采样与量化

宋晨阳 计 86

1 采样的概念

采样：把模拟信号变成数字信号时，每隔一个时间间隔在模拟信号波形上抽取一个幅度值。在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列**不能**唯一地代表原来的连续时间信号。

采样周期 $\boldsymbol{T_s}$：采样的时间间隔。

采样频率 $\boldsymbol{f_s}$：采样周期的倒数 $1/T_s$。

采样(角)频率 $\boldsymbol{\omega_s}$：$\omega_s = 2\pi/T_s$。

混叠：抽样周期变大，频谱的周期变小，离散信号的谱发生相互重叠的现象。要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。这就要求 $X(j\omega)$ 在周期性延拓时**不能发生频谱的混叠**。

内插：由样本值重建某一函数的过程，从数学计算的角度看，在频域上，就是用冲激采样信号和内插函数各自所对应频域信号做乘法，时域上，就是冲激采样信号与内插函数的卷积。

理想内插：以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa 函数形态）作为内插函数。

2 采样与采样定理

采样的数学模型（时域/频域）：

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

冲激串采样（理想采样）：

$$\mathrm{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$x_p(t) = \mathrm{x}(t)\mathrm{p}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

采样得到的频谱：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域**将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓**。

Nyquist 采样定理：

对于带限于最高频率 ω_M 的连续时间信号 $x(t)$，如果以 $\boldsymbol{\omega_s \geq 2\omega_M}$ 的频率进行理想采样，则 $x(t)$ 可以唯一地由样本 $x(nT)$ 来确定。

现实中，带限的信号几乎是不存在的，因此满足上述采样定理的信号是难求的。

理想内插：

设 $H(\omega)$ 为理想低通滤波器的频域信号（这是一个频域矩形脉冲），$h(t)$ 为它的单位冲激响应（这是一个时域上的 Sa 函数），则内插结果为：

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\big[X_p(\omega)\cdot H(\omega)\big] = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

这种内插称为时域中的**带限内插**。用滤波器函数对信号抽样值进行内插来重建模拟信号，相当于滤波器的冲激响应与信号值为权重的脉冲串的卷积。

满足 Nyquist 采样定理时，可以通过离散时间理想低通滤波器实现对信号的恢复。理想低通的**通带增益**为 T_s，**截止频率**满足：$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$。这也是一种**带限内插**的过程，内插函数为理想低通的单位脉冲响应 $h(t)$。

因为频域上的矩形脉冲难以进行工程实现，因此我们会采用其他信号来近似，这就是零阶/一阶保持内插。

零阶保持内插：

内插函数 $h_0(t)$ 是矩形脉冲，对应的频域信号是 Sa 函数。（理想内插函数是频域上的矩形脉冲，时域上对应 Sa 函数）

一阶保持内插（线性内插）：

内插函数是三角形脉冲。处理方法见常用结论 3.3

欠采样——频谱混叠问题：

说明 1：频谱混叠的情况下，时域信号变了，但抽样点的取值不变。此时，即便通过理想内插也得不到原信号，但无论如何，恢复得到的信号 $x_r(t)$ 与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值，即 $x_r(nT)=x(nT)$。

说明 2：工程应用时，如果采样频率 $\omega_s=2\omega_M$ 将不足以从样本恢复信号。

说明 3：采样之后又采样。

频域采样：

频域采样与时域采样是完全对偶的。

频域采样冲激串为：$\mathrm{P}(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$

采样得到的频域信号：$X_p(j\omega)=X(j\omega)P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)$

恢复的时域信号：$x_p(t)=x(t)*p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)$

对信号的频谱在频域理想采样，相当于在时域将信号以 $2\pi/\omega_0$ 为周期无限延拓。此时，可以通过矩形框从周期性延拓的信号中截取出原信号。

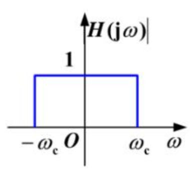
$$w(t)=\begin{cases}\omega_0, & |t|\le\pi/\omega_0\\ 0, & |t|>\pi/\omega_0\end{cases}$$

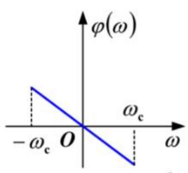
$$x(t)=x_p(t)w(t)$$

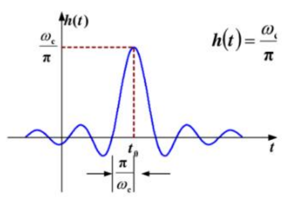
在频域，从频谱的样本重建连续频谱时的频域**时限内插**过程是以矩形窗的频谱作为内插函数实现的。

对带限信号在频域信号采样时，如果时域没有说明是时限，则不能保证频谱的样本可以恢复原信号。

理想低通滤波器（注意**相位的与频率成正比**）：







$$H(j\omega)=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

即

$$|H(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot \mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

3 常用结论

3.1 时域冲激串的傅里叶变换与频域冲激串的傅里叶逆变换：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right)$$

$$\mathrm{P}(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)\Leftrightarrow p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)$$

3.2 频域矩形脉冲（理想低通滤波器）的傅里叶逆变换：

理想低通滤波器的频域信号为：

$$\mathrm{H(j\omega)}=\begin{cases}e^{-j\omega t_0}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

对应的单位冲激响应/傅里叶逆变换为：

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot Sa\big(\omega_c(t-t_0)\big)$$

3.3 底边长 $2T$，高为 1 的三角形脉冲可以表示为两个矩形脉冲的卷积：

$$g(t)*g(t),\quad g(t)=\sqrt{1/\mathrm{T}}\cdot G_T(t)$$

由此可以推出，其频域信号是：

$$H(j\omega)=T\left[Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{T}\left[\frac{sin\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$

3.4 一些约定俗成的东西：

模拟信号（物理/真实信号）的时域是实函数，因此**频域一定是偶函数**，即便题目只花了半边频谱，也得意识到还有另一半。