清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.11.5

新内容~~~

第六弹：

离散傅里叶变换

（Motivation：

计算机也只能存储有限长的频谱信息）

序列DFT的定义

序列长度为**L**，求其DTFT谱上$[0,2\pi]$区间上均匀分布的**N**个谱值由$x(n), n=0,1,\cdots L-1$ **直接计算** $X(k), k=0,1,\cdots N-1$的过程：

$$\omega_k = 0 + k\cdot\frac{2\pi}{N} = 2k\pi/N \qquad k=0,1,\cdots N-1$$

$$X(\omega_k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\omega_k n}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$ **DFT**

为了表示方便（因为 $\omega_k = 2\pi k/N$ 只与k有关）

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad X(\omega_k)\rightarrow X(k)$$

→ **DFT** $$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}, k=0,1,\cdots N-1$$

N与L是什么关系呢？

有关系也没有关系！

从理论上讲，DFT变换中的N与L相互之间是可以独立确定的。

L是数据记录中时域样本的数目，它可能是无限的；而N则是对DTFT进行抽样时的频率点的数目。

通常，在讨论和使用DFT（特别是编程实现）时，常常看到**L = N**。既然L与N没有什么必然的联系，那么，**为什么要设它们相等？出于什么考虑？**

DFT的矩阵表示

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{L-1}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{DFT}}X=\begin{bmatrix}X_0\\X_1\\\vdots\\X_{N-1}\end{bmatrix}$$

时域L点　　　频域N点

$$\mathbf{X=Ax}$$

$$X_k=\sum_{n=0}^{L-1}A_{kn}x_n\ ,\quad k=0,1,\cdots,N-1\quad A_{kn}=W_N^{kn}$$

N与L什么关系？

序列补零与回绕

- N > L：频域点数N取得比序列的长度L要大
  - 在序列尾部补任意数目的零，新序列与旧序列的DFT结果一样

$$x = [x_0, x_1 \ldots\ldots, x_{L-1}]$$

$$x_D = [x_0, x_1 \ldots\ldots, x_{L-1}, \underbrace{0, 0 \ldots\ldots, 0}_{D个}]$$

先计算DTFT

$$X_D(\omega) = \sum_{n=0}^{L+D-1} x_D(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

再计算DFT

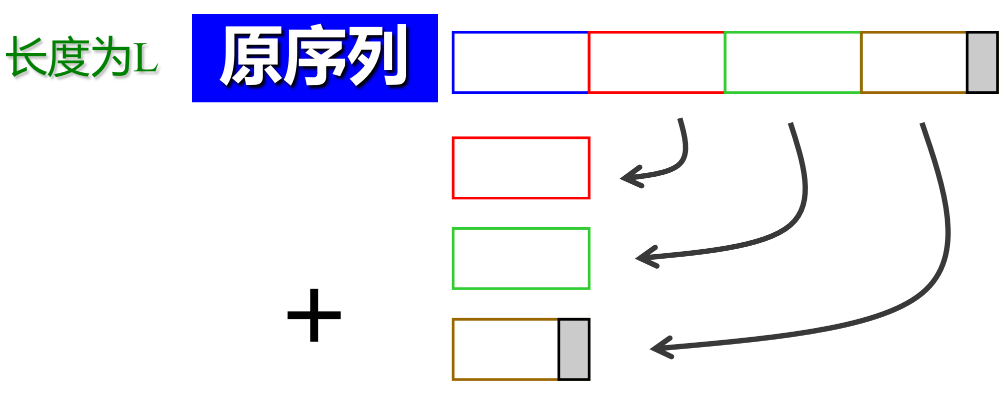
$$X_D(\omega_k) = X(\omega_k)$$

N与L什么关系？

序列补零与回绕

- ▶ N<L:　频域点数N取得比序列的长度L要小
  - 定义序列x(n)关于N的回绕序列（长度为N）为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mN+n), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$



长度为N **回绕序列**

if (N==L):

$$x(n) = \tilde{x}(n)$$

原序列与回绕序列DFT有何关系？

原序列与回绕序列DFT有何关系？

【课堂练习一】

证明 $x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ DFT结果是相等的

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \mathrm{DFT}[\tilde{x}(n)]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}$$

N与L什么关系？

【课堂练习一】

证明 $x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ DFT结果是相等的

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \mathrm{DFT}[\tilde{x}(n)]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}$$

原序列与回绕序列DFT有何关系？

$x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ DFT结果是相等的

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \mathrm{DFT}[\tilde{x}(n)]$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}$$

证明

$$A_{k,mN+n} = W_N^{k(mN+n)} = W_N^{kmN} W_N^{kn}$$

$$W_N^{kmN} = \left(W_N^N\right)^{km} = 1 \longrightarrow A_{k,mN+n} = W_N^{kn} = A_{kn}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = [\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B},\ldots]$$

A矩阵N×L，每N列组成一个N×N的子阵 B，**最后一个不足时补零**，则第m个子阵中的元素

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{B}\cdots]\mathbf{x} = (\mathbf{B}[\mathbf{I}_N,\mathbf{I}_N,\mathbf{I}_N,\cdots])\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{B}([\mathbf{I}_N,\mathbf{I}_N,\mathbf{I}_N,\cdots]\mathbf{x}) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}$$

N与L什么关系？

因此→(1)

多个完全不同的序列（长度和内容），只要它们的回绕序列相等，它们的DFT也就相等。

$x_1(n)$ $\mathbf{L_1}$　　$x_2(n)$ $\mathbf{L_2}$　　$x_3(n)$ $\mathbf{L_3}$　　……

$\tilde{x}(n)$ $\mathbf{N}$

DFT

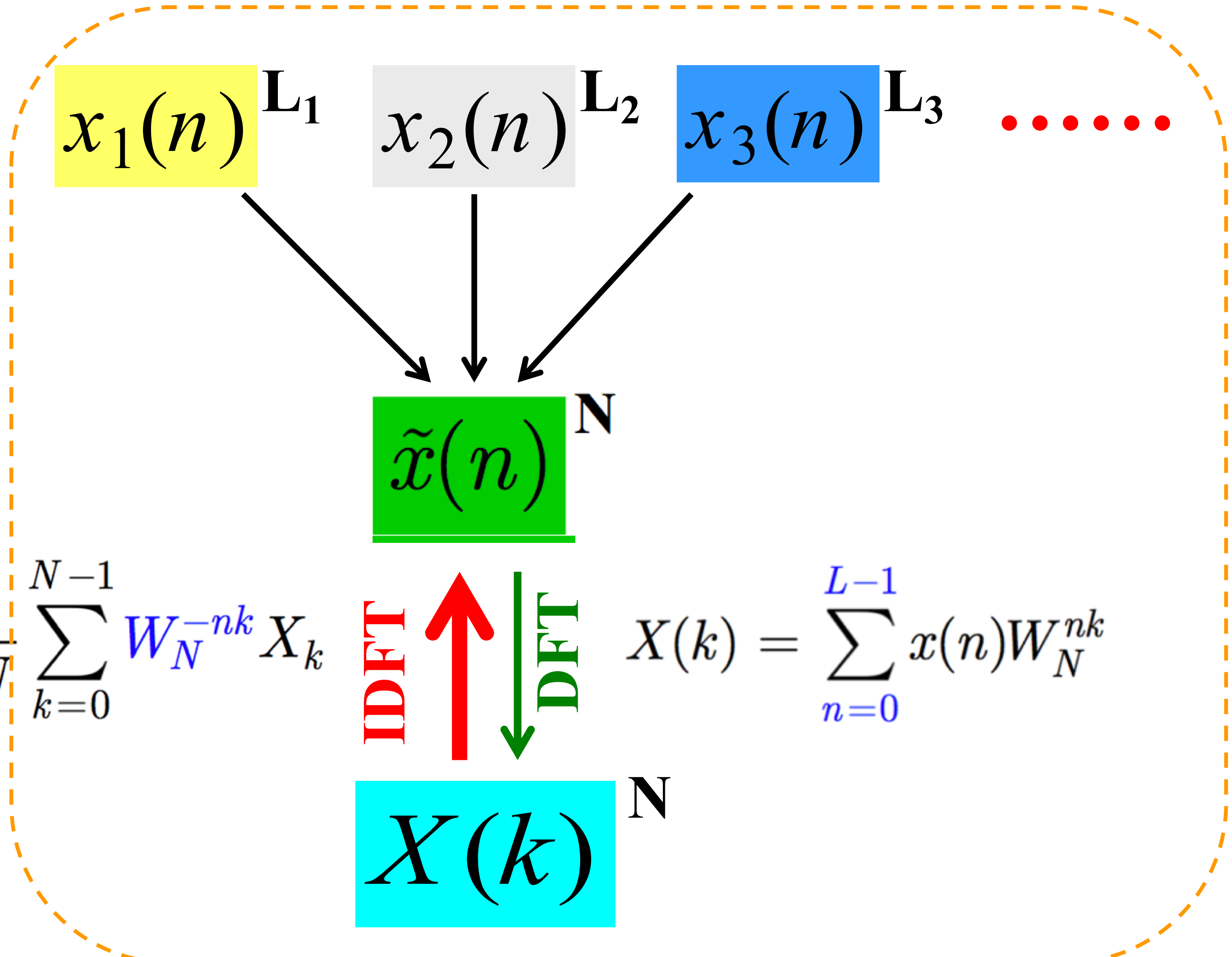
$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}$$

$X(k)$ $\mathbf{N}$

N与L什么关系？

因此→(2)

多个完全不同的序列，只要它们的回绕序列相等，它们的DFT也就相等。从IDFT只能得到惟一的一个序列，实际上对应所有序列的回绕序列



$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} X_k$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{nk}$$

N与L什么关系？

DFT、IDFT中序列长度与频域点数的关系

(1) L是实际待处理的数据长度，不可更改；而N则只是数字处理设备中的算法参数，由设计人员在使用时设定

x $\quad Length = L$

DFT

X $\quad Length = N$

折叠回绕

(2) 若N > L，则数值计算相当于在序列后面补了零，虽不影响DFT结果的正确性，但因补充的零值参与了DFT的计算，所以会浪费计算资源。

IDFT

DFT

结论：为方便，N = L

$\tilde{x}$ $\quad Length = N$

(3) 要让回绕序列等于原序列，需要N>=L 即，只有在N>=L时，才能从X(k)求出计算X(k)的序列x(n)来。

N与L什么关系？

DFT频谱的特点

- 离散的、周期的：
  - 显然的结论！因为它是对DTFT频谱的抽样
- 实序列的DFT频谱是共轭对称的：
  - 关于原点共轭对称 $X(-k) = X^*(k)$
  - 关于N/2点共轭对称（N是偶数）

【课堂练习2】

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right) = X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

主观题 0.5分

设置

- 离散的、周期的：
  - 显然的结论! 因为它是对DTFT频谱的抽样
- 实序列的DFT频谱是共轭对称的：
  - 关于原点共轭对称 $X(-k)=X^*(k)$
  - 关于N/2点共轭对称（N是偶数）

【课堂练习2】

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right)=X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

DFT变换的性质

▶ DFT是线性变换：

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] \quad Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)]$$

$$\mathrm{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k)$$

▶ 帕斯瓦尔定理

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2} \quad (\mathrm{L=N})$$

DFT变换的性质

▶ 奇偶虚实性

- 奇对称和偶对称序列:
  - 奇函数的DFT是奇函数;
  - 偶函数的DFT是偶函数。
- 实序列:
  - 实偶函数的DFT是实偶函数；实奇函数的DFT是虚奇函数。
  - 实函数的DFT，实部是偶函数，虚部是奇函数；模是偶函数，相位是奇函数。
- 虚序列:
  - 虚偶函数的DFT是虚偶函数；虚奇函数的DFT是实奇函数。
  - 虚函数的DFT，实部是奇函数，虚部是偶函数；模是偶函数，而相位是奇函数。

DFT变换的性质

► 反褶与共轭

时域	频域
反褶	反褶
共轭	共轭 + 反褶
共轭 + 反褶	共轭

上述这些性质可以直接利用DFT的定义（计算公式），结合复数关于共轭的性质即可得到证明。

DFT变换的性质

▶ 频移

$$X(\underline{k-l})=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{n(k-l)}=\sum_{n=0}^{N-1}\underline{\left[x(n)W_N^{-nl}\right]}W_N^{nk}\quad (\text{L=N})$$

▶ 对称性 $\mathrm{DFT}[X(n)]=Nx(-k)$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\longrightarrow Nx(-n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{nk}$$

$$\boxed{Nx(-k)=\sum_{n=0}^{N-1}X(n)W_N^{nk}=\mathrm{DFT}[X(n)]}$$

DFT变换的性质

▶ 时移特性： $x(n) \rightarrow X(k), \quad x(n-m) \rightarrow ?$

$$\mathrm{DTFT}[x(n-m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-jn\omega}$$

$$= e^{-jm\omega}X(\omega)$$

DFT是对DTFT频谱的抽样（一个周期上均匀分布的N个点）

$$\underline{\mathrm{DFT}[x(n-m)]} = e^{-jm\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=\omega_k} = \underline{W_N^{mk}X(k)}$$

公式回顾 $X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ $\quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

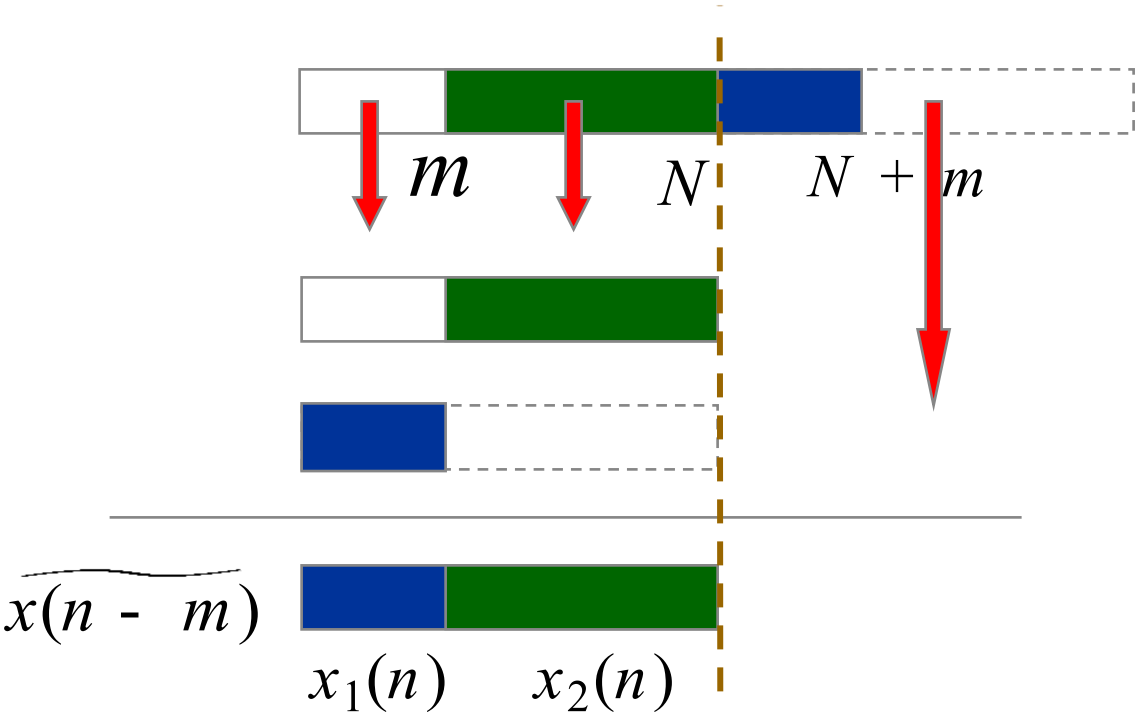
若不用DTFT与DFT的关系，如何推导此特性呢？

DFT变换的性质 – 时移特性

根据回绕序列的DFT与原序列DFT的关系来推导此特性

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = \mathrm{DFT}[\widetilde{x(n-m)}]$$

$$\widetilde{x(n-m)} = \begin{cases} x(n+N-m), & 0 \le n < m \\ x(n-m), & m \le n < N \end{cases}$$



$$\mathrm{DFT}[\widetilde{x(n-m)}] = \sum_{n=0}^{m-1} x(n+N-m) W_N^{nk} + \sum_{n=m}^{N-1} x(n-m) W_N^{nk}$$

【课堂练习3】化简得到

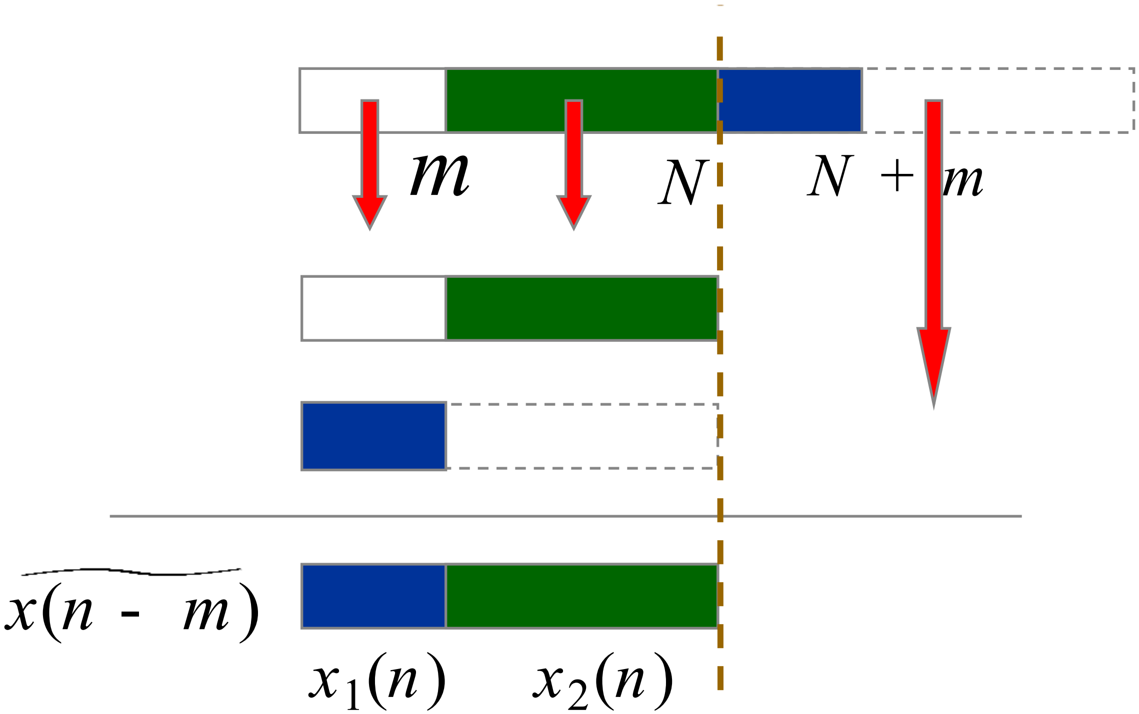
$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk} X(k)$$

主观题 0.5分

设置

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = \mathrm{DFT}[\widetilde{x(n-m)}]$$

$$\widetilde{x(n-m)} = \begin{cases} x(n+N-m), & 0 \le n < m \\ x(n-m), & m \le n < N \end{cases}$$



$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{m-1} \widetilde{x(n+N-m)} W_N^{nk} + \sum_{n=m}^{N-1} x(n-m) W_N^{nk}$$

【课堂练习3】化简得到

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk} X(k)$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

DFT变换的性质 – 时移特性

【课堂练习3】化简得到

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{m-1} x(\underline{n+N-m})W_N^{nk} + \sum_{n=m}^{N-1} x(\underline{n-m})W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n_1=N-m}^{N-1} \underbrace{x(n_1)W_N^{(n_1-N+m)k}}_{n+N-m=n_1} + \sum_{n_2=0}^{N-m-1} \underbrace{x(n_2)W_N^{(n_2+m)k}}_{n-m=n_2}$$

$$= \sum_{n=N-m}^{N-1} x(n)W_N^{(n-N+m)k} + \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)W_N^{(n+m)k}$$

$$= W_N^{mk}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$= W_N^{mk}X(k)$$

$$\boxed{\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)}$$

DFT变换的性质 – 卷积定理

▶ 时域卷积 $x(n) \Leftrightarrow X(k), \quad y(n) \Leftrightarrow Y(k)$

- 序列x(n)与y(n)的卷积满足下面的关系

$$\mathrm{DFT}\left[x(n) * y(n)\right] = X(k) \cdot Y(k)$$

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

$$\mathrm{DFT}\left[x(n) * y(n)\right] = \mathrm{DFT}\left[x(n)\right] \cdot \mathrm{DFT}\left[y(n)\right]$$

时域卷积➔频域乘积

频域乘积➔时域卷积？

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\mathrm{IDFT}\left[\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]\cdot\mathrm{DFT}\left[y(n)\right]\right]$$

$$=\ \mathrm{IDFT}\ \left[X(k)\cdot Y(k)\right]=?$$

FT	$\Leftrightarrow$	IFT	——对应
DTFT	$\Leftrightarrow$	IDTFT	——对应
DFT	$\Leftrightarrow$	IDFT	???

DFT $X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk},k=0,1,\cdots N-1$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-nk}X_k$$

逆变换IDFT

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\mathrm{IDFT}\left[\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]\cdot\mathrm{DFT}\left[y(n)\right]\right]$$

$$=\ \mathrm{IDFT}\ \left[X(k)\cdot Y(k)\right]=?$$

$$\boxed{\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)]=X(k)\cdot Y(k)}$$

$$\boxed{\mathrm{IDFT}[Z(k)]=\widetilde{z(n)}}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{IDFT}[X(k)\cdot Y(k)]=\underline{\widetilde{x(n)*y(n)}}$$

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\mathrm{IDFT}\left[\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]\cdot\mathrm{DFT}\left[y(n)\right]\right]$$

$$=\ \mathrm{IDFT}\ \left[X(k)\cdot Y(k)\right]=?$$

$$\boxed{\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)]=X(k)\cdot Y(k)}$$

$$\mathrm{IDFT}[X(k)\cdot Y(k)]=\underline{x(n)*y(n)}$$

能不能直接用信号来表示结果呢?
或:如何计算卷积结果的回绕呢?

DFT变换的性质 – 卷积定理

【课堂练习4】卷积的回绕不好算？那么试试直接带IDFT公式

$$\mathrm{IDFT}\left[\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]\cdot\mathrm{DFT}\left[y(n)\right]\right]$$
$$=\ \mathrm{IDFT}\ \left[X(k)\cdot Y(k)\right]=?$$

主观题 0.5分

设置

【课堂练习4】卷积的回绕不好算？那么试试直接带IDFT公式

$$\mathrm{IDFT}\left[\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]\cdot \mathrm{DFT}\left[y(n)\right]\right]$$

$$= \mathrm{IDFT}\left[X(k)\cdot Y(k)\right] = ?$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\mathrm{IDFT}[X(k)Y(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)W_N^{-nk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mk}Y(k)W_N^{-nk}$$

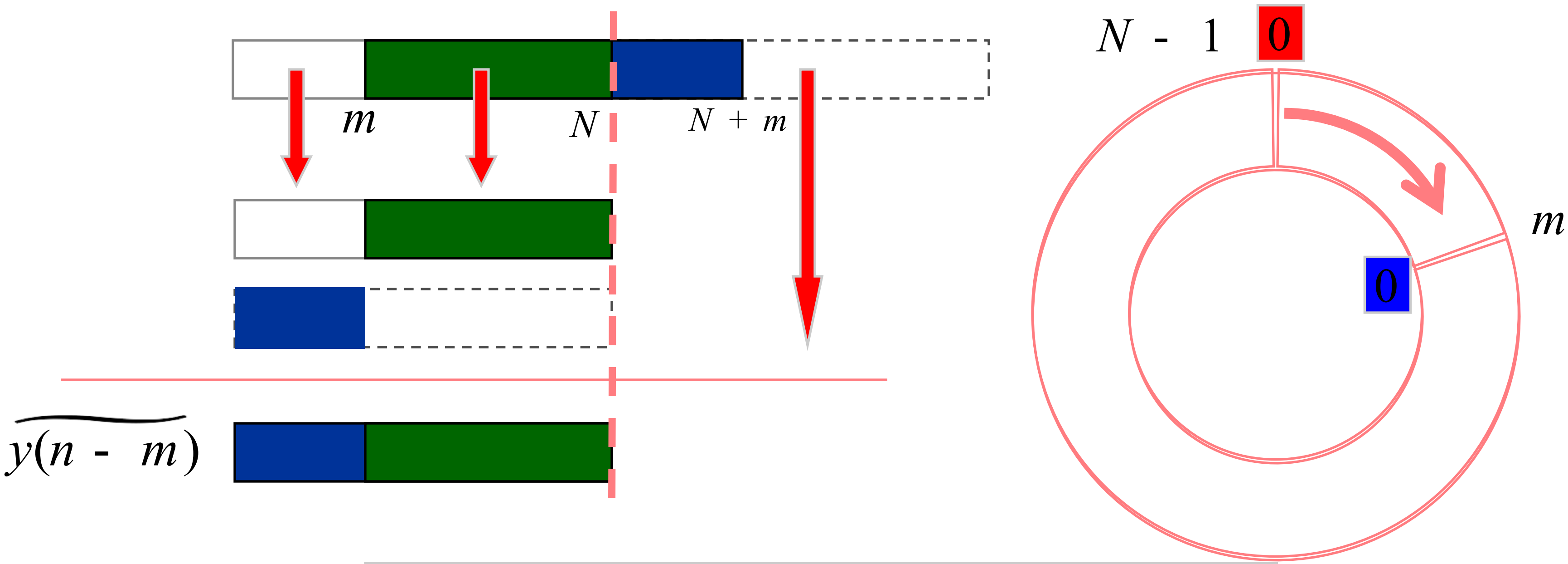
$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{mk}W_N^{-nk}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\left[\mathrm{IDFT}\left[Y(k)W_N^{mk}\right]\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\overline{y(n-m)}$$

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\widetilde{y(n-m)} = \begin{cases} y(n+N-m), & 0 \le n < m \\ y(n-m), & m \le n < N \end{cases}$$



回绕一个移位序列相当于循环移位

$$\widetilde{y(n-m)} = y((n-m))_N$$

DFT变换的性质 – 卷积定理

$$\mathrm{IDFT}[X(k)Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

反褶→循环移位→相乘→相加

也是一种卷积! 为了突出“新”卷积与“旧”卷积的不同，同时也为了突出它们之间的相同，称过去传统的卷积为线卷积，而称此“新卷积”为序列的圆周卷积，简称圆卷积。

$$\Longrightarrow x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))_N$$

编程实现容易

▶ **频域卷积**

$$\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega') X_2(\omega-\omega') d\omega'$$

$$\mathrm{DFT}[x(n)\bullet y(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$$

FT、DTFT、DFT变换的性质

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$	$\mathrm{DTFT}[X(n)] = 2\pi x(-\omega)$	$\mathrm{DFT}[X(n)] = Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega-\omega_0)$	$\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)] = X(k)\cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)\bullet y(n)] = \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$

作业

1、 求$x(n)=\{1,2,3,4\}$的4点DFT和8点DFT。

2、 求$x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)$的N点DFT，其中$0 \le n \le N-1$， $0 < m < N$且$m \in Z$ 。

3、 设信号$x(t)$的理想抽样值序列为$x(n)$，数目（长度）为L，将这L个元素每N个一组，其中，$N \le L = rN + s$， $r \ge 1, s \in [0..N)$，不足部分补零，得到$r+1$组抽样值序列分别为：

$$x_m(n) = x(mN+n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1, \quad m = 0, 1, \cdots, r$$

将上述各组序列按如下方式相加，得到一个N点有限长序列

$$\widetilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{r} x_m(n) = \sum_{m=0}^{r} x(mN+n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

设$\omega_k = k2\pi/N$，则试证明下列等式成立：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}(n) e^{-jn\omega_k} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-jn\omega_k}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

4、 设有限长序列$x(n)$长度为N，它的N点DFT结果为$X(k)$，这里N是偶数。序列$g(n)$是$x(n)$中下标为偶数的元素组成的子序列，$h(n)$是$x(n)$中下标为奇数的元素组成的子序列，它们的长度是$N/2$，各自对应的$N/2$点DFT结果分别为$G(k)$和$H(k)$。试根据DFT的计算公式（定义）证明：

$$X(\tfrac{N}{2}+k) = G(k) - W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, \cdots, N/2-1$$

结　束