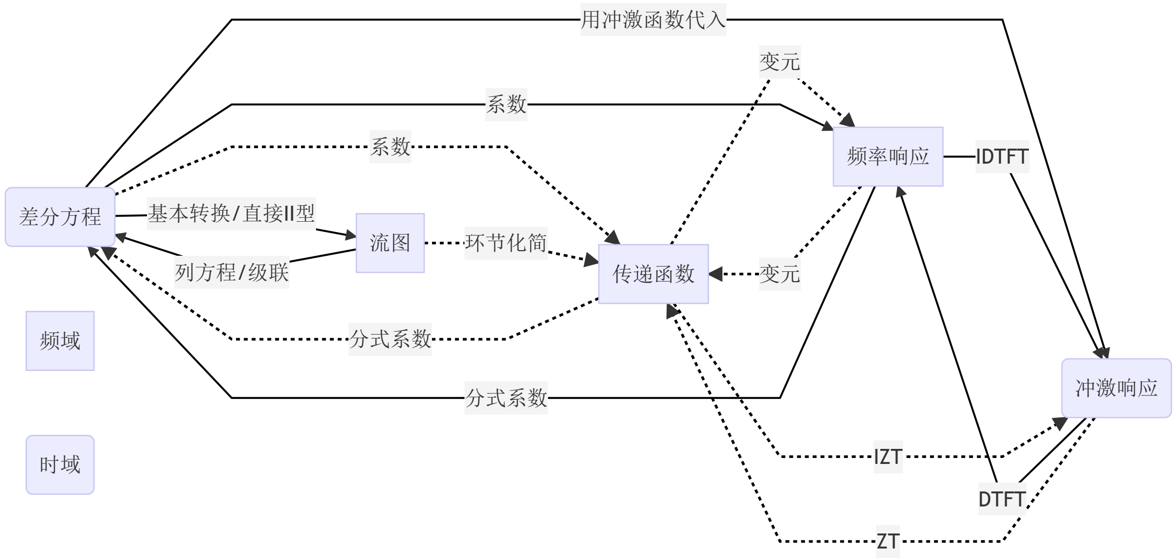
4.3 传递函数

> 杜雨峰 计84



传递函数

由系统的冲激响应$h(n)$可以得到输入输出的关系式

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

进而做Z变换，由卷积定理可以得到

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

$H(z)$称为系统的传递函数(或系统函数)，它是单位冲激响应的Z变换。

传递函数与差分方程

> 就像差分方程可以直接得到频率响应一样，差分方程可以直接得到传递函数。频率响应是冲激响应做DTFT得到的，而传递函数是冲激响应做ZT得到的，所以频率响应和传递函数之间也只需要变元就可以得到。

对差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r x(n-r)$$

两端做Z变换，就能得到：

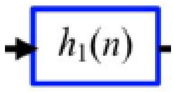
$$H(z)=Y(z)/X(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}$$

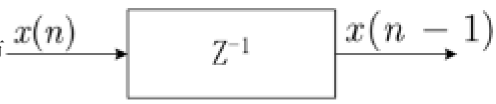
对比一下频率响应：

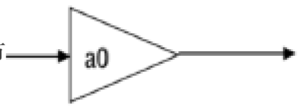
$$H(\omega)=Y(\omega)/X(\omega)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-j\omega k}}$$

传递函数与流图化简

可以将流图里面一个单输入、单输出的部分，浓缩成一个结点，标上一个**冲激响应**或**传递函数**，来表示一个子系统：

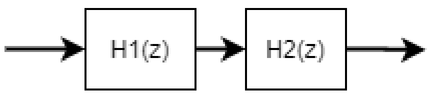


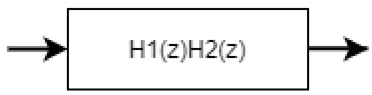
我们此前看到的延时环节

，其传递函数就为z^{-1}；而系数环节

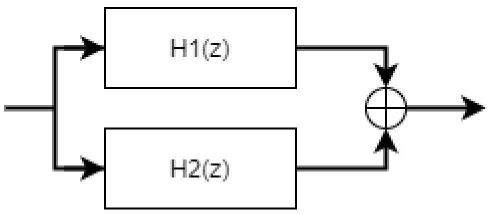
，其传递函数就为a0，它们都可以理解为是子系统。

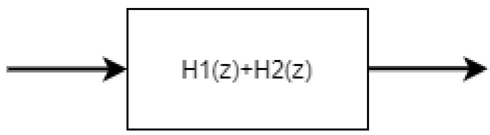
子系统的串联，其传递函数等于子系统传递函数的乘积；





子系统的并联，其传递函数等于子系统传递函数之和。





用传递函数判断系统稳定性

由判定定理

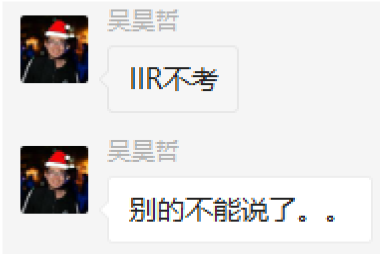
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

可知，$|z|=1$必须在$H(z)$的收敛域内，这等价于冲激响应绝对收敛。

事实上，稳定性判定条件和系统的因果性没有联系，只要系统的收敛域包含了单位圆，系统就是稳定的。

而因果系统传递函数的收敛域是圆外部分。因此，对于因果系统，上述条件等于说，所有的极点必须在单位圆以内。

数字滤波器的设计

> 据说IIR不考：
>
> 
>
>
> 但估计还是看一看比较好。

数字滤波器设计的流程根据是FIR还是IIR有所不同。FIR是对理想滤波器的脉冲响应找了一个窗函数来截断到有限项。IIR是

FIR滤波器的窗函数设计法

理想滤波器$h(n)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$在$\omega_c$截断，可以做到完全的低通高阻。

它的问题是，$h(n)$无限长，非因果（有负值下标），因此无法实现；而FIR要求有限长、因果。

窗函数设计法的含义是，用一个窗函数从**时域**截断理想滤波器，随后将截断后的滤波器的脉冲响应平移成因果序列（时域平移=频域相移，不影响性能）。

- 时域的截断 = 时域做乘法 = **频域**（DTFT后）作卷积

FIR低通数字滤波器的标准求法如下：

1. 参数：通带边缘频率、阻带边缘频率、阻带衰减、采样频率f_s
2. 首先，选定设计用的滤波器的截止频率f_c：即通带边缘频率和阻带边缘频率的中位数
3. 计算截止频率的数字频率$\omega_c=2\pi\cdot\frac{f_c}{f_s}$。将该频率带入理想数字滤波器，得到理想的脉冲响应：
$$h(n)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$
4. 查表选择满足阻带衰减的窗函数，根据采样频率和过渡带宽度算出窗内项数N（取奇数，让响应完全对称，这样可以让相位不失真）
5. 将窗函数与$h(n)$相乘得到一个脉冲响应
6. 右移$(N-1)/2$项，得到因果序列，这就是所求的滤波器的脉冲响应

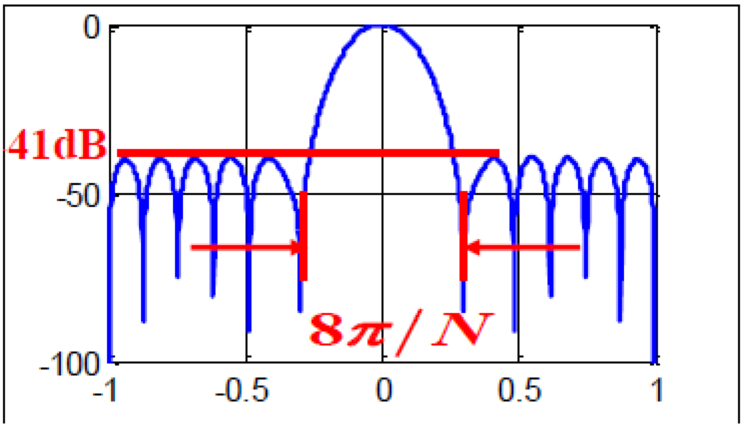
窗函数的分类

做题时要查表，不需要背；了解下面窗函数的特点即可

矩形窗：时域为矩形，频域是Sa函数

汉宁窗：时域是三角函数的一个周期，特点是窗的两端都为0；频域向两侧呈周期衰减（有许多“瓣”，参考下图；但每个瓣的尖峰依次降低）

哈明窗：时域类似汉宁窗，只是窗的两端不为0；频域第一个瓣衰减很大，其他的瓣几乎持平（如下图的形状）



布莱克曼窗：比较常用，时域窗两端为0，第一个瓣衰减很大，后面的瓣也有衰减

凯塞窗：效果很好，但很复杂，一般不用

大体上，以上窗口的阻带衰减逐渐增大而项数逐渐增多。

理想低通滤波器的h(n)被不同的窗函数截断时性能

窗类型	窗函数 $\lvert n\rvert \le \frac{N-1}{2}$	窗内项数 T.W.是过渡带宽度	阻带衰减dB	通带边缘增益dB $20\log(1-\delta_p)$
矩形	1	$0.91\frac{f_s}{T.W.}$	21	-0.9
汉宁	$0.5+0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}$	$3.32\frac{f_s}{T.W.}$	44	-0.06
哈明	$0.54+0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}$	$3.44\frac{f_s}{T.W.}$	55	-0.02
布莱克曼	$0.42+0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}$	$5.98\frac{f_s}{T.W.}$	75	-0.0014
凯塞	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$	$4.33\frac{f_s}{T.W.}(\beta=6)$	64	-0.0057
		$5.25\frac{f_s}{T.W.}(\beta=8)$	81	-0.00087
		$6.36\frac{f_s}{T.W.}(\beta=10)$	100	-0.000013

36

带通、高通、带阻滤波器的设计

采用频移的办法：脉冲响应与余弦函数相乘（尺度变换）：$h'(n)=h(n)w(n)\cos(n\omega_0)$，其中$\omega_0$是带通中心的数字频率。

高通滤波器的频移为π，较为方便。

带通滤波器除了直接频移，还可以看作是低通滤波器和高通滤波器串联。

带阻滤波器可以看作是低通滤波器和高通滤波器并联。

IIR滤波器的设计法

IIR数字滤波器是借助模拟滤波器来实现滤波。其步骤为：

1. 根据性能要求（通带边缘频率、阻带边缘频率、阻带衰减、采样频率）设计相应的低通模拟滤波器
2. 通过双线性变换（其实就是采样器）：$s \Leftrightarrow 2f_s\frac{z-1}{z+1}$，将模拟滤波器的传递函数$H(s)$变为数字滤波器的传递函数$H(z)$

常见的模拟滤波器有：Butterworth滤波器、Chebyshev I型/II型滤波器、椭圆滤波器。

以Butterworth滤波器为例，求得了通带边缘频率和阻带边缘频率的模拟频率之后，由阻带衰减和频率计算模拟滤波器的阶数，得到传递函数，双线性变换得到数字滤波器的传递函数。具体步骤略。