离散时间傅里叶变换（DTFT）

宋晨阳 计 86

1 DTFT 的引入、定义与计算方法

前面我们已经知道，抽样信号与频谱函数的公式依次为：

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega - m\omega_s)$$

满足奈奎斯特采样定理时，在**奈奎斯特区间** $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$ 内，有：

$$T\hat{F}(\omega) = f(\omega)$$

不满足采样定理时，奈奎斯特区间内有其他部分“扩展”过来的频谱“密度”分布，上述等式不成立（等于改为约等于）。

基于连续信号的 FT 公式，我们可以用类似的方法定义离散时域信号 $\hat{f}(t)$ 的 FT：

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

仅使用抽样值的序列 $f(nT)$，即可计算出理想抽样信号的频谱密度函数。从序列值求出的频谱密度函数**仍然**是周期函数。

上述变换的逆变换：

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/s} \hat{F}(\omega)e^{jn\omega T}d\omega$$

上述公式中，T 为采样时间间隔，ω_s 为采样角频率，为常量。

满足采样定理时，奈奎斯特区间内的 FT 频谱为：

$$F(\omega) = T\hat{F}(\omega) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT} \qquad \omega \in \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right]$$

DTFT 的频率归一化：

为了方便起见，将采样频率“归一”，即将具体的物理时间抽象为单位时间，在数学上用 1 表示它。

数字信号：时间间隔归一的离散信号（序列）。

数字频谱：数字信号（序列）DTFT 的归一化频谱。

我们对 $\hat{F}(\omega)$ 的公式做如下修改，将模拟频率变为数字频率：

$$f(nT) \to x(n),\ \omega T \to \omega$$

就可以得到归一化（$T = 1$）后的 DTFT 与 IDTFT 公式：

DTFT：

$$X(\omega) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

IDTFT：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$$

模拟频率与数字频率：

记连续时间傅里叶变换 CTFT 得到的模拟频率是 Ω，DTFT 引入归一化时间后，变换结果是数字频率 ω。模拟频率的奈奎斯特区间为 $\left[-\Omega_s/2, \Omega_s/2\right]$，数字频率的奈奎斯特区间为 $[-\pi, \pi]$。两种频率的关系为：

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f/f_s = \Omega/f_s, \quad \Omega = \omega f_s$$

注意：$\hat{F}(\omega)$ 中的频率是模拟频率，DTFT 结果中的频率是数字频率，从本章开始所讨论的问题，如 DFT、$x(n)$，一般都是在数字频率的范畴内讨论。举个例子，如果一道题说信号 $x(n) = cos(\omega n)$，这里的 ω 就是数字频率。

频率归一化的好处：

- 频谱函数主周期内的形状，如果不考虑高低变化的话，则形状与采样间隔无关。
- 采样频率归一化使频谱重复间隔也会统一成 2π。考虑到离散信号频谱总是周期的函数，所以研究时可以对采样信号的实际频谱的周期进行抽象化的处理。抽象为2π是很方便的。
- 在计算机程序中，计算过程可以只考虑数值表示，而不用考虑信号样本间的真实时间间隔 。从算法效果上看，这不仅不会影响结果的正确性，反而还会提高算法应用的方便性。

2 DTFT 的性质

周期性：

$$X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$$

线性性：

$$DTFT\left[\sum_k a_k \cdot x_k(n)\right] = \sum_k a_k \cdot DTFT[x_k(n)]$$

时域平移：

$$DTFT[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

频域平移：

$$DTFT\left[e^{j\omega_0 n} x(n)\right] = X(\omega - \omega_0)$$

反褶：

$$DTFT[x(-n)] = X(-\omega)$$

共轭：

$$DTFT[x^*(n)] = X^*(-\omega)$$

时域扩展及对应的 DTFT：

$$x_{(a)}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{a}\right), & \frac{n}{a} \in Z \\ 0, & others \end{cases} \quad (a \in Z, \ \ a \neq 0)$$

$$DTFT\left[x_{(a)}(n)\right] = X(a\omega), \quad a \in Z, \ a \neq 0$$

频域微分：

$$DTFT[nx(n)] = j\left[\frac{d}{d\omega} X(\omega)\right]$$

时域卷积：

$$DTFT[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

频域卷积（频谱是周期的，积分要限制在一个周期内）：

$$DTFT[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega') X_2(\omega - \omega') d\omega'$$

圆周卷积（圆卷积）——对周期函数卷积的定义：

周期为 N 的离散信号的卷积：

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n - m)$$

周期为 T 的连续信号的卷积：

$$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(t') y(t - t') dt'$$

在频谱密度函数上的应用：

$$X(\omega)\otimes W(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega')W(\omega-\omega')d\omega'$$

帕斯瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X_\omega(\omega)|^2\,d\omega$$

3 时域加窗信号的 DTFT 与有限序列 DTFT 谱的分辨率

对于离散信号，我们施加长为 L 的矩形窗：

$$W(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le L-1\\ 0, & n\ge L\end{cases}$$

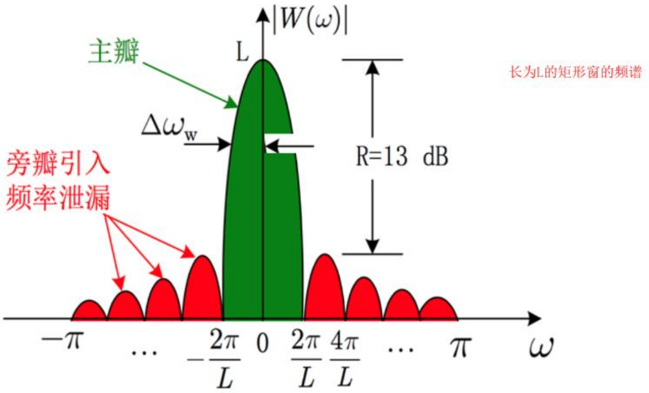
加窗后的信号：

$$x_L(n)=x(n)W(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le L-1\\ 0, & n\ge L\end{cases}$$

加窗之后的 DTFT 如下：

$$X_L(\omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

长为 L 的窗函数 $W(n)$ 的 DTFT 谱如下图所示：



主瓣所在的频率范围是 $\left[-\frac{2\pi}{L},\frac{2\pi}{L}\right]$，**主瓣宽度**为 $2\pi/L$，**过零点位置** $k\cdot\frac{2\pi}{L}(k\neq 0)$

现在我们要分辨频率为 ω_1,ω_2 的分量，记 $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$，则两个分量的频率之差不能小于主瓣宽度，即序列长度要满足：

$$L\ge\frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

不确定原理：序列加窗后，序列频谱中可分辨的最小频率间隔由数据长度决定，即窗函数的时间长度。

频率泄露：序列加窗后，序列频谱中出现了高频分量，它们是由于矩形窗两个边缘处的突变所造成的。

模拟频率位置的精度：用 DFT 计算信号的频谱时，峰值与信号真实频率在位置上有误差，设这个误差的浮动区间长度是 Δf，由上面的条件，结合模拟频率与数字频率的关系，可以得到：

$$\Delta f \geq \frac{f_s}{L},\ L \geq \frac{f_s}{\Delta f}$$

4 关于 DTFT 的一些神构造

4.1 求 $DTFT[x(2n+1)]$

$$e^{jm\pi} = (-1)^m$$

$$DTFT[x(2n+1)] = \sum_{m\ \mathrm{odd}} x(m)e^{-j\frac{m-1}{2}\omega}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(m) - (-1)^m x(m)]e^{-j\frac{m-1}{2}\omega}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}j\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x(m)e^{-j\frac{m}{2}\omega} - x(m)e^{jm\pi - j\frac{m}{2}\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}j\omega}\left[X\left(\frac{\omega}{2}\right) - X\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right)\right]$$

4.2 求 $DTFT[x(4n+i)]$ 相关：

$$\frac{e^{j\frac{m\pi}{2}} - e^{-j\frac{m\pi}{2}}}{2j} = sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0, m\ is\ even \\ 1, m = 4n+1 \\ -1, m = 4n+3 \end{cases}$$

$$\sum_{(m-i)|4} x(m)e^{-j\frac{m-i}{4}\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,sin\frac{m\pi}{2} = \cdots$$