1. $f(t)$ 展开成傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，T为$f(t)$周期

由DFT公式

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k=0,\cdots,N-1$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m e^{j\frac{2\pi n}{N}(m-k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m e^{j\frac{2\pi n}{N}(m-k)}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{M}(m-k)}$$

若 $N \times m-k$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}(m-k)}=0$$

否则为N

$$\therefore X(k)=\sum_{N/m-k} F_m N$$

由于$f(t)$满足抽样定理

所以其谱是带限的，设为$\frac{2\pi q}{T}$

且满足 $\frac{2\pi}{T_s}>2\times\frac{2\pi q}{T}$

$N>2a$

$f(t)$的傅里叶系数F_n在$|n|>a$时均为0

$$\therefore X(k)=\begin{cases} F_k\cdot N & (0\le k\le \frac{N}{2}-1)\\ F_{k-N}\cdot N & (\frac{N}{2}\le k\le N-1)\end{cases}$$

2 (a) $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ k=0,\cdots,N-1$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{MN-1} X(n) e^{-j\frac{2\pi}{MN}nk},\ k=0,\cdots,N-1$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{MN}k(mN+n)}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}km}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{MN}kn}$$

若 $\frac{k}{M}\in Z$

$$X(k)=\sum_{m=0}^{M-1} x\left(\frac{k}{M}\right)=MX\left(\frac{k}{M}\right)$$

否则 $$\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{M}}=0$$

$$X'(k)=\begin{cases} MX(\frac{k}{M}), & \frac{k}{M}\in Z\\ 0, & \frac{k}{M}\notin Z\end{cases}$$

(b) $$Y(k)=\sum_{n=0}^{MN-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{MN}nk},\ k=0,\cdots,N-1$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{MN}nmk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

设k对N带余除法 $k=pN+q$

则 $$Y(k)=\sum_{n=0}^{N} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nq}$$

$=X(q)$

c) $$Y(k)=\sum_{n=0}^{MN-1} X(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{MN}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{MN}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{MN}nk}$$

若 $\frac{k}{M}\in Z$，$Y(k)=X\left(\frac{k}{M}\right)$