清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

2020.10.22

复习：采样与采样定理

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系

我们最关心什么？

- 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息?
  - 答：频带受限信号 符合抽样定理限定条件

- 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号?

采样与采样定理

内插：由样本值重建某一函数的过程。

- **理想内插:**以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa函数形态）作为内插函数

设 $h(t)$为理想低通滤波器的单位冲激响应，则

$$x(t)=x_p(t)*h(t)=\sum_{n-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$$

函数与单位冲激函数的卷积

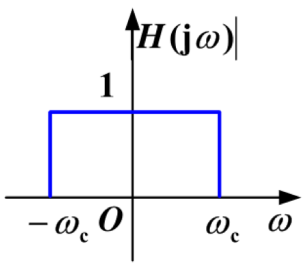
$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

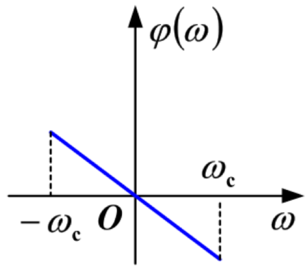
一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数**平移**到单位冲激函数的冲激点位置。

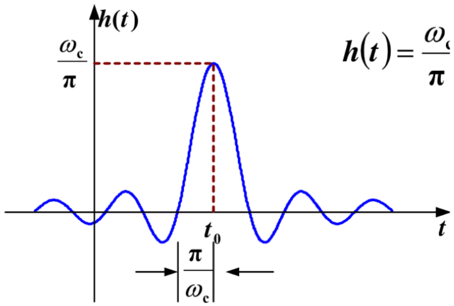
【**Tips**】理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应是Sa函数形态

理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应是Sa函数形态

理想低通滤波器







$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

即

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

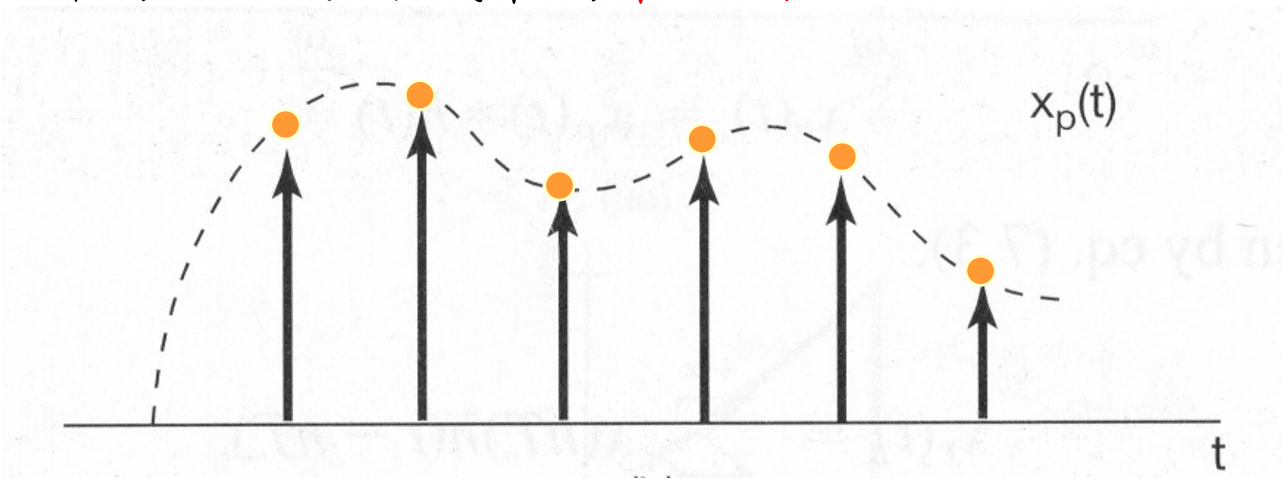
$$\varphi(\omega)=-\omega t_0$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot \mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

理想低通滤波器的单位冲激响应$h(t)$，即为其傅立叶逆变换

采样与采样定理

这种内插称为时域中的**带限内插**。

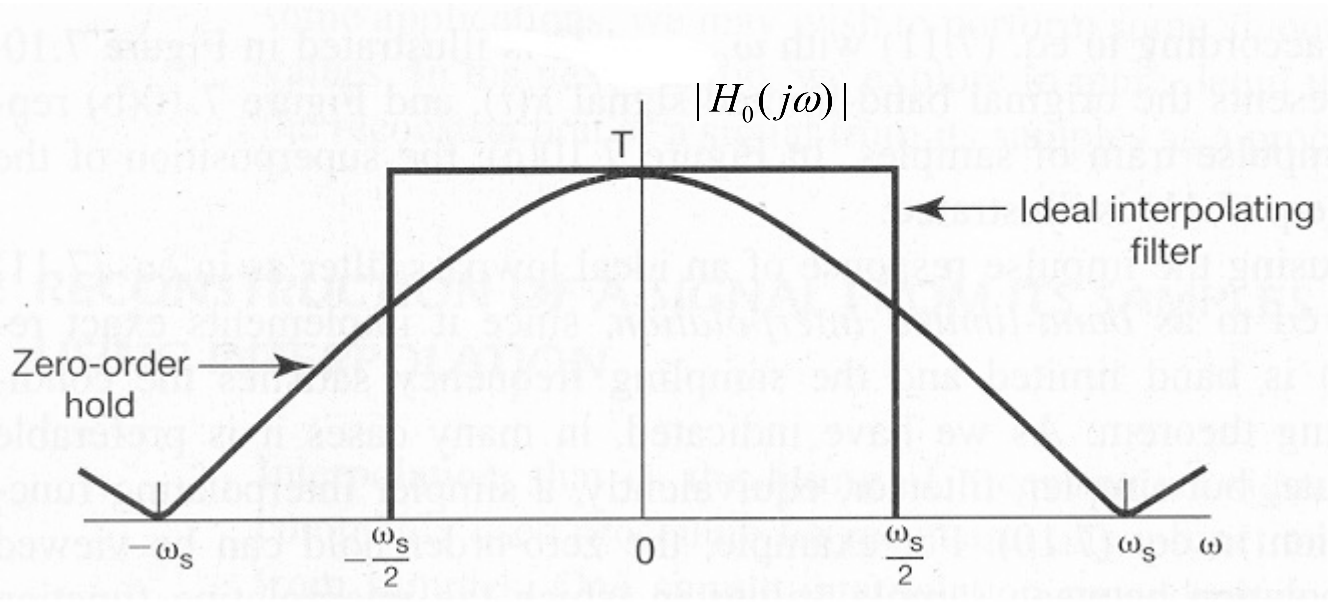


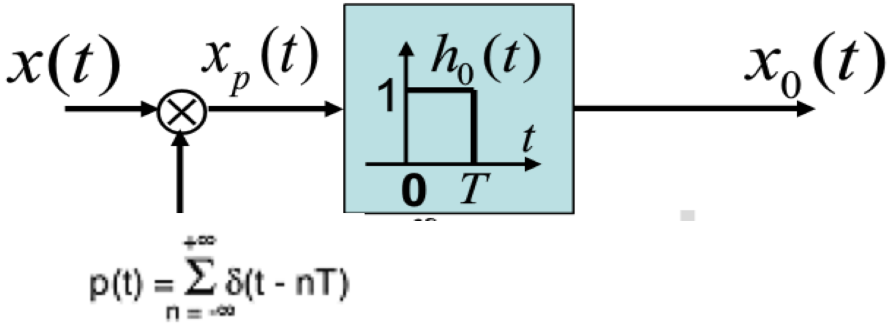
如何恢复原始的时间连续信号？

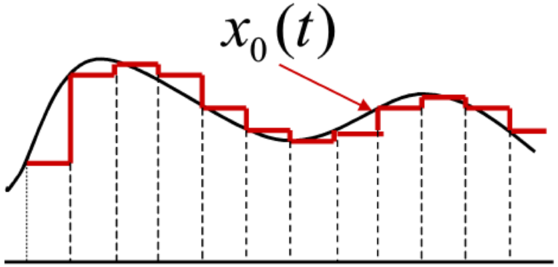
用滤波器函数对信号抽样值进行内插来重建模拟信号，相当于滤波器的冲击响应与信号值为权重的脉冲串的卷积。

- **零阶保持内插:**

零阶保持内插的内插函数 $h_0(t)$ 是矩形脉冲

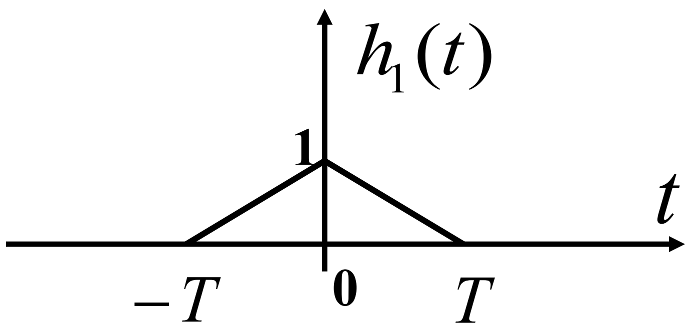


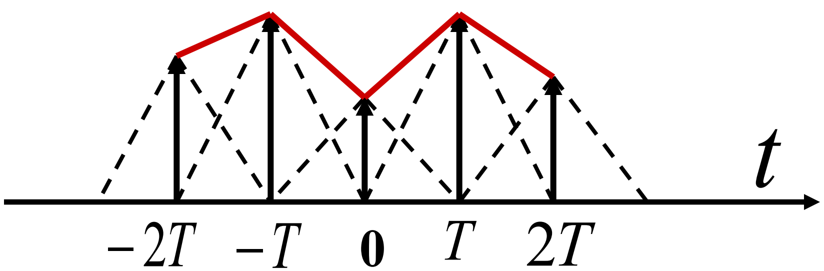




一阶保持内插(线性内插):

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。

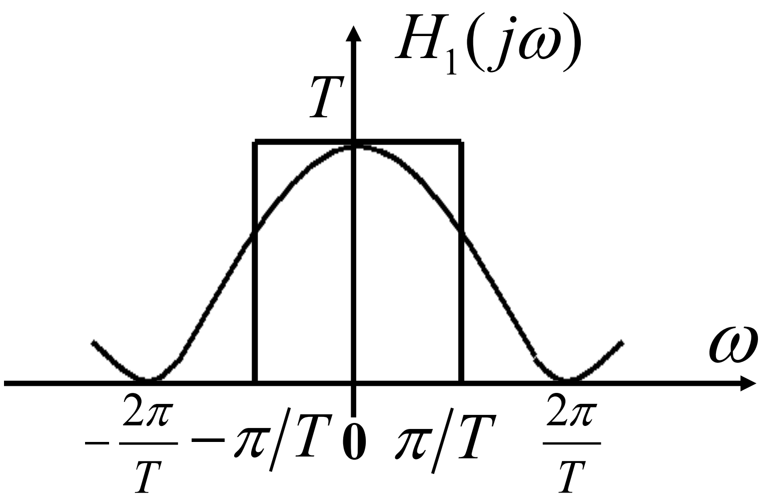




【课堂练习1】

$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

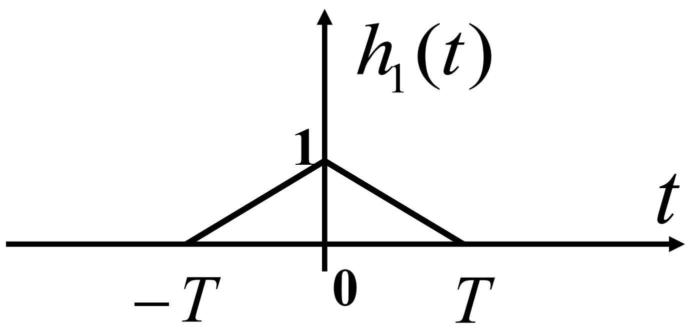
$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$

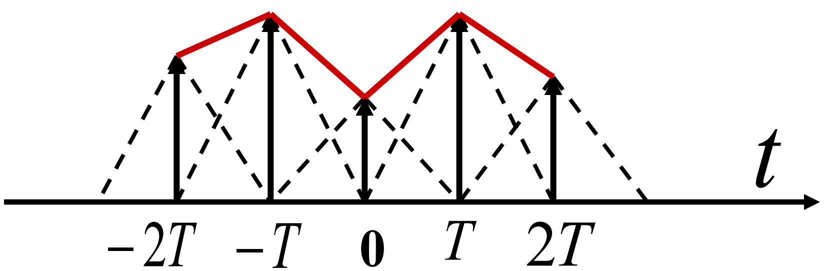


Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

一阶保持内插(线性内插):

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。



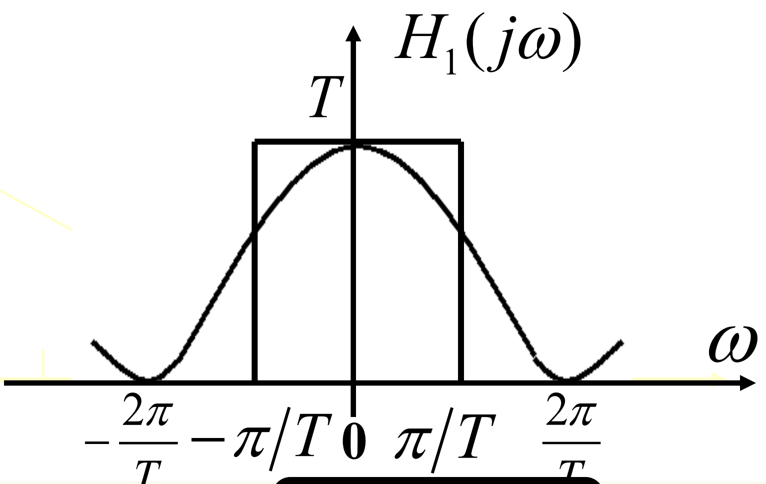


【课堂练习1】

$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$

Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

- **欠采样：频谱混叠**

如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x(t)$ 的频谱周期延拓时，出现**频谱混叠**的现象。

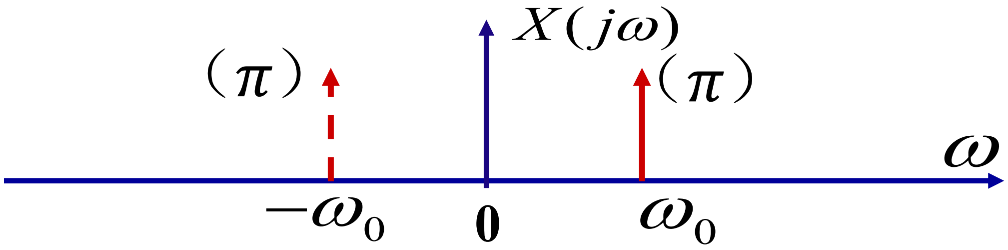
说明点一：频谱混叠的情况下时域信号变了，但抽样点处取值不变

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值，即 $x_r(nT)=x(nT)$

【课堂练习2】采样与采样定理

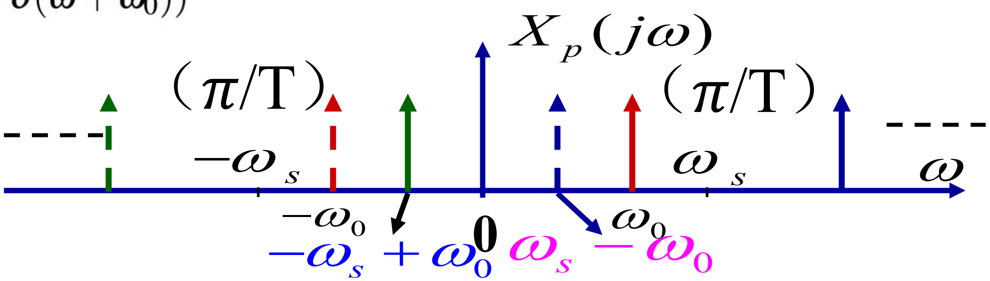
$x(t)=\cos\omega_0 t$

$x(t)$的频谱$X(j\omega)$



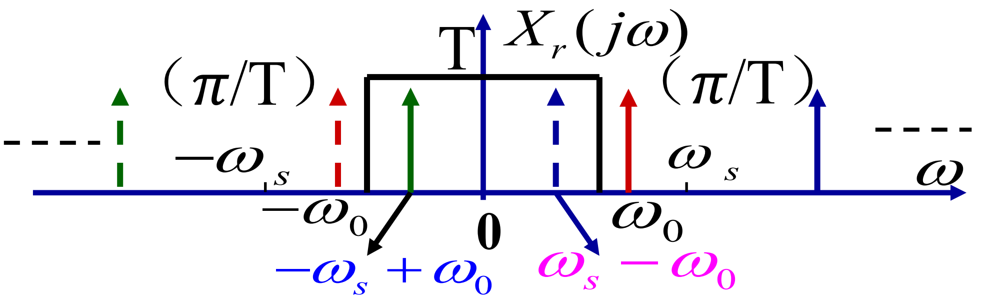
$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\mathscr{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$

当 $\omega_0<\omega_s<2\omega_0$
产生频谱混叠。



恢复的信号为

$x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$



当 $t=nT$ 时有

$$
\begin{aligned}
x_r(nT) &= \cos(\omega_s-\omega_0)nT \\
&= \cos\omega_s nT\cdot\cos\omega_0 nT + \sin\omega_s nT\cdot\sin\omega_0 nT \\
&= \cos\omega_0 nT = x(nT)
\end{aligned}
$$

$\omega_s = 2\pi/T$

作业1：

参照课堂练习2的图例，画图以及文字说明：$x(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)$欠采样时，恢复的信号不仅频率降低，而且相位相反。

注：1、$\omega_0<\omega_s<2\omega_0$ ； 2、理想低通滤波器的带宽ω_c， 满足$\omega_s-\omega_0<\omega_c<\omega_0$ 。

说明点二：工程应用时，如果采样频率 $\omega_s = 2\omega_M$ 将不足以从样本恢复原信号

例如 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 在 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 2\omega_0$ 时

$$x(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t \sin\varphi$$

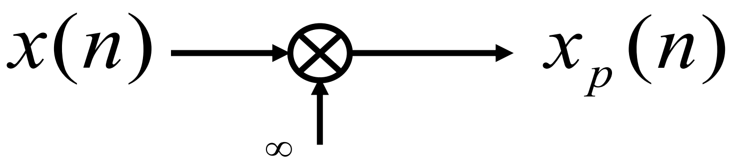
$$x(nT) = \cos\varphi \cos\omega_0 nT$$

这和对 $x_1(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t$ 采样的结果一样。

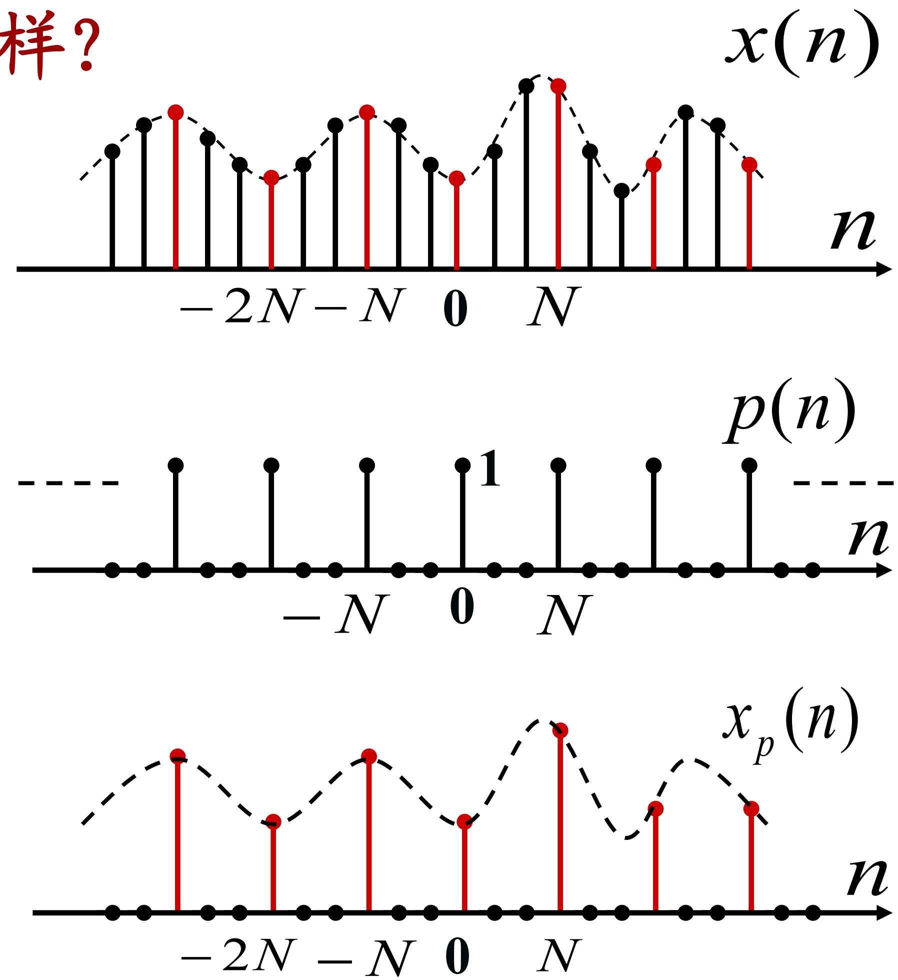
从用样本代替信号的角度出发，出现欠采样的情况是工程应用中不希望的。

采样与采样定理

说明点三：采样之后又采样?



$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$



$$x_p(n)=x(n)\cdot p(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\delta(n-kN)$$

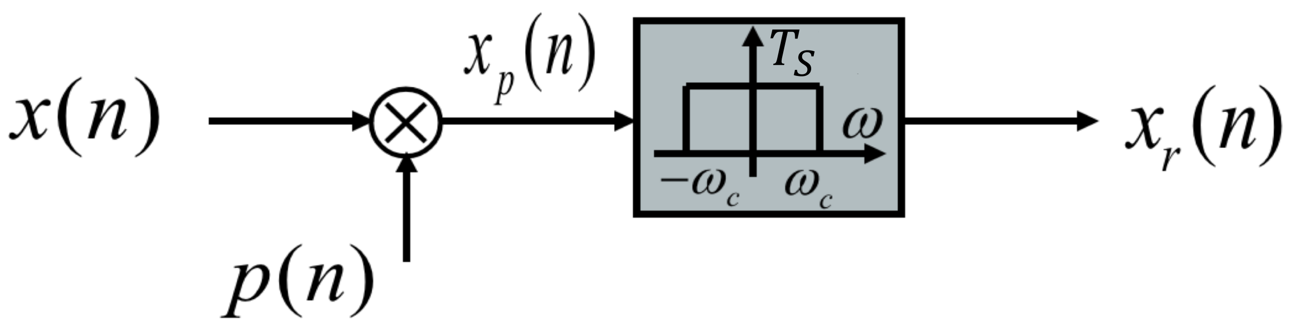
小结：采样与采样定理

在时域，对离散时间信号以 T_S 为间隔采样；在频域，**信号的频谱就是离散时间信号频谱一个周期以$\frac{2\pi}{T_S}$为间隔周期性延拓。**

要使 $x_p(n)$ 能恢复成 $x(n)$，则频谱在周期性延拓时不能发生混叠。为此要求：

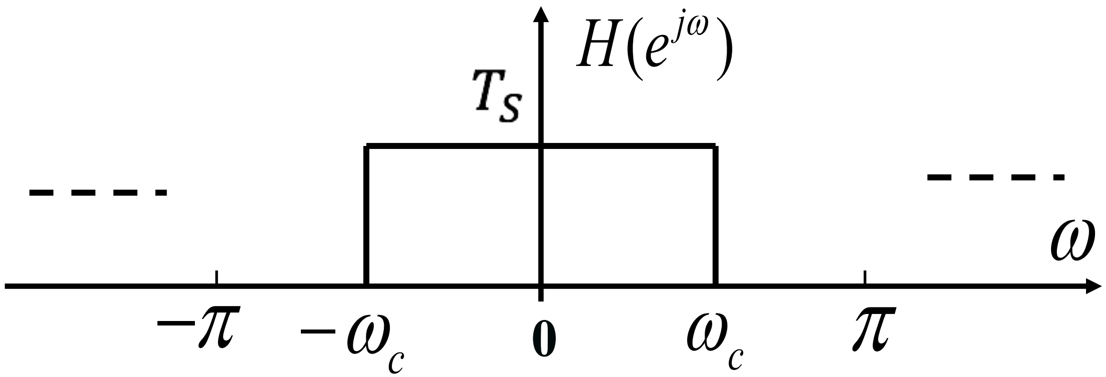
1. $x(n)$频谱的一个周期带限于ω_M

2. $\omega_s = \frac{2\pi}{T_S} > 2\omega_M$



小结：采样与采样定理

此时可以通过离散时间理想低通滤波器实现对信号 $x(n)$ 的恢复。理想低通的通带增益为T_S，截止频率满足：$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 。

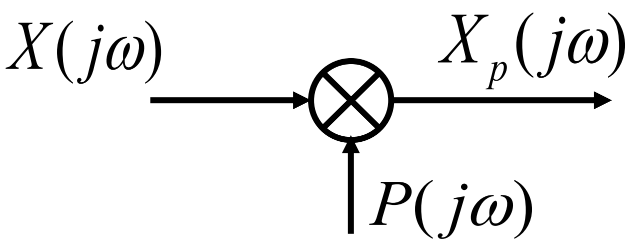


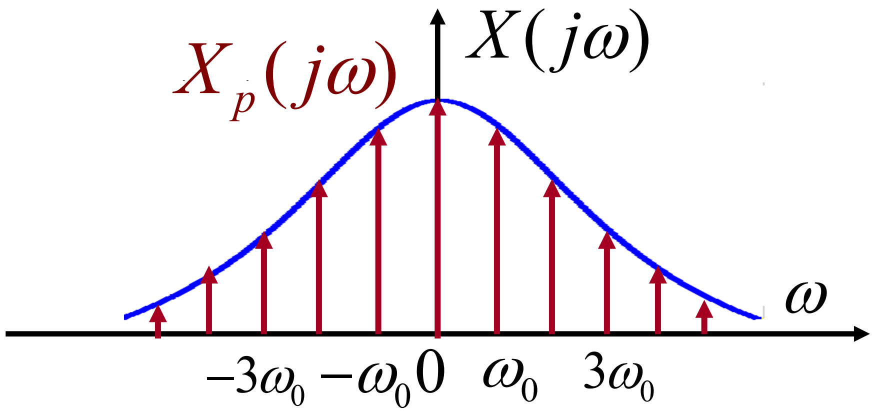
恢复 $x(n)$ 的过程也是一种带限内插过程，其内插函数为理想低通的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

拓展：采样与采样定理

[很有趣的逆向思维] 频域采样？

采样的本质是将连续变量的函数离散化。因此，在频域也可以对连续的频谱进行采样。这一过程与时域采样是完全对偶的。





$$P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

采样与采样定理

在频域有：
$$P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$X_p(j\omega)=X(j\omega)P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)$$

在时域有：
$$x_p(t)=x(t)*p(t)$$

（背下来）
$$p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k)$$

参考：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$p(t)\leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}n)$$

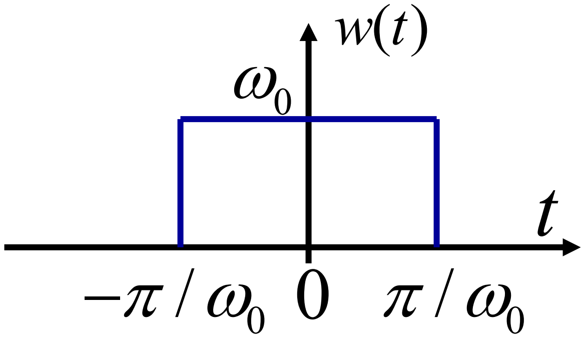
$$\therefore\quad x_p(t)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-\frac{2\pi}{\omega_0}k)$$

这表明：**对信号的频谱在频域理想采样，相当于在时域将信号以** $2\pi/\omega_0$ **为周期无限延拓。**

采样与采样定理

此时，可以通过矩形窗从周期性延拓的信号中截取出原信号。

$$w(t)=\begin{cases}\omega_0 & |t|\le \pi/\omega_0\\ 0 & |t|>\pi/\omega_0\end{cases}$$



$$x(t)=x_p(t)w(t)$$

在频域，从频谱的样本重建连续频谱时的频域时限内插过程是以矩形窗的频谱作为内插函数实现的。

采样与采样定理

在频域有： $X(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}X_p(j\omega)*W(j\omega)$

$$W(j\omega)=2\pi\,\mathrm{sinc}(\omega/\omega_0)$$ ——内插函数

$$\therefore\quad X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-k\omega_0}{\omega_0}\right)$$

应该指出：

带限和时限没有必然的逻辑联系。请注意时域采样定理应用条件中的带限要求。频域采样同理。

因此，对带限信号在频域采样时，如果时域没有说明是时限，则不能保证频谱的样本可以恢复原信号。

现在的状态：

让我们再停一下

梳理一下目前我们都学（会）了什么？

我已经是信号大拿了？

第三章　离散时间信号的傅里叶分析

- 离散时间傅里叶变换 DTFT
  - 与连续时间傅里叶变换的关系
  - 性质
- 离散傅里叶变换 DFT
  - 定义
  - 性质
- 离散傅里叶变换的快速算法 FFT
  - 原理
  - 流程
  - 应用

离散时间信号的傅里叶分析

- 实际信号的特点：
  - 时域：连续时间信号;持续时间较长
  - 频域：频谱是连续的

- 数字处理设备（计算机）的特点：
  - 存储空间有限 --- 只能存储有限多的数据
    - 离散的时间点
    - 有限长的时间范围
  - 表示空间有限 --- 只能表示有限多的数值
    - 取值在一定精度内
    - 取值在一定范围内

离散时间信号的傅里叶分析

- 实际信号的特点：
  - 时域：连续时间信号;持续时间较长
  - 频域：频谱是连续的
- 数字处理设备（计算机）的特点：
  - 存储空间有限 --- 只能存储有限多的数据
    - 离散的时间点
    - 有限长的时间范围
  - 表示空间有限 --- 只能表示有限多的数值
    - 取值在一定精度内
    - 取值在一定范围内

要解决的问题（面临的矛盾 ）1

- 在时域如何对信号进行离散化？

要求保证信号的**信息不受损**！

- 信息不受损 ←→ 可以恢复原信号
- 理论问题已在第二章解决
- 乘以冲激串信号，在时域进行理想抽样
- 要求抽样过程满足抽样定理
  - （1）信号频带宽度有限；
  - （2）抽样频率是信号最高频率的两倍

矛盾1在 Chapter 2.3.1 已解决

要解决的问题（面临的矛盾 ） 2

► 如何从抽样信号的频谱**恢复**原信号的频谱？

- **抽样信号频谱与原信号频谱是什么关系？**
- 理论上如何恢复？
- 工程上如何实现？

矛盾2在 Chapter 2.3.2 已解决

要解决的问题（面临的矛盾 ）3

- 抽样信号的频谱如何计算？
  - 得到抽样信号后，如何计算其频谱？
    - 输入：抽样信号（序列）
    - 输出：抽样信号的频谱
  - 在工程实现时，计算机接受的输入是一系列数值（通常存储在数组中）

X1	X2	X3	X4	X5	X6

………

对于没有解析式的信号（如某些实际观测得到物理量形成的信号），无法通过频谱的解析式得到信号的连续谱。

要解决的问题（面临的矛盾 ） 4

► 截取一段信号进行频谱分析时，信号的频谱与原频谱相比会发生什么变化？

- 为什么要对时域信号的一小段进行分析？
  - 信号的持续时间通常会超出设备的处理能力

Q1 截取信号会不会影响对信号的分析？

Q2 截取信号对原频谱有何影响？

要解决的问题（面临的矛盾 ） 5

- 如何存储离散时间信号的频谱？
  - 频谱是连续的周期函数（谱）
  - 1.只能存储有限长度的频谱 [有限范围]
    - 可以只保存一个周期的频谱信息
  - 2.只能存储有限数目的频谱 [有限数目]
    - 离散频率点处的频谱值
- 如何从有限的离散频谱恢复出抽样信号？
  - 离散频谱值是有限的
  - 恢复抽样信号的计算公式

满足绿色条件的已定性解决

要解决的问题（面临的矛盾 ）6

► 如何编程实现（如何进行快速计算）？

原因：如果按定义来直接实现，则计算量太大，难以推广，不能广泛应用

包含两个子问题：

- （1）如何由离散信号计算离散频谱？
- （2）如何由离散频谱恢复离散信号？

先来解决矛盾3：时域信号无数学表达式

抽样信号 $$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

频谱函数 $$\hat{F}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(\omega-m\omega_s)$$

（1）如果抽样过程满足抽样定理的要求，则在奈奎斯特区间中，下式成立：

$$T\hat{F}(\omega)=F(\omega),\quad \boxed{-\omega_s/2\le\omega\le\omega_s/2}$$

（2）若不满足抽样定理呢？→

先来解决矛盾3：时域信号无数学表达式

当混叠发生时，在 $\omega \in \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right]$ 内混有其他部分“扩展”过来频谱“密度”分布，即在上述区间中：

$$T\hat{F}(\omega) = F(\omega) + \boxed{F(\omega - \omega_s) + F(\omega - 2\omega_s) + \cdots}$$

$$F(\omega) \approx T\hat{F}(\omega)$$

先来解决矛盾3：离散时间傅里叶变换的定义

基于FT公式

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

关于离散时间傅里叶变换的几点说明

- 仅使用抽样值的序列f(nT)，即可计算出理想抽样信号的频谱密度函数
- 从序列值求出的频谱密度函数仍然是周期函数

先来解决矛盾3：离散时间傅里叶变换的定义

- 逆变换。视下式为FS展开式（即IFS）

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

其中核函数是$\{e^{-jn\omega T}\}$，则可用FS计算展开系数：

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)\boxed{e^{jn\omega T}}d\omega$$

采样时间间隔是常量

对DTFT进行**频率归一化（1）**

$$F(\omega) = T\hat{F}(\omega) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT} \qquad \omega \in \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right]$$

为方便起见，把采样频率“归一”，即将具体的物理时间抽象为单位时间，在数学上用1表示它 ➔

T（秒）**物理**时间 →

1（？）**逻辑**时间、**数字**时间

称时间间隔归一的离散信号（序列）为

“数字信号”

称数字信号（序列）DTFT归一化频谱为

“数字频谱”

数字信号 与 数字频谱

DTFT

$$X(\omega) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

参考：

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-j\omega nT}$$

IDTFT

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

参考：

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)\boxed{e^{jn\omega T}}d\omega$$

模拟频率与数字频率

在第二章中，CTFT得到的是模拟频率Ω
在DTFT引入归一化时间后，变换结果是数字频率ω

序列及其数字频谱的概念： $x(n) \Leftrightarrow X(\omega)$

模拟频率的奈奎斯特区间：

$$\left[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}\right]$$

数字频率的奈奎斯特区间：

$$-\pi, \pi$$

关系：

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s = \Omega / f_s \qquad \Omega = \omega f_s$$

进行**频率归一化**的好处

- 频谱函数主周期内的形状，如果不考虑高低变化的话，则形状与采样间隔无关。

- 采样频率归一化使频谱重复间隔也会统一成 2π。考虑到离散信号频谱总是周期的函数，所以研究时可以对采样信号的实际频谱的周期进行抽象化的处理。抽象为2π是很方便的。

- 在计算机程序中，计算过程可以只考虑数值表示，而不用考虑信号样本间的真实时间间隔 。从算法效果上看，这不仅不会影响结果的正确性，反而还会提高算法应用的方便性。

DTFT的性质

- DTFT频谱密度函数是周期函数（这是显然的）

$$X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$$

- DTFT是线性变换

$$\mathrm{DTFT}\left[\sum_k a_k \cdot x_k(n)\right] = \sum_k a_k \cdot \mathrm{DTFT}[x_k(n)]$$

信号线性组合的DTFT，等于各信号DTFT的线性组合

DTFT的性质

- 平移特性
  - 时域平移 $\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
  - 频域平移 $\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$
- 反褶、共轭
  - 反褶 $\mathrm{DTFT}[x(-n)] = X(-\omega)$
  - 共轭 $\mathrm{DTFT}[x^*(n)] = X^*(-\omega)$

DTFT的性质

- 时域扩展
  - 时域扩展的定义如下

$$x_{(a)}(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{a}\right), & \frac{n}{a} \in Z \\ 0, & others \end{cases} \quad (a \in Z, \quad a \neq 0)$$

  - 相应的DTFT：

$$\mathrm{DTFT}[x_{(a)}(n)] = X(a\omega) \quad a \in Z, \ a \neq 0$$

DTFT的性质

- ▶ 频域微分(时域线性加权)

$$\mathrm{DTFT}\,[nx(n)] = j\left[\frac{d}{d\omega}X(\omega)\right]$$

- ▶ 卷积定理
  - 时域卷积

$$\mathrm{DTFT}[\,x_1(n) * x_2(n)\,] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$$

  - 频域卷积（注意：频谱是周期的）

能计算频域中频谱密度函数的卷积吗？？？

DTFT的性质

- 卷积定理
  - 频域卷积

$$\mathrm{DTFT}\left[x_1(n)\cdot x_2(n)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$$

圆周卷积：积分限制在一个周期内

针对周期函数的“卷积”定义

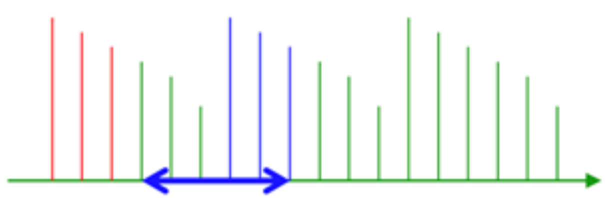
$$x(n)\cdot w(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega')W(\omega-\omega')d\omega'$$

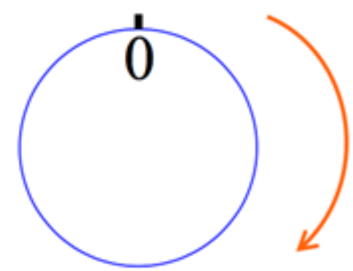
- 新定义的名字——圆（周）卷积

$(-\pi,\pi)$ －个圆　　$(0\sim N-1)$ －个周期

称上述卷积为“圆周卷积”，简称圆卷积

想像周期信号y(n)移位后成为y(n-m)，因其是周期的，移出后有移进，从另一视角看，象是在圆周上进行移动故称为“圆（周）卷积”





针对周期函数的“卷积”定义

- 周期为N的离散信号x(n), y(n)卷积

$$x(n)\otimes y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y(n-m)$$

- 周期为T的连续信号x(t), y(t)卷积

$$x(t)\otimes y(t)=\int_T x(t')y(t-t')dt'$$

- 在频谱密度函数上的应用

$$X(\omega)\otimes W(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega')W(\omega-\omega')d\omega'$$

后续章节介绍DFT时，还会涉及此概念

DTFT的性质

▶ 帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X_\omega(\omega)|^2\,d\omega$$

这个定理也被称为能量定理。

作业2

1. 已知$f(t)$的频谱函数为$F(\omega)$, 试证明:

$$T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi/T$。

2. 已知$x(n)$的DTFT为$X(\omega)$，试求下列各序列的DTFT:

   (a) $x(n) * x^*(-n)$

   (b) $x(2n+1)$

   (c) $x(n) - x(n-2)$

   (d) $x(n) * x(n-1)$

3. 若$X(\omega)$是$x(n)$的DTFT，则

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的DTFT为$Y(\omega) = X(L\omega)$。

结 束

理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

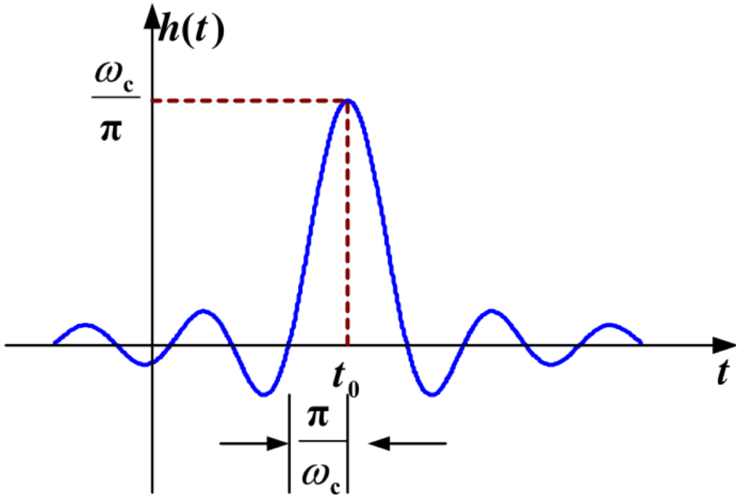
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c\left(t-t_0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\left(t-t_0\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(t-t_0\right)}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}\right]$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c\left(t-t_0\right)}{\omega_c\left(t-t_0\right)}=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c\left(t-t_0\right)\right]$$

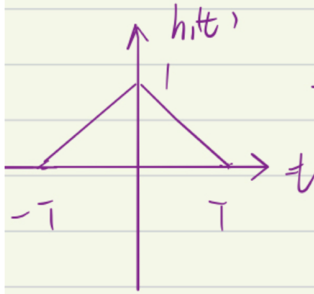


复习参考2：课堂练习1

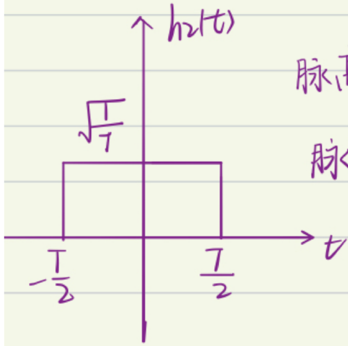
Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

$$H_1(j\omega) = T\left[\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



三角形脉冲.



脉高为$\sqrt{T}$

脉宽为T 的矩形脉冲

$E=\sqrt{T}$

$\tau=T$

$$h_1(t) = h_2(t) * h_2(t) \Longleftrightarrow \mathcal{F}[h_1(t)] = \mathcal{F}[h_2(t)]\,\mathcal{F}[h_2(t)]$$

$$\mathcal{F}[h_2(t)] = E\tau\, Sa\left(\frac{T}{2}w\right) = \sqrt{T}\, Sa\left(\frac{T}{2}w\right)$$

$$\therefore \mathcal{F}[h_1(t)] = T\, Sa^2\left(\frac{T}{2}w\right)$$