信号处理原理

贾珈

2020.10.15

- FT与FS的关系
- 典型非周期信号的FT
- FT的性质

FT的“波形运算”小结

- 反褶： $f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$
- 平移： $f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$F(\omega-\omega_0) \Leftrightarrow f(t)e^{j\omega_0 t}$$

- 小结：

I　时域延时，幅度谱不变

II　频谱搬移，通过在时域乘复指数信号即可

FT的性质（七）

- **FT微积分运算**

- 微分特性：

时域微分 $$\frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

频域微分 $$\frac{dF(\omega)}{d\omega} \Leftrightarrow -jtf(t)$$

- 积分特性：

时域积分 $$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow (j\omega)^{-1}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

频域积分 $$\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt}f(t)$$

FT卷积定理

- 时域卷积定理：

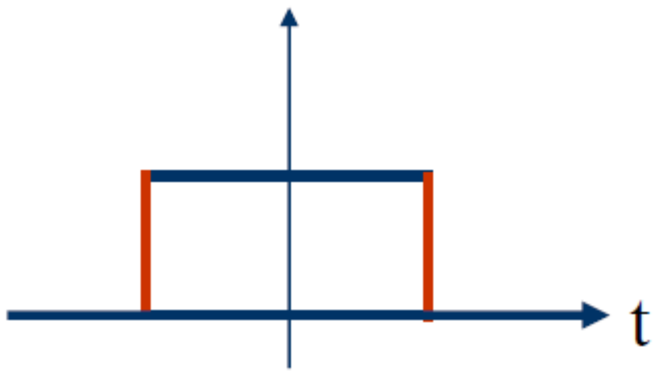
$$\mathscr{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathscr{F}\left[f_1(t)\right] \cdot \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$$

- 频域卷积定理：

$$\mathscr{F}\left[f_1(t) \cdot f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}\left[f_1(t)\right] * \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$$

- **FT卷积定理应用示例**

- 信号截取时，是使用如下矩形窗相乘来实现的：



因此，矩形信号边缘的跳变将引起原信号的频谱会产生畸变：

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)$$

• FT时域相关性定理

$$F\left[R_{f_1 f_2}(t)\right] = F\left[f_1(t)\right]F^*\left[f_2(t)\right]$$

- 若函数f_2(t)是实偶函数，则：

$$F\left[R_{f_1 f_2}(t)\right] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

- 自相关的傅里叶变换定义为：

$$F\left[R_f(t)\right] = F\left[f(t)\right]F^*\left[f(t)\right] = \left|F\left[f(t)\right]\right|^2$$

- 信号自相关函数与其幅度谱平方是一对傅里叶变换对。

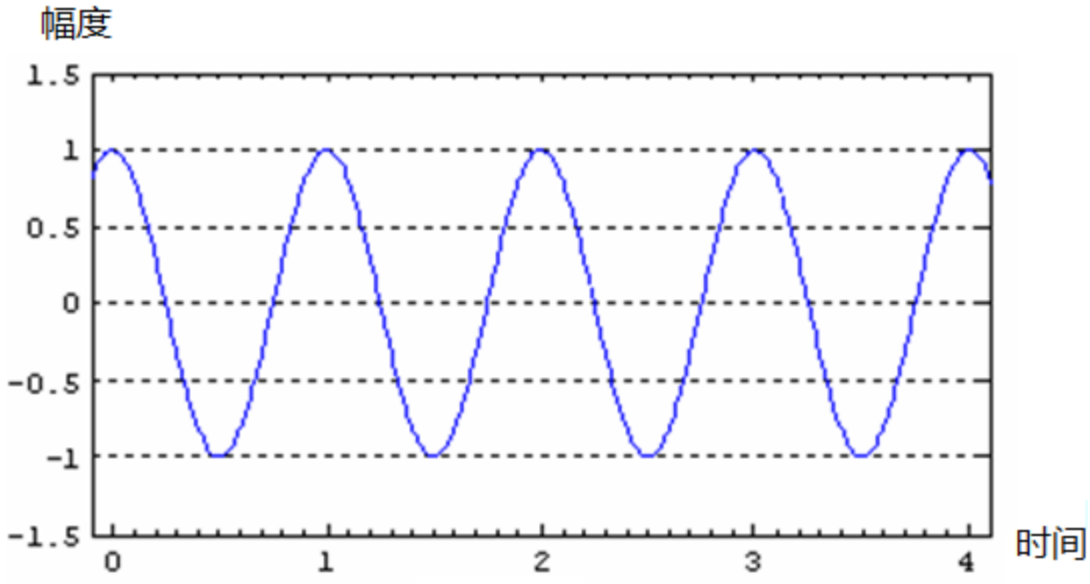
- **【思考】帕斯瓦尔定理**

- 时域和频域的能量守恒。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\omega)\|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\|F(2\pi f)\|^2df$$

- 采样与量化的概念
- 采样与采样定理

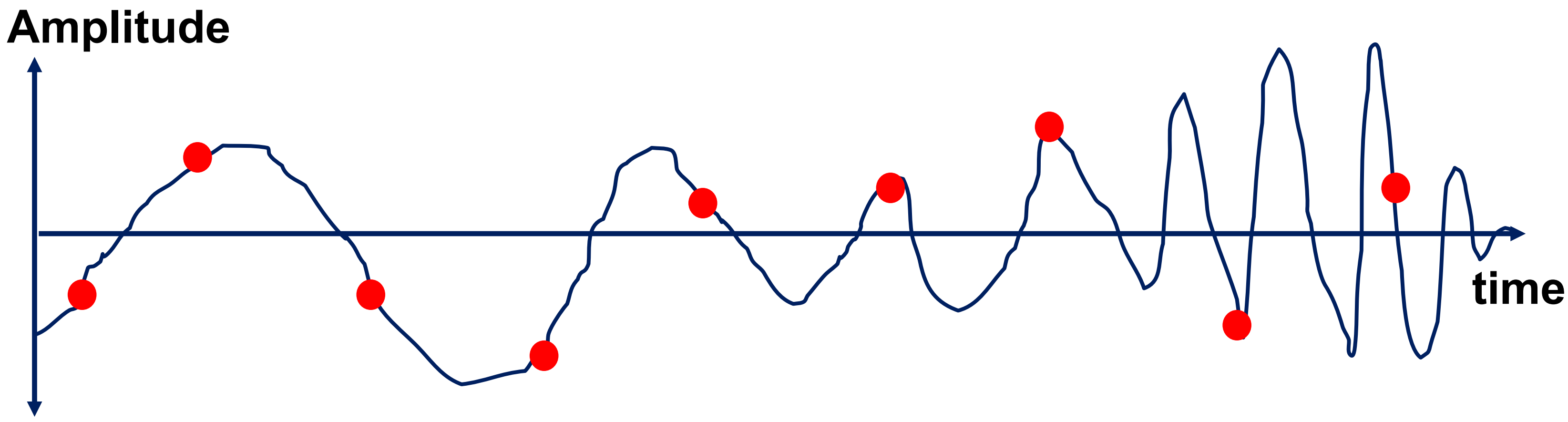
采样的概念



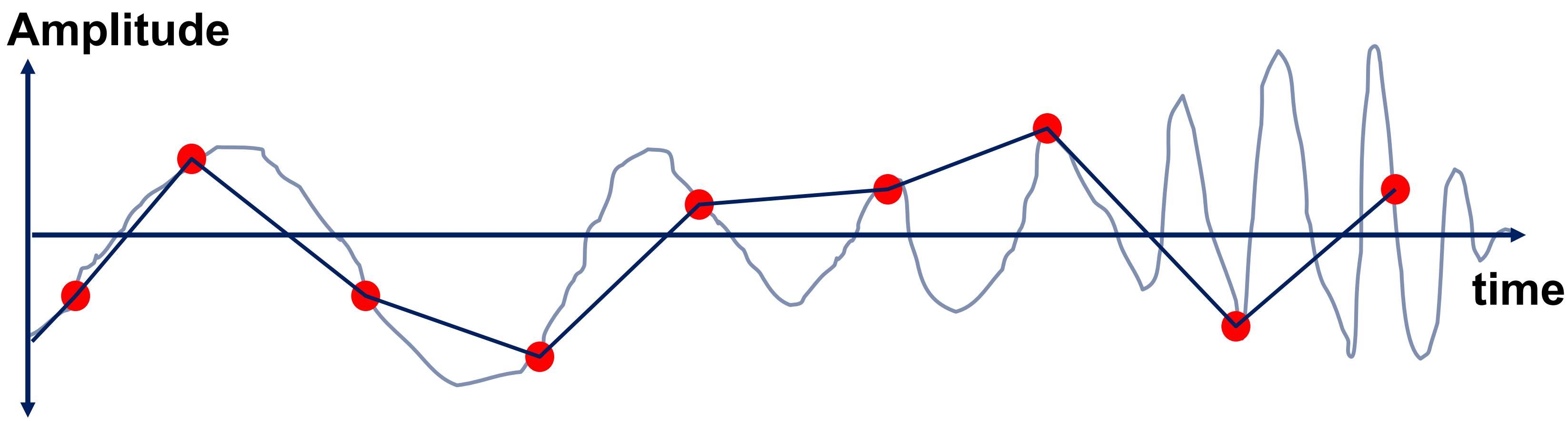
把模拟信号变成数字信号时，每隔一个时间间隔在模拟信号波形上抽取一个幅度值，这称之为采样。

时域采样

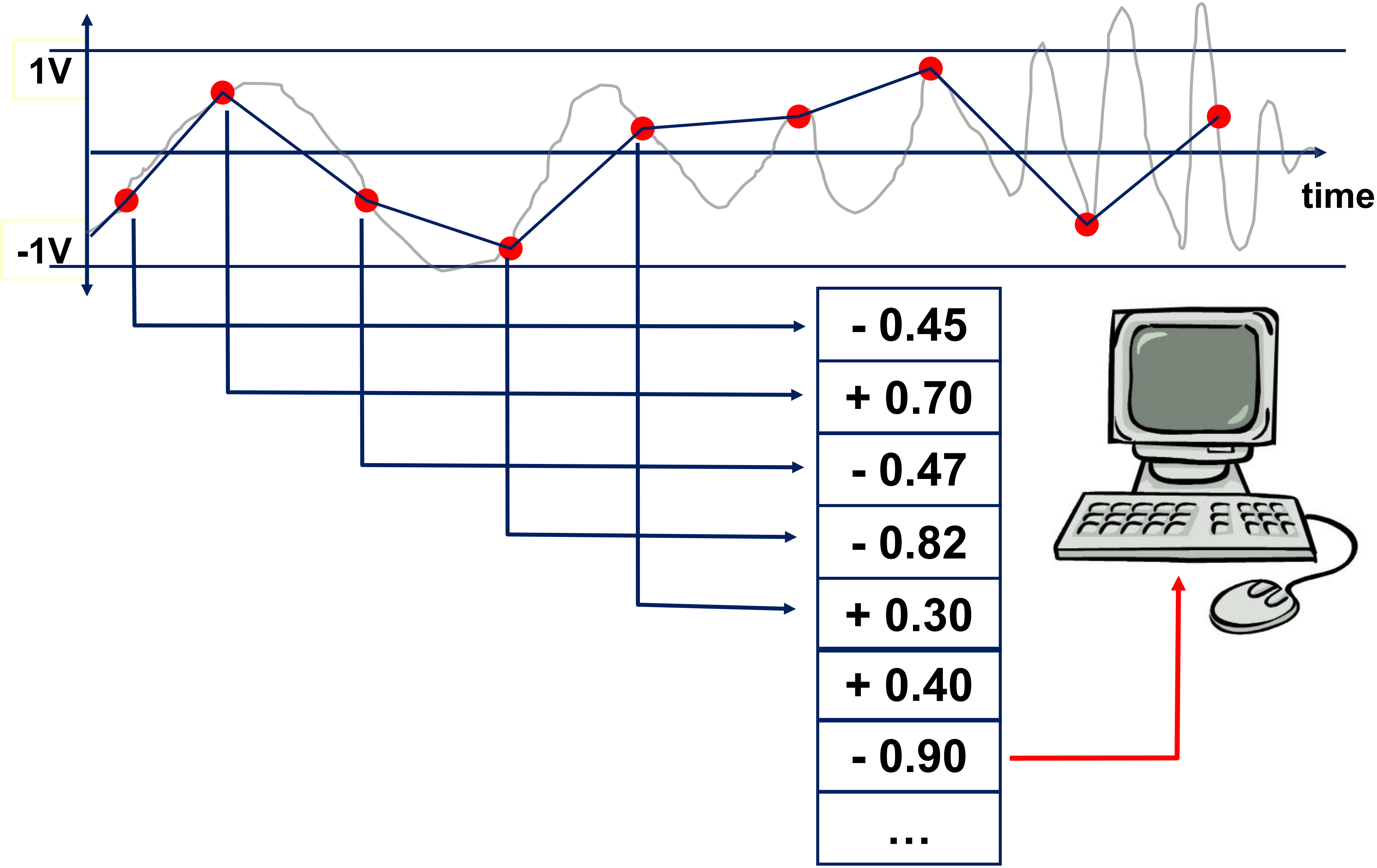
Continuous-time Signal (real signal)



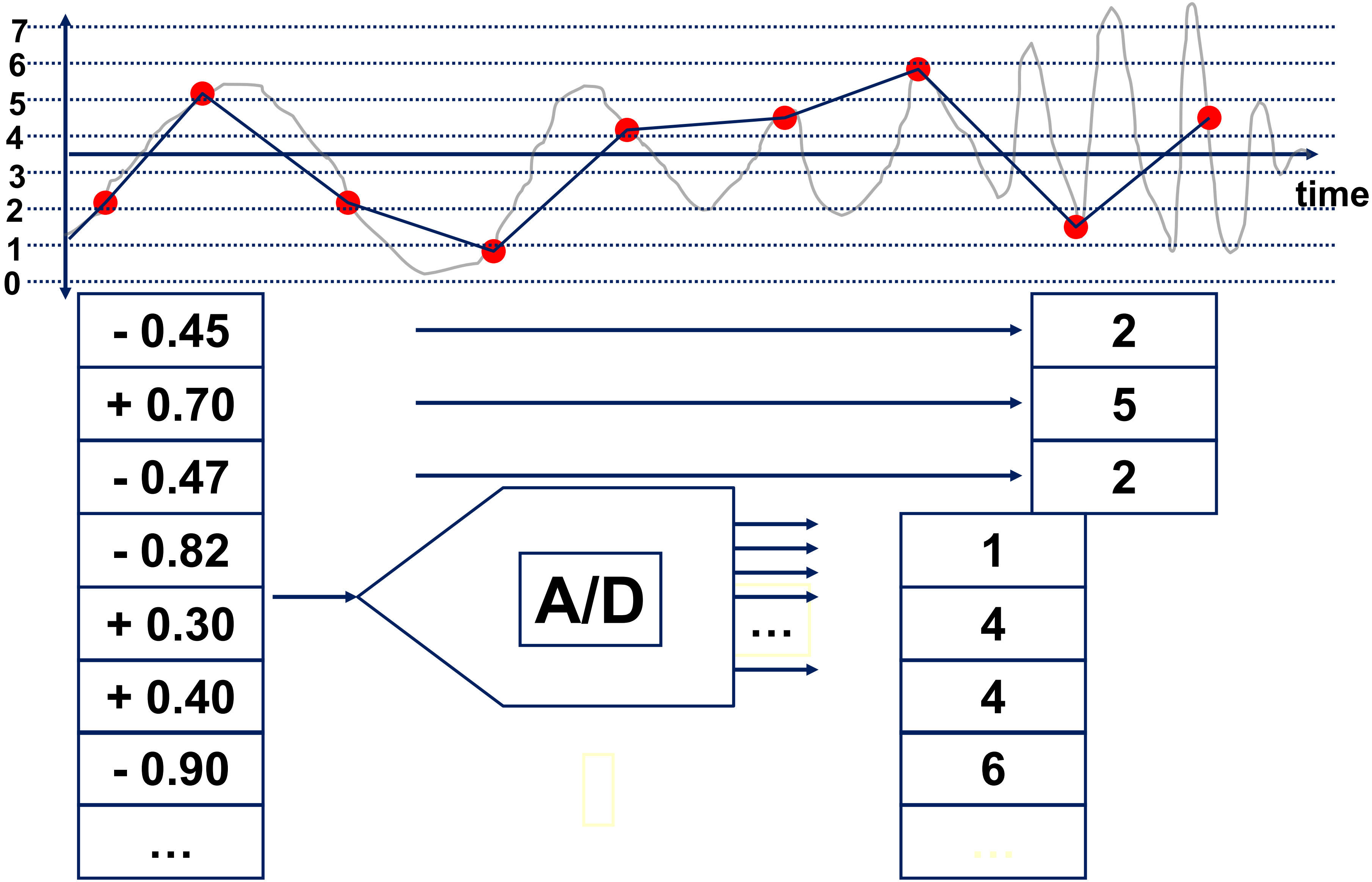
Discrete-time Signal



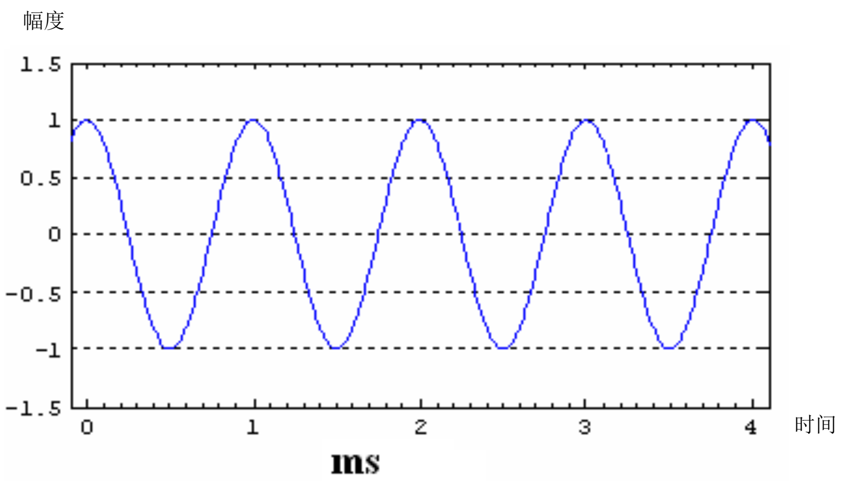
幅度量化



幅度量化

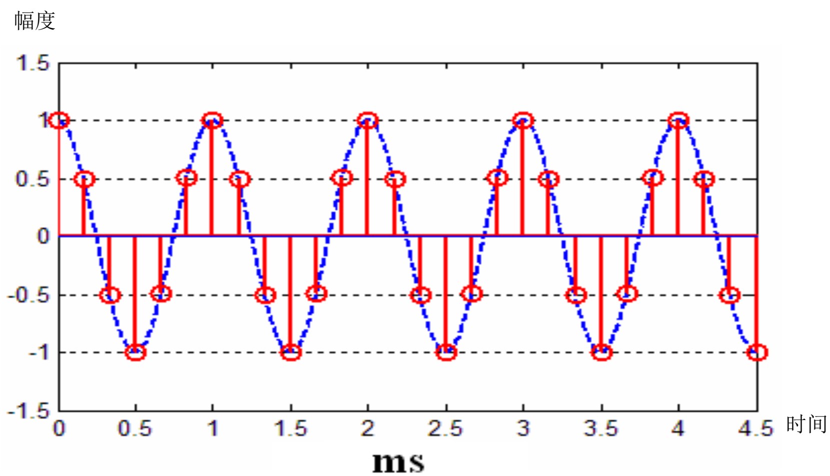


采样的概念

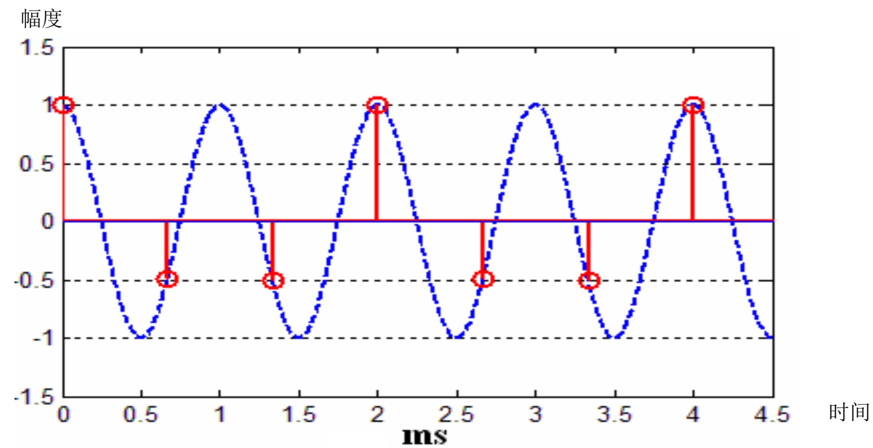


原始模拟信号

采样的概念



抽样后的信号**A**



采样后的信号**B**

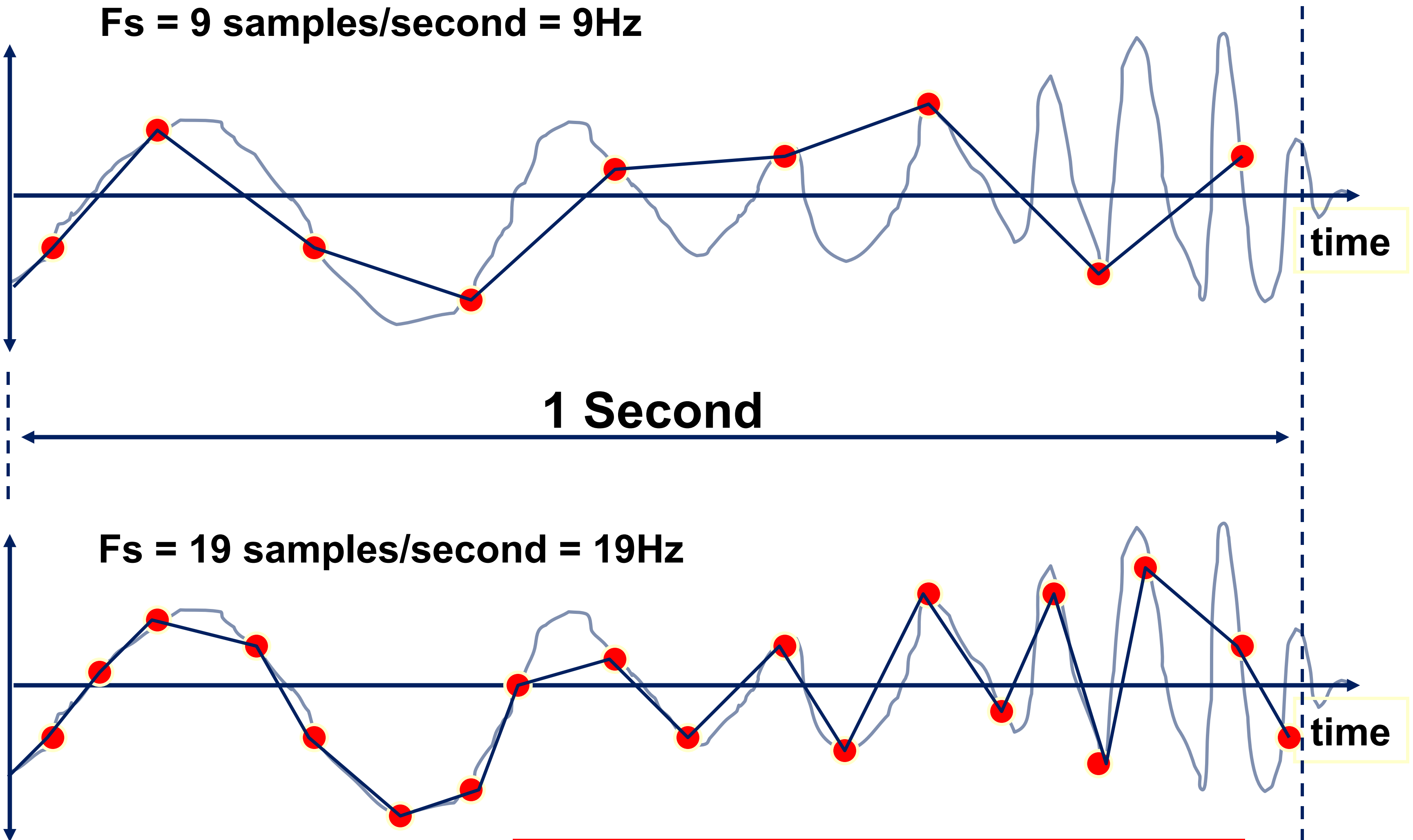
抽样的时间间隔称为**采样周期** T_s**，其倒数称为**

采样频率 $f_s = 1 / T_s$ 。

$\omega_s = 2\pi / T_s$ **称为采样角频率。**

注：在不发生混淆的情况下，ω_s可简称为采样频率。

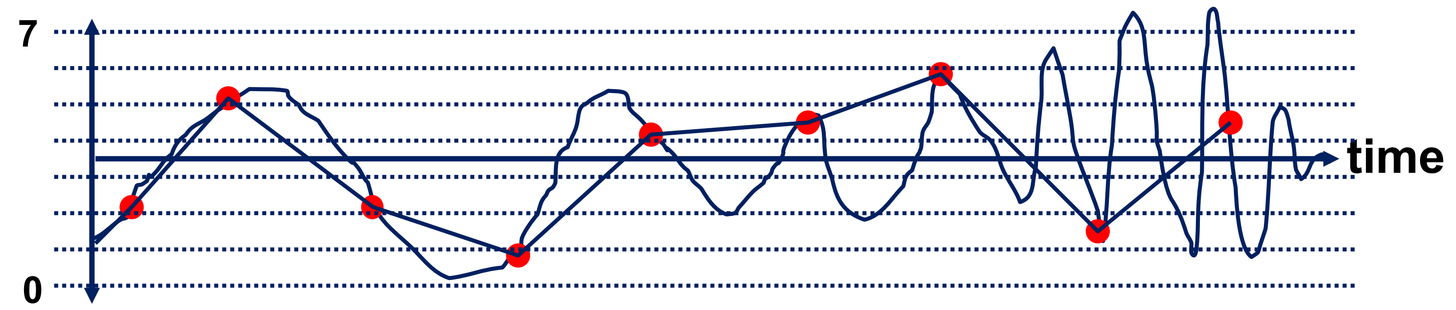
采样与量化



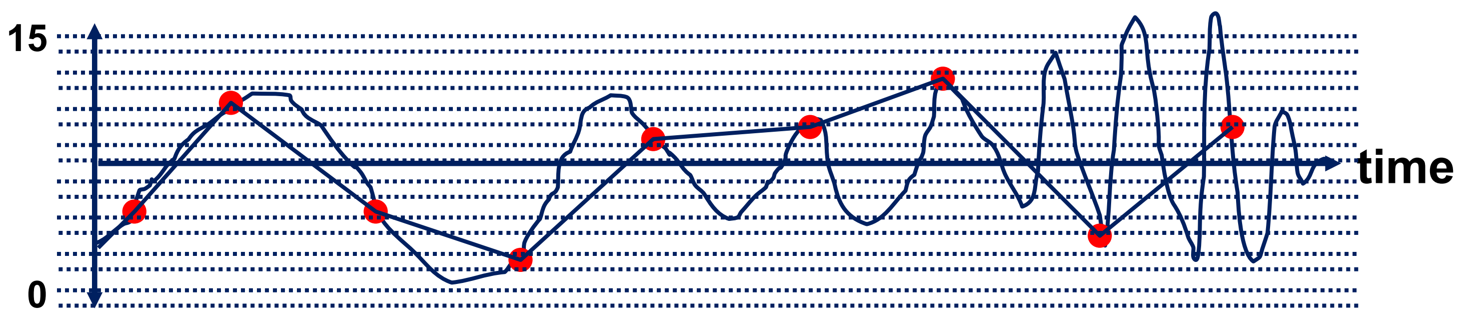
Better signal reconstruction
More computer memory / BW and $$

采样与量化

Resolution: 3bits, 2^3 = 8 combinations **Values from 0 to 7**



Resolution: 4bits, 2^4 = 16 combinations **Values from 0 to 15**



Better signal quantization
More computer memory and $$

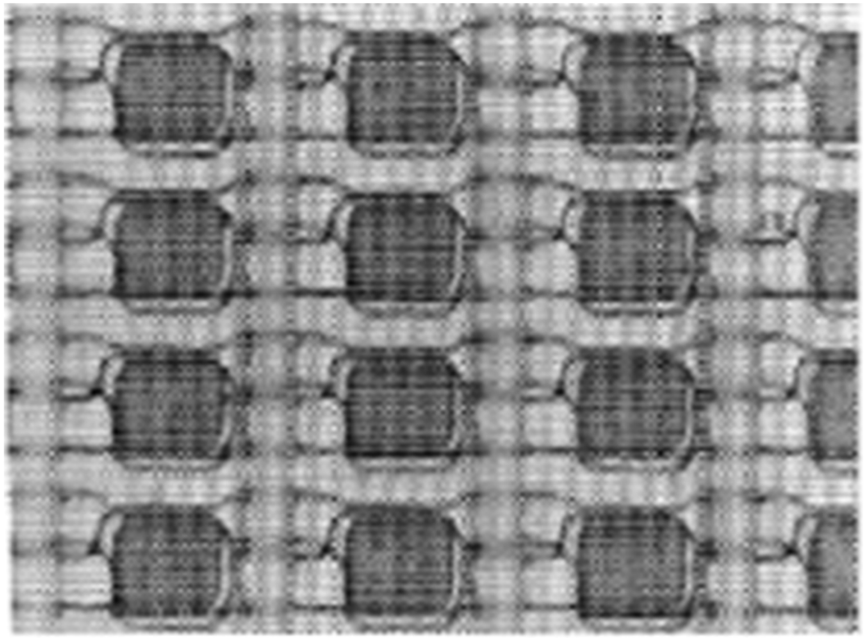
采样与量化

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如照片、屏幕的画面等等。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号。

采样与量化

例子. CCD芯片的光显微图

CCD芯片用VLSI技术制造。被分为许多微小区，**当光成象在CCD芯片上时，就在这些空间离散的象素点上被采样，而生成了离散空间图象信号。**



- 采样与量化的概念
- 采样与采样定理

采样与采样定理

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系

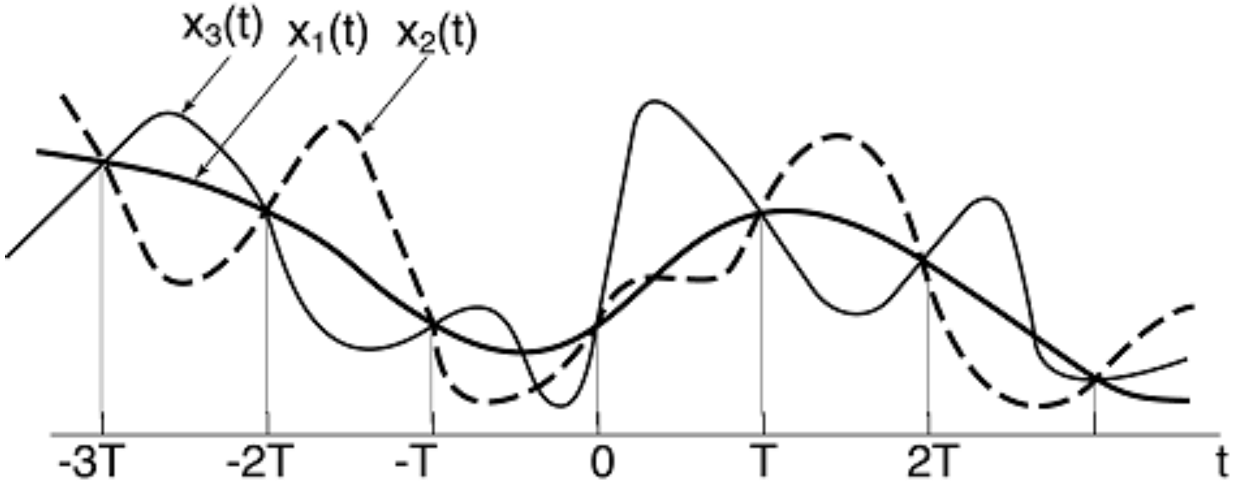
我们最关心什么？

- 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息？
- 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号？

采样与采样定理

采样的定义：

- 采样：在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程。
- 对一维连续时间信号采样的例子：



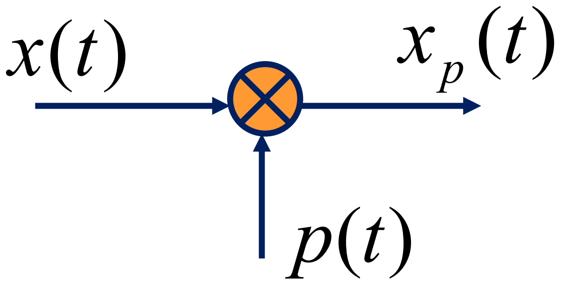
在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

采样与采样定理

- **采样的数学模型：**

在时域： $x_p(t) = x(t)p(t)$

在频域: $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$



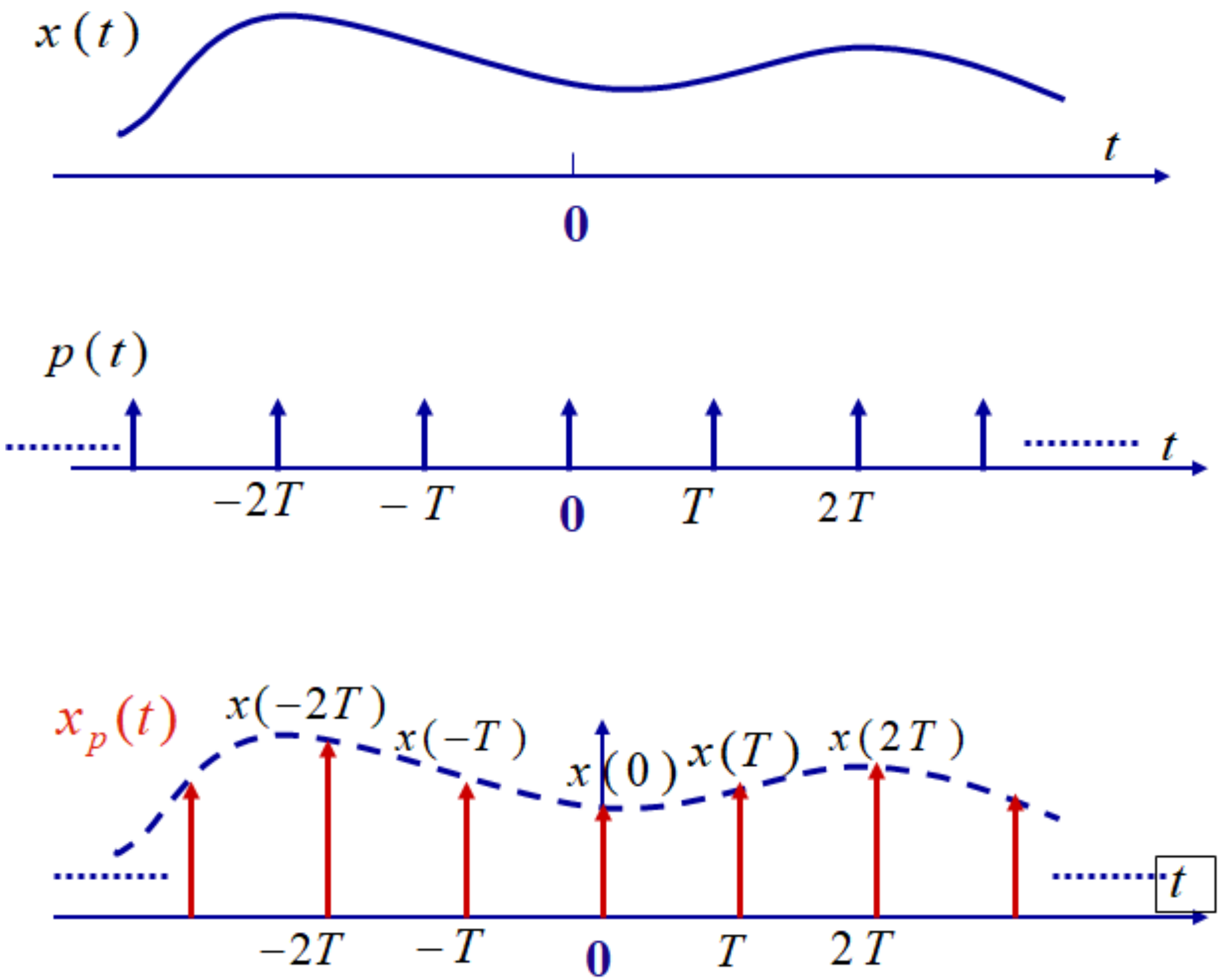
- **冲激串采样(理想采样):**

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

T 为采样间隔

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

采样与采样定理



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

【课堂练习1】求$x_p(t)$的傅里叶频谱

$$p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} n)$$

【课堂练习1】求$x_p(t)$的傅里叶频谱

$$p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}n)$$

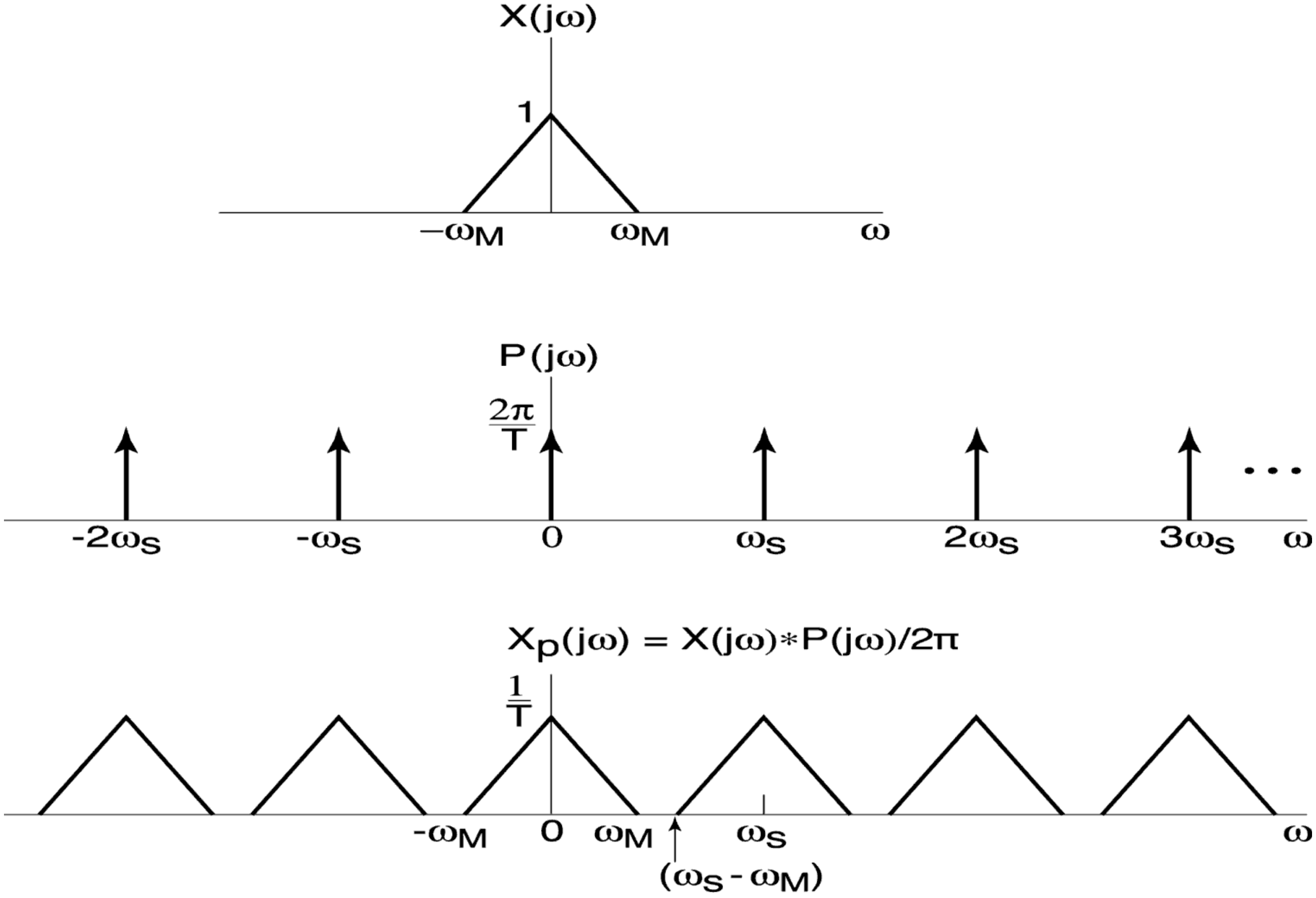
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

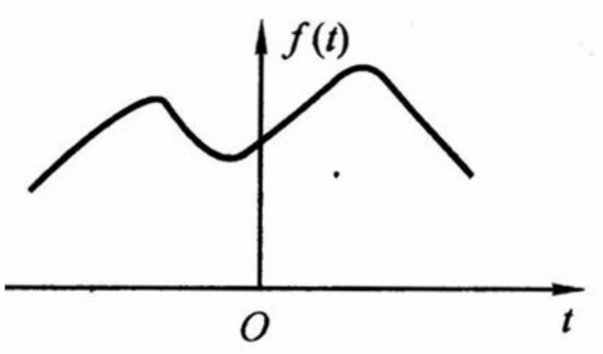
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

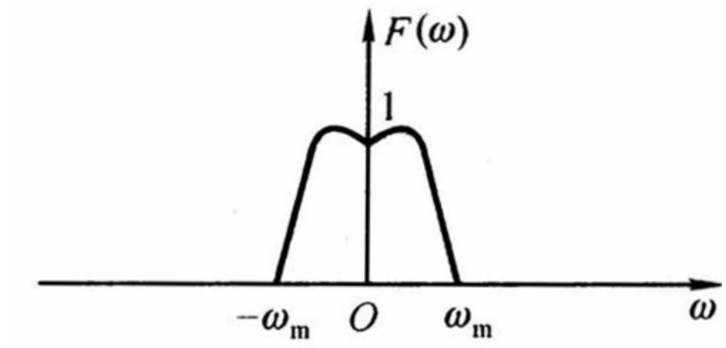
可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以ω_s为周期进行延拓。

例：


X(jω)
1
−ωM
ωM
ω
P(jω)
2π/T
-2ωS
-ωS
0
ωS
2ωS
3ωS
ω
Xp(jω) = X(jω)∗P(jω)/2π
1/T
-ωM
0
ωM
ωS
(ωS - ωM)
ω

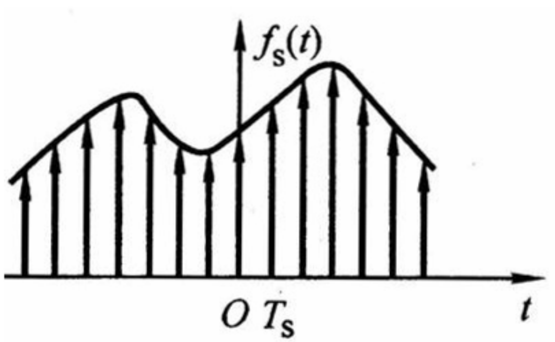
采样的频域分析

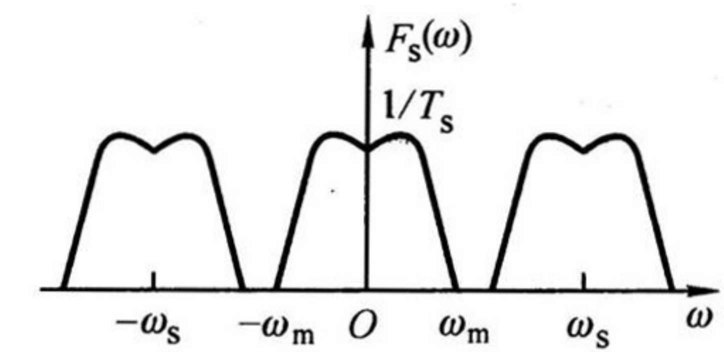




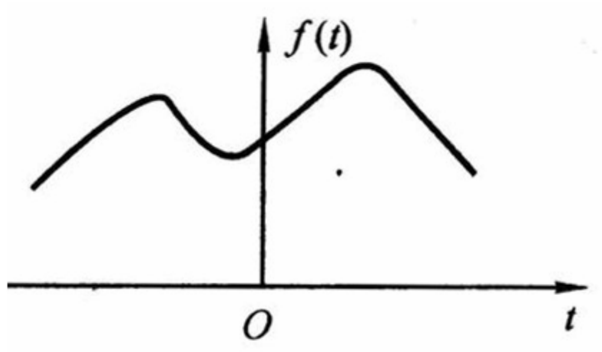
$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

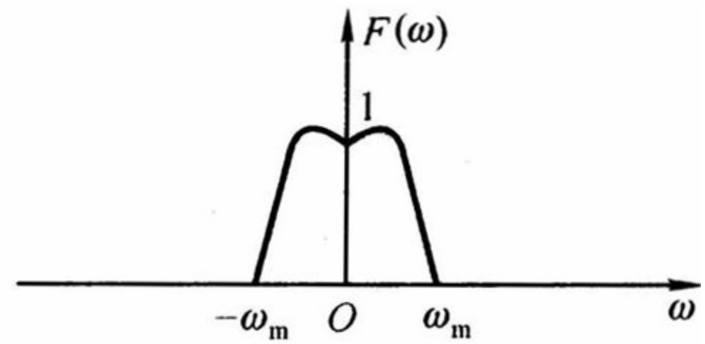
$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega-n\omega_s)$$





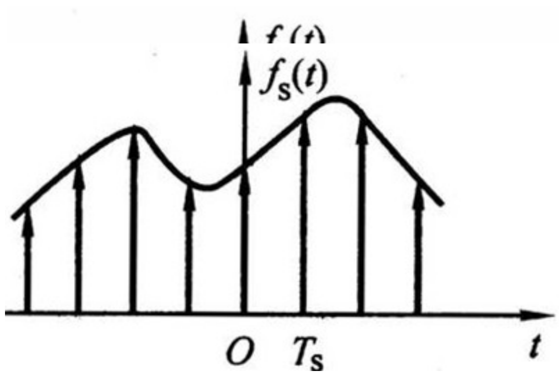
采样与混叠

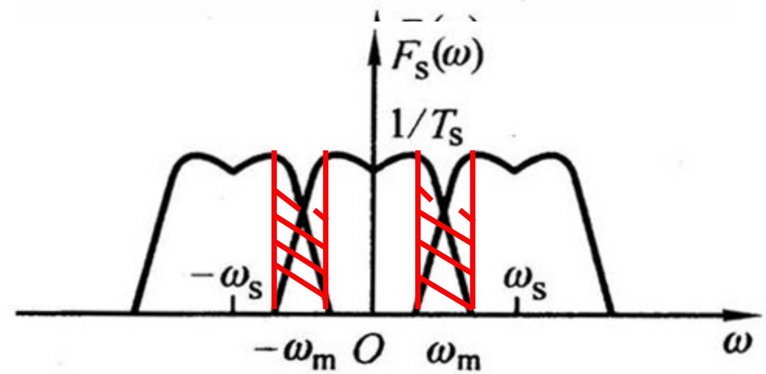




$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$$





抽样周期变大，频谱的周期变小，离散信号的谱发生相互重叠的现象：混叠

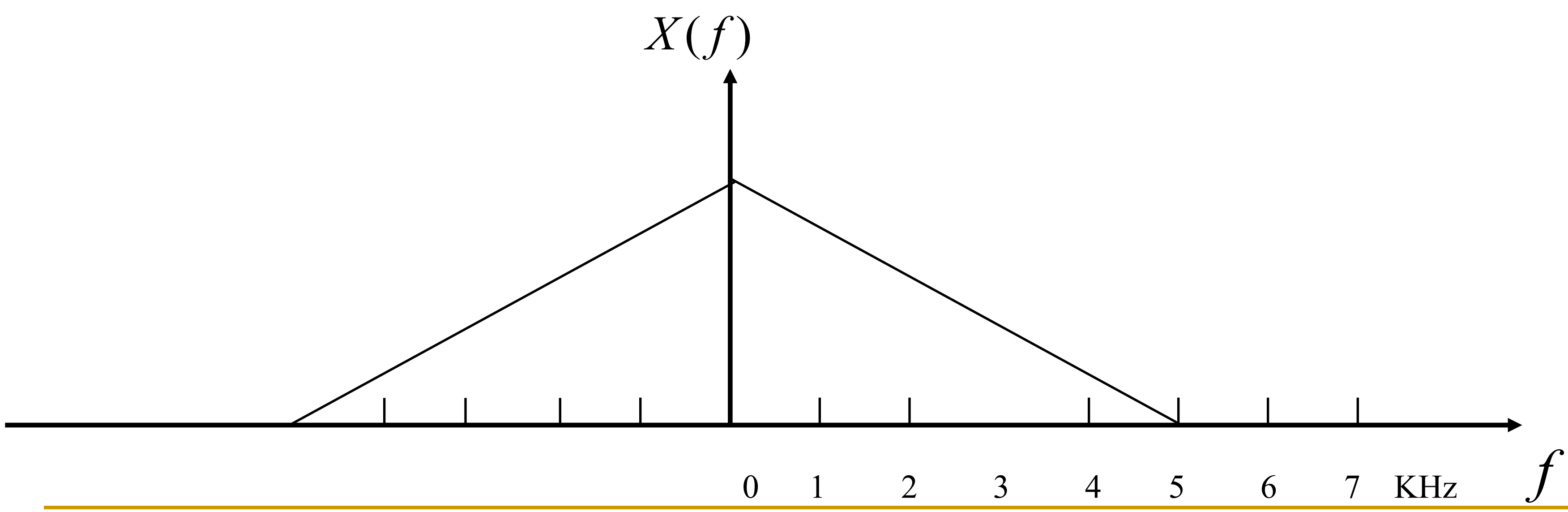
采样与混叠

【课堂练习2】

设模拟音频信号高频截至频率为5kHz,抽样频率为6kHz。

问题：

抽样后信号频谱与原信号频谱在2kHz处有什么差异？

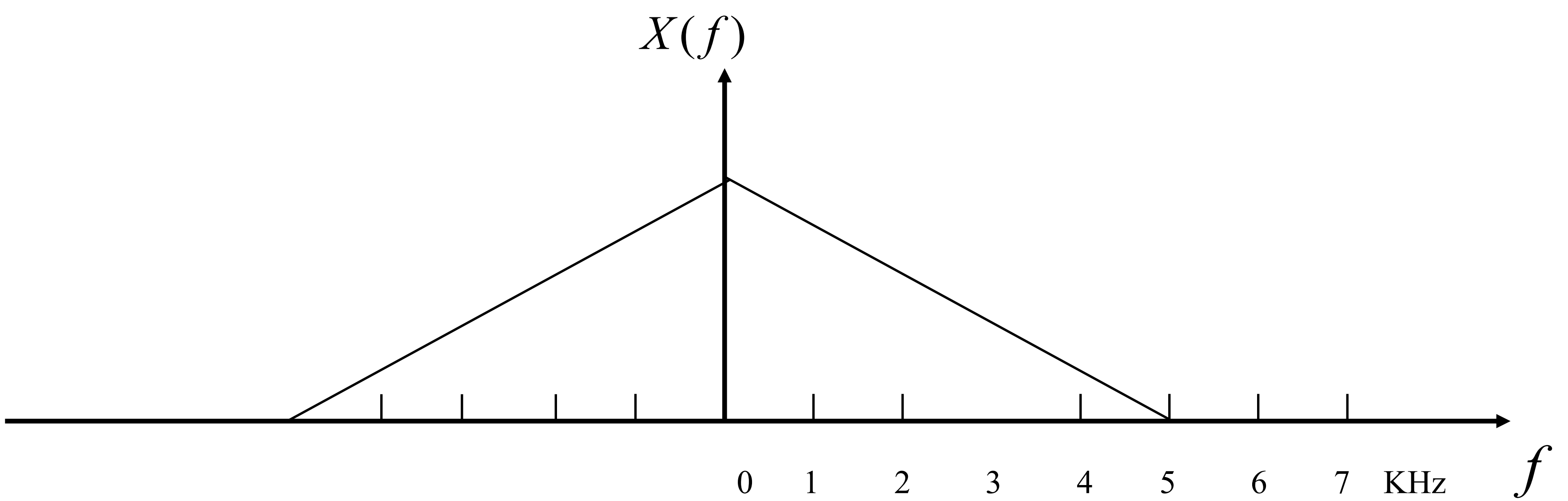


【课堂练习2】

设模拟音频信号高频截至频率为**5kHz**,抽样频率为**6kHz**。

问题：

抽样后信号频谱与原信号频谱在**2kHz**处有什么差异？



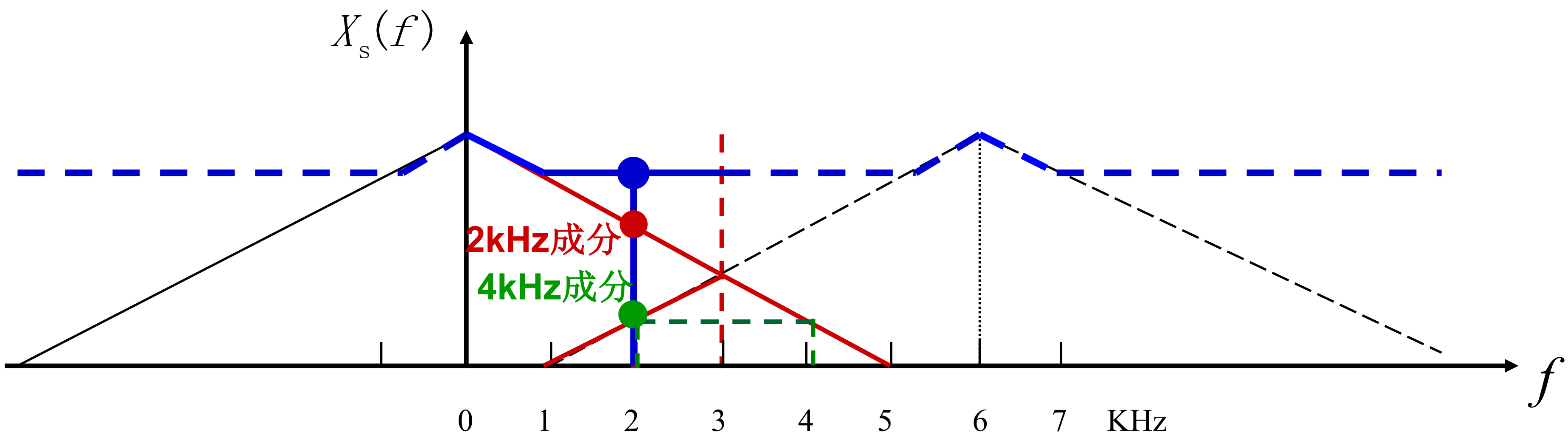
采样与混叠

【课堂练习2】

设模拟音频信号高频截至频率为**5kHz**,抽样频率为**6kHz**。

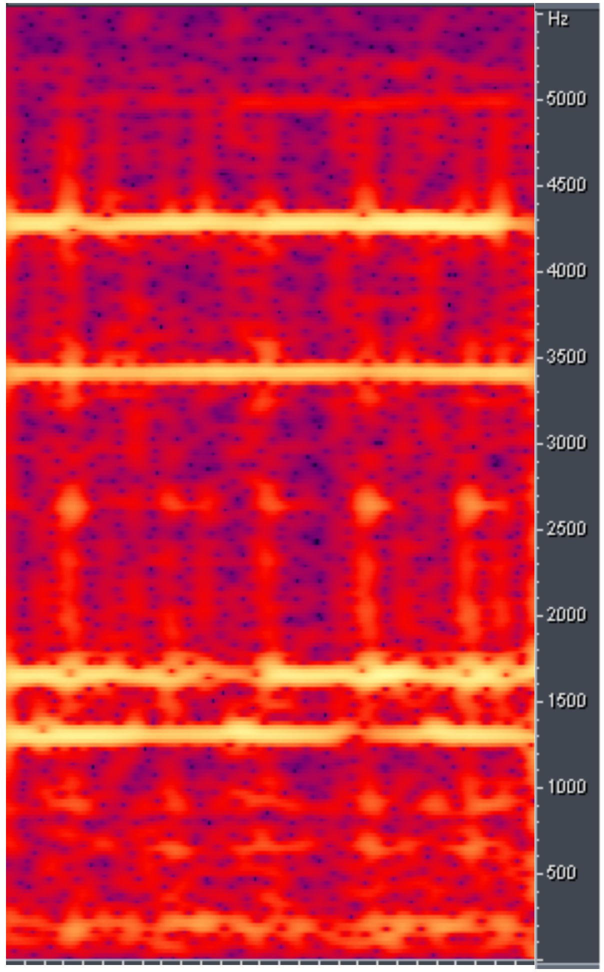
问题：

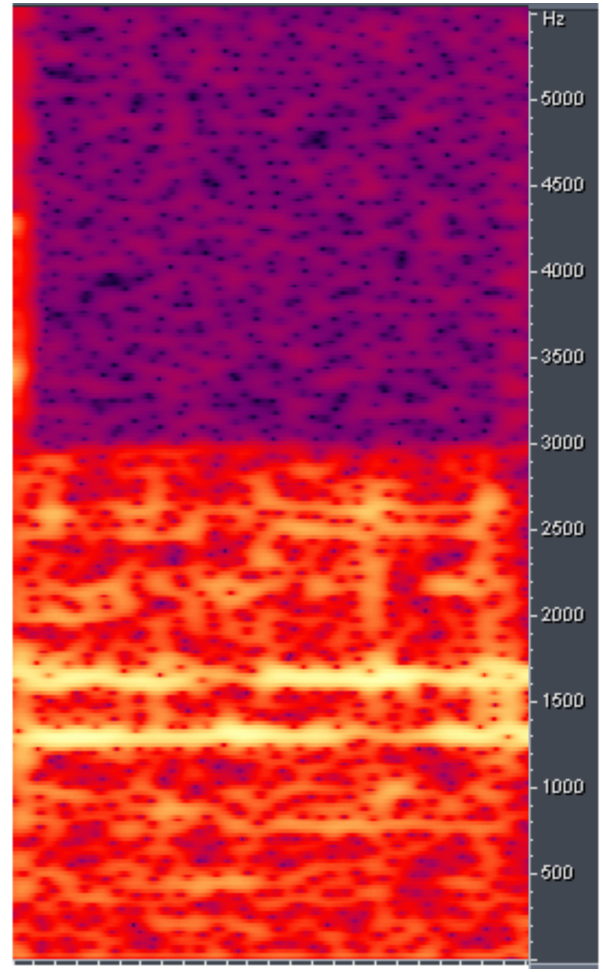
抽样后信号频谱与原信号频谱在**2kHz**处有什么差异？



思考：混叠对音频质量会产生什么影响？

混叠





11KHz

6KHz

思考：如何防止混叠？

采样与采样定理

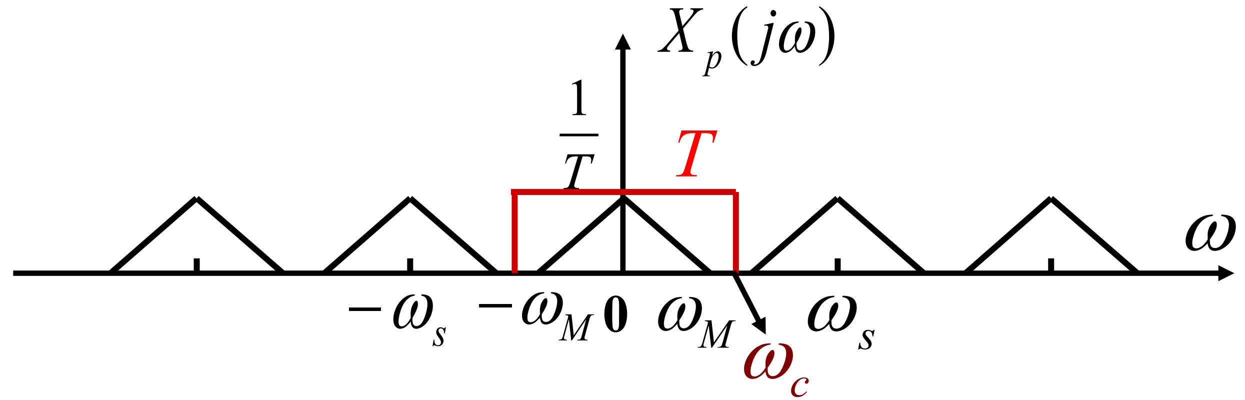
要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出$X(j\omega)$ 。这就要求 $X(j\omega)$在周期性延拓时**不能发生频谱的混叠**。为此必须要求:

1. $x(t)$ **必须是带限的，最高频率分量为** ω_M **。**

2. 采样间隔(周期)不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$ **。其中** $\omega_s = 2\pi / T$ **为采样频率**。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。

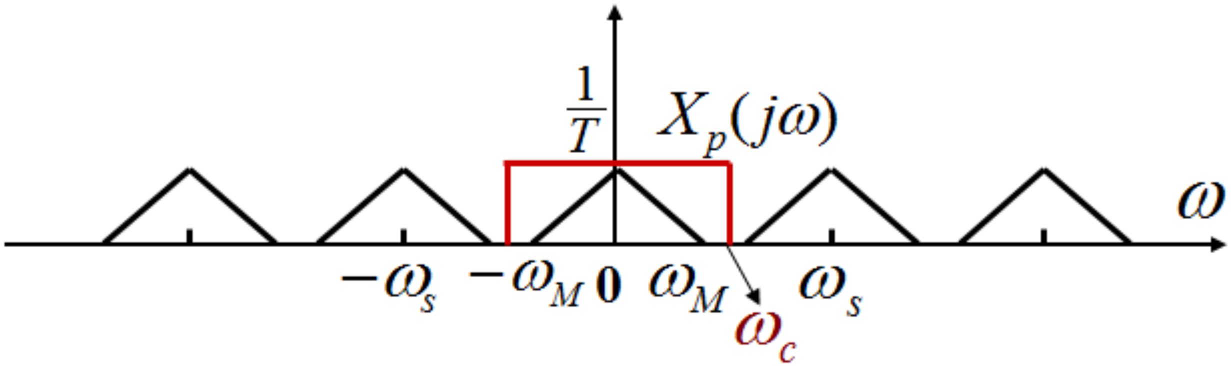
采样与采样定理

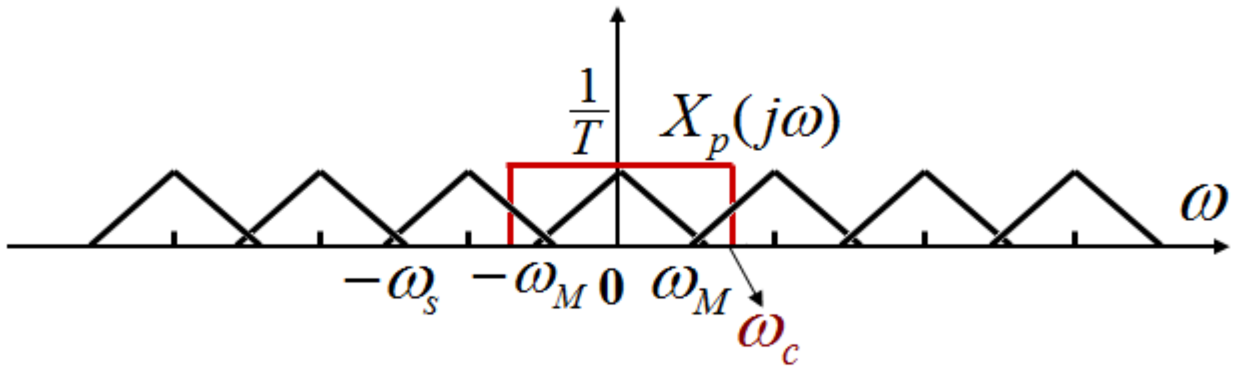


- **Nyquist 采样定理:**

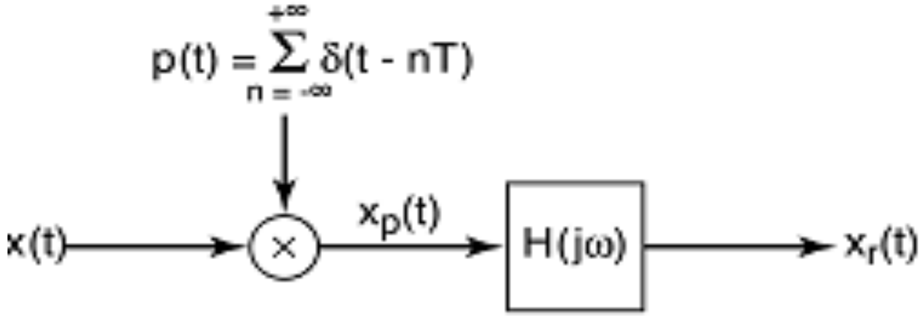
对带限于最高频率ω_M的连续时间信号$x(t)$，如果以$\omega_s \geq 2\omega_M$的频率进行理想采样，则$x(t)$可以唯一的由其样本$x(nT)$来确定。

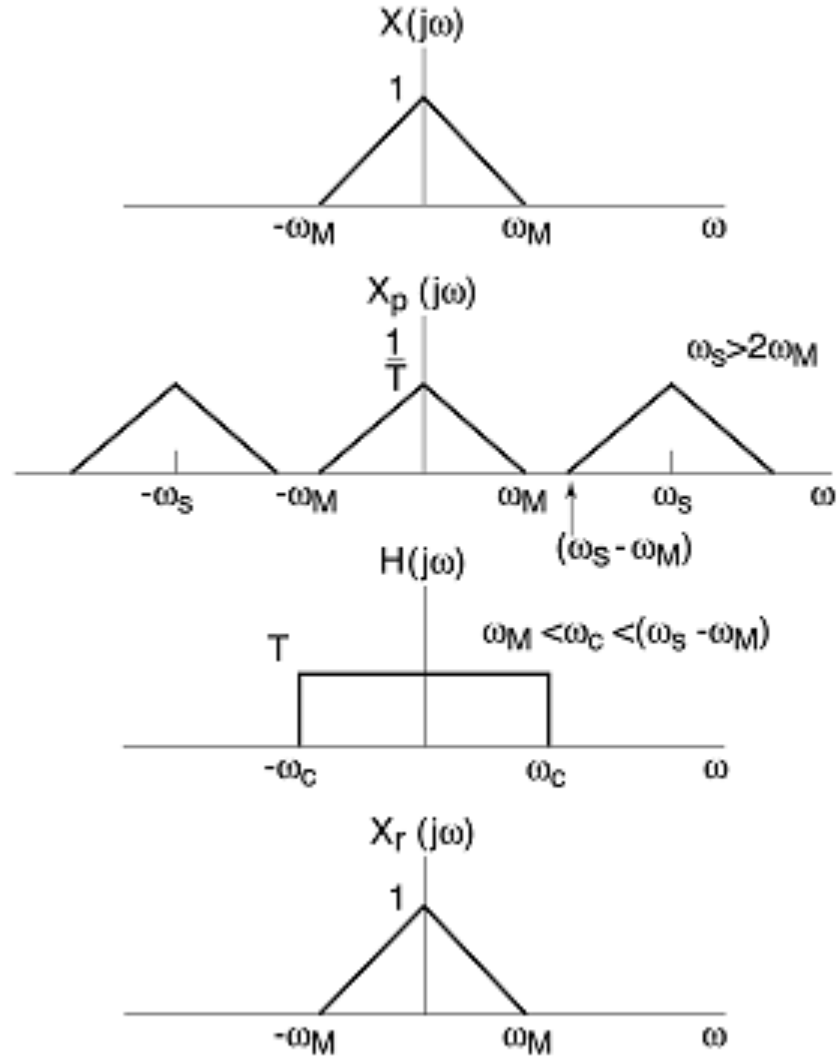
- **Nyquist 采样定理:**





采样与采样定理





- 在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此，实际采样时, ω_s 必须大于$2\omega_M$。

抽样定理的方法论思考

多媒体计算机智能处理与应用

提取特征、改变特征

桥梁

模拟（连续）世界 → 数字（离散）世界

抽样

- 关键科学问题

  局部如何选择，才能全面体现整体的变化规律？

  - ✓ 信号处理：抽样定理对抽样频率的约束

第五次作业

作业1：

现有信号 $f(t)=e^{\frac{-t^2}{20}}$。为分析某时刻下的“局部频谱”，可选合适的窗函数$w(t,t_0)$，并截取$f(t)$在t_0附近的信号，即$f_w(t,t_0)=f(t)\cdot w(t,t_0)$。

a. 求信号 $f(t)$的 FT。

b. 现不妨取窗函数$w(t,t_0)=e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2}}$。试分析$t_0=0$时刻下对应的“局部频谱”，即求$f_w(t,0)$的FT。

c. 画出信号 $f(t)$的频谱图与信号$f(t)$在 $t_0=0$时刻下的“局部频谱”图，并进行对比。

提示：若$x\in R, c\in R$，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+jc)^2}dx=\sqrt{\pi}$。

结 束

复习参考1：课堂练习1

【课堂练习1】求$x_p(t)$的傅里叶频谱

第一步: 求$p(t)$ 的傅里叶频谱

$$p(t) \leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}n)$$

方法一：公式法

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)e^{-jn\omega T}dt$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-jn\omega T}$$

表达式不直观）

无穷个复指数信号相加

方法二：将周期信号做傅立叶级数展开

（周期信号的傅立叶变换）

周期信号指数形式的傅立叶级数展开

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_s t} \quad ①$$

$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ T为f(t)的周期

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_s t}dt \quad ②$$

（注意①和② $e^{-jn\omega_s t}$ 和 $e^{jn\omega_s t}$ 的符号）

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_s t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega t}dt}_{\text{相当于 } e^{jn\omega_s t} \text{ 的傅立叶变换}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\cdot 2\pi\delta(\omega-n\omega_s)$$

利用 $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

FT的频移特性

周期信号傅立叶变换公式

对于 $f(t)=p(t)$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\therefore \mathcal{F}[p(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$