清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

2020.09.17

其他信息

- 助教信息：
  - 周素平 1874504489@qq.com
  - 沈天成 stc18@mails.tsinghua.edu.cn
  - 陈雨兰 chenyula17@mails.tsinghua.edu.cn
  - 吴昊哲 wuhz19@mails.tsinghua.edu.cn

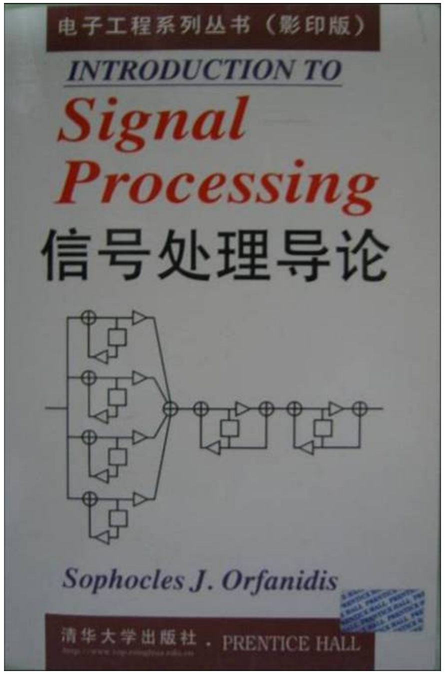
办公室：FIT 3-522

教师联系方式：

- jjia@tsinghua.edu.cn，13651399048（微信）

教学参考书

- 《Introduction to Signal Processing 信号处理导论》
  - *S.J. Orfanidis, Prentice-Hall, Inc.*
  - 清华大学出版社影印版
- 《信号处理原理》
  - 郑方，徐明星，清华大学出版社
- 《数字信号处理教程》
  - 程佩青，清华大学出版社



课程内容

- 信号与信号处理的基本概念
- 连续时间傅里叶变换CTFT
- 离散时间傅里叶变换DTFT
- 离散傅里叶变换DFT
- 离散时间系统分析
- 数字滤波器设计

考核方式

- 平时作业：15%（平时课堂练习适当加分）
- 课程实验：15% （代码填空形式）
  - 实验一：傅里叶级数的可视化（第4~5周，4%）
  - 实验二：信号的频分复用（第10~13周，5%）
  - 实验三：Mel频谱与griffin_lim声码器（第15~17周，6%+3%）
- 期末考试：70% [闭卷、笔试]

- 每周作业提交截止时间为下一周上课前一天晚上12点（网络学堂）

关于学习方法

"信号处理原理"

是数学？物理？

还是计算机？

物理现象←→物理规律←→数学工具←→计算机处理

方法论？　精确or近似？连续or离散？

第一章 信号的基本概念与数学基础

- **信号的概念**
- **信号的描述**
- **欧拉公式**
- **函数分解**

第一章 信号的基本概念与数学基础

- 信号的概念
- 信号的描述
- 欧拉公式
- 函数分解

信号

信号是人对物理世界的一种观察

*观察：是人通过传感器对物理世界的一种测量

信号

信号是人对物理世界的一种观察

*观察：是人通过传感器对物理世界的一种测量

信号

信号是人对物理世界的一种观察

*观察：是人通过传感器对物理世界的一种测量

**传感器：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置

**测量：用一种物理量来表示另一种物理量

信号的概念

信号

信号是人对物理世界的一种观察

*观察：是人通过传感器对物理世界的一种测量

**传感器：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置

**测量：用一种物理量来表示另一种物理量

信号与信息

信号是反映（或载有）信息的物理量，是系统直接进行加工、变换以实现通信的对象

信号是信息的表现形式，信息则是信号里所蕴含的内容

信号的概念

传感器：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置

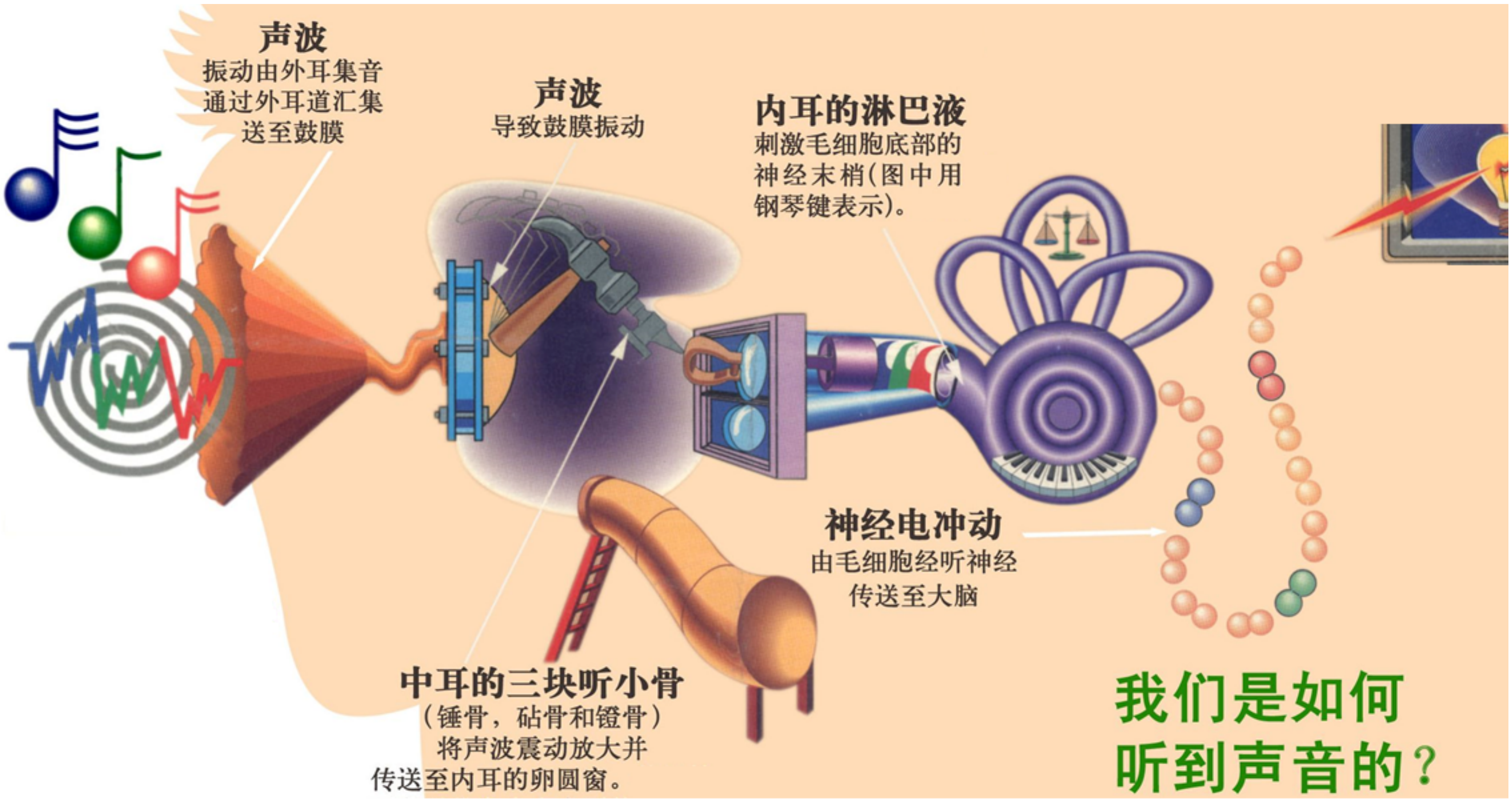
- 光：
  - 数码相机：光能产生电信号
- 空气振动：
  - 麦克风：空气的振动能产生电信号
- 温度：
  - 热敏电阻(阻值随温度变化)
  - 热电偶(对温度反应不同两种金属制成，温差导致电压)

- 加速度传感器
- 压力传感器
- 流量传感器

思考：你的手机里有哪些传感器？获取什么信号？

信号的概念

传感器：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置

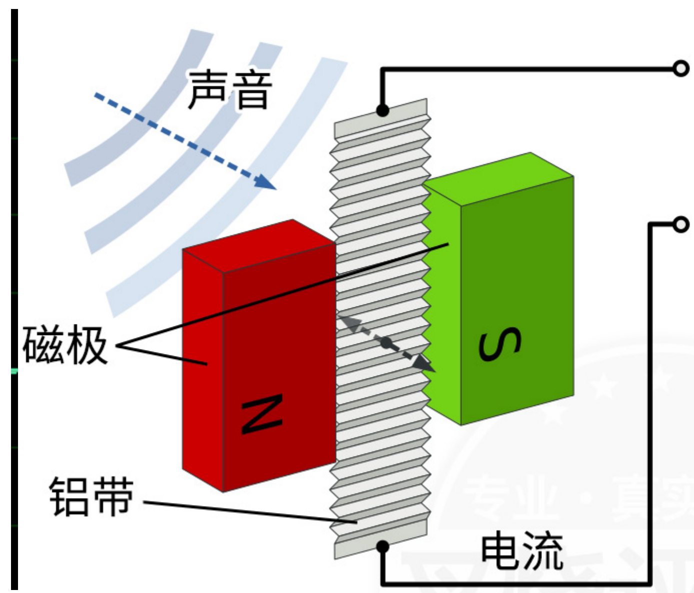


信号的概念

传感器：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置

信号的概念

传感器（示例）：把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置



铝带话筒发声原理

铝带话筒采用一块薄铝片切割磁场产生电流，由于振膜都是长条设计，线性振动范围比圆形振膜更大、复位也没圆形振膜那么紧，因此频响曲线非常平滑、低频拾取通常可以到 20Hz。

不过它的问题也不少：灵敏度低、瞬态不高、高频不足、振膜比较脆弱，声压大或误开 48V 可能会烧断振膜...

声波转换成电信号：数字音频信号

实际工程应用中，需要根据数字音频质量的需求选择转换时的参数（抽样频率）

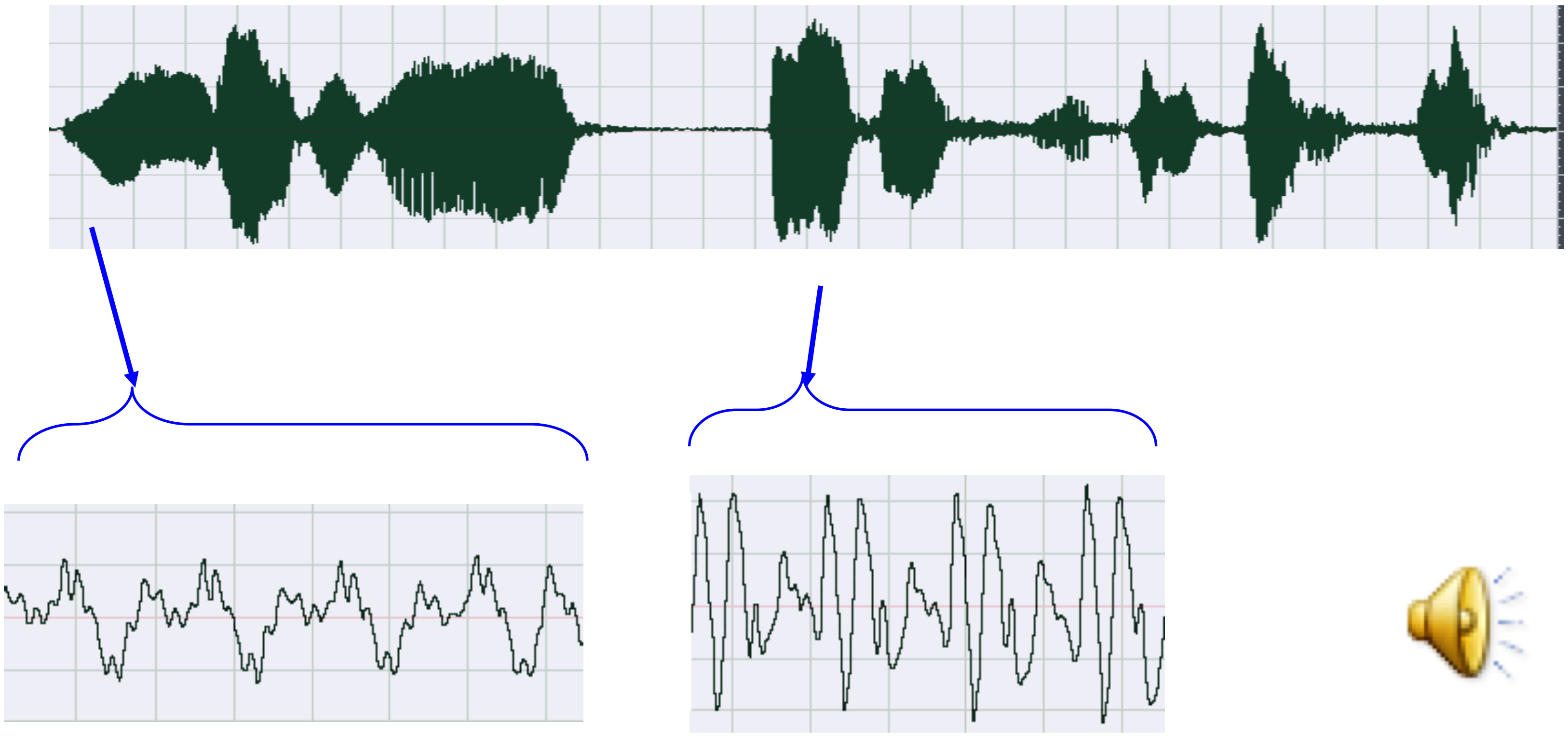
44.1kHz	22.05kHz	16kHz	11.025kHz	8kHz

Hi-Fi音频 电话音频

思考：为什么“抽样频率”会影响交响乐的品质？

——《抽样与抽样定理》中将学习☺

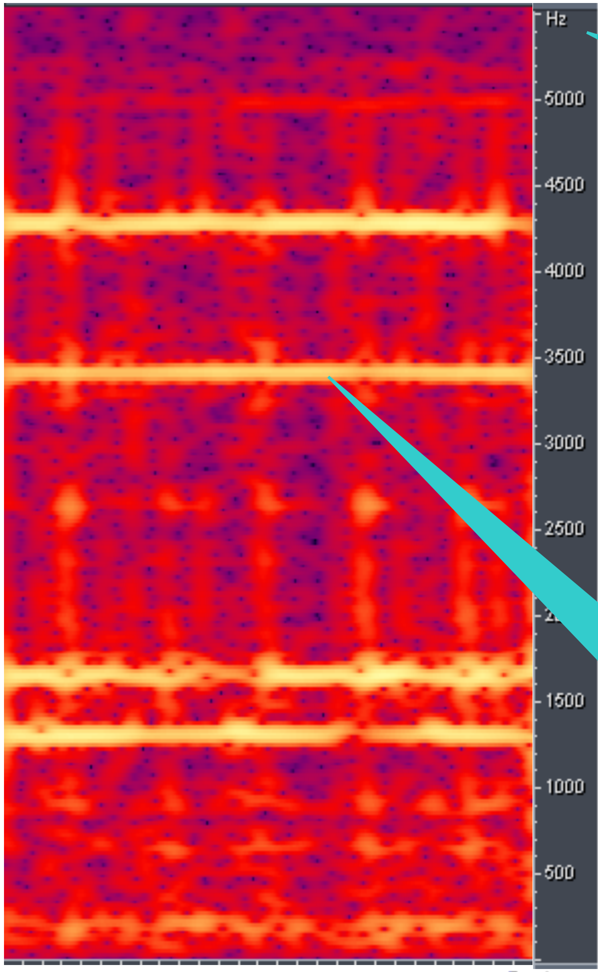
数字音频信号示例



您这个人儿，大概喜欢照像。

思考：你能从这段信号中“看出”发音人是男性还是女性吗？

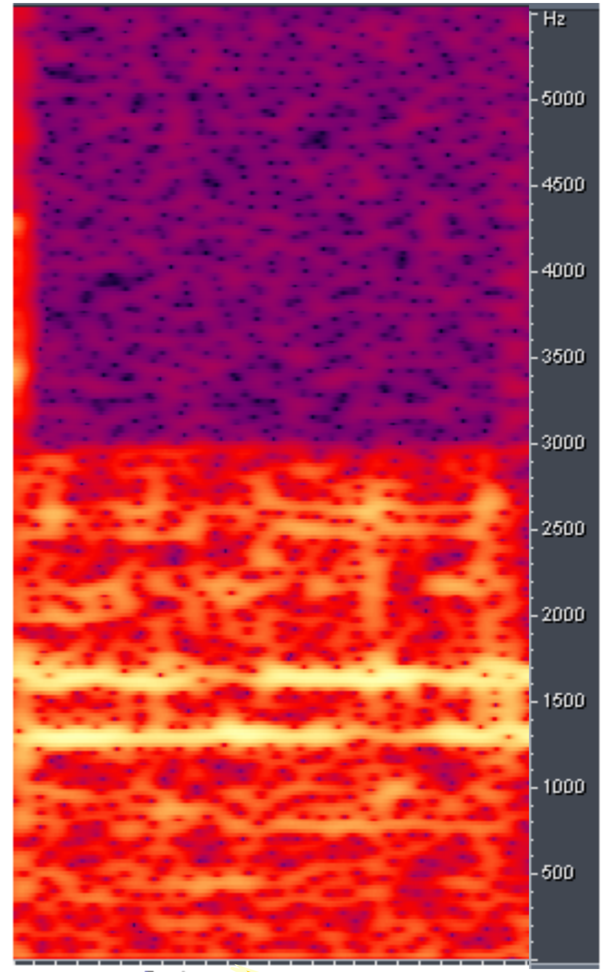
数字音频示例:换个空间（域）看信号



纵轴变为频率

亮度表示频域能量

横轴仍为时间



如何避免混叠？

信号处理及其目的

信号处理

对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称

信号处理的目的

去伪存真	去除信号中冗余的和次要的成分
特征抽取	把信号变成易于进行分析和识别的形式
编码解码	把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）

信号处理及其目的

信号处理

对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称

信号处理的目的

去伪存真	去除信号中冗余的和次要的成分 Q: 去除方法能保证信号“不失真”吗?
特征抽取	把信号变成易于进行分析和识别的形式
编码解码	把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）

信号处理及其目的

信号处理

对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称

信号处理的目的

去伪存真	去除信号中冗余的和次要的成分 Q: 去除方法能保证信号“不失真”吗?
特征抽取	把信号变成易于进行分析和识别的形式 Q: 域的“变换”过程中信号会有信息损失吗?
编码解码	把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）

信号处理及其目的

信号处理

对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称

信号处理的目的

去伪存真	去除信号中冗余的和次要的成分 Q: 去除方法能保证信号“不失真”吗?
特征抽取	把信号变成易于进行分析和识别的形式 Q: 域的“变换”过程中信号会有信息损失吗?
编码解码	把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码） Q: 解码后的信号和编码前的信号还能一模一样吗?

数字信号处理(DSP)系统的发展

- 计算机的普及和高速处理能力，引起了数字信号的广泛应用，促进了数字信号技术发展
  - 20世纪60年代，DSP硬件使用分立元件，价格高，体积大
  - 1979年，Intel发明了2920
  - 1982年，德州仪器公司投放TMS32010
  - …….
  - 目前，新一代DSP的处理能力是2920的10万倍
  - …….

课后扩展：上网搜索一下TMS32010的概述

数字信号处理(DSP)系统的突出优点

- 数字系统的工作具有可预测性和可重复性
  - 模拟系统是由元器件搭建而成的电路，制造误差范围大，特性随温度（温度漂移）和时间变化（老化）
- 体积小，功耗低（移动终端的发展）
- 高度的灵活性：
  - 模拟 vs 数字
    - 模拟音频以模拟电压的幅度表示声音强弱
    - 数字音频是有限数值表示的离散数字序列
  - 修改程序中的一些语句就能修改系统

数字信号处理(DSP)系统的突出优点

- 高度的灵活性：
  - 模拟 vs 数字
    - 模拟音频以模拟电压的幅度表示声音强弱
    - 数字音频是有限数值表示的离散数字序列
  - 修改程序中的一些语句就能修改系统
    - 示例：修改“抽样频率”改变数字音频音高/音速

22.05kHz	16kHz	11.025kHz

思考：如果是模拟音频，如何能产生上述音效变化的效果？

数字信号处理(DSP)系统的优点vs缺点

- 精确，因此具有可预测性
- 稳定（不随着温度和时间漂移）
- 噪声累加可以控制
- 硬件花费独立于复杂性
- 容易修改（可重编程性）
- 能够模拟
- 容易调试，因此开发时间短
- 硬件简单（低价和高可靠性）
- 函数执行，这在模拟处理中是不能实现的

带宽受限于采样速率

有限的动态范围

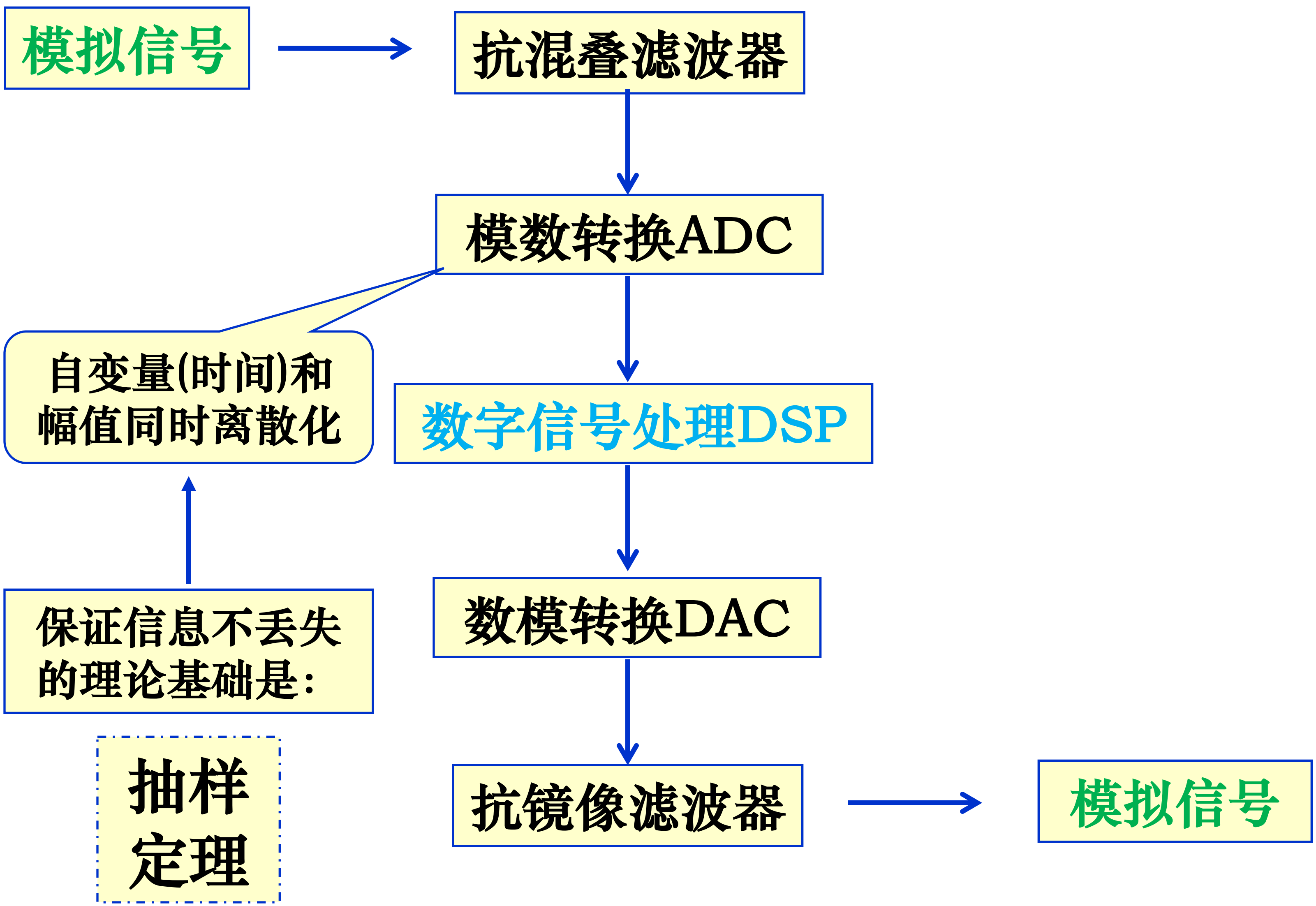
量化噪声

数字信号处理(DSP)系统的应用

- 蜂窝电话
- 声纳处理
- 卫星图像分析
- 语音识别
- 语音合成
- 文字识别
- 远程医疗监护
- 数字测绘
- 条形码阅读
- 数字摄像机
- 加密
- 磁共振成像扫描
- 高清晰度电视
- 地震波分析
- 数字音频
- 音乐合成

思考：你还能想到哪些DSP的应用实例？

数字信号处理的步骤


模拟信号
抗混叠滤波器
模数转换ADC
自变量(时间)和幅值同时离散化
数字信号处理DSP
保证信息不丢失的理论基础是:
抽样定理
数模转换DAC
抗镜像滤波器
模拟信号

数字信号处理的步骤

模拟信号 → 抗混叠滤波器

模数转换ADC

自变量(时间)和幅值同时离散化

保证信息不丢失的理论基础是:

抽样定理

数字信号处理DSP

变换域分析

数字滤波、识别、合成

数模转换DAC

抗镜像滤波器 → 模拟信号

- 信号的概念
- 信号的描述
- 欧拉公式
- 函数分解

- 数学描述
  - 使用具体的数学表达式，把信号描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式。

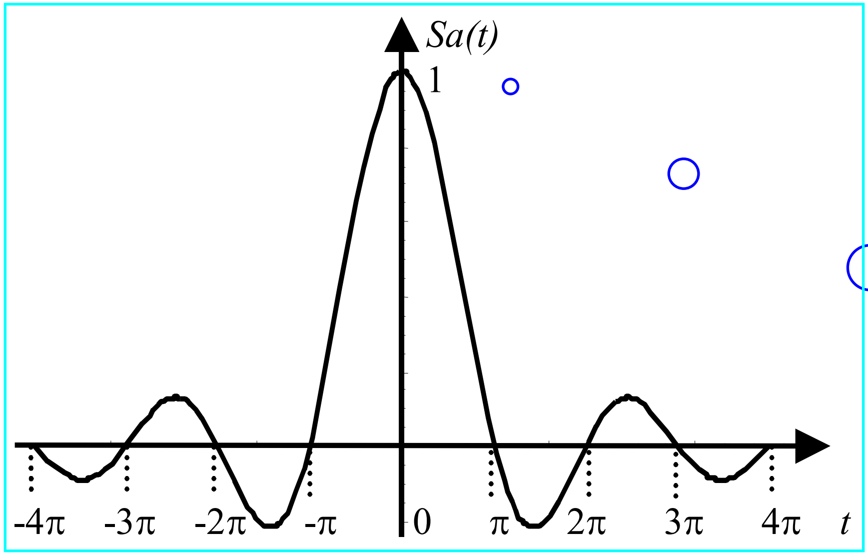
因此，本课程常用“函数”和“序列”来指代“信号”

$$f(t) = \sin(t)$$

$$x(n) = a^n u(n)$$

思考：什么时候用函数？什么时候用序列？

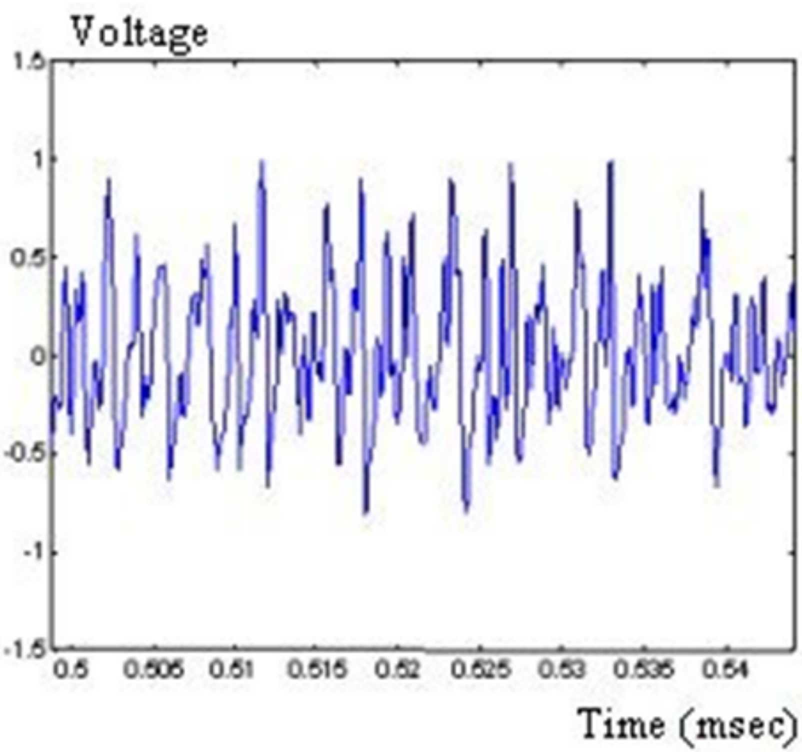
- 波形描述
  – 按照函数随自变量的变化关系，把信号的波形画出来。

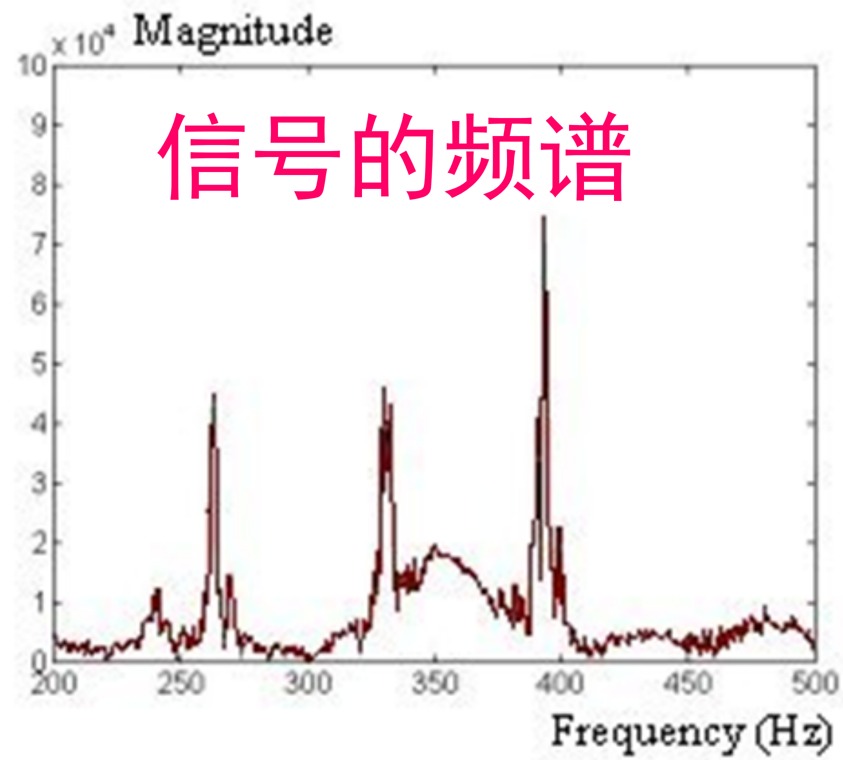


$$Sa(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$

信号的描述方法：不同域的波形

时域波形 VS 频谱图





- 确定信号与随机信号

要点： 给定的自变量的值，是否可以唯一确定信号的取值

区分方法：任意给定一个自变量的值，如果可以唯一确定其信号和取值，则该信号是确定信号，否则，如果取值是不确定的随机值，则是随机信号。

- 周期信号与非周期信号

要点： 关系式是否成立？ $\boxed{f(t)=f(t+T),\quad \forall t\in R}$

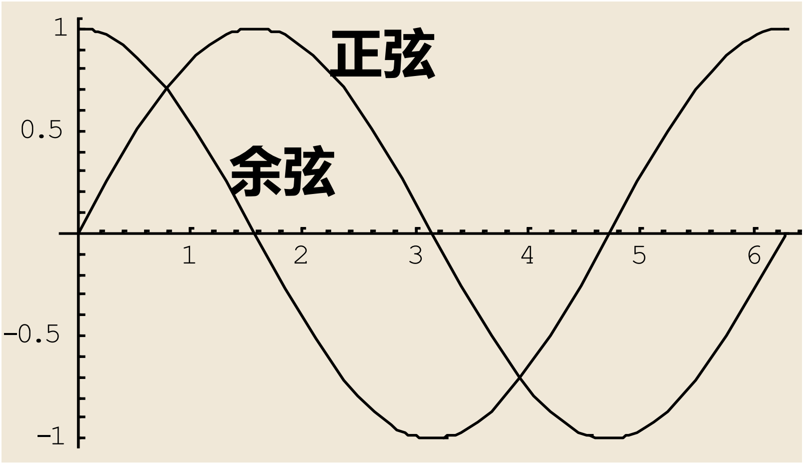
周期信号的周期（正值）： **最小T值**

非周期信号可以视为是周期无穷大的周期信号。

- 正余弦信号：

正弦信号 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$

余弦信号 $f(t) = K\cos(\omega t + \theta)$



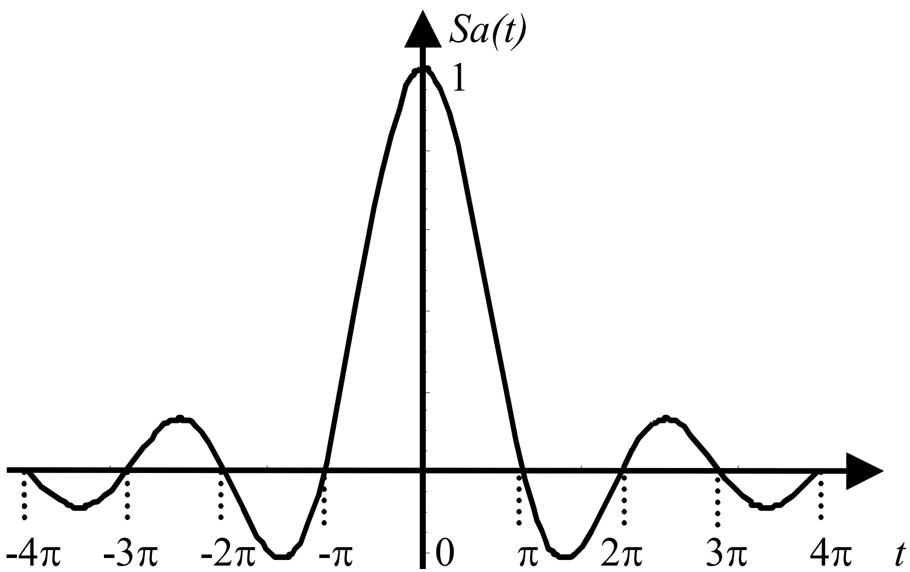
说明：

(1) K为振幅

(2) ω为角频率

(3) θ为初相位

- Sa函数： $Sa(t)=\dfrac{\sin(t)}{t}$



特点：

(1) Sa函数是偶函数

(2) Sa函数过零点位置 $K\pi(K\neq 0, K$为整数$)$

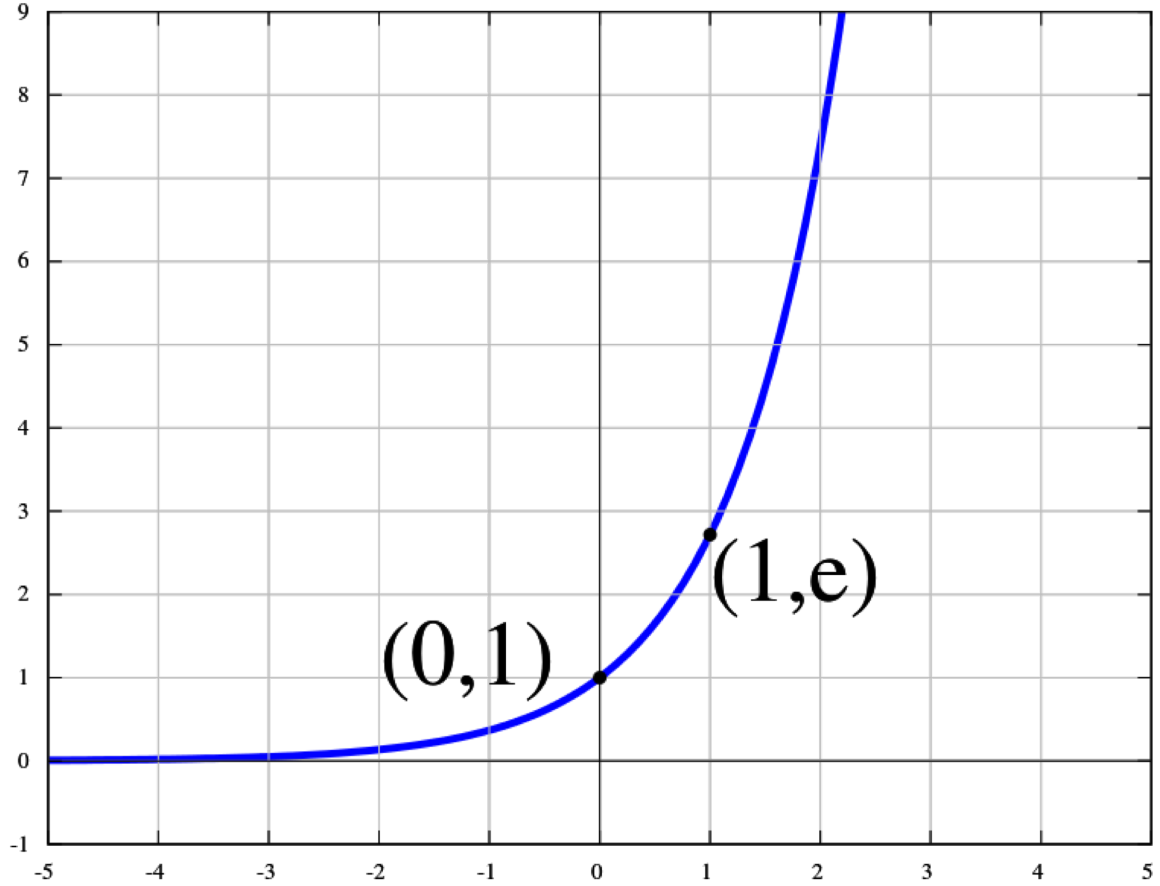
(3) 过零区间：除原点附近的过零区间宽度为2π，其它过零区间宽度均为π

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt=\pi \longrightarrow \int_{-\infty}^{0} Sa(t)dt=\int_{0}^{\infty} Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

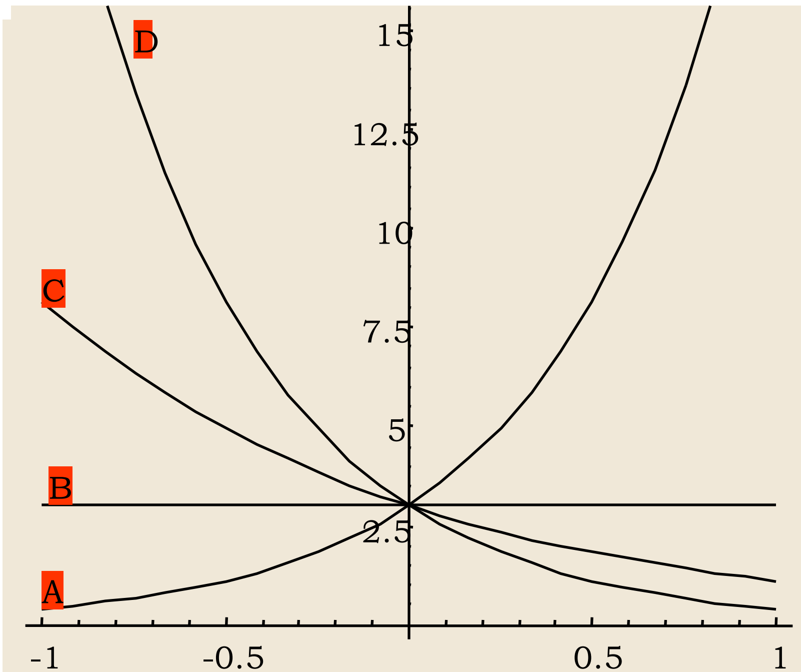
思考：如何计算Sa函数的积分？（Dirichlet积分）

—— 见讲义最后课后参考1

- 指数信号： $f(t) = e^t$



- 指数信号： $f(t) = Ke^{\alpha t}$



参数α

符号
- 正号　信号增强A
- 0　直流信号B
- 负号　信号衰减CD

绝对值
- 大　变化速度快D
- 小　变化速度慢C

指数信号微分或积分后还是指数信号

- 信号的概念
- 信号的描述
- 欧拉公式
- 函数分解

- 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- 欧拉公式的理解（方法一）

泰勒级数法

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

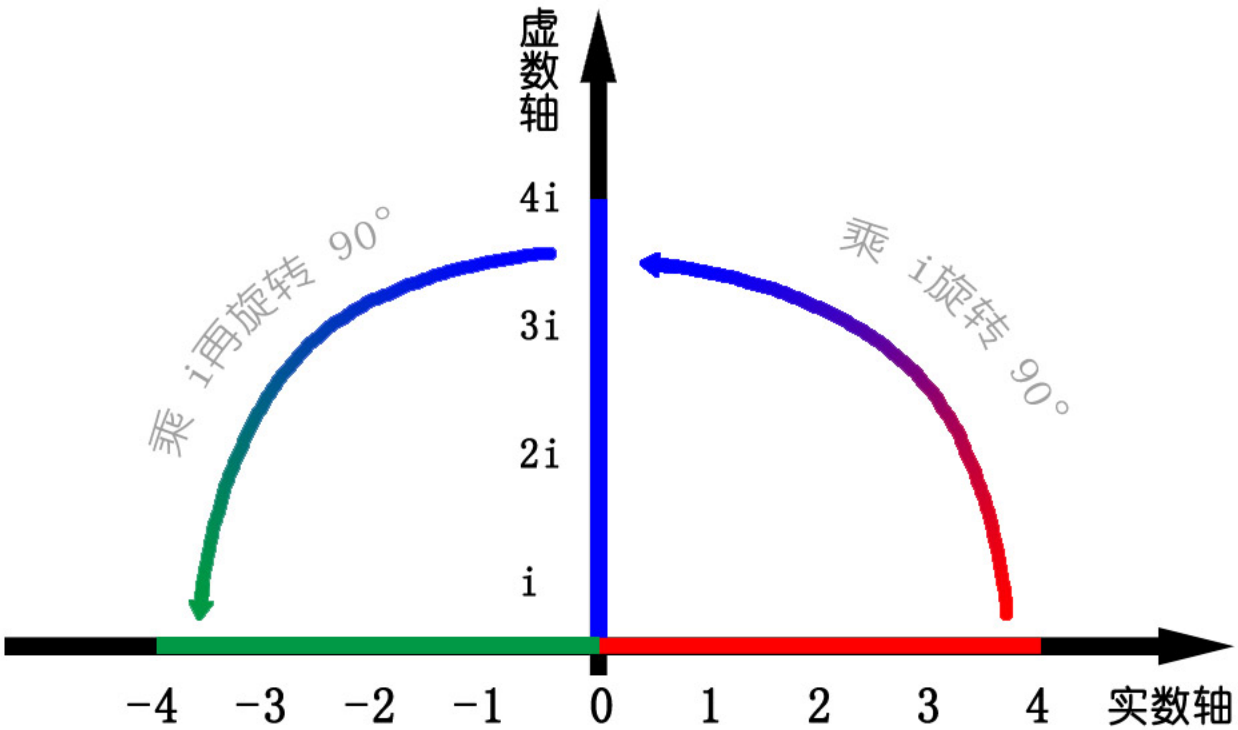
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

欧拉公式

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

- 实数与复数



- 欧拉公式的理解
  - 微分法 $f(x) = \dfrac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$

课堂练习1：用微分法理解欧拉公式

- 欧拉公式的理解
  - 微分法 $$f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$$

课堂练习1：用微分法理解欧拉公式

作答

欧拉公式的应用：复指数信号的描述

- 复指数信号： $f(t) = Ke^{st}$

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t}$$

复指数信号与正余弦信号之间的关系

$$= Ke^{\sigma t} \cdot e^{+j\omega t}$$

$$= Ke^{\sigma t} \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin \omega t = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

课堂练习2： K, σ 和 ω 的取值不同，复指数信号有什么不同？

主观题 0.5分

设置

- 复指数信号： $f(t)=Ke^{st}$

复指数信号与正余弦信号之间的关系

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}$$
$$=Ke^{\sigma t}\cdot e^{+j\omega t}$$
$$=Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

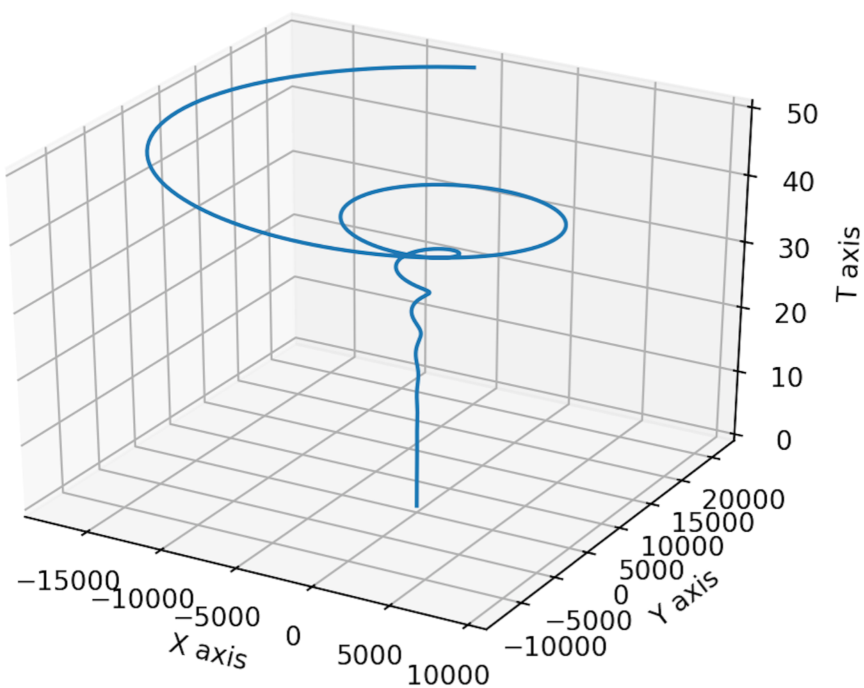
课堂练习2： K,σ 和 ω 的取值不同，复指数信号有什么不同？

作答

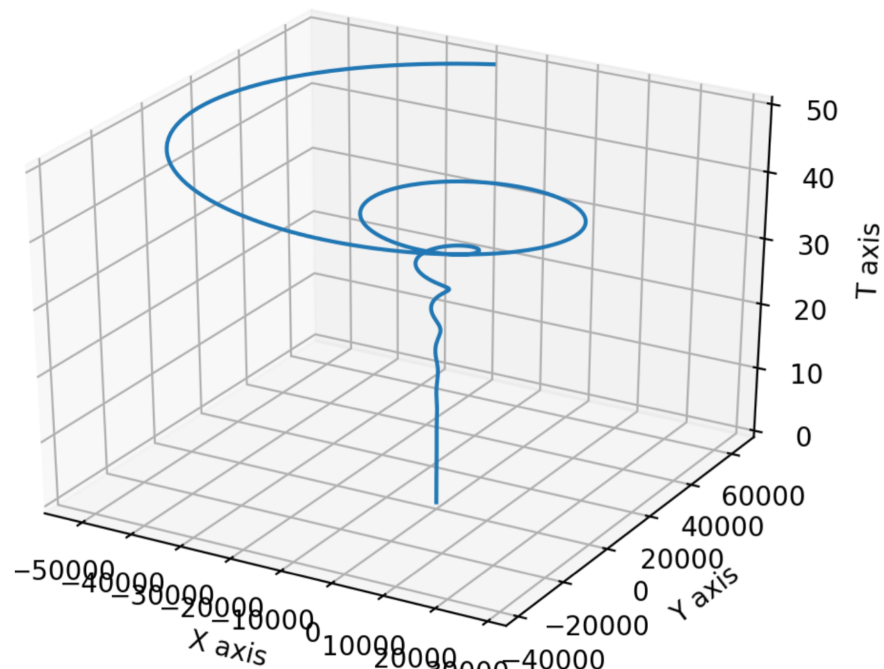
欧拉公式：复指数信号的描述

- 复指数信号： $Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t+j\sin\omega t)$

$\sigma=0.2$， $\omega=1$， K取不同的值



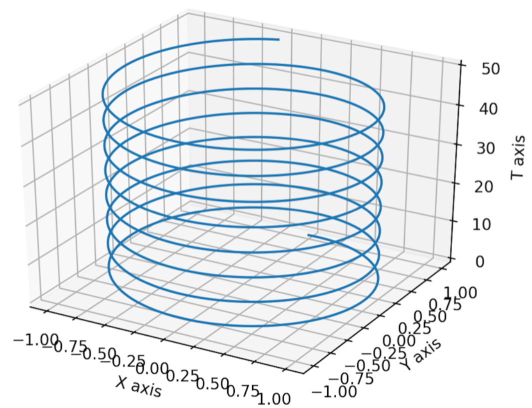
$K=1$



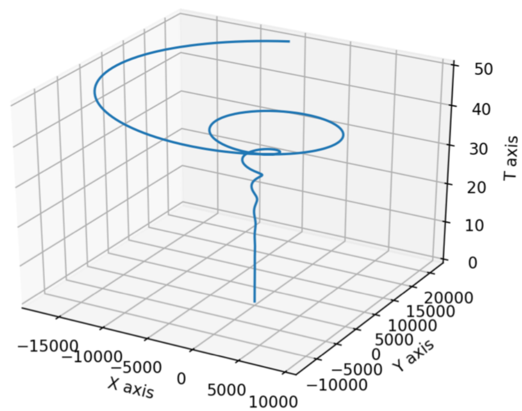
$K=3$

- 复指数信号：$Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t + j\sin\omega t)$

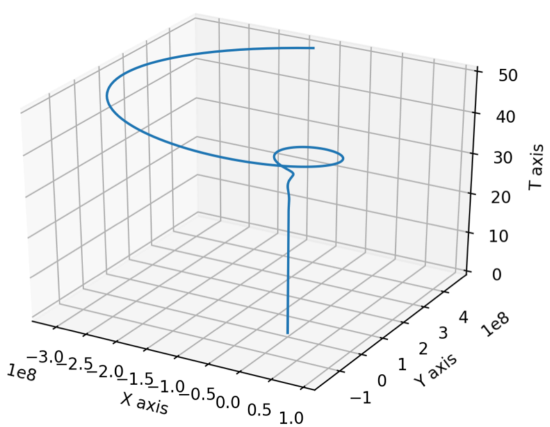
K=1， ω=1， σ取不同的值



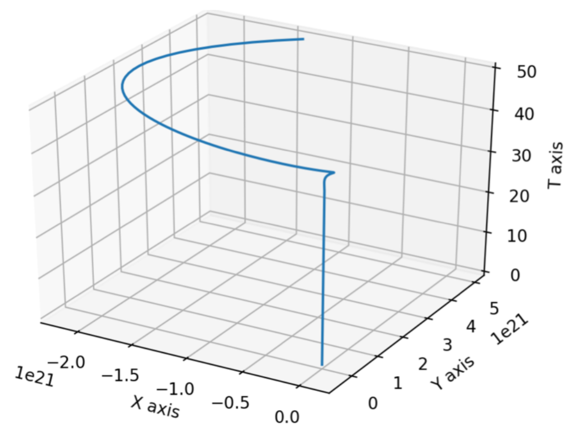
σ = 0



σ = 0.2



σ = 0.4

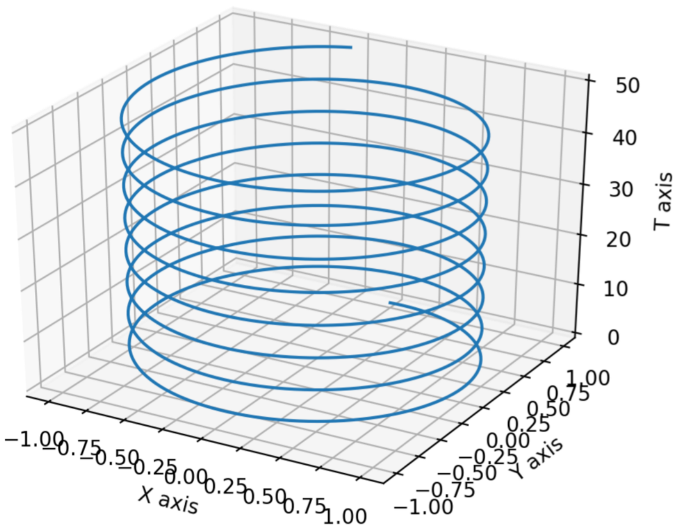


σ = 1

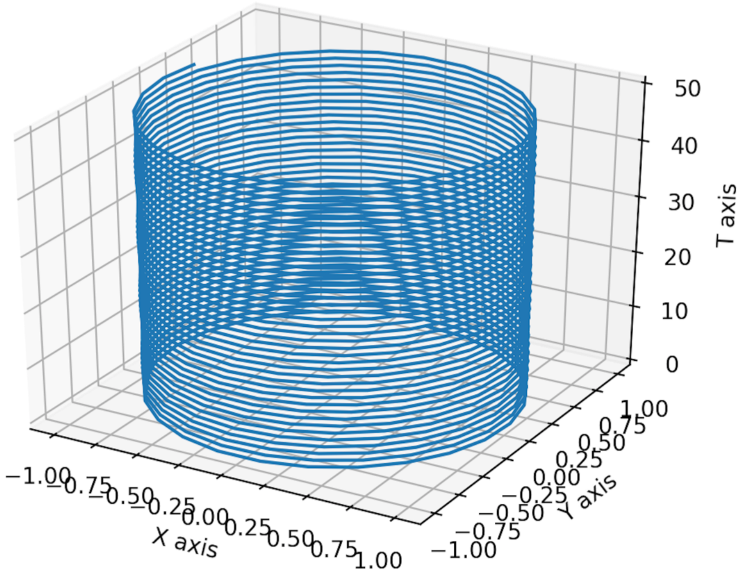
欧拉公式：复指数信号的描述

- 复指数信号： $Ke^{\sigma t}\cdot(\cos\omega t + j\sin\omega t)$

K=1， σ=0，ω取不同的值



ω=1



ω=5

欧拉公式：复值信号的定义

- 实值信号与复值信号

如果信号的取值是实数，

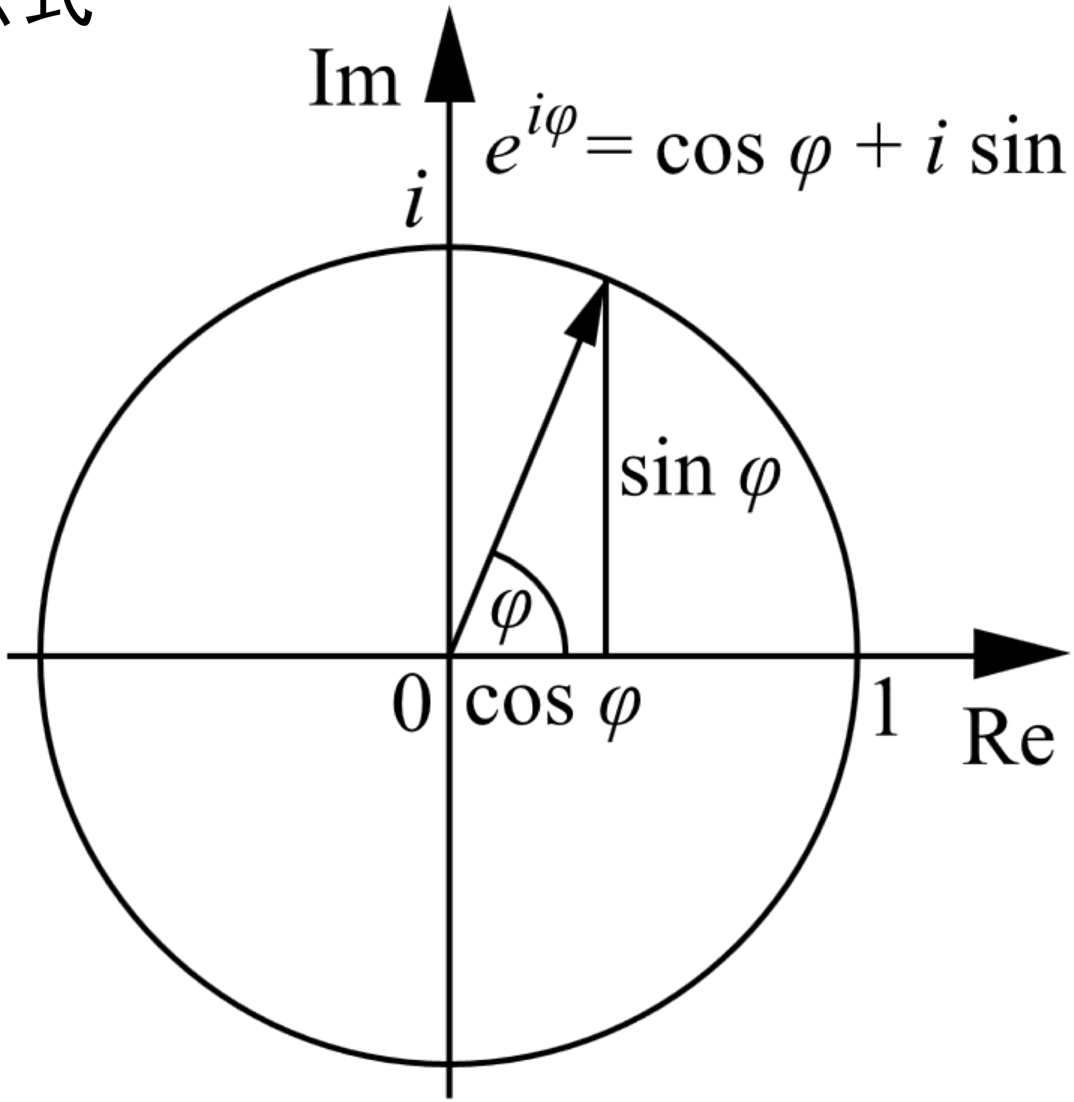
则称为实值信号，简称实信号

如果信号的取值是复数，

则称为复值信号，简称复信号

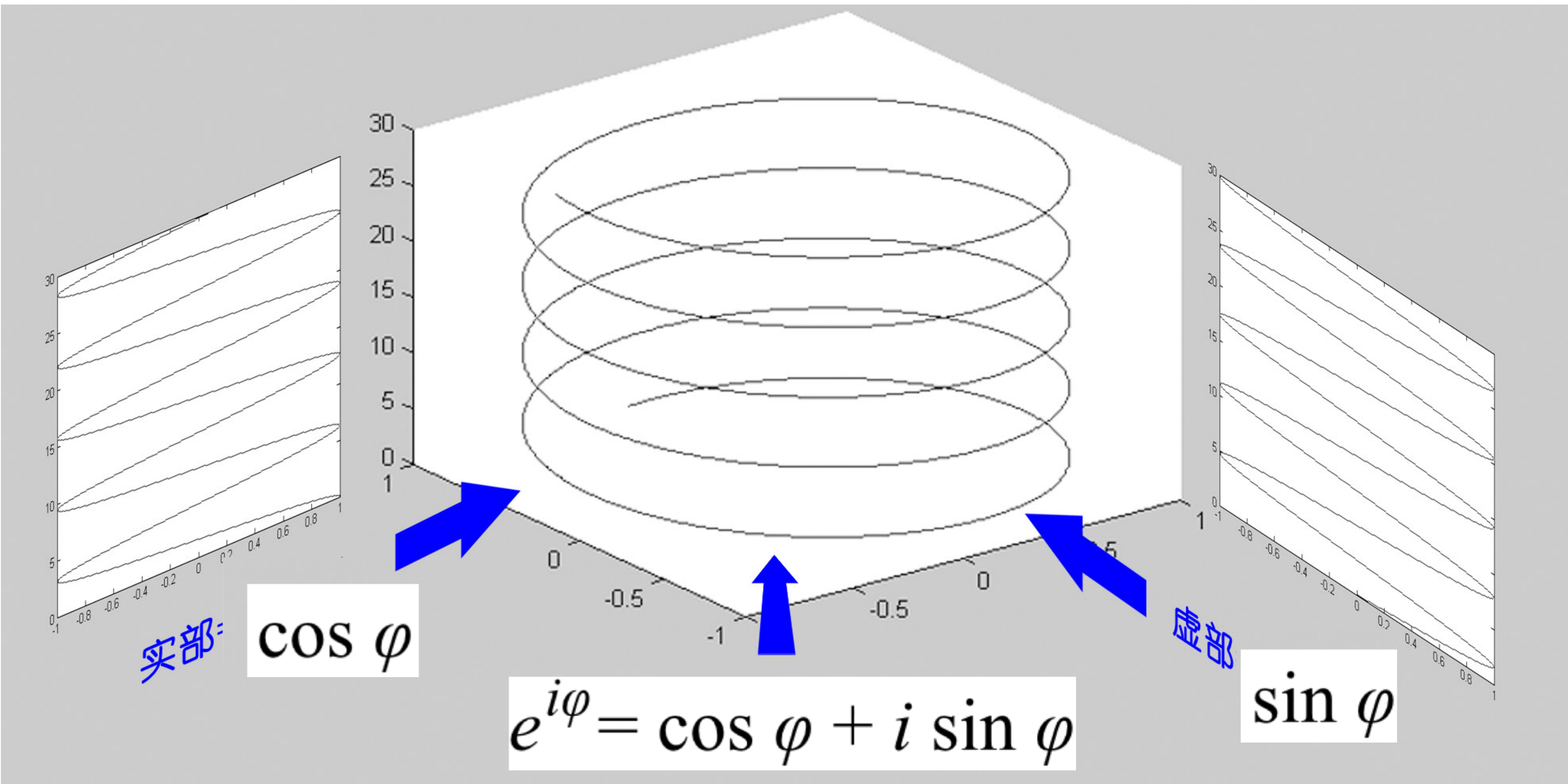
欧拉公式：复值信号的图示

- 欧拉公式



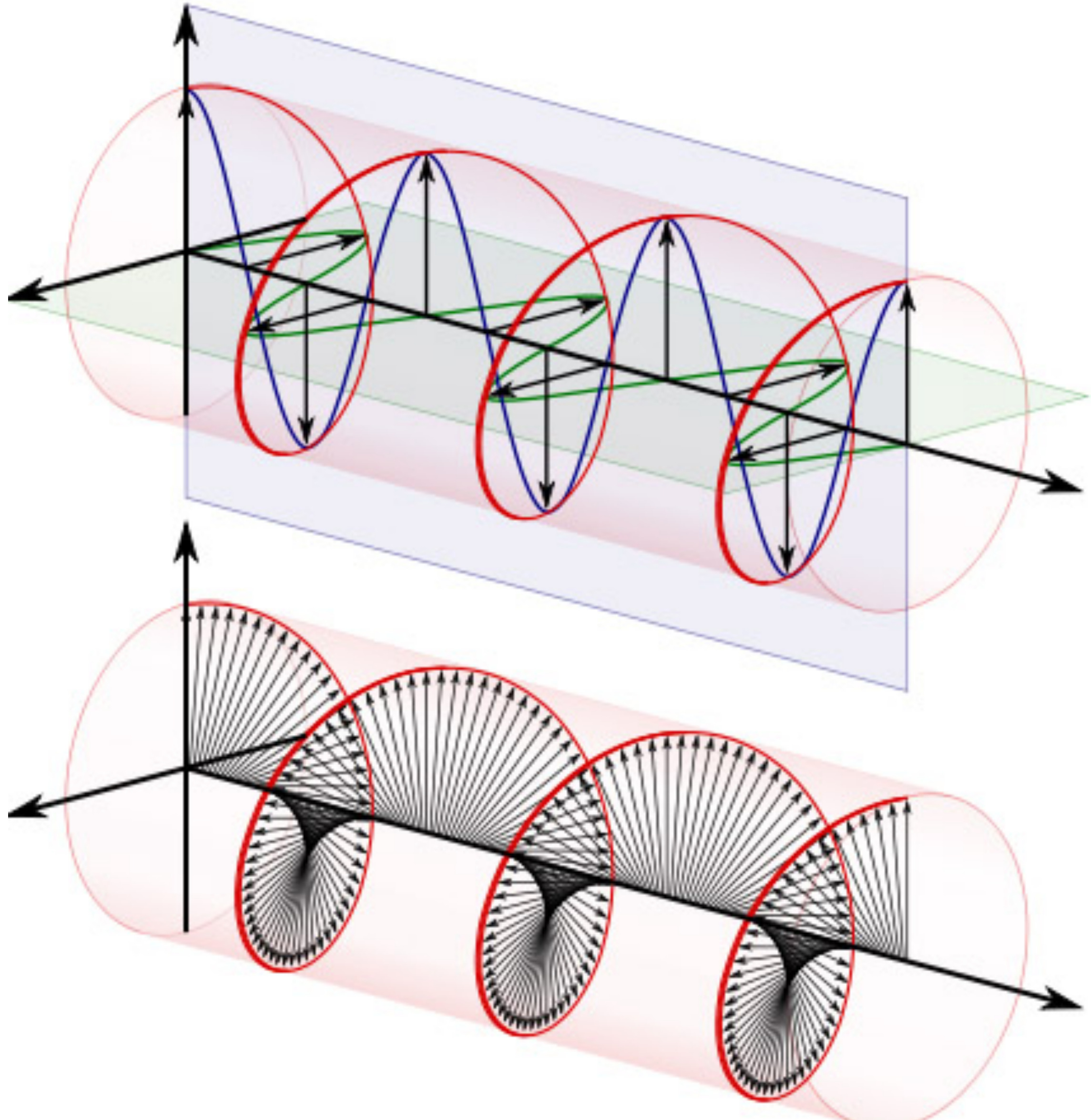
欧拉公式：复值信号的图示

- $e^{i\varphi}$



欧拉公式：复值信号的应用

- 难点：如何统一描述电场与磁场信号？
- Tips：电场与磁场90度垂直
- 解决方案：用复值信号的实数部分和虚数部分分别表示电场与磁场信号。



- 电场与磁场可以用复数完美地表示！

第一章 信号的基本概念与数学基础

- 信号的概念
- 信号的描述
- 欧拉公式
- 函数分解

• 正交基与标准正交基

定义：

设 V 为欧氏空间，非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V$，

①如果它们两两正交，则称之为正交向量组.

② ***n***维欧氏空间中正交向量组所含向量个数 ≤***n***

③ ***n***维欧氏空间中，由***n***个向量构成的正交向量组

称为正交基；

④由单位向量构成的正交基称为标准正交基.

• 标准正交基

$\boldsymbol{n}$维欧氏空间 V中的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为标准正交基

$$\Longleftrightarrow (\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

例：在标准欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中，向量组

$$\beta_1(0,1,0),\ \beta_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \beta_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

是一个标准正交基。因为：

$$(\beta_1,\beta_2)=(\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_3)=0$$

且 $|\beta_1|=|\beta_2|=|\beta_3|=1$

• 正交函数集

- 在$[t_1, t_2]$区间上定义的非零函数$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$，若满足条件：

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)d_t = 0$$

则函数$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$为在$[t_1, t_2]$区间的正交函数。

- 在$[t_1, t_2]$区间上定义的非零函数序列$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$，其中任意两个函数$\varphi_i(t)$与$\varphi_j(t)$均满足条件：

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)d_t = \begin{cases} 0 & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ k_i & \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

式中k_i为非零常数，则称函数序列$\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$为 在区间$[t_1, t_2]$上的正交函数集。

• 正交函数集

➢ 例子：

1. 三角函数集

$\{1, \cos(\omega_1 t+\varphi_1), \cos(2\omega_1 t+\varphi_2), \ldots, \cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\}$

是在$[0, 2\pi/\omega_1]$区间的正交函数集。

2. 指数函数集 $\{e^{jnw_0 t} \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

是在区间$[-\pi/\omega_0, \pi/\omega_0]$（ ω_0为实数）上的正交函数集。

思考：如何证明函数集合是正交函数集？

—— 见讲义最后课后参考3

• 完备的正交函数集

如果在[t_1, t_2]区间，除正交函数集{$\varphi_i(t)$}之外，不存在函数$x(t)$，$0 < \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt < \infty$ ，满足下式：

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt = 0, \forall i$$

则称此正交函数集{$\varphi_i(t)$}为完备的正交函数集。

第一周作业

作业1： 任选第三种方法理解欧拉公式。

作业2： 证明 $e^{jnw_0 t} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 在区间**[-π/ω_0, π/ω_0]**（ ω_0为实数）上是正交函数集

选做： 并进一步证明该函数在区间**[-π/ω_0, π/ω_0]**（ ω_0为实数）上是或不是完备正交函数集。

结 束

复习参考1：如何计算Sa函数的积分？

$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \longrightarrow 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$G(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\infty}e^{-tx}\sin x\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=e^{-tx}\cos x\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}te^{-tx}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=e^{-tx}\cos x\Big|_0^{\infty}+\left[te^{-tx}\sin x\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}t^2e^{-tx}\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=e^{-tx}\cos x\Big|_0^{\infty}+te^{-tx}\sin x\Big|_0^{\infty}-t^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(1+t^2)=(0-1)+(0-0)$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{1+t^2}$$

$$-\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\tan^{-1}t+C \qquad G(t)=-\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2} \qquad G(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)dt=\pi$$

复习参考2：欧拉公式的微分法推导

- 欧拉公式的理解
  - 微分法

$$f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-\sin x + i\cos x)\cdot e^{ix} - (\cos x + i\sin x)\cdot i\cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= \frac{-\sin x\cdot e^{ix} - i^2\sin x\cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= \frac{-\sin x\cdot e^{ix} + \sin x\cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  - {作业1：任选第三种方法理解欧拉公式。}

复习参考3：正交函数集的推导

- **正交函数集**

  - 例子：

    1、三角函数序列

证明三角函数序列

$\{1, \cos(\omega_1 t+\varphi_1), \cos(2\omega_1 t+\varphi_2), \ldots, \cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\}$

是在$[0, 2\pi/\omega_1]$区间的正交函数集。

复习参考3：正交函数集的推导

- **正交函数集**

1、证明三角函数序列{1, cos($\omega_1 t+\varphi_1$), cos($2\omega_1 t+\varphi_2$), …, cos($n\omega_1 t+\varphi_n$)}是在[0, $2\pi/\omega_1$]区间的正交函数集

证明：（1）1 和 $\cos(a\omega_1 t+\varphi_a)$ 正交 $(a=1,2,3,\ldots,n)$

$$\int_0^{2\pi/\omega_1}\cos(a\omega_1 t+\varphi_a)dt$$

$$=\frac{1}{a\omega_i}\sin(a\omega_1 t+\varphi_a)\Big|_0^{2\pi/\omega_1}=0$$

复习参考3：正交函数集的推导

- **正交函数集**

1、证明三角函数序列{1, cos($\omega_1 t+\varphi_1$), cos($2\omega_1 t+\varphi_2$), …, cos($n\omega_1 t+\varphi_n$)}是在[0, $2\pi/\omega_1$]区间的正交函数集

（2）$\cos(a\omega_1 t+\varphi_a)$和$\cos(b\omega_1 t+\varphi_b)dt$ 正交 $(a\neq b, a, b=1,2,3\ldots n)$

$$\int_0^{2\pi/\omega_1}\cos(a\omega_1 t+\varphi_a)\cos(b\omega_1 t+\varphi_b)dt$$

$$=\int_0^{2\pi/\omega_1}\frac{1}{2}\left[\cos((a+b)\omega_1 t+\varphi_a+\varphi_b)+\cos((a-b)\omega_1 t+\varphi_a-\varphi_b)\right]dt$$

$$=\left[\frac{1}{2(a+b)\omega_1}\sin((a+b)\omega_1 t+\varphi_a+\varphi_b)+\frac{1}{2(a-b)\omega_1}\sin((a-b)\omega_1 t+\varphi_a-\varphi_b)\right]\Bigg|_0^{2\pi/\omega_1}$$

$$=0$$

复习参考3：正交函数集的推导

- **正交函数集**

1、证明三角函数序列$\{1, \cos(\omega_1 t+\varphi_1), \cos(2\omega_1 t+\varphi_2), \ldots, \cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\}$是在$[0, 2\pi/\omega_1]$区间的正交函数集

（3） 1和1不正交

$$\int_0^{2\pi/\omega_1} 1\cdot 1dt$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_1}$$

复习参考3：正交函数集的推导

- **正交函数集**

1、证明三角函数序列{1, cos($\omega_1 t+\varphi_1$), cos($2\omega_1 t+\varphi_2$), …, cos($n\omega_1 t+\varphi_n$)}是在[0, $2\pi/\omega_1$]区间的正交函数集

（4）$\cos(a\omega_1+\phi_a)$和$\cos(a\omega_1+\phi_a)$ 不正交

$$\int_0^{2\pi/\omega_1}\cos(a\omega_1 t+\varphi_a)\cos(b\omega_1 t+\varphi_b)dt$$

$$=\int_0^{2\pi/\omega_1}\cos^2(a\omega_1 t+\varphi_a)dt$$

$$=\int_0^{2\pi/\omega_1}\frac{1}{2}\left[\cos(2a\omega_1 t+2\varphi_a)+1\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a\omega_i}\sin(2a\omega_1 t+2\varphi_a)\Big|_0^{2\pi/\omega_1}+\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi/\omega_1}=\frac{\pi}{\omega_1}$$