения погрешности в 100 раз. В заголовке указывается используемая схема, число Куранта (во всех расчетах $C = 0.7$), а также текущее время.

На нижнем графике динамически выводится погрешность двух решений (для сеток с $h = 10^{-2}$ и 10^{-3}). Графики позволяют визуально оценить, насколько отличаются погрешности для двух сеток. Кроме этого в заголовке динамически выводится соотношение погрешностей $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ на двух сетках на последний момент времени.

Файлы upwind — решение задачи по схеме уголок. Во всех случаях заметна большая диссипация решения. В зависимости от гладкости функции варьируется порядок аппроксимации. Для ступеньки (наше) понятие аппроксимации не имеет значения. Для более гладких функций порядок аппроксимации повышается. Для функции $\varphi_4(x)$ порядок близок к первому: при уменьшении шага h в 10 раз соотношение ошибок ε около 10.

Файлы square — решение с использованием квадратного шаблона. Схема имеет второй порядок аппроксимации. На гладкой функции $\varphi_4(x)$, при использовании шагов h, отличающихся в 10 раз мы получаем решения, ошибки которых отличаются в 100 раз. На всех остальных функциях заметны осцилляции.

Файлы lax — решение по схеме Лакса—Вендроффа. Всё аналогично схеме-квадратик, также второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Отличие: не такие жесткие осцилляции на разрывном решении (на ступеньке).

Файлы lax-tvd — решение по схеме Лакса—Вендроффа с ограничением потоков (используется лимитер minmod или van Leer, а может MC). Порядок аппроксимации не дотягивает до второго даже на хороших функциях. Зато мы избавились от осцилляций. При этом диссипация на разрывных решениях гораздо ниже, чем при использовании простейшей схемы уголок. То есть прямоугольный импульс распадается гораздо медленнее.