清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.12.10

ZT的性质

线性性

$$Z\left[\sum_{k=1}^{K} a_k x_k(n)\right] = \sum_{k=1}^{K} a_k Z\left[x_k(n)\right] = \sum_{k=1}^{K} a_k X_k(z)$$

时域平移性

左移

$$Z[\,x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

右移

$$Z[\,x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

ZT的性质

时域扩展性

$$x_{(a)}(n) \triangleq \begin{cases} x(\frac{n}{a}), & \frac{n}{a} \in Z \\ 0, & \frac{n}{a} \notin Z \end{cases} \qquad (0 \neq a \in Z)$$

扩展因子a $\begin{cases} >1 \\ <-1 \end{cases}$

>1：相当于在原序列每两点之间插入a-1个零

<-1：相当于原序列先反褶，再每两点之间插入-a-1个零

$$\longrightarrow \quad Z[x_{(a)}(n)] = X[z^a]$$

$$R_1 < |z^a| < R_2$$

ZT的性质

如果序列是偶对称的，则

$$X(z) = Z[x(n)] = Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

如果序列是奇对称的，则

$$X(z) = -X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$\Rightarrow$

如果一个偶对称或奇对称序列的ZT含有一个非零的零点（或极点）z_0 那么它必含有另外一个与z_0互为倒数的零点（或极点）$1/z_0$

ZT的性质

时域共轭性

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_1 < |z| < R_2$$

如果一个序列是实序列，则

$$X(z) = Z[x(n)] = Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

如果一个实序列的ZT含有一个零点（或极点）z_0，那么它必含有另外一个与之共轭对称的零点（或极点）z_0^*

ZT的性质

Z域尺度变换（或序列指数加权）

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}$$

$$Z[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad R_{x1} < |az| < R_{x2}$$

$$Z[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

$$Z[e^{jnw_0} x(n)] = X\left(e^{-jw_0} z\right) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

→ 可以用复指数序列调制序列的相位特性。

ZT的性质

Z域微分（或序列线性加权）

$$Z[nx(n)] = -z\frac{d}{dz}Z[x(n)] \quad R_1 < |z| < R_2$$

ROC唯一可能的变化是加上或去掉零或无穷点。

$$Z\left[n^m x(n)\right] = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m Z\left[x(n)\right] \quad R_1 < |z| < R_2$$

ZT的性质

初值定理　　X(z)是因果序列x(n)的Z变换，则

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

终值定理　　X(z)是因果序列x(n)的Z变换，则

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$$

只有在极限存在时才能用，此时X(z)的极点必须在单位圆内（如果位于单位圆上则只能位于z=1，且是一阶极点）。

ZT的性质

时域卷积定理

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

$$Z\left[x(n) * y(n)\right] = Z\left[x(n)\right] Z\left[y(n)\right]$$

卷积的ZT的ROC至少是原序列ZT的ROC的交集。
当出现零极点相抵时，ROC可能会扩大。

$$x(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \qquad x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0)$$

ZT的性质

Z域卷积定理

$$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

$$Y(z) = Z[y(n)] \quad R_{y1} < |z| < R_{y2}$$

$$\boxed{Z[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C1} X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv}$$

$$\boxed{Z[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C2} X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv}$$

C_1和C_2收敛域重叠部分内逆时针旋转的围线

$Z[x(n)y(n)]$ 的收敛域为 $R_{x1}R_{y1} < |z| < R_{x2}R_{y2}$

注：证明详见《信号处理原理》 郑方，徐明星 **P134**

ZT的性质

帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^{*}(n) =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)Y^{*}\left(\frac{1}{z^{*}}\right)z^{-1}dz$$

逆Z变换的求解 3

CASE 1

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\cdots(1-p_Mz^{-1})}$$

$$=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_M}{1-p_Mz^{-1}}$$

$$A_i=[(1-p_iz^{-1})X(z)]_{z=p_i}=\left[\frac{N(z)}{\prod_{j\neq i}(1-p_jz^{-1})}\right]_{z=p_i}$$

主观题 1分

设置

EX-1：使用case 1方法分解X(z)

$$X(z)=\frac{2-2.05z^{-1}}{1-2.05z^{-1}+z^{-2}}$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

逆Z变换的求解 3

EX-1

$$X(z)=\frac{2-2.05z^{-1}}{1-2.05z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2-2.05z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1-1.25z^{-1})}$$

$$X(z)=\frac{A_1}{1-0.8z^{-1}}+\frac{A_2}{1-1.25z^{-1}}$$

$$A_1=[(1-0.8z^{-1})X(z)]_{z=0.8}=\left[\frac{2-2.05z^{-1}}{1-1.25z^{-1}}\right]_{z=0.8}=\frac{2-2.05/0.8}{1-1.25/0.8}=1$$

$$A_2=[(1-1.25z^{-1})X(z)]_{z=1.25}=\left[\frac{2-2.05z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}\right]_{z=1.25}=1$$

逆Z变换的求解 3

CASE 2

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z)}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\cdots(1-p_Mz^{-1})}$$

$$=A_0+\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_M}{1-p_Mz^{-1}}$$

$$A_0=X(z)\big|_{z=0}$$

EX-2：使用case 2方法分解X(z)

$$X(z)=\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}$$

逆Z变换的求解 3

EX-2

$$X(z)=\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}=\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

$$X(z)=A_0+\frac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.5z^{-1}}$$

$$A_0=\left[\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}\right]_{z=0}=\left[\frac{10z^2+z-1}{z^2-0.25}\right]_{z=0}=4$$

$$A_1=\left[\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1+0.5z^{-1}}\right]_{z=0.5}=4$$

$$A_2=\left[\frac{10+z^{-1}-z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}\right]_{z=-0.5}=2$$

逆Z变换的求解 3

CASE 3

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{Q(z)D(z)+R(z)}{D(z)}=Q(z)+\frac{R(z)}{D(z)}$$

方法一（remove/restore）

$$W(z)=\frac{1}{D(z)}$$

$$X(z)=N(z)W(z)$$

主观题 1分

设置

EX-3 $$X(z)=\frac{6+z^{-5}}{1-0.25z^{-2}}$$

求对应的因果序列是什么？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

逆Z变换的求解 3

EX-3 $X(z)=\dfrac{6+z^{-5}}{1-0.25z^{-2}}$ 求对应的因果序列是什么？

方法一

$$W(z)=\frac{1}{1-0.25z^{-2}}=\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$$

$$Z[a^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}\quad |z|>|a|$$

$$w(n)=0.5(0.5)^n u(n)+0.5(-0.5)^n u(n)$$

时域平移性

$$Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z)$$

$$X(z)=(6+z^{-5})W(z)=6W(z)+z^{-5}W(z)$$

$$x(n)=6w(n)+w(n-5)=3(0.5)^n u(n)+3(-0.5)^n u(n)$$
$$+0.5(0.5)^{n-5}u(n-5)+0.5(-0.5)^{n-5}u(n-5)$$

逆Z变换的求解 3

EX-3 $X(z)=\dfrac{6+z^{-5}}{1-0.25z^{-2}}$

求对应的因果序列是什么？

方法二（多项式除法）

$$X(z)=-16z^{-1}-4z^{-3}+\frac{6+16z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}$$

$$X(z)=-16z^{-1}-4z^{-3}+\frac{19}{1-0.5z^{-1}}-\frac{13}{1+0.5z^{-1}}$$

$$x(n)=-16\delta(n-1)-4\delta(n-3)$$
$$+19(0.5)^n u(n)-13(-0.5)^n u(n)$$

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & (n=0)\\ 0, & (n\neq 0)\end{cases} \qquad Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=\delta(0)=1$$

设置

EX-4：求X(z)对应的所有可能的序列！

$$X(z)=\frac{7-9.5z^{-1}-3.5z^{-2}+5.5z^{-3}}{(1-z^{-2})(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$$

作答

EX-4

$$X(z)=\frac{7-9.5z^{-1}-3.5z^{-2}+5.5z^{-3}}{(1-z^{-2})(1-0.5z^{-1})(1-1.5z^{-1})}$$

求所有可能的序列！

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{3}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-1.5z^{-1}}$$

$\|Z\|<0.5$	$x_1(n)=-[1+(-1)^n+3(0.5)^n+2(1.5)^n]u(-n-1)$
$0.5<\|Z\|<1$	$x_2(n)=3(0.5)^n u(n)-[1+(-1)^n+2(1.5)^n]u(-n-1)$
$1<\|Z\|<1.5$	$x_3(n)=[1+(-1)^n+3(0.5)^n]u(n)-2(1.5)^n u(-n-1)$
$\|Z\|>1.5$	$x_4(n)=[1+(-1)^n+3(0.5)^n+2(1.5)^n]u(n)$

主观题 1分

设置

已知某滤波器的传递函数如下式，

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}-0.3z^{-2}+0.5z^{-4}}$$

(1) 写出相应的差分方程。

(2) 画出滤波器的信号流程图。

作答

已知某滤波器的传递函数如下式，

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}+4z^{-3}}{1+0.2z^{-1}-0.3z^{-2}+0.5z^{-4}}$$

(1) 写出相应的差分方程。

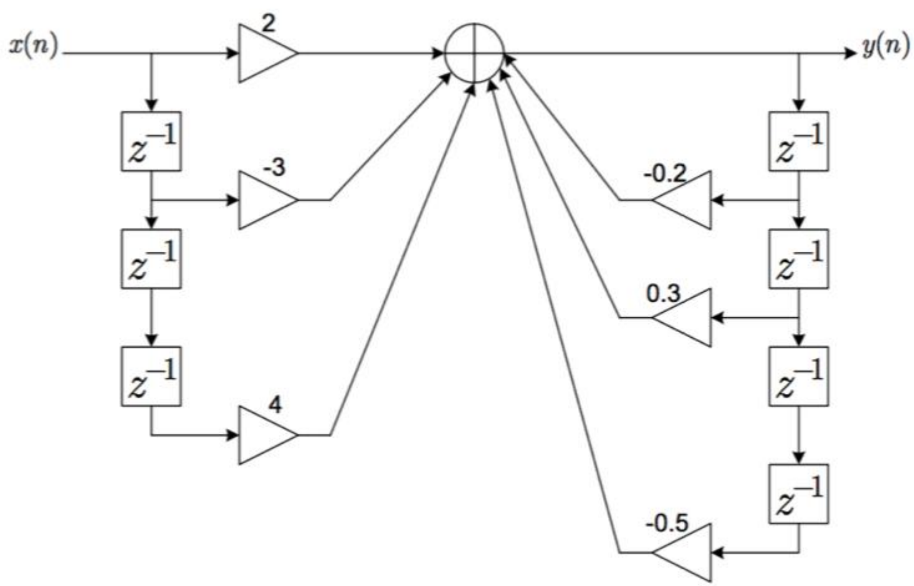
(2) 画出滤波器的信号流程图。

解：

(1) 滤波器的差分方程为

$$y(n)=-0.2y(n-1)+0.3y(n-2)-0.5y(n-4)+2x(n)-3x(n-1)+4x(n-3)$$

(2) 滤波器的信号流程图为：



主观题 1分

设置

已知滤波器的差分方程为$y(n)+0.8y(n-1)-0.9y(n-2)=x(n-2)$

求该滤波器的传递函数（频率响应）。若已知其为因果系统，求其收敛域。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

设置

对下面给出的Z变换结果，求它对应的序列。

$$X(z)=\frac{2z^{-1}-z^{-2}}{1-1.6z^{-1}-0.8z^{-2}}$$

作答

传递函数

离散时间**LTI**系统输入输出满足下列关系

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\boxed{Y(z) = X(z) \cdot H(z)}$$

$$\boxed{H(z) = Y(z)\,/\,X(z)}$$

H(z)与系统特性有一一对应关系，也可以说是系统特性的一种反映，所以通常称**H(z)**为**LTI**系统的传递函数，也称系统函数。

传递函数**H(z)**实际上是系统单位冲激响应**h(n)**的**Z**变换，可以直接由单位冲激响应求出来

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

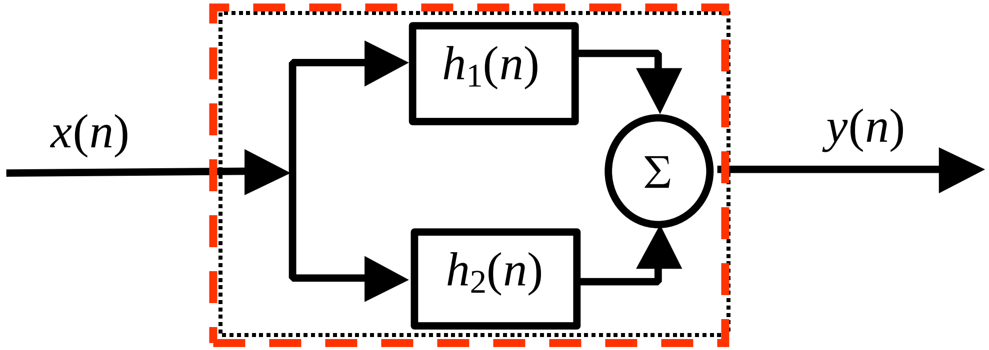
传递函数**H(z)**与单位冲激响应**h(n)**是一对**ZT**对

因为 $$y(n) = x(n) * h(n)$$

所以 $$Z[y(n)] = Z[x(n)] \cdot Z[h(n)]$$

于是 $$Z[h(n)] = \frac{Z[y(n)]}{Z[x(n)]} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)$$

系统的并联组合

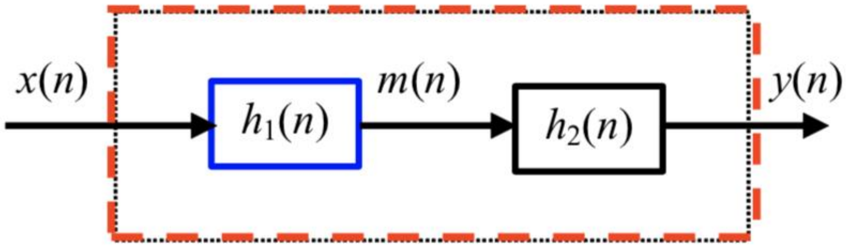


$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

两个系统并联后新系统的单位冲激响应是并联子系统单位冲激响应的和，传递函数是并联子系统传递函数的和

系统的串联组合

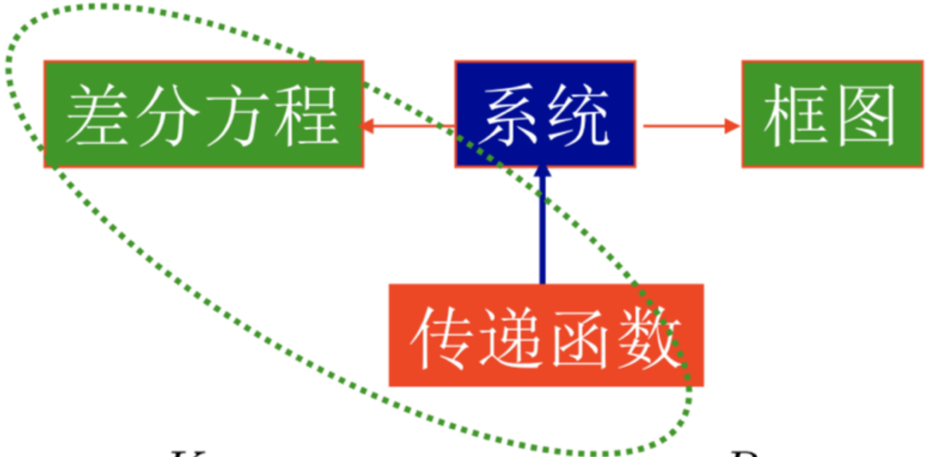


$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

两个系统串联后新系统的单位冲激响应是串联子系统单位冲激响应的卷积，传递函数是串联子系统传递函数的乘积

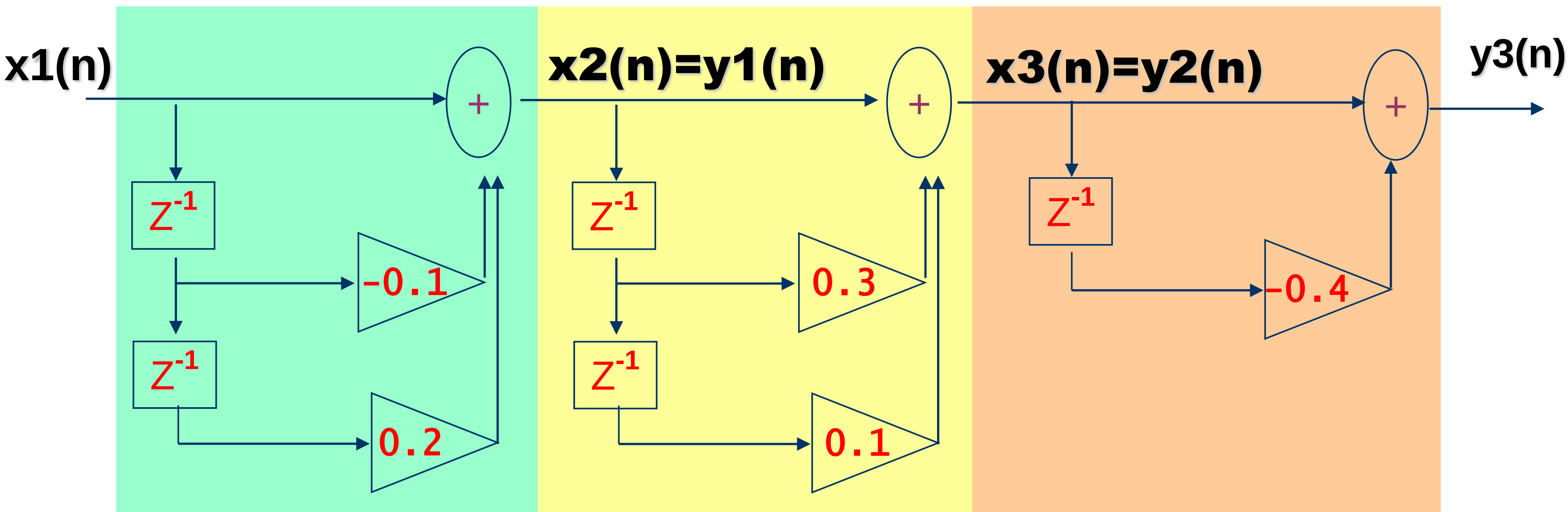
传递函数与差分方程的关系

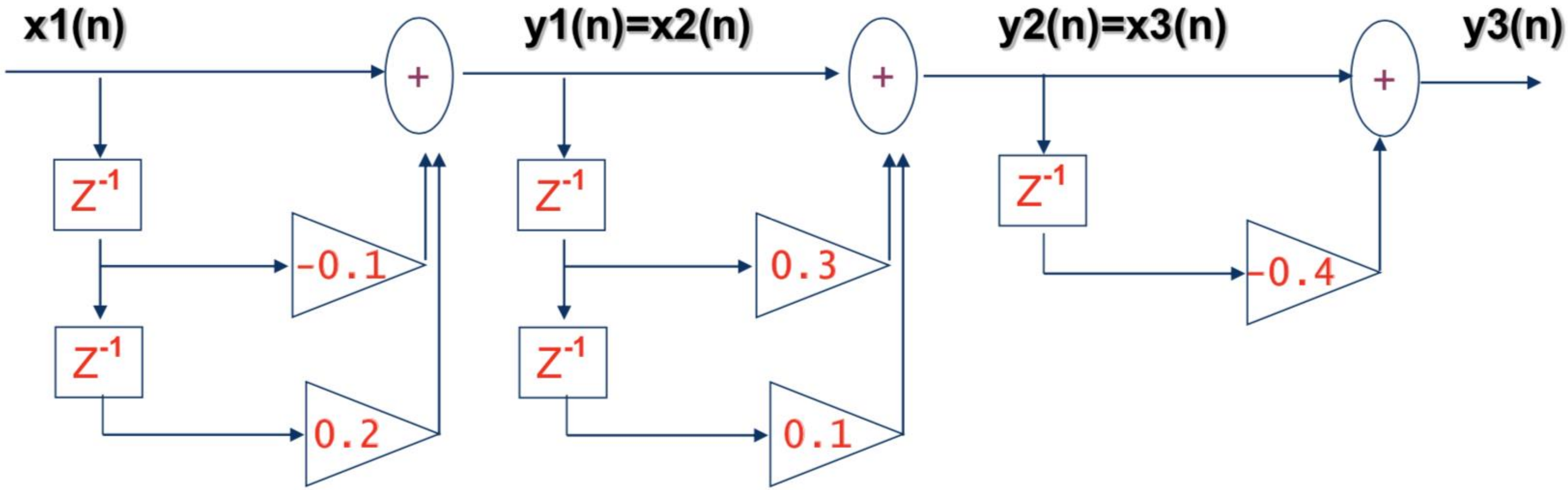


$$\sum_{k=0}^{K} b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{R} a_r x(n-r)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{R} a_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{K} b_k z^{-k}}$$

写出如图所示级联流图的差分方程





$$y_1(n) = x_1(n) - 0.1x_1(n-1) + 0.2x_1(n-2)$$

$$y_2(n) = x_2(n) + 0.3x_2(n-1) + 0.1x_2(n-2)$$

$$y_3(n) = x_3(n) - 0.4x_3(n-1)$$

$$\begin{aligned} y_3(n) &= x_1(n) - 0.2x_1(n-1) + 0.19x_1(n-2) \\ &- 0.058x_1(n-3) - 0.008x_1(n-5) \end{aligned}$$

使用ZT方法

$$y_1(n) = x_1(n) - 0.1x_1(n-1) + 0.2x_1(n-2)$$

$$y_2(n) = x_2(n) + 0.3x_2(n-1) + 0.1x_2(n-2)$$

$$y_3(n) = x_3(n) - 0.4x_3(n-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} H_1(z) &= 1 - 0.1z^{-1} + 0.2z^{-2} \\ H_2(z) &= 1 + 0.3z^{-1} + 0.1z^{-2} \\ H_3(z) &= 1 - 0.4z^{-1} \end{aligned}}$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

这是三个子系统级联！

$$= 1 - 0.2z^{-1} + 0.19z^{-2} - 0.058z^{-3} - 0.008z^{-5}$$

$$\Rightarrow y_3(n) = x_1(n) - 0.2x_1(n-1) + 0.19x_1(n-2) - 0.058x_1(n-3) - 0.008x_1(n-5)$$

系统的稳定性和因果性判定

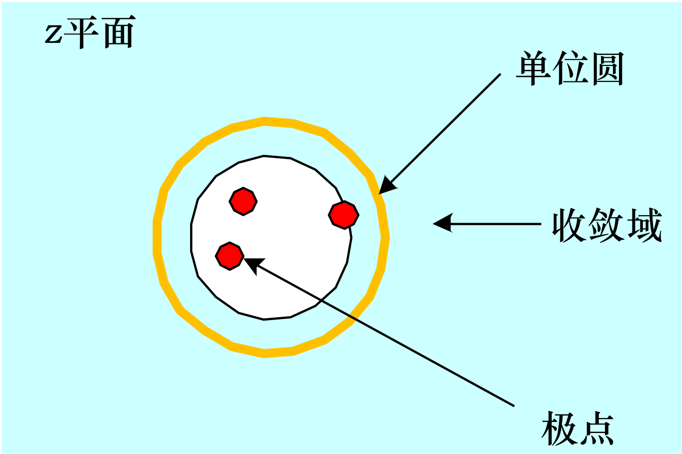
结论1 离散线性时不变系统是**因果系统**的充要条件是：传递函数**ROC**是某个圆外部的区域，包括无穷远点。

?

结论2 离散线性时不变系统是**稳定系统**的充要条件是：传递函数的**ROC**包括单位圆。

?

若系统是稳定的因果系统，则其传递函数**ROC**如下所示



回顾

特定序列的ROC

右边序列 序列$x(n)$在$n<n_1$时为零

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

由根值法，若有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|}<1$ 则 $|z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x1}$

右边序列的收敛域是半径为R_{x1}的圆外部分

端点只影响无穷远处的收敛情况

$$\begin{cases} n_1\geq 0 & R_{x1}<|z|\leq\infty \\ n_1<0 & R_{x1}<|z|<\infty \end{cases}$$

为什么可以用H(z)的ROC的情况来确定系统的因果性？

反过来想这个问题：

一个因果系统的**h(n)**有何特点？

因果系统的单位冲激响应h(n)是因果序列

n = 0, 1, 2, …

h(n)是右边序列的一种（下标无负值）！

一般的右边序列ZT的ROC是圆外部分，

若下标无负值，则ROC还包含无穷远点

所以，根据ROC的情况，就可以知道系统是不是因果的

为什么H(z)的ROC只有包含单位圆，系统才稳定？

稳定系统 $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

为什么呢？BIBO原则！

$$\Leftrightarrow \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| \right|_{|z|=1} < \infty$$

$\Leftrightarrow$ H(z)的ROC包含单位圆

为什么可以用H(z)的极点位置来判定系统的稳定性？

其实，一个系统是不是稳定的，

只取决于它的H(z)的ROC是否包含单位圆。

根据ZT的ROC与其极点的关系（ROC不含极点），

有下面的结论：

1. 若系统是 **因果系统**，其ROC是某圆外部分，所以全部极点须在单位圆内，这样ROC才能包含单位圆，系统才稳定。
2. 若系统是**反因果系统**，其ROC是某圆内部分，所以全部极点须在单位圆外，这样ROC才能包含单位圆，系统才稳定。

频率响应的几何作图法

H(z)的零极点分布可以求出系统频率响应特性

传递函数

$$H(z) = G\frac{\prod_{r=1}^{R}(z - z_r)}{\prod_{k=1}^{K}(z - p_k)}$$

→ 频响特性

$$H(z) = G\frac{\prod_{r=1}^{R}(z - z_r)}{\prod_{k=1}^{K}(z - p_k)}$$

$$\boxed{H(\omega) = G\frac{\prod_{r=1}^{R}(\underline{e^{j\omega} - z_r})}{\prod_{k=1}^{K}(\underline{e^{j\omega} - p_k})}}$$

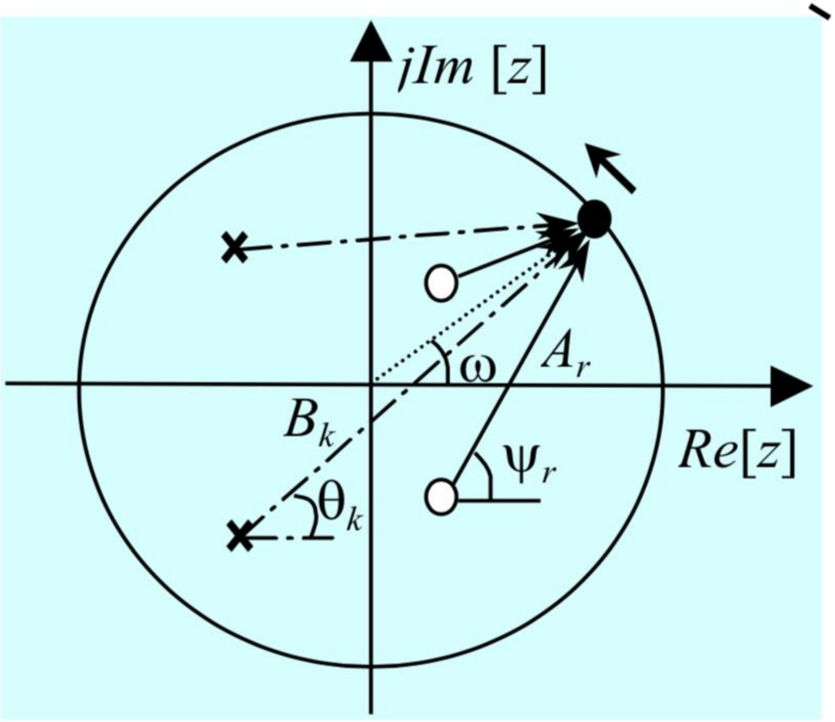
$$e^{j\omega} - z_r = A_r e^{j\varphi_r}$$ 零点向量差

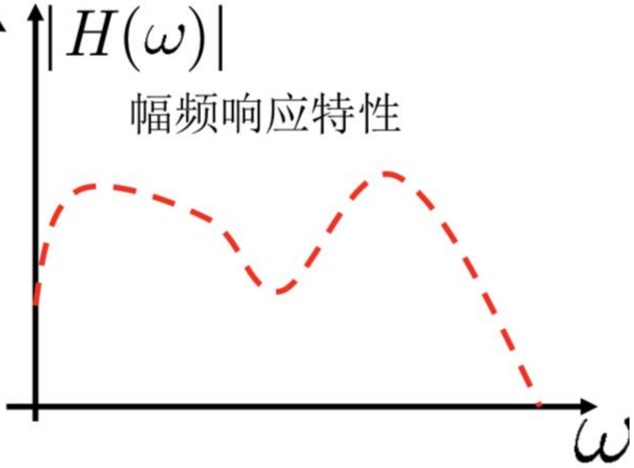
$$e^{j\omega} - p_k = B_k e^{j\theta_k}$$ 极点向量差

如果单位圆上某个点沿逆时针方向不断转动，转动一周就可以得到系统的频率响应。

$$H(\omega) = G\frac{\prod_{r=1}^{R} A_r}{\prod_{k=1}^{K} B_k}\exp\left[j\left(\sum_{r=1}^{R}\varphi_r - \sum_{k=1}^{K}\theta_k\right)\right]$$

相频响应特性





$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=G\frac{\prod_{r=1}^{R}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{K}(z-p_k)}\Rightarrow G\frac{\prod_{r=1}^{R}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{K}(e^{j\omega}-p_k)}$$

几何作图法---程序代码（示意）

```
complex HW(double G, complex *zr, int R,
                     complex *pk, int K, double w)
{
    complex res(G,0), pt(cos(w),sin(w));
    for (int r=0; r<R; ++r)
        res *= (pt - zr[r]);
    for (int k=0; k<K; ++k)
        res /= (pt - pk[k]);
    return res;
}
```

自学

逆Z变换的求解 1

留数法

$$x(n)=\sum_{m}\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{z=p_m}$$

其中，p_m为围线包围的$X(z)z^{n-1}$的极点

设p是$T(z)=X(z)z^{n-1}$的s阶极点，则T(z)在该极点处的留数为：

$$\mathrm{Res}\ T(z)\Big|_{z=p}=\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}T(z)(z-p)^{s}\right\}_{z=p}$$

T(z)在某个s阶极点处的留数的求法：先将T(z)中含有该极点的所有因式全部去掉，然后对z进行s-1次微分，再除以(s-1)!，最后求出表达式在该极点处的函数值，即为所求。

逆Z变换的求解 2

自学

幂级数展开法

把X(z)按z^{-1}展成幂级数（通常是使用长除法），那么其系数组成的序列x(n)即为所求。

这种方法有时给不出一个闭式表达式。

逆Z变换的求解 2

自学

例： 求 $X(z)=\dfrac{z^2+z}{z^3-3z^2+3z-1}\ (|z|>1)$ 的 IZT。

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^{-1}+4z^{-2}+9z^{-3}+\cdots \\ \hline
z^3-3z^2+3z-1 & z^2+z \\
 & \underline{z^2-3z+3-z^{-1}} \\
 & \quad 4z-3\ +z^{-1} \\
 & \quad \underline{4z-12+12z^{-1}-4z^{-2}} \\
 & \qquad 9\ \ -11z^{-1}+4z^{-2} \\
 & \qquad \underline{9\ \ -27z^{-1}+27z^{-2}-9z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

总结规律有

$$X(z)=z^{-1}+4z^{-2}+9z^{-3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^{-n}$$ ，从而 $x(n)=n^2u(n)$

1. 用直接I型和直接II型（标准型）结构实现以下系统函数

$$H(z) = \frac{3 + 4.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{2 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}$$

2. 设滤波器差分方程为

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

   (a) 用直接I型结构实现此差分方程；
   (b) 用直接II型（标准型）结构实现此差分方程；
   (c) 求系统的频率响应（幅度及相位）。

3. 已知离散系统的差分方程为

$$y(n) = x(n) + 4x(n-1) + 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2)$$

   求

   (a) 系统传递函数$H(z)$；
   (b) 系统的单位冲激响应$h(n)$；
   (c) 画出系统的零极点分布；
   (d) 说明系统频响的高低通特性；
   (e) 说明系统的稳定性。

结束