Chapter 10
動態規劃專題課程
Introduction to Dynamic Programming

台南女中資訊研究社 38th C++ 進階班課程
TNGS IRC 38th C++ Advanced Course
講師：陳俊安 Colten

動態規劃 Dynamic Programming

- 是一個把陣列名字叫做 dp 的技巧
  - 沒錯
- 是動態？還是規劃？
  - 他既非動態也非規劃
- 動態規劃是一個透過小的子問題解決大問題的技巧
  - 很像分治 (Divide and Conquer) 大事化小，小事化無
- 那為什麼叫動態規劃？

動態規劃 Dynamic Programming

- 我特別去找了一下資料，結果發明動態規劃的人的自傳有寫名子由來
- 發明動態規劃的人是 Bellman
- 他在他的自傳 《Eye of the Hurricane: An Autobiography》有提到
- 有興趣的可以參考 這個連結
- 為了給大家一點期待感我現在不想公布答案：P

動態規劃 Dynamic Programming

- 動態規劃是什麼？
  - 在這邊我用一句話解釋動態規劃是什麼
    - 長江後浪推前浪，一替新人換舊人
  - 這句話呼應了動態規劃最核心的想法
  - 用以前的資訊來幫助我們得到當前最新的資訊

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

- 可以把動態規劃想像成是一個公式
- 只要我們把公式需要的資訊先取得了，就可以慢慢往後推得後面的資訊
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
  - 有了以上這兩個資訊之後我們就可以依序算出 $f(2), f(3) \cdots f(n)$
  - 求出 $f(n)$ 的時間複雜度為 $O(n)$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

- 這樣子從底層往上慢慢推出後面資訊的方式稱為 Buttom-Up
- 與 Buttom-Up 相反的方式稱為 Top-Down
- 我們一樣來看這一個例子

f(n) = f(n-1) + f(n-2)

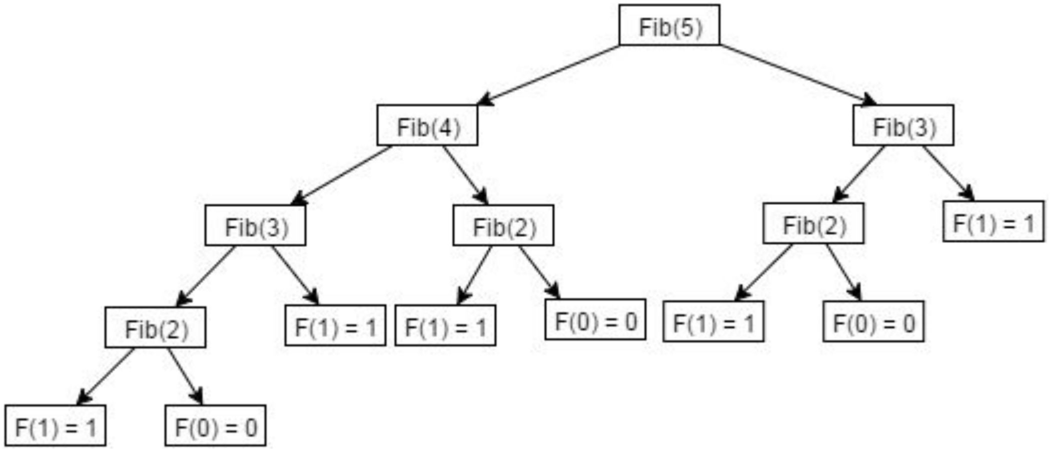
- 我們嘗試使用遞迴求得 f(n) 是多少
- 求得 f(n) 需要 f(n-1) 與 f(n-2) 的資訊
- 遞迴的終止條件則為 f(0) 與 f(1)

```
int f(int n)
{
    if( n == 0 ) return 0;
    if( n == 1 ) return 1;

    return f(n-1) + f(n-2);
}
```

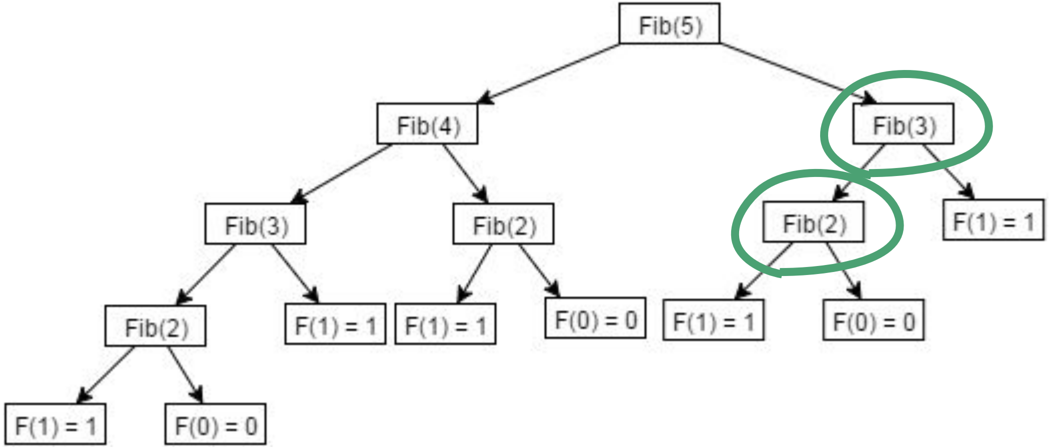
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

- 這樣子的時間複雜度是 O(n) ㄇ？
- 我們畫出遞迴樹來看看



$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

- 你會發現有地方我們重複計算了
- 先前已經求過 f(2) 與 f(3) 了



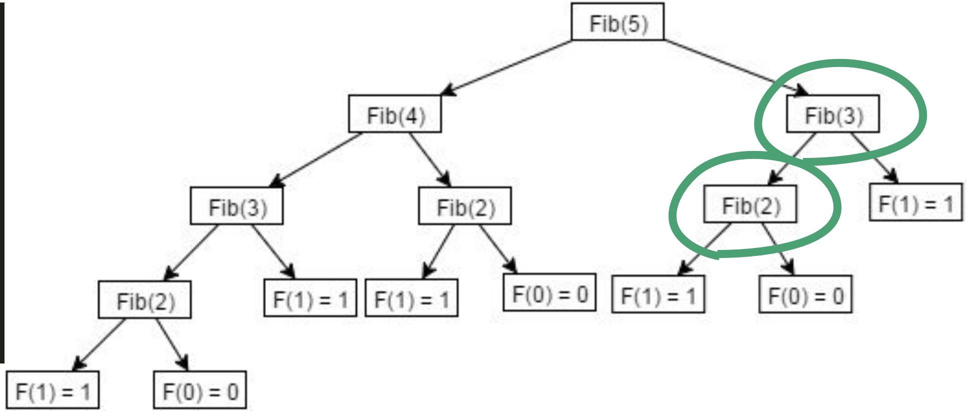
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

- 因此如果我們把之前算過的存起來
- 如果某次突然要使用到之前算過的資訊就可以直接拿出來用了
- 這就是動態規劃 Top-Down 的精神

```
int dp[101];

int f(int n)
{
    if( n == 0 ) return 0;
    if( n == 1 ) return 1;

    if( dp[n] != 0 ) return dp[n]; // 算過了，直接拿以前算出來的東西
    else
    {
        dp[n] = f(n-1) + f(n-2);
        return dp[n];
    }
}
```



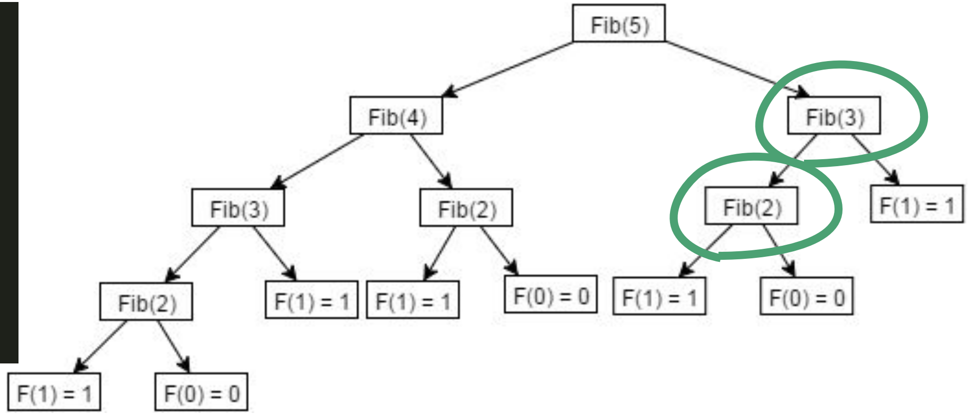
時間複雜度？

- 因為這樣子我們可以保證這 n 個東西我們只會算過 1 次
- 時間複雜度又變回乾淨的 O(n) 了

```
int dp[101];

int f(int n)
{
    if( n == 0 ) return 0;
    if( n == 1 ) return 1;

    if( dp[n] != 0 ) return dp[n]; // 算過了，直接拿以前算出來的東西
    else
    {
        dp[n] = f(n-1) + f(n-2);
        return dp[n];
    }
}
```



Top-Down v.s Bottom-Up

- Top-Down 的缺點
  - 時間複雜度常數大
    - pass by value & pass by reference
    - 遞迴太深會導致 stack overflow
- Top-Down 的優點
  - 轉移式很直覺，只要記得把算過的存起來就好

Top-Down v.s Bottom-Up

- Bottom-Up 的缺點
  - 轉移式比較不直覺
- Bottom-Up 的優點
  - 寫起來很乾淨，時間複雜度常數小
- Bottom-Up 是動態規劃最常見的使用方法
- Top-Down 一個不小心遞迴太深就出大事了

排列組合動態規劃：CSES Problem Set Dice Combinations

- 骰子有 1 ~ 6 點，現在可以骰無限顆骰子，依序骰每一個骰子
- 求最後共有幾種骰法會使所有骰子的點數和為 n
- Example：
  - n = 3 , answer = 4
  - 1 + 1 + 1
  - 2 + 1
  - 1 + 2
  - 3

排列組合動態規劃：CSES Problem Set Dice Combinations

- 動態規劃的第一個步驟都是 定義轉移式
- 有點類似定義一個 Function 的概念
- 像是這題我們會定義 dp[i] = 骰出點數為 i 的組合數

排列組合動態規劃：[CSES Problem Set Dice Combinations]

- 定義完轉移式之後接下來就可以開始把公式推出來了
- 對於點數 i 來說，要使骰出的點數總和為 i，會有 6 種可能
    - 點數 i - 6 時再骰出 1 個 6 點
    - 點數 i - 5 時再骰出 1 個 5 點
    - 點數 i - 4 時再骰出 1 個 4 點
    - and so on…
- 因此轉移式為 dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2] + … + dp[i-6]
    - 加法原理

排列組合動態規劃：[CSES Problem Set Dice Combinations]

- 如此一來，很簡單的就可以用迴圈解決了，時間複雜度 O(n)
- 題目有說答案可能很大，只要輸出 mod 10^9 + 7 的結果就好

```cpp
const int mod = 1e9 + 7;

signed main(void)
{
    int n;
    cin >> n;

    dp[0] = 1;

    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int k=1;k<=6;k++)
        {
            if( i - k >= 0 ) dp[i] += dp[i-k] , dp[i] %= mod;
        }
    }

    cout << dp[n] << "\n";

    return 0;
}
```

排列組合動態規劃：CSES Problem Set Coin Combinations I

- 有 n 種硬幣，每種硬幣的面額分別是 ci
- 接下來每一次你可以選擇其中一種硬幣 (可以重複拿一樣的)
- 求最後湊出總金額 x 的選法有幾種

For example, if the coins are $\{2, 3, 5\}$ and the desired sum is 9, there are 8 ways:

- $2 + 2 + 5$
- $2 + 5 + 2$
- $5 + 2 + 2$
- $3 + 3 + 3$
- $2 + 2 + 2 + 3$
- $2 + 2 + 3 + 2$
- $2 + 3 + 2 + 2$
- $3 + 2 + 2 + 2$

排列組合動態規劃：CSES Problem Set Coin Combinations I

- 定義轉移式：dp[i] = 湊出總和為 i 的湊法有幾種
- 對於總和 i 來說，你有可能是透過：
  - i - c1 再拿 1 個 c1 硬幣得來的
  - i - c2 再拿 1 個 c2 硬幣得來的
  - i - c3 再拿 1 個 c3 硬幣得來的
  - and so on…
- 因此你會發現轉移式跟骰子那一題一樣
- 差別只在於骰子固定 1 ~ 6，硬幣是 c1 ~ cn

排列組合動態規劃：[CSES Problem Set Coin Combinations I]

- 對於每一個總和 i 我們都需要去枚舉 c1 ~ cn
- 因此整體時間複雜度為 O(nx)
- 我自己變數 x 是取名叫做 m
- 因為我比較叛逆一點
  - m 剛好在 n 旁邊
  - 打字會比較快

```cpp
    int n,m;
    cin >> n >> m;
    vector <int> a(n);

    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        cin >> a[i];
    }

    dp[0] = 1;

    for(int i=1;i<=m;i++)
    {
        for(int k=0;k<n;k++)
        {
            if( i - a[k] >= 0 )
            {
                dp[i] += dp[i-a[k]];
                dp[i] %= mod;
            }
        }
    }

    cout << dp[m] << "\n";
```

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Frog 1

- 現在有一隻青蛙在第一個石頭，n 個石頭，每一個石頭的高度數字 hi
- 這一隻青蛙每一次只能跳 1 格或 2 格
- 如果原本在高度 a 的石頭，跳到高度 b 的石頭需要花費 | a - b |
- 求青蛙最後跳到第 n 個石頭所需要的最少花費

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Frog 1

- 對於青蛙第 i 個石頭來說只有兩種可能
  - 從第 i - 1 個石頭跳過來
  - 從第 i - 2 個石頭跳過來
- 所以如果我們能算出跳到 i - 1 與 i - 2 的最佳答案，就可以求得跳到 i 的最佳答案

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Frog 1

- 定義 dp[i] = 跳到 i 所需要的最小花費
- dp[1] = 0 , dp[2] = | h1 - h2 |
- 如果第 i - 2 個石頭的高度是 a，第 i - 1 個石頭的高度是 b
- 從第 i - 2 個石頭跳過來所需花費為 dp[i-2] + | a - hi |
- 從第 i - 1 個石頭跳過來所需花費為 dp[i-1] + | b - hi |

選擇困難的動態規劃：[Atcoder DP Contest Frog 1]

- 要選出最好的方案，因此整個轉移式合併在一起就會變成：
- dp[i] = min(dp[i-2] + | a - hi | , dp[i-1] + | b - hi |)
- 整體時間複雜度 O(n)

```cpp
    vector<int>a(n+1),dp(n+1,(int)1e9);

    for(int i=1;i<=n;i++) cin >> a[i];

    dp[1] = 0 , dp[2] = abs(a[2]-a[1]);

    for(int i=3;i<=n;i++)
    {
        dp[i] = min( dp[i-1] + abs(a[i]-a[i-1]) , dp[i-2] + abs(a[i]-a[i-2]) );
    }

    cout << dp[n] << "\n";
```

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Vacation

- Colten 放暑假只會做 3 件事情
  - 寫程式
  - 水餃
  - 睡覺
- 如果在第 i 天做第 1 件事情 Colten 會得到 ai 的快樂度
- 如果在第 i 天做第 1 件事情 Colten 會得到 bi 的快樂度
- 如果在第 i 天做第 1 件事情 Colten 會得到 ci 的快樂度

選擇困難的動態規劃：[Atcoder DP Contest Vacation]

- Colten 不會連續 2 天做同一件事情
- 求如果有 n 天，Colten 在最佳規劃下，快樂度最大可以是多少？

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Vacation

- 對於每一天會有 3 種選擇
- 定義 dp[i][k] = 如果第 i 天做第 k 件事情能得到的最大快樂度
- dp[1][1] = a1 , dp[1][2] = a2 , dp[1][3] = a[3]

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Vacation

- 對於 dp[i][1] 來說
  - 前一天（第 i - 1 天）不能也做第 1 件事情
- 對於 dp[i][2] 來說
  - 前一天（第 i - 1 天）不能也做第 2 件事情
- 對於 dp[i][3] 來說
  - 前一天（第 i - 1 天）不能也做第 3 件事情

選擇困難的動態規劃：[Atcoder DP Contest Vacation]

- 如果第 i 天要做第 1 件事情
  - 第 i - 1 天只能做第 2、3 件事情
  - 可以列出轉移式
    - dp[i][1] = max(dp[i-1][2] , dp[i-1][3]) + ai
- 如果第 i 天要做第 2 件事情
  - 第 i - 1 天只能做第 1、3 件事情
  - 可以列出轉移式
    - dp[i][2] = max(dp[i-1][1] , dp[i-1][3]) + bi

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Vacation

- 如果第 i 天要做第 3 件事情
  - 第 i - 1 天只能做第 1、2 件事情
  - 可以列出轉移式
    - dp[i][3] = max(dp[i-1][1] , dp[i-1][2]) + ci

選擇困難的動態規劃：Atcoder DP Contest Vacation

- 因此只要把每一天的所有選擇的最佳答案計算出來，就可以一直往後推出最佳的答案
- 最後答案為 max(dp[n][1] , dp[n][2] , dp[n][3])
- 時間複雜度：O(n)

```cpp
    int n;
    cin >> n;

    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int k=1;k<=3;k++)
        {
            cin >> a[i][k];
        }
    }

    dp[1][1] = a[1][1] , dp[1][2] = a[1][2] , dp[1][3] = a[1][3];

    for(int i=2;i<=n;i++)
    {
        dp[i][1] = max(dp[i-1][2],dp[i-1][3]) + a[i][1];
        dp[i][2] = max(dp[i-1][1],dp[i-1][3]) + a[i][2];
        dp[i][3] = max(dp[i-1][1],dp[i-1][2]) + a[i][3];
    }

    cout << max({dp[n][1],dp[n][2],dp[n][3]}) << "\n";
```

0 / 1 背包問題

- 動態規劃當中最具代表性的問題之一
- 目前屬於 NP-Hard (還沒有找到多項式時間內的解法)
- 題目會給 n 個物品，容量 m 的背包
- 第 i 個物品會佔據背包 wi 的容量，價值為 vi
- 你的目標是最後讓背包裡的所有物品價值越高越好

0 / 1 背包問題

- 定義 dp[i][k] 表示考慮前 i 個物品的情況下，背包容量為 k 時所能得到的最大價值
- 對於 dp[i][k] 來說，只有兩種選擇
    - 拿第 i 個物品
    - 不拿第 i 個物品

0 / 1 背包問題

- 如果我們要拿第 i 個物品，且當前背包只有 k 的容量
- 那在我們考慮前 i - 1 個物品時，背包容量只能有 k - wi
  - 因為拿第 i 個物品會佔據掉 wi 的容量
  - 如果在考慮前 i - 1 個物品時就用掉了超出 k - wi 的容量，第 i 個物品是裝不下容量只有 k 的背包的
- 因此如果我們要拿第 i 個物品，轉移式為：
  - dp[i][k] = dp[i-1][k-wi] + vi

0 / 1 背包問題

- 如果我們不拿第 i 個物品，且當前背包只有 k 的容量
- 轉移式很簡單：
    - dp[i][k] = dp[i-1][k]
- 把這兩種可能的轉移式合併在一起就會變成
- dp[i][k] = max(dp[i-1][k] , dp[i-1][k-wi] + vi)
- 而我們最後要求的答案是 dp[n][m] (n 個物品、背包容量 m)
- 因此我們就必須依序求出 dp[1][0~m], dp[2][0~m], … dp[3][0~m]

0 / 1 背包問題

- 求出 dp[i][0~m] 之前必須先把 dp[i-1][0~m] 求得
- 而我們已知 dp[0][0~m] 的結果都是 0
- 因此我們可以從底部開始推答案，推出 dp[n][m] 的結果
- 這就是動態規劃最重要的核心精神
- 整體時間複雜度：O(nm)

0 / 1 背包問題

```
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int k=0;k<=m;k++)
        {
            if( k - w[i] >= 0 ) dp[i][k] = max( dp[i-1][k] , dp[i-1][ k - w[i] ] + v[i] );
            else dp[i][k] = dp[i-1][k];
        }
    }

    cout << dp[n][m] << "\n";
```

無限背包問題

- 跟 0 / 1 背包問題要求的東西一樣
- 只是每一個物品的數量是無限的

無限背包問題

- 由於物品可以重複拿，我們的狀態就不用特別註明當前是考慮前幾種物品，因此我們重新定義轉移式：
  - dp[i] = 背包容量為 i 時，所可以得到的最大價值

無限背包問題

- 對於容量 i 來說有 m 種可能
    - 在最大容量 i - w1 時再拿一個第 1 種物品
    - 在最大容量 i - w2 時再拿一個第 2 種物品
    - 在最大容量 i - w3 時再拿一個第 3 種物品
    - and so on…
- 你有發現ㄇ？是不是跟前面骰子還有硬幣那一題一樣了！
- 只差在最後要求的東西不一樣而已

無限背包問題

- 對於容量 i 來說拿第 k 個物品的話：
  - dp[i] = max(dp[i] , dp[i-w_k] + v_k)
- 整體時間複雜度：O(nm)

```
for(int i=1;i<=m;i++)
{
    for(int k=1;k<=n;k++)
    {
        dp[i] = max(dp[i],dp[i-w[i]]+v[i]);
    }
}

cout << dp[m] << "\n";
```

背包問題的瓶頸

- 時間複雜度我們可能無法改變，目前找不到什麼好方法
- 那我們來看看空間複雜度

背包問題的空間複雜度

- 需要開 n * m 的 dp 表格去紀錄 (除了無限背包有 O(m) 的作法)，因此空間複雜度為 O(nm)
    - DP 是一個用 空間 換取 時間 的技巧
- 也就是說 n * m 如果太大，我們是完成不了 0/1 背包問題的
- 但其實 0/1 背包問題也有空間複雜度 O(m) 的作法
- 所以接下來我們來講 DP 當中的第一個優化技巧 滾動陣列

DP 優化：滾動陣列

- 如果一般的動態規劃是：
    - 長江後浪推前浪，一替新人換舊人
- 那麼被 滾動陣列 優化後的動態規劃就是：
    - 長江後浪推前浪，前浪死在沙灘上

DP 優化：滾動陣列

- 不是把陣列拿起來滾
- 滾動陣列的核心精神是：
  - 把沒有用到的陣列拿來繼續重複使用
- 其實就是有點資源回收的概念

DP 優化：滾動陣列

- 我們來看看 0/1 背包問題：
  - dp[i][k] = max(dp[i-1][k] , dp[i-1][k-wi] + vi)
- 有發現什麼事情ㄇ？
- 如果我們現在正在算 dp[5][0~m]
  - 那麼 dp[1][0~m], dp[2][0~m], dp[3][0~m] 以後都用不到了
  - 因為每一次轉移都只要知道前一次的結果
  - 這個時候滾動陣列這個技巧就可以派上用場了

DP 優化：滾動陣列

- 對於背包問題來說只需要記錄前 1 次的結果
- 我們就可以開兩組長度為 m 的陣列就好
  - 其中一組紀錄上一次的結果
  - 其中一組紀錄這一次轉移的結果
- 這樣的話空間複雜度就從 O(nm) 被我們優化成 O(m)

DP 優化：滾動陣列

- 我自己習慣把陣列開成 dp[2][m]
- 然後假設 i 是奇數時就表示 i - 1 是偶數，因此可以寫成
    - dp[i mod 2][k] = max(dp[(i - 1) mod 2][k] , dp[(i - 1) mod 2][k-wi] + vi)

```cpp
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int k=0;k<=m;k++)
        {
            if( k - w[i] >= 0 ) dp[i][k] = max( dp[(i-1)%2][k] , dp[(i-1)%2][ k - w[i] ] + v[i] );
            else dp[i][k] = dp[(i-1)%2][k];
        }
    }

    cout << dp[n%2][m] << "\n";
```

0/1 背包甚至可以不使用二維陣列

- 因為每一次都是拿前 1 次的結果，而且結果是可以一直使用的不用清空，所以其實 0/1 背包問題可以只開一維陣列解決
- 但是有個超級大的陷阱