第一节 信号的概念和分类

杜雨峰

涵盖了刘老师“第一次课”的内容和贾老师“Chap01.1”的内容。

信号的概念和描述

提示：至少要了解信号的数学描述。

- 物理上：人对物理世界的观察，是信息的表现形式
- 数学上：一个或多个自变量的**函数**或**序列**

信号的表示方法

提示：频谱图也是波形图的一种。

1. 表达式
2. 波形图

   根据自变量域的不同，有时域波形、频谱图等

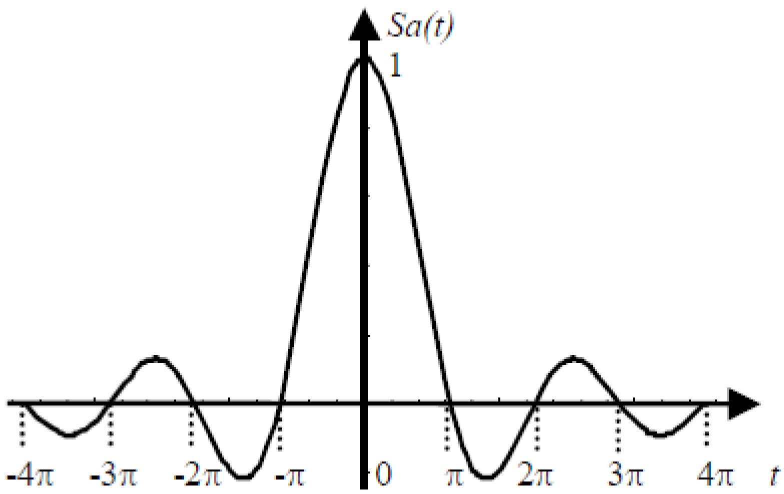
信号的分类

提示：周期的概念比较重要。

- **确定信号**与随机信号
- **连续时间信号**与**离散时间信号**
- **周期信号**和**非周期信号**
  - （基本）周期：使得信号开始重复自身的**最小 正**数（对离散信号而言是最小正整数）
- **实信号**和**复信号**，**因果信号**和非因果信号，能量信号/功率信号/非能非功信号，对称和非对称信号，一维和多维信号……
  - 因果/非因果的划分很简单：“对于所有t<0, x(t)==0，或n<0, x(n)==0”等价于“x是因果信号”。

信号$Sa(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

提示：要能画出Sa的图像（也即知道其基本性质），记住其积分。还要记住傅立叶变换。



- 偶函数
- 零点：$K\pi, K\in\mathbb{Z}$
- 除了$[-\pi,\pi]$之外，被x轴隔开的每一部分的宽度均为π。
- $\int_{-\infty}^{0} Sa(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty} Sa(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2};\quad \int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)\mathrm{d}t=\pi$
  - 对数学好的同学：用Dirichlet积分计算上述积分，详见后续小节。
- 傅立叶变换：$G_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right),\quad Sa(\omega_c t)\leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c}G_{2\omega_c}(\omega)$ 。
  - $G_\tau(t)$是宽为τ的矩形脉冲信号，只在$[-\tau/2,\tau/2]$之间为1。
  - $G_1(t)\leftrightarrow Sa\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad Sa(t)\leftrightarrow \pi G_2(\omega)$

（数学回顾）欧拉公式

提示：记忆欧拉公式、熟悉公式变形，了解公式的三种理解方式。其中，cos和sin的指数函数表示**易于推导、无需特别记忆**，但在频域分析中十分有用。熟悉欧拉公式的可以跳过本节。

$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$

- 公式变形（将cos和sin用指数函数的形式表示）
  - $\sin x=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$
  - $\cos x=\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$
- 对公式的理解
  - 泰勒级数展开
  - 微分法：对$\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos x+i\sin x}$求微分。
  - 复数的几何概念：相当于旋转x rad。

（数学回顾）函数正交

提示：这一节也是复习数学概念，熟悉的可以跳过。

函数正交的若干概念

正交函数

若在区间$[t_1,t_2]$上定义的**非零**函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$满足：

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2^*(t)\mathrm{d}t=0$$

那么它们在该区间上正交。这里**"*"代表共轭**。

上面的式子定义了函数的"内积"，即$(f_1(t),f_2(t))=\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2^*(t)\mathrm{d}t$。由此可以引入线性空间的一系列结论。

正交函数集

若一系列函数$\{\varphi_i\}_{1\le i\le n}$**两两正交**，且任一函数**均不与自身正交**，那么这个函数序列称为该区间上的正交函数集。

正交变换（完备性）

在区间$[t_1, t_2]$上，若除了正交函数集$\{\varphi_i\}_{1\le i\le n}$以外，不存在**不与自身正交的函数**$x$，使得$x$与每个$\varphi_i$均正交，那么称此正交函数集为完备的。

上述完备性定义其实也定义了所谓**正交变换**，即在区间上，对任意的函数x，都能找到一个向量$\boldsymbol{a} = \{a_i\}_n$与之一一对应，$a_i$由上述的积分式（与基函数的**内积**）确定。

正交函数集

- 三角函数序列：$\{1, \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \cos(2\omega_1 t + \varphi_2), \ldots\}$（$\varphi_i$可取任意值）是在$[0, 2\pi/\omega_1]$区间的正交函数集。该函数集对应的变换是函数在$[0, 2\pi/\omega_1]$上的傅立叶级数展开（紧凑形式）。
- $\{\mathrm{e}^{jnw_0 t} | n \in \mathbb{Z}\}$是区间$[-\pi/w_0, \pi/w_0]$上的正交函数集，$w_0$为实数；这对应了傅立叶级数展开的指数形式。

（可跳过）计算**Sa**函数的积分

见刘老师第一次课68页或贾老师Chap01.1，63页。

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \longrightarrow 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$G(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} &= e^{-tx} \cos x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t e^{-tx} \cos x \mathrm{d}x \\
&= e^{-tx} \cos x \Big|_0^{\infty} + \left[t e^{-tx} \sin x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t^2 e^{-tx} \sin x \mathrm{d}x \right] \\
&= e^{-tx} \cos x \Big|_0^{\infty} + t e^{-tx} \sin x \Big|_0^{\infty} - t^2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(1 + t^2) = (0 - 1) + (0 - 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{1 + t^2}$$

$$-\int \frac{1}{1 + t^2} \mathrm{d}t = -\tan^{-1} t + C \qquad G(t) = -\tan^{-1} t + \frac{\pi}{2} \qquad G(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} Sa(t) dt = \pi$$

63