非周期信号的傅里叶变换（FT）

宋晨阳 计 86

1 傅里叶变换的引入与计算方法

出发点：非周期信号可以看作是周期 T_1 趋近于无穷大的周期信号，谱线之间的间隔趋近于无穷小，变成了连续频谱，谱线长度趋近于零（分量是无穷小量并不意味着它们的和是无穷小）。

非周期信号的傅里叶（FT）变换公式（将时域信号变为频域信号）：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

逆傅里叶变换（IFT，将频域信号变回时域信号，注意多了一个系数 $\frac{1}{2\pi}$，$e^{j\omega t}$称为变换核）

$$\mathrm{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\,\mathrm{d}\omega$$

FT 存在的**充分条件**：时域信号绝对可积。

将频域信号变为幅度乘幅角的形式：

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，$|F(\omega)|$ 称为**幅度频谱密度函数**，$\varphi(\omega)$ 称为**相位频谱密度函数**。

傅里叶变换的**三角形式**：

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\omega t\,dt$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin\omega tdt$$

实部、虚部与相位的对称性：

$$R(\omega) = R(-\omega),\quad X(\omega) = -X(-\omega),\quad \varphi(\omega) = arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega)$$

2 傅里叶级数（FS）与傅里叶变换（FT）的关系

	FS	FT
被分析对象	周期信号	非周期信号
频率定义域	离散频率，谐波频率处	连续频率，整个频率轴
函数值意义	频率分量的数值	频率分量的密度值

考虑非周期信号：$f(t)$ 对应的周期信号是：$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_1)$，那么：

$$F_n=F(n\omega_1)/T_1$$

其中，F_n 为 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶级数（复数形式）第 n 项的系数，$F(n\omega_1)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换在 $n\omega_1$ 处的取值。注意两个系数相差 T_1，ω_1 为相应的角频率。

非周期信号在**特定区间**上可以做傅里叶级数展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,e^{jn\omega_1 t},t\in(t_0,t_0+T_1)$$

3 傅里叶变换的性质

傅里叶变换与逆傅里叶变换的**唯一性**：

$$\mathcal{F}[f(x)]=\mathcal{F}[g(x)]\Leftrightarrow\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\mathcal{F}^{-1}[g(x)]\Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

可逆性：

$$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)\Leftrightarrow\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)$$

线性（齐次性+叠加性）：

$$\mathcal{F}\left[\sum_{a}a_n\,f_n(t)\right]=\sum_{n}a_n\mathcal{F}[f_n(t)]$$

反褶与共轭：

$$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$$

反褶与共轭	时域	频域
反褶	$f(-t)$	$F(-\omega)$
共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
反褶 && 共轭	$f^*(-t)$	$F^*(\omega)$

IFT 与 FT 的对偶性（难题常用）：

二者的变换核函数是共轭对称的：$\{e^{-j\omega t}\}^*=e^{j\omega t}$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\{\mathcal{F}_\omega[F^*(\omega)]\}^*$$

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi}F(-t)$$

FT 的尺度变换特性：

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad a \neq 0$$

0 处的函数值（积分都存在时）：

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$$

等效脉宽：

$$\tau = F(0)/f(0)$$

等效带宽：

$$B_f = f(0)/F(0)$$

FT 的时移特性：

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\omega t_0/a}$$

FT 的频移特性：

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)e^{j\omega_0 t/a}\right] = F(a\omega - \omega_0)$$

小结：时域延时，幅度谱不变；频谱搬移，通过在时域乘复指数信号即可。

微分特性：

$$\begin{cases} \text{时域微分} & \dfrac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega) \\ \text{频域微分} & \dfrac{dF(\omega)}{d\omega} \Leftrightarrow -jtf(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{时域积分} & \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow (j\omega)^{-1}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \\ \text{频域积分} & \int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \dfrac{1}{-jt}f(t) \end{cases}$$

FT 卷积定理：

时域卷积定理：

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]$$

频域卷积定理：

$$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_1(t)] * \mathcal{F}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi\cdot\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)]\cdot\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)]$$

FT 时域相关性定理：

$$F\left[R_{f_1f_2}(t)\right] = F[f_1(t)]F^*[f_2(t)]$$

若f_2 是实偶函数：

$$F\left[R_{f_1f_2}(t)\right] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

自相关的傅里叶变换：

$$F\left[R_f(t)\right] = |F[f(t)]|^2$$

帕斯瓦尔定理，时域和频域的能量守恒，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\omega)\|^2d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\|F(2\pi f)\|^2df$$

4 常用结论

4.1 矩形脉冲的傅里叶变换：

$$f(t) = EG_\tau(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & elsewise \end{cases}$$

上述信号的傅里叶变换为一个 Sa 函数：

$$F(\omega) = E\tau\cdot Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

$$Sa(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

特征：

原点处的函数值等于矩形脉冲的面积；零点为 $\omega = 2k\pi/\tau(k \neq 0)$；

频域的能量集中在第一个过零点的区间$[-2\pi/\tau, 2\pi/\tau]$；

带宽只与脉宽有关，与脉高无关：$B_\omega = 2\pi/\tau$。

重要应用，用脉高为 1，脉宽为 τ 矩形信号对信号 $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$ 进行截取，得到的信号频域为：

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * \tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)$$

4.2 复常数的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[1]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\,dt=2\pi\delta(\omega)$$

一般地：

$$\mathcal{F}\left[\rho\cdot e^{j\omega_0 t}\right]=2\pi\rho\cdot\delta(\omega-\omega_0)$$

注意欧拉公式：

$$\rho\cdot e^{j\omega_0 t}=\rho(cos\,\omega_0\,t+j\,sin\,\omega_0\,t)$$

4.3 正弦与余弦的傅里叶变换（推导利用欧拉公式+结论 4.2）：

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\pi\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi\big(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\big)$$

4.4 冲激信号的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[E\cdot\delta(t)]=E$$

特点：频谱等于常数，在整个频率范围内均匀分布，换言之，包含了幅度相等的所有频率分布；这种频谱称为**均匀谱**，也称为**白色谱**。

4.5 与单位阶跃信号的卷积

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

需要注意，单位阶跃信号可以表示为如下形式，这在难题中可能会用到：

$$u(t)=\frac{1}{2}(sgn(t)+1)$$

$$sgn(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

4.6 符号函数与单位阶跃函数的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[sgn(t)]=\frac{2}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

对于求分段函数的 FT/IFT 的问题，可以灵活使用 $u(t)$ 与 $sgn(t)$ 构造！

4.7 截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器的**频率响应**与**单位冲激响应**：

$$H(\omega)=e^{-j\omega t_0},\ |\omega|<\omega_c$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot Sa[\omega_c(t-t_0)]$$