4.1 滤波器

> 杜雨峰 计84
>
> 这节主要是（滤波器和）（离散时间）系统的概念和表示方式。

系统是对函数做变换的一个整体，输入函数、输出函数。我们关注LTI，即线性时不变系统。可用的系统还需要满足因果律和稳定性(BIBO)。

系统有五种描述方法，这节讲了其中的四种（差分方程、流图、频率响应、冲激响应）。五种方法的变换如下图。

差分方程和**流图**是系统的直观展现方式。流图概括了系统的具体结构，可以列方程转化为差分方程；差分方程可以按基本方法转换得到流图。

系统的响应可以通过差分方程求出。系统响应可以分解为零输入响应和零状态响应。

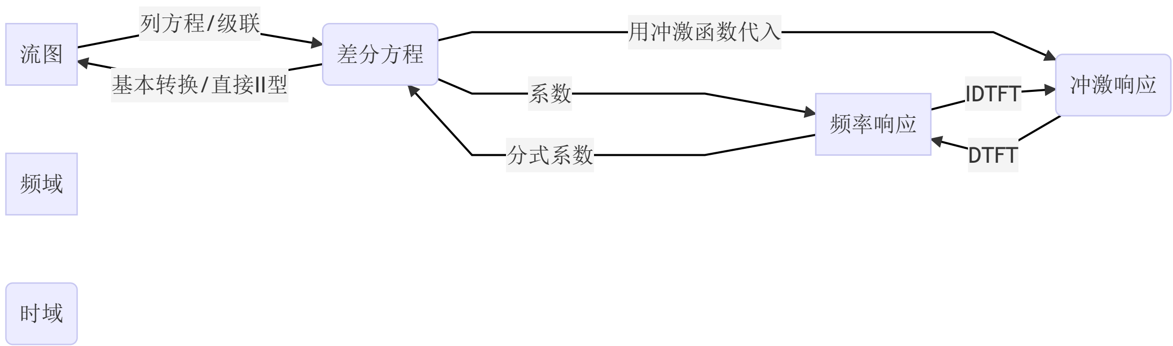
冲激响应是系统的时域本质的体现，其与任何信号的卷积即为系统对该信号的响应。系统稳定性的判据是冲激信号的绝对收敛。

可以将滤波器分为FIR和IIR两种，前者的冲激响应是有限拍，差分方程是非递归，差分方程的系数就是冲激响应；后者是无限拍，差分方程是递归。

除了基本方法之外，针对FIR和IIR，我们有较好的流图设计方案（级联、直接II型）。这样的设计可以减少存储、减少字长、减小有限字长效应，在降低结构要求的情况下尽量消除误差带来的影响。

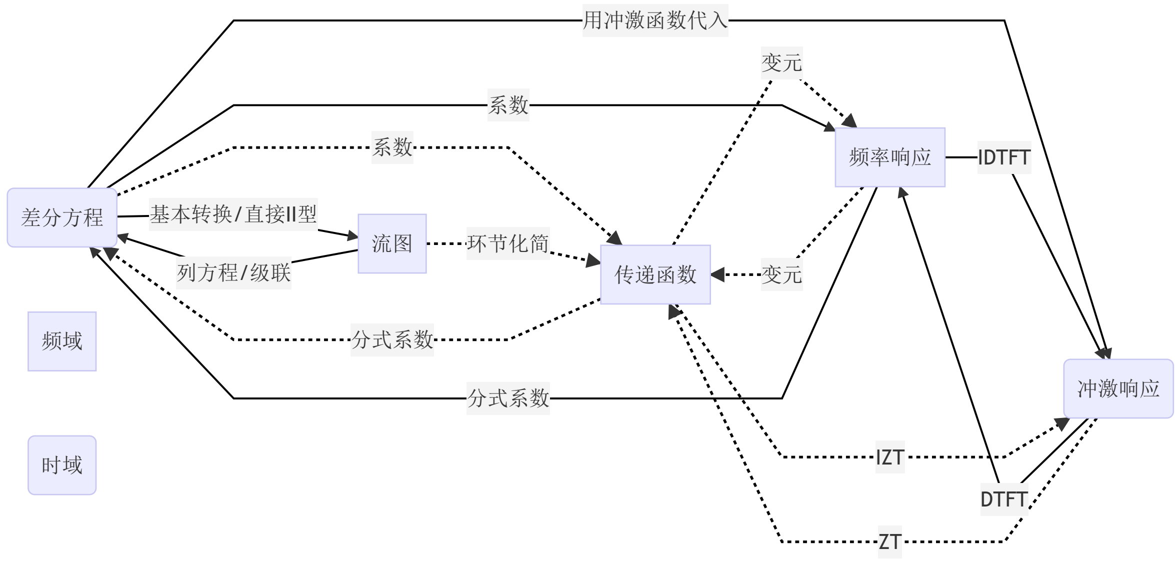
频率响应是系统对信号频域变换的直观体现，它是冲激响应的DTFT，也是系统输出与输入的DTFT的比值。

系统转换图（不全）



系统转换全图

这节学到的转换方式用实线标出来。



滤波器的概念、类别和参数

> 滤波器就是个系统；只是其类别是以功能来描述的

类别

高通HP、低通LP、带通BP、带阻BS、全通AP

模拟与数字滤波器

模拟滤波器是电路实现的，性能依靠于电路本身的性质；

数字滤波器是软件实现的，性能依靠于选择的算法和参数

数字滤波器的实现方式

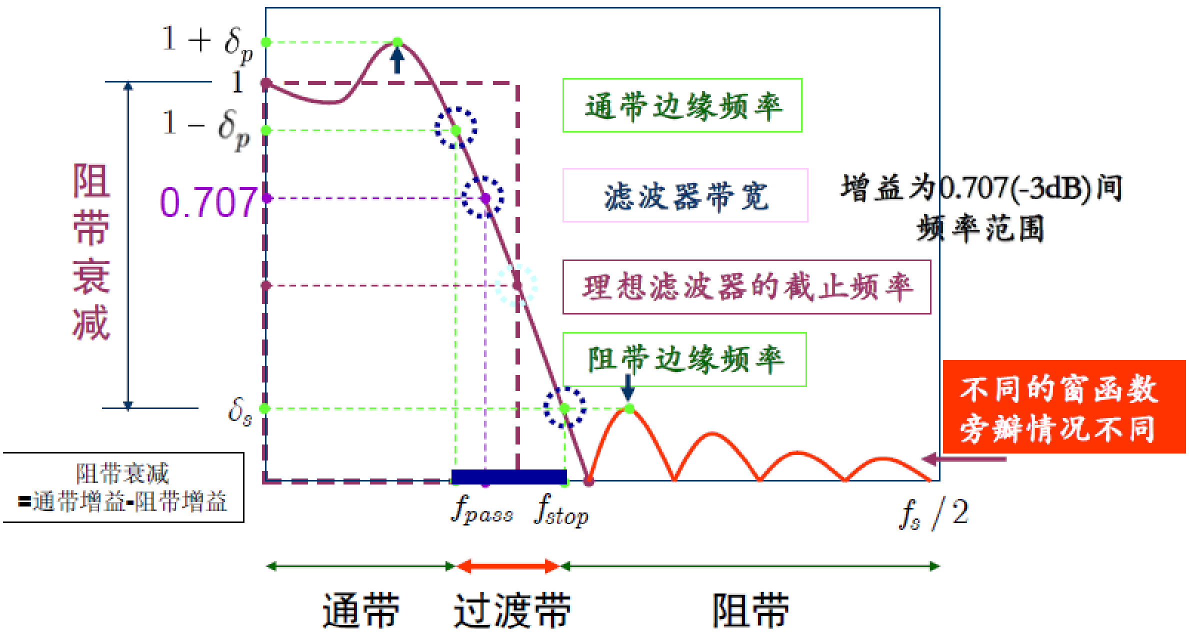
1. 用流图计算输出
2. 用差分方程计算输出
3. 用卷积过程计算输出
4. 用DTFT改频谱

滤波器的通带和阻带

1. 通带容限和阻带容限：通带容限是一个设定值d_p，阻带容限是设定值d_s，它们规定了"通"和"阻"的概念
2. 通带边缘频率、阻带边缘频率：滤波器的增益在第一次下降到$1-d_p$的频率称为通带边缘频率w_p；增益最后一次下降到d_s的频率叫做阻带边缘频率w_s；它们规定了"通带"和"阻带"的分界
3. 通带、阻带、过渡带：$[0,w_p]$叫做通带，$[w_p,w_c]$叫做过渡带，$[w_c,?)$叫做阻带（连续系统阻带没有上限，数字系统的阻带上限为π）

4. 带宽：增益大于0.707的频率范围

下图是一个滤波器的频率响应曲线：



系统的概念和基本类别

系统就是对信号做处理的一个组合，其功能理解为**输入一个信号，输出处理过的信号**。

连续和离散

> 了解概念即可，别较真；主要研究离散时间系统

连续时间系统和离散时间系统

- 连续和离散不仅描述了输入输出的信号类别，还要求信号形式在系统内部也不变

线性性

> 与线性变换的概念相同；事实上，线性系统就是一个线性变换，并可以表示为矩阵（课程不要求）

线性系统满足：叠加性；齐次性

- 多个信号叠加通过系统，其变换等于多个信号的变换的叠加
- 信号乘一个系数通过系统，其变换等于信号变换乘一个系数

时不变性

> 我们研究的系统都是LTI系统

时不变系统满足：对于任何固定的输入，系统的输出与时间无关

线性时不变系统：LTI System=Linear Time Invariant System

因果系统

> 现实存在的系统都是因果系统。如果一个题解出来不止一个系统，通常根据因果系统舍弃其中的一些解。

系统的输出与以后的输入数据无关

[TODO: 因果系统的基本性质]

稳定系统：BIBO原则

符合“若输入有界，则输出也有界”（BIBO原则）的系统

稳定系统的判定

BIBO比较麻烦，一般采用脉冲响应来判断：若脉冲响应绝对值之和有界，则系统有界。

详见[脉冲响应]()

系统的描述方法

差分方程

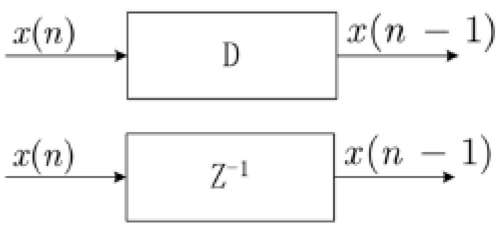
$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r x(n-r)$$

x为输入序列，y为输出序列，N为所需过去输出的个数，称为**滤波器的阶数**

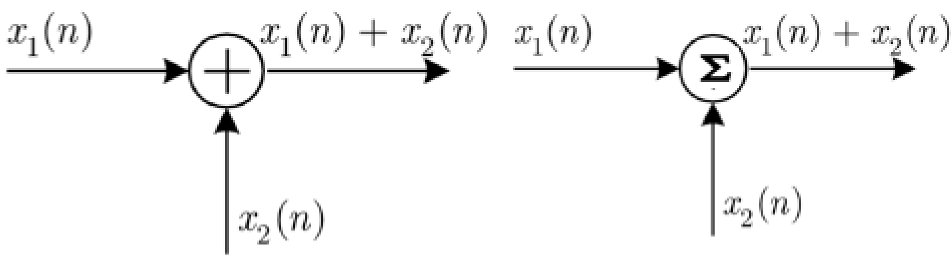
差分方程流图

> 知道流图长什么样子

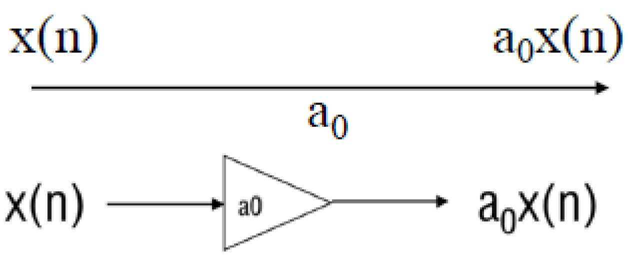
延时单元



相加单元



系数单元



[差分方程与流图的转换]()

传递函数

传递函数与差分方程详见Chap04.3

冲激响应和频率响应

系统响应

响应的类型

> 这一小节最好是与电路里学到的响应知识相类比。
>
> 这里涉及到"状态"的问题，可能会有人把它和"时不变系统"搞混（没有搞混的可以跳过这一段）。其实回忆一下电路里的知识，一个固定的电路的性质是不变的，因此是一个时不变系统；但电容/电感在开关闭合前的电压/电流可能有多种情况。如果把开关闭合想做是起始时刻，那么这个时候电容两端的电压/通过电感的电流就属于系统的初始状态。

零输入响应

- 系统的初始状态产生的响应

零状态响应

- 系统在状态值为0的起始状态下对信号产生的响应

冲激响应/脉冲响应

> 冲激响应的Z变换就是系统的传递函数（连续系统的情形下对应的是拉普拉斯变换），因此系统的脉冲响应可以代表该系统，即：代表系统的频响性质；得到频率响应；代替系统做信号变换运算；作为系统的稳定性判据。

对于离散信号而言，单位脉冲定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1,(n=0)\\0,(n\neq 0)\end{cases}$$

求冲激响应非常简单，只需要写出差分方程，用$\delta(n)$代入输入即可。

LTI系统的响应

系统对任意信号的响应等于该信号卷上系统的脉冲响应。

LTI系统的稳定性

LTI系统稳定（定义为满足BIBO原则）的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=P<\infty$$

即其冲激响应绝对收敛。

FIR和IIR

> FIR响应对应的滤波器叫做FIR滤波器，IIR响应对应的滤波器叫做IIR滤波器

有限脉冲响应FIR

$y(n)=\sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k)$

特点：非递归差分方程，只与最近有限个输入采样点有关，脉冲响应在有限拍之后下降到0

FIR的脉冲响应

就是其系数：$h(n)=a(n)$

无限脉冲响应IIR

$y(n)=\sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k)+\sum_{k=1}^{N} b(k)y(n-k)$

特点：递归差分方程，与过去的输出有关，脉冲响应不会消失

频率响应

> 频率响应最大的用途就是作幅频曲线。就算是传递函数，也要转换成频率响应来作图。

定义：频率响应是[脉冲响应]的离散时间傅立叶变换，即

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

根据卷积定理可知，频率响应和输入信号的DTFT的乘积就是输出信号的DTFT。

$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

频响和差分方程系数的关系：对两边分别作DTFT

$$\begin{aligned}Y(\omega)&=X(\omega)H(\omega)\\&=X(\omega)\left[\sum_{k=0}^{M} a(k)e^{-jk\omega}\Big/\sum_{k=0}^{N} b(k)e^{-jk\omega}\right]\end{aligned}$$

频响曲线：利用欧拉公式，求频响的模长（和幅角）

差分方程与流图的转换

基本操作

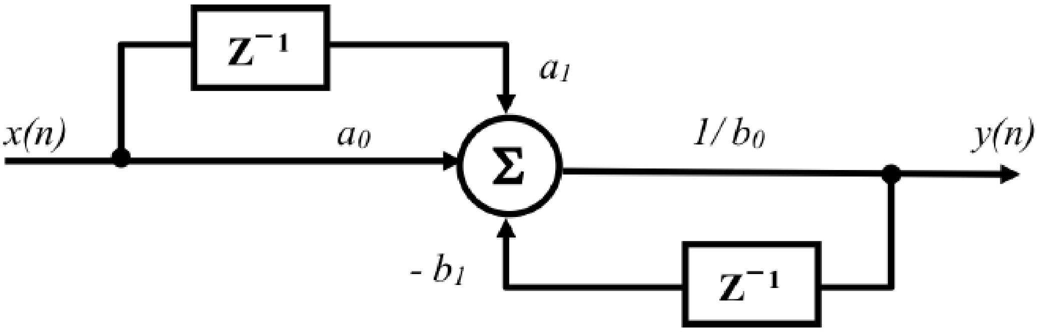
对于差分方程

$b_0y(n)+b_1y(n-1)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$

首先写成如下形式

$y(n)=\frac{1}{b_0}(a_0x(n)+a_1x(n-1)-b_1y(n-1))$

然后，把$x(n-1)$看作$x(n)$经过延时单元，$y(n-1)$也一样。从$x(n)$出发，最后得到$y(n)$，并借助$y(n)$构造$y(n-1)$，我们得到了：



那么，根据这幅图，我们怎么得到差分方程呢？

通用的方法是列方程的方法。可以跳过下面的描述。

1. 从x(n)出发，依次将所有仅由x决定的通路表示为x(n)的函数。
   - 这里，求和结点前的两个通路为a0x(n)和a1x(n-1)
2. 从y(n)出发，依次将所有仅有y决定的通路表示为y(n)的函数。
   - 这里，求和结点的输出为b0y(n)，反馈支路的输出为-b1y(n-1)。
3. 如果有未被表示的通路，那么就将对应的通路设未知数，将其他未标示的通路用尽量少的未知数来表示。
4. 在结点处列方程来表示各个变量之间的关系。
   - 这里在求和结点处：a0x(n)+a1x(n-1)+(-b1y(n-1))=b0y(n)

但是，课程常用的是FIR和IIR的流图，结构比较简单。这在下面“流图优化”节介绍。

差分方程的流图优化

> 以下两节分别针对非递归差分方程（对应FIR）和递归差分方程（对应IIR）进行流图上的优化。
>
> 流图是可以直接转换为具体实现的，所以流图的优化对于具体系统的性能影响很大。

流图优化的基本要求：

滤波器差分方程流图优化

要求：

（1）减少存储

（2）减少运算（乘法、加法）

（3）减少有效字长效应（滤波器的系数必须量化，而处理器的有效比特数有限而产生的影响）

➔

高阶滤波器 ➔ 多个二阶滤波器节的级联

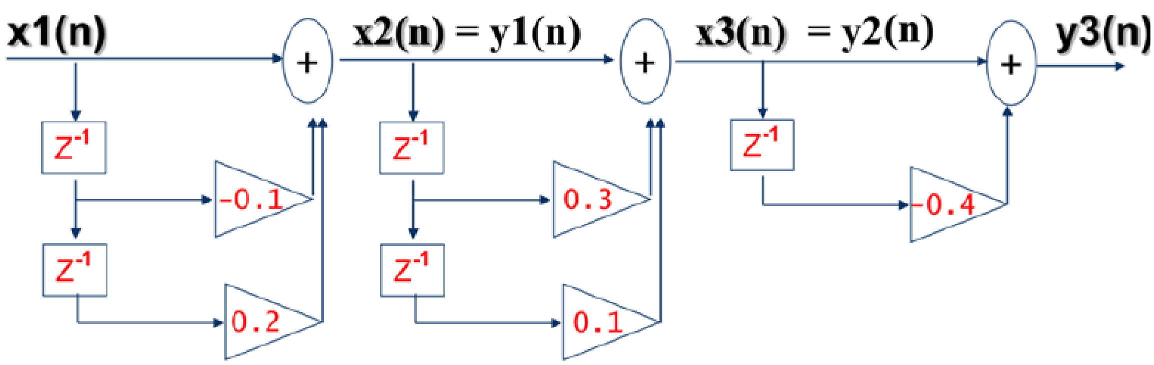
（滤波器系数大，对量化误差的敏感程度低）

注意：这里课件上说的“阶”的概念，不是滤波器的阶，而是差分方程的阶。

差分方程的阶指的是输入x的最大下标与最小下标的差值。

非递归差分方程的输入级联

> 级联指的是若干个系统串起来。最简单的情况（如下图）是若干个FIR滤波器串起来。
>
> 级联设计的时候一般是从流图到差分方程，不会直接设计差分方程。



对于这种流图，分成若干个子系统（图中有三个：x1到y1的子系统、x2到y2的子系统、x3到y3的子系统），分别给出方程。然后由于有x2=y1, x3=y2，所以可以将y1代入x2，y2代入x3，得到最后的x1到y3的子系统。

$$y_1(n) = x_1(n) - 0.1x_1(n-1) + 0.2x_1(n-2)$$

$$y_2(n) = x_2(n) + 0.3x_2(n-1) + 0.1x_2(n-2)$$

$$y_3(n) = x_3(n) - 0.4x_3(n-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_3(n) = {} & x_1(n) - 0.2x_1(n-1) + 0.19x_1(n-2) \\ & - 0.058x_1(n-3) - 0.008x_1(n-5) \end{aligned}}$$

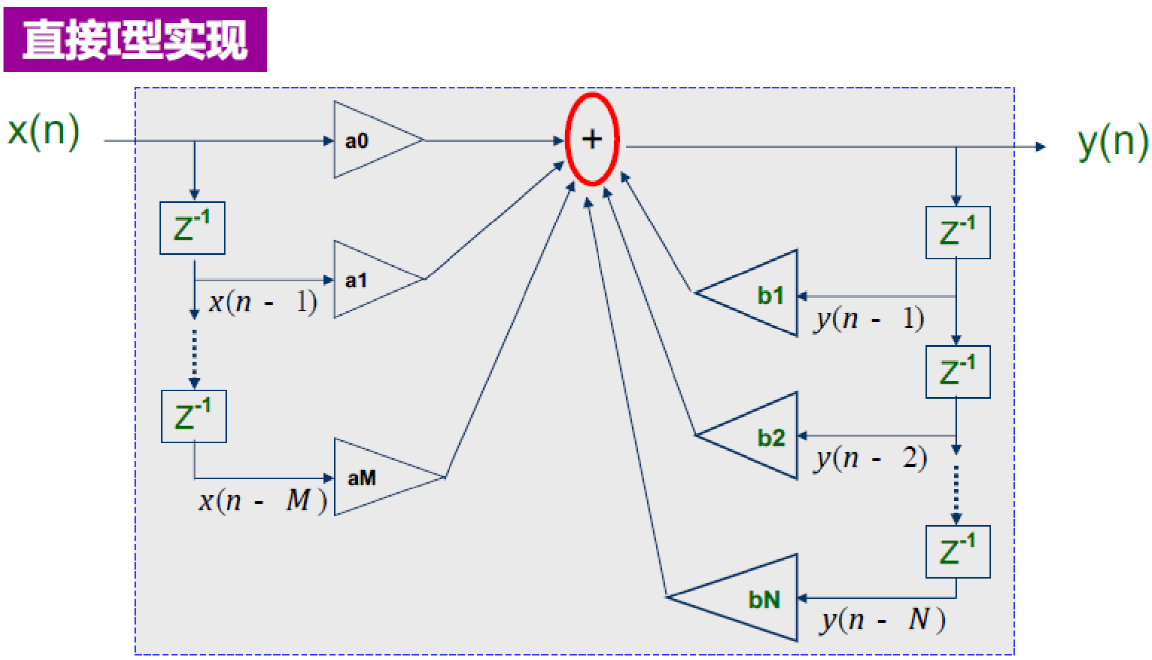
级联的好处

将非递归差分方程拆分成“低阶方程组”

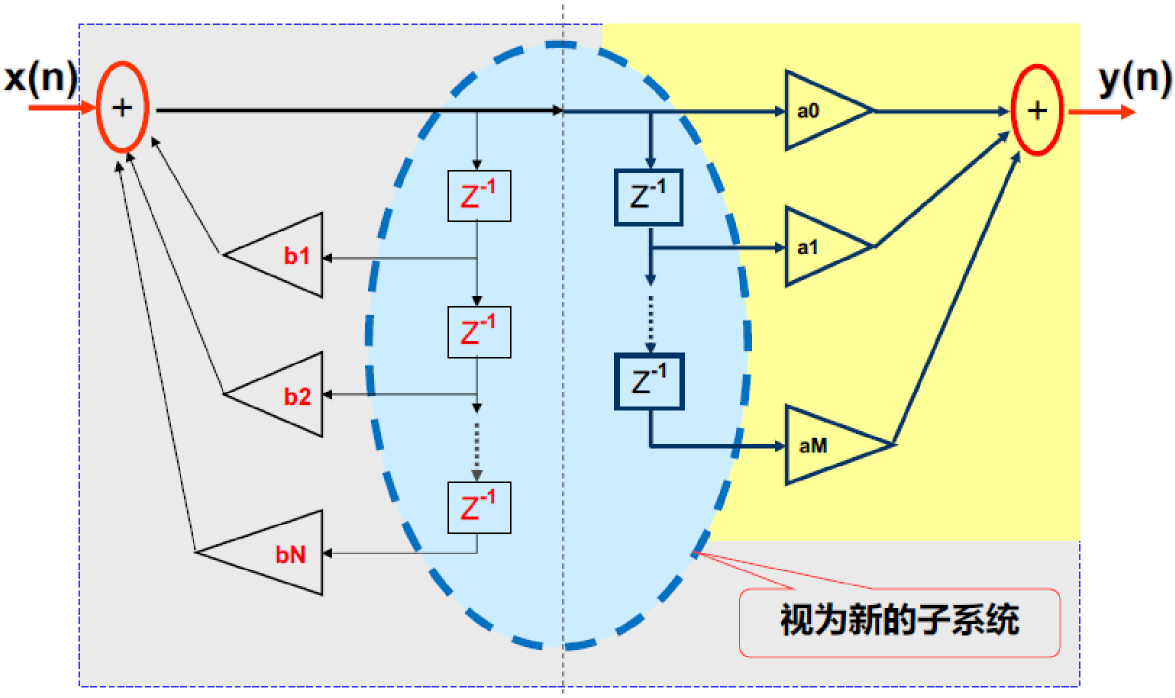
- 分级后每节系数变大，可以降低对量化误差的敏感度

递归差分方程的优化形态

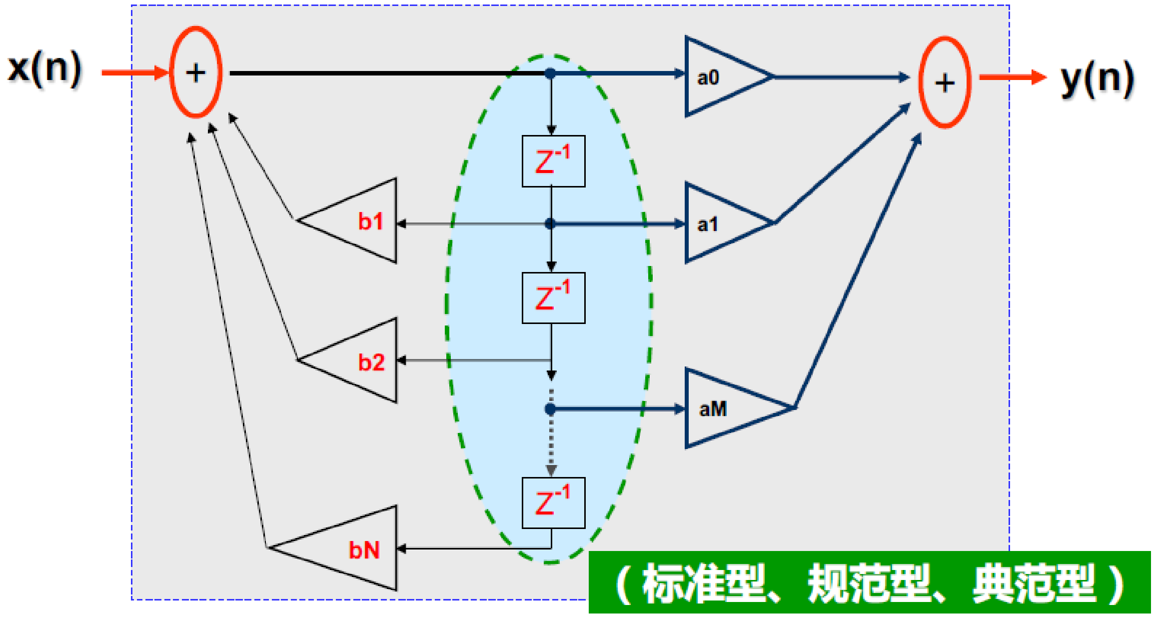
前面讲了差分方程转流图基本操作，这样做出来的流图叫做“直接I型实现”



将两个部分沿求和结点拆开，就形成两个子系统的级联。然后交换这两个子系统的前后位置。于是我们得到了这个：



最后将相同的时延环节结合，得到直接II型（也称标准型）：



综合上面的步骤，我们也可以从该流图得到方程：

- 拆开两个子系统的时延环节
- 交换得到直接I型
- 正常分析

直接II型的好处

- 存储效率高（虽然两个加法可能导致溢出）