离散傅里叶变换（DFT）

宋晨阳 计 86

1 DFT 的定义与计算

啥是 DFT？我们有一个长度为 L 的离散时间序列 $x(n)$，要求其 DTFT 谱在 $[0,2\pi]$ 区间内的 N 个均匀分布的谱值 $X(k)$，绕过 DTFT 而直接进行这一计算的方法。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk},\quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}},\ X(k)=DTFT[x(n)](\omega_k),\ \omega_k=\frac{2k\pi}{N}$$

W 具有两个性质，可以用在化简中。周期性、对称性：

$$W_N^{nk}=W_N^{nk\%N},\quad W_N^{nk+N/2}=-W_N^{nk}$$

矩阵表示：

$$X=Ax,\ A_{kn}=W_N^{kn},\ k=0,1,\dots,N-1$$

其中 X 与 x 分别是序列 $X(k),x(n)$ 的向量表示。

序列补零（常用来处理 $N>L$ 的情况）：在 $x(n)$ 之后补充 $D=N-L$ 个 0，得到长度为 N 的时域序列 $x_D(n)$ 再进行 DFT 的运算，它们 DTFT 与 DFT 分别一致：

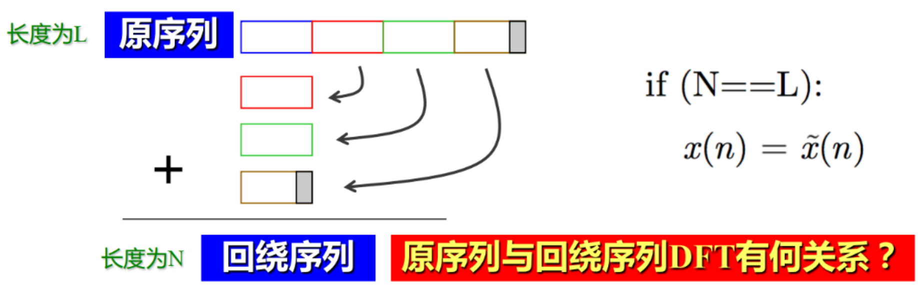
$$X_D(\omega)=\sum_{n=0}^{L+D-1}x_D(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\omega n}=X(\omega)$$

$$X_D(\omega_k)=X(\omega_k)$$

序列回绕（常用来处理 $N<L$ 的情况），回绕序列的定义如下：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x(mN+n),n=0,1,\dots,N-1$$

上面这个定义不太直观，建议形象地理解回绕：



简单地说，回绕就是把较长的 L 序列顺次切分成长为 N 的若干段，不够的补 0，

将它们对齐后相加，即得到回绕序列。

原序列与回绕序列的 DFT 相等（使用 DFT 的矩阵形式证明，详见课件）：

$$DFT[x(n)] = DFT[\tilde{x}(n)]$$

逆离散傅里叶变换 IDFT：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} X_k$$

时域序列与其 DFT 不是一一对应的：多个完全不同的序列，只要它们的回绕序列相等，其 DFT 就相等，但其 **IDFT 只能得到回绕序列**而不一定能得到原序列。**当且仅当 $\boldsymbol{N \geq L}$ 时，才可以从回绕序列求出原序列**，其中，$N = L$ 时二者完全一样，$N > L$ 时回绕序列就是原序列补零。

关于序列长度：L 是待处理时域信号的长度，不可更改，N 可以人为设定。如果题目没有明确说明，那么**一般认为 $\boldsymbol{N = L}$**。另外，IDFT 不改变序列长度，得到的回绕序列的长度一定是 N。

2 DFT 的性质

DFT 本质上是 DTFT 的抽样，因而是离散的、周期的。

共轭对称性：

$$X(-k) = X^*(k)$$

N 为偶数时有：

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right) = X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

线性性：

$$DFT[ax(n)+by(n)] = aX(k)+bY(k)$$

帕斯瓦尔定理：

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

反褶与共轭：

时域	频域
反褶	反褶
共轭	共轭 + 反褶
共轭 + 反褶	共轭

奇偶虚实性：

- 奇对称和偶对称序列:
  - 奇函数的DFT是奇函数；
  - 偶函数的DFT是偶函数。
- 实序列:
  - 实偶函数的DFT是实偶函数；实奇函数的DFT是虚奇函数。
  - 实函数的DFT，实部是偶函数，虚部是奇函数；模是偶函数，相位是奇函数。
- 虚序列:
  - 虚偶函数的DFT是虚偶函数；虚奇函数的DFT是实奇函数。
  - 虚函数的DFT，实部是奇函数，虚部是偶函数；模是偶函数，而相位是奇函数。

频移：

$$\mathrm{X}(k-l)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)W_N^{-nl}\right]W_N^{nk}\ \ (L=N)$$

时移：

$$DFT[x(n-m)]=W_N^{mk}X(k)$$

对称/对偶性：

$$DFT[X(n)]=Nx(-k)$$

卷积定理：

$$DFT[x(n)*y(n)]=X(k)\cdot Y(k)$$

$$IDFT[X(k)\cdot Y(k)]=\widetilde{z(n)}=\sum_{n=0}^{N-1}x(m)\tilde{y}(n-m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(m)y\big((n-m)\big)_N$$

其中，**回绕序列 $\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$ 本质上就是长为 N 的序列 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$ 循环右移 m 位**。

公式中类似 $\boldsymbol{y}\big((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\big)_{\boldsymbol{N}}$ 的记号可以理解为**序列的 N 点回绕**。

序列线卷积定义：

$$z(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)$$

序列圆卷积定义：

$$x(n)\otimes y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(m)y\big((n-m)\big)_N$$

序列的卷积/圆卷积一般采用**竖式计算**，参考最后一节课习题 3。

因此，卷积定理可以简写如下：

$$IDFT[X(k)\cdot Y(k)] = x(n)\otimes y(n)$$

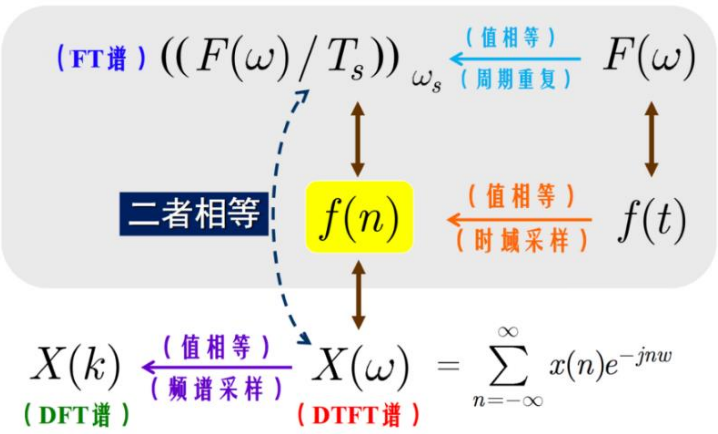
频域卷积：

$$DFT[x(n)\cdot y(n)] = \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$$

老师的总结：

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$	$\mathrm{DTFT}[X(n)] = 2\pi x(-\omega)$	$\mathrm{DFT}[X(n)] = Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega-\omega_0)$	$\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)] = X(k)\cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)\bullet y(n)] = \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$

3 各种傅里叶变换之间的联系



➢ 记 $\hat{F}(\omega) = \big((F(\omega)/T_s)\big)_{\omega_s}$，它是时域采样信号 $f(n)$ 的 FT

- DTFT 与 $\hat{F}(\omega)$ 本质上是一个东西，只是 DTFT 谱进行了频率归一化，$\hat{F}(\omega)$ 是时域采样信号的模拟频谱，DTFT 是数字频谱，二者满足如下关系：

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)/T_s$$

$$X(\omega) = \hat{F}(\Omega),\ \Omega = \omega f_s$$

- 在**满足采样定理，且频率在奈奎斯特区间内**（如 DFT 的采样区间）时：

$$T_s\hat{F}(\omega) = F(\omega)$$
$$X(\omega) = F(\Omega)/T_s$$

- 如果直接从 $x(n)$ 按定义计算 DTFT 有困难，可以先将 n 替换为 t，计算其连续傅里叶变换 F'（注意这并非是数字序列真正对应的模拟频谱，因为那与采样频率有关），然后 DTFT 可以通过采样并以 2π 为周期延拓得到。这一方法对**计算给定数字序列的 DTFT/DFT** 非常有效。

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F'(\omega - 2n\pi)$$

- DFT 是 DTFT 的进一步采样，使连续的、无限长的 DTFT 频谱变成了离散的、有限长的、计算机容易处理的 DFT 谱，这一点在本文档的开头说过了

从 DFT 到 FT（课件上有些不准确，注意 FT 说的是模拟频率，DFT 和 DTFT 说的是数字频率）：

$$F(\Omega_k) = F(\omega_k f_s) = T_s X(k),\ \omega_k = \frac{2k\pi}{N}$$

从 FT 到时域信号（近似）：

$$f(nT_s) = \frac{1}{T_s} IDFT[F(\omega_k)]$$

从 DFT 到 FS：

$$F_k = \frac{1}{T_1}F_0(k\omega_1) = \frac{1}{T_1}\left(T_s X(k)\right) = \frac{1}{N}X(k)$$

上式成立的条件：周期信号**满足采样定理，一个周期内有 N 个采样值**，即：

$$\omega_s = N\omega_1,\ T_s = \frac{1}{N}T_1$$

其中，T_s 是采样周期，T_1 是 FS 中原周期信号的周期。

课件上的结论并不严格，来自助教的更严格的推导：

$$X(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mk}=\sum_{m=0}^{N-1}f\left(m\cdot\frac{T_1}{N}\right)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(F_n e^{jn\omega_1 m\frac{T_1}{N}}\right)e^{-j\frac{2\pi km}{N}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\sum_{m=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}m(n-k)}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}m(n-k)}=\begin{cases}0,(n-k)\ mod\ N\neq 0\\ N,(n-k)\ mod\ N=0\end{cases}$$

与此同时，因为要满足采样定理，n 的取值并不是无限的：

$$\omega_s\geq 2\omega_{max},\omega_{max}=n_{max}\omega_1=\frac{1}{N}n_{max}\omega_s\Rightarrow|n|\leq\frac{N}{2}$$

因此，我们最终的准确结论：

$$X(k)=\begin{cases}NF_k, & 0\leq k<N/2\\ NF_{k-N}, & N/2<k<N\\ N(F_k+F_{k-N}), & k=N/2,N\ even\end{cases}$$

4 余弦/正弦信号的 DFT

余弦/正弦信号的 FT 比较特殊，是两个冲激信号之和/差，我们以余弦信号为例：

$$x(n)=cos(\omega_0 n)$$

将 n 替换为 t，求 FT 为：

$$F'(\omega)=\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\pi\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)$$

原序列为无限长时，其 DTFT 就是上述频谱以 2π 为周期延拓，不过我们只关注 DFT 的采样区间 [0,2π]，该范围内，DTFT 谱的峰值点在 $\omega_0, 2\pi-\omega_0$

下面，我们给这个余弦信号加长为 L 的窗 $W(n)$，使其变成一个有限长的离散数字信号，那么加窗后的 DTFT 频谱应该是：

$$X'(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*W(\omega)$$

$W(n)$ 的频谱长啥样？参见 DTFT 的文档，需要记住的是**窗函数频谱的主瓣宽度、峰值点高度及零点位置的关系**。

根据冲激函数卷积的抽样搬移特性，加窗后的余弦信号的频谱是两个 Sa 函数之

和，它们的峰值点频率就是 ω_0, $2\pi-\omega_0$，在 DFT 中的下标 k 就是二者除以 $\frac{2\pi}{N}$，峰值高度可以由上一文档中的公式求出，零点位置就是窗函数频谱 $W(\omega)$ 的零点位置。

然后，DFT 本质上是什么？是数字离散频谱 DTFT 的采样！因此最终我们要求的 DFT 结果，就是上述加窗余弦信号的频谱在 $\frac{2k\pi}{N}, k=0,1,\dots,N-1$ 上的取值，结合窗函数的峰值高度，零点位置即可得到这些采样点处的值。

5 快速傅里叶变换 FFT

本质：DFT 的快速算法。

根据定义计算 DFT，N 点共需要 N*N 次复数乘法，N*(N-1)次复数加法，时间复杂度为 $O(N^2)$。

思路：利用 W 的周期性、对称性，将 N 点 DFT 拆分为两组 N/2 点的 DFT 运算再求和。

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)W_{N/2}^{rk} = G(k) \\ \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)W_{N/2}^{rk} = H(k) \end{cases} \quad k=0,1,2.....\frac{N}{2}-1$$

$$X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k),$$
$$k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$G(k)$ 与 $H(k)$ 的周期都是 N/2，故有以下性质：

$$G(N/2+k)=G(k),\ H(N/2+k)=H(k)$$

最后 N 点 DFT 的算法为：

$$\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X(\tfrac{N}{2}+k) &= G(\tfrac{N}{2}+k) + W_N^{(\frac{N}{2}+k)} H(\tfrac{N}{2}+k) \\ &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned}$$
$$k = 0,1,\cdots,\tfrac{N}{2}-1$$

FFT 需要 $N\,log_2 N$ 次复数加法，$\frac{1}{2}N\,log_2 N$ 次复数乘法，复杂度 $O(N\,log_2 N)$