2.2. Волновое уравнение

Схема «крест» для волнового уравнения.

Рассмотрим задачу о колебаниях струны в довольно общей постановке:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), & 0 < t, \quad 0 < x < l, \\ \alpha_L\, u(0,\, t) - \beta_L\, u_x(0,\, t) = \mu_L(t), & |\alpha_L| + |\beta_L| > 0, \\ \alpha_R\, u(0,\, t) + \beta_R\, u_x(0,\, t) = \mu_R(t), & |\alpha_R| + |\beta_R| > 0, \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x). & \end{cases}$$

Схема «крест» для численного решения задачи имеет следующий вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2\, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f(x_j,\, t^n). \tag{2.18}$$

Схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате $O(h^2) + O(\tau^2)$ и устойчива при выполнении условия Куранта

$$\tau \leq \frac{h}{a}. \tag{2.19}$$

Схема является трехслойной, поэтому для начала счета необходимо определить два первых временных слоя u_j^0 и u_j^1. Для этого нам как раз потребуются оба начальных условия. Очевидно, следует выбрать $u_j^0 = \varphi(x_j)$. Для первого слоя легко сообразить формулу:

$$u_j^1 = u(x_j,\, 0) + \tau u_t(x_j,\, 0) = \varphi(x_j) + \tau\psi(x_j), \tag{2.20}$$

но она имеет только первый порядок аппроксимации. Разложим функцию $u(x,\, t)$ в ряд Тейлора до следующего слагаемого и получим аппроксимацию со вторым порядком:

$$\begin{aligned} u(x_j,\, \tau) &\approx u(x_j,\, 0) + \tau\, u_t(x_j,\, 0) + \frac{\tau^2}{2}\, u_{tt}(x_j,\, 0), \\ u_j^1 &= \varphi(x_j) + \tau\psi(x_j) + \frac{\tau^2}{2}\big(a^2\varphi''(x_j) + f(x_j, 0)\big). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Схема (2.18) позволяет посчитать на новом $^{n+1}$ временном слое только внутренние точки. Для определения граничных точек необходимо воспользоваться граничными условиями. Угловые значения считаются после расчета значений во внутренних узлах сетки. Схема пересчета граничных условий с первым порядком аппроксимации:

$$
\begin{aligned}
\alpha_L\, u_0^{n+1} - \beta_L\, \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} \quad &= \mu_L\big(t^{n+1}\big),\\
\alpha_R\, u_N^{n+1} + \beta_R\, \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} \quad &= \mu_R\big(t^{n+1}\big).
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Для повышения порядка аппроксимации в угловых точках можно использовать численные производные со вторым порядком аппроксимации:

$$
\begin{aligned}
\alpha_L\, u_0^{n+1} - \beta_L\, \frac{3u_2^{n+1} - 4u_1^{n+1} + u_0^{n+1}}{2h} \quad &= \mu_L\big(t^{n+1}\big),\\
\alpha_R\, u_N^{n+1} + \beta_R\, \frac{3u_N^{n+1} - 4u_{N-1}^{n+1} + u_{N-2}^{n+1}}{h} \quad &= \mu_R\big(t^{n+1}\big).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Лабораторная работа.

Найти приближенное решение смешанной краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке $0 \le x \le 1$. Для расчета решения использовать явную схему «крест». Предусмотреть возможность произвольного задания шага по координате x (шаг h) и времени t (шаг τ). По умолчанию расчет проводится до момента времени $T = 1$. Для получения решения использовать начальные и граничные условия первого и второго порядка точности. Для сравнения приведено точное решение $u_0(x, t)$. Проверить порядок аппроксимации схемы типа «крест».

Провести численное моделирование колебаний струны. Длина струны l, линейная плотность ρ и сила натяжения T заданы.

2.21. Струна закреплена с двух концов. Начальный профиль струны $u(x,\,0) = A\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$, то есть совпадает с одной из собственных функций колебаний струны.

2.22. Правый конец струны закреплен, а на левый конец воздействует периодическая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Продемонстрировать явление резонанса.

2.23. Правый конец струны свободен, а на левый конец воздействует периодическая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Продемонстрировать явление резонанса.

2.24. Правый конец струны закреплен через пружину с жесткостью k, а на левый конец воздействует периодическая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Подобрать резонансную частоту.

2.25. Струна закреплена с двух концов. По струне равномерно распределен заряд q. Струну вносят в однородное периодическое электрическое поле с напряженностью $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Продемонстрировать явление резонанса.

2.26. Концы струны закреплены. По левой части струны равномерно распределен положительный заряд q, а по правой — отрицательный $-q$. Струну вносят в электрическое поле с напряженностью $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Продемонстрировать явление резонанса.

2.27. Концы струны закреплены. В точке x_0 подвешен шарик массы m. В начальный момент времени шарику придают импульс I.

2.28. Концы струны закреплены. В точке x_0 подвешен шарик массы m с зарядом q. Струну вносят в однородное периодическое электрическое поле с напряженностью $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Подобрать резонансную частоту. Что будет, если поместить шарик в узел стоячей волны? *Hint: поставить задачу без δ-функции.*

2.29. В точке x_0 подвешен шарик массы m. Правый конец струны закреплен, а на левый конец воздействует периодическая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Подобрать резонансную частоту. Что будет, если поместить шарик в узел стоячей волны? *Hint: поставить задачу без δ-функции.*

В следующих задачах путем численного моделирования исследовать распространение и отражение волн для одномерного волнового уравнения. Уединенные волны создаются путем задания отклонения на одном из концов струны.

$$\mu(t) = A\,\eta(t_0 - t)\sin^3 \frac{\pi t}{t_0}, \qquad \eta(x) \text{ — функция Хевисайда.} \tag{2.24}$$

2.30. Правый конец струны закреплен, левый конец струны отклоняют для создания уединенной волны (2.24). Смоделировать отражение волны от закрепленного конца струны.

2.31. Правый конец струны свободен, левый конец струны отклоняют для создания уединенной волны (2.24). Смоделировать отражение волны от свободного конца струны.

2.32. Правый конец струны закреплен через пружину с жесткостью k, левый конец струны отклоняют для создания уединенной волны (2.24). Смоделировать отражение волны от правого конца струны.

2.33. Задача 2.30, но на струну действует сила тяжести. В начальный момент времени струна находится в равновесии.

2.34. Правый и левый концы струны отклоняют по законам $\mu_L(t)$ и $\mu_R(t)$ для создания уединенных волн (2.24). Смоделировать взаимодействие двух волн.

2.35. Имеется неоднородная по плотности струна, левая и правая части которой имеют плотности ρ_L и ρ_R соответственно. Правый конец струны закреплен, левый конец струны отклоняют для создания уединенной волны (2.24). Смоделировать прохождение/отражение волны при прохождении неоднородности.

2.36. В точке x_0 струны подвешен шарик массы m. Правый конец струны закреплен, левый конец струны отклоняют для создания уединенной волны (2.24). Смоделировать прохождение/отражение волны при взаимодействии с точечной массой. *Hint: поставить задачу без δ-функции.*

2.37. Решить задачу 2.36 при условии, что на струну действует сила тяжести. В начальный момент времени струна находится в равновесии. Стационарная подзадача решается численно.