清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.12.03

h(n)与x(n)的卷积

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

滤波器输入与输出之间的关系

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

数字滤波器的输出等于输入与脉冲响应的卷积

输入x(n) → 数字系统的脉冲响应h(n) → 输出y(n)

=x(n)*h(n)

差分方程与卷积运算

$$\sum_{k=0}^{N} b(k)y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k)$$ IIR

$$h(n)*x(n)=y(n)=\sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k)$$ FIR

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$ 卷积

卷积和差分方程都可以用来计算滤波器输出。对**FIR**，卷积运算和差分方程都适用，对**IIR**则差分方程好些。

➔ 差分方程、流图、脉冲响应都能代表系统

滤波器输入与输出之间的关系

输 入x(n) → 数字系统的 脉冲响应h(n) → 输 出y(n)

=x(n)*h(n)

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

对上式的理解:

1 输出信号,

可以由输入信号与脉冲响应（函数）的卷积求出。

2 输出信号,

等于输入信号与脉冲响应（信号）的卷积。

证明：某LTI系统是稳定的充要条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$$

（若系统的输入有界则输出也是有界的，则称此系统为稳定系统）

作答

脉冲响应的用途 I

某LTI系统是稳定的充要条件是： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$

证明 设 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = A < \infty$

对任意的有界输入 $|x(n)| < B < \infty \quad (\forall n)$ 有

$$|y(n)| = |x(n) * h(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \leq B \sum_{K=-\infty}^{\infty} |h(k)| = AB < \infty$$

即输出也是有界的，所以系统稳定。

假设系统的单位冲激响应不是绝对可积的，

即
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

若系统激励为
$$x(n) = \begin{cases} 0, & h(-n) = 0 \\ \operatorname{sgn}[h(-n)], & h(-n) \neq 0 \end{cases}$$

即输入是有界的。于是 $|x(n)| \leq 1, \ \forall n$

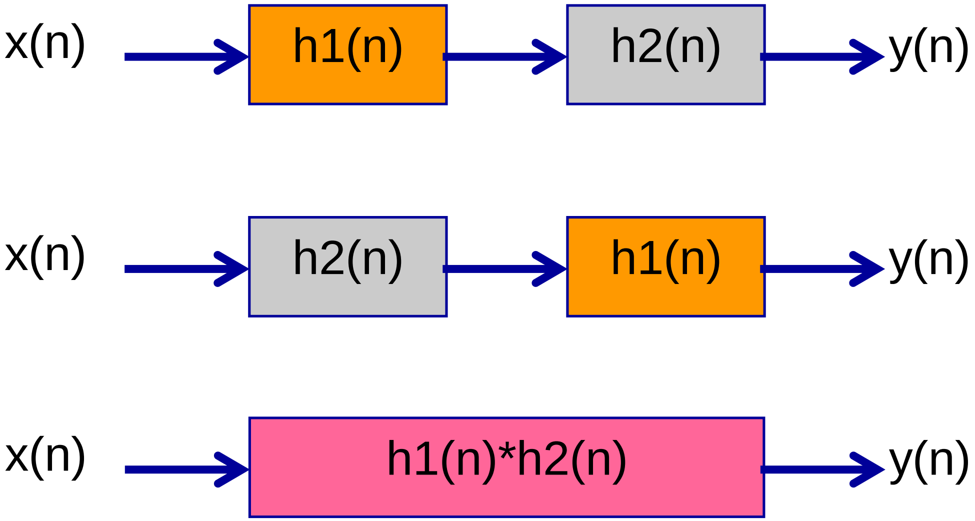
显然
$$y(0) = \underline{(x * h)(0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\operatorname{sgn}[h(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$$

即输出是无界的。这与系统是稳定的相矛盾。

脉冲响应的用途 II

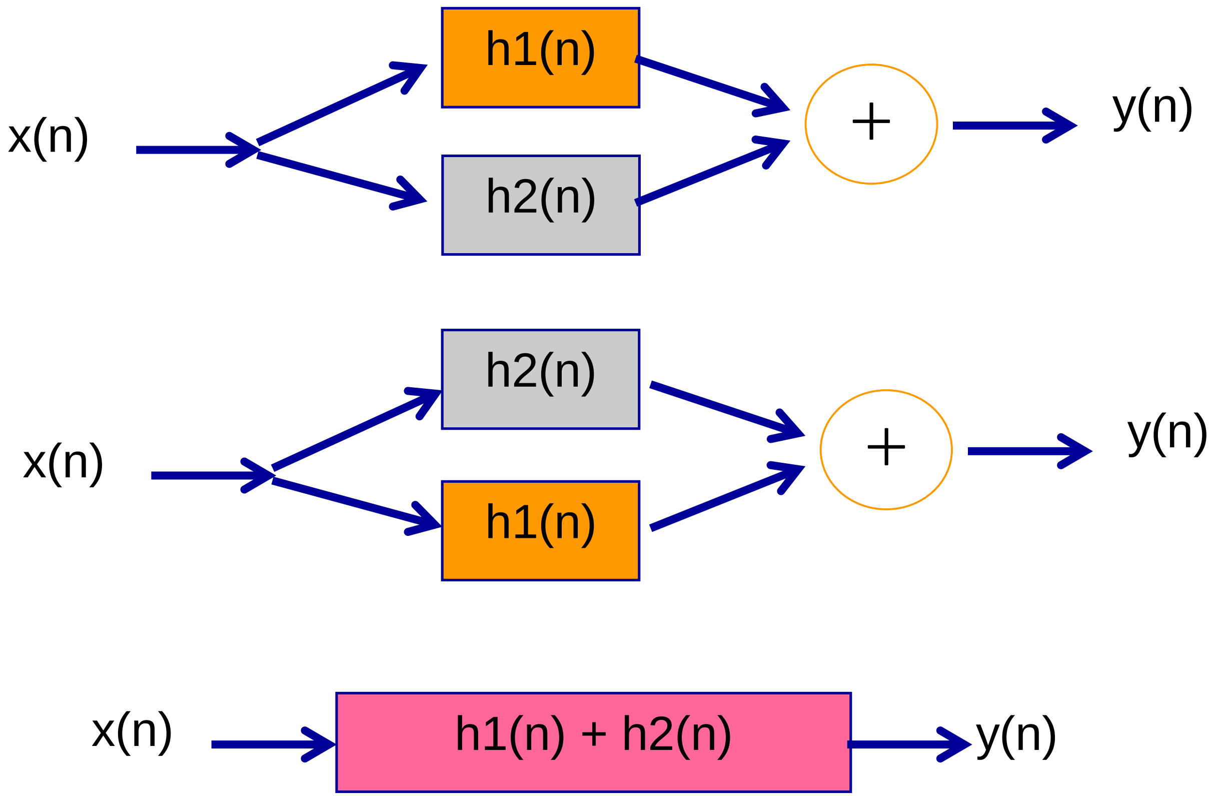
系统串联（级联）



系统串联（级联），脉冲响应函数作卷积

脉冲响应的用途 II

系统并联



系统并联，脉冲响应函数作加法

系统的频率响应，简称频响，它反映了系统对激励中各频率分量的幅度和相位影响。

通常是复值函数

$$H(w) = |H(w)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频响应

相频响应

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega}$$

频率响应是周期函数，关于$\omega=0$和$\omega=\omega_s/2$共轭对称。

$X(\omega) \rightarrow Y(\omega)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

DTFT

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad H(\omega) = Y(\omega) \,/\, X(\omega)$$

$X(\omega) \rightarrow Y(\omega)$ ⇨

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\boxed{X(\omega)} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \boxed{Y(\omega)}$$

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)}$$

定义滤波器的频率响应

$$H(\omega) = Y(\omega) / X(\omega)$$

滤波器的频率响应等于脉冲响应的**DTFT**

$$\mathrm{DTFT}[h(n)] = H(\omega)$$

滤波器可以用差分方程表示

$$\sum_{k=0}^{N} b(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k)$$

对上式的理解:

1 输出信号,
可以由输入信号(当前和过去)与以前的输出来计算。

2 输出信号与其延迟信号的叠加,
等于输入信号与其延迟信号的叠加。

信号在时域叠加,结果信号的频域也是原信号频谱的叠加。

$X(\omega) \rightarrow Y(\omega)$

$$\sum_{k=0}^{N} b(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a(k) x(n-k)$$

$$\downarrow$$

DTFT

$$\downarrow$$

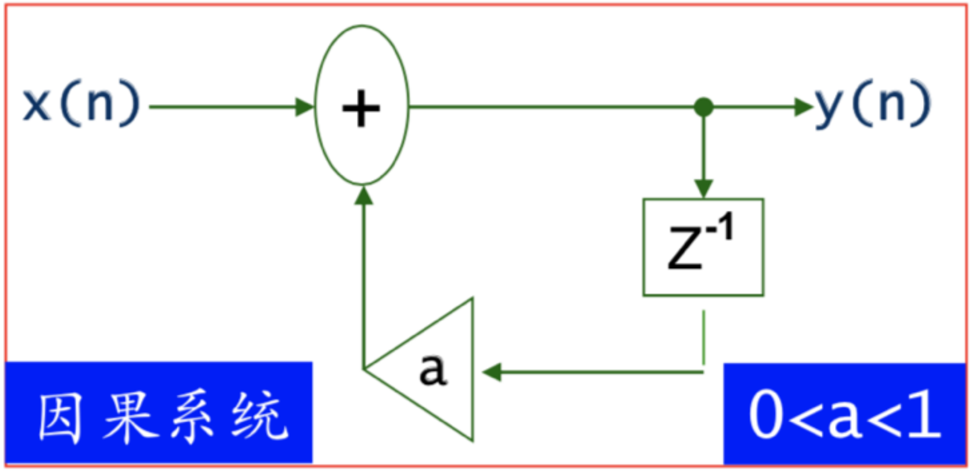
$$Y(\omega)\sum_{k=0}^{N} b(k) e^{-jk\omega} = X(\omega)\sum_{k=0}^{M} a(k) e^{-jk\omega}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \left[\sum_{k=0}^{M} a(k) e^{-jk\omega} \Big/ \sum_{k=0}^{N} b(k) e^{-jk\omega}\right] = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

差分方程的系数与滤波器频率响应的关系

频率响应的用途 I

已知系统的流图，求系统的差分方程，系统频率响应，以及系统的幅频响应图，并说明系统相当于何种滤波器？（低通？高通？带通？带阻？全通？）



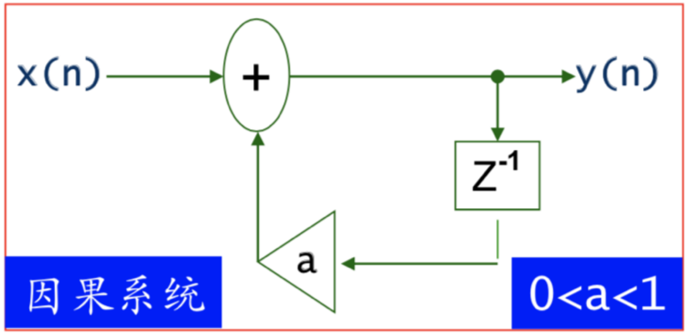
该系统是因果系统，即脉冲响应在n=0之前为零。

作答

频率响应的用途 I

【课堂练习】

已知系统的流图，求系统的差分方程，系统频率响应，以及系统的幅频响应图，并说明系统相当于何种滤波器？（低通？高通？带通？带阻？全通？）



系统差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$

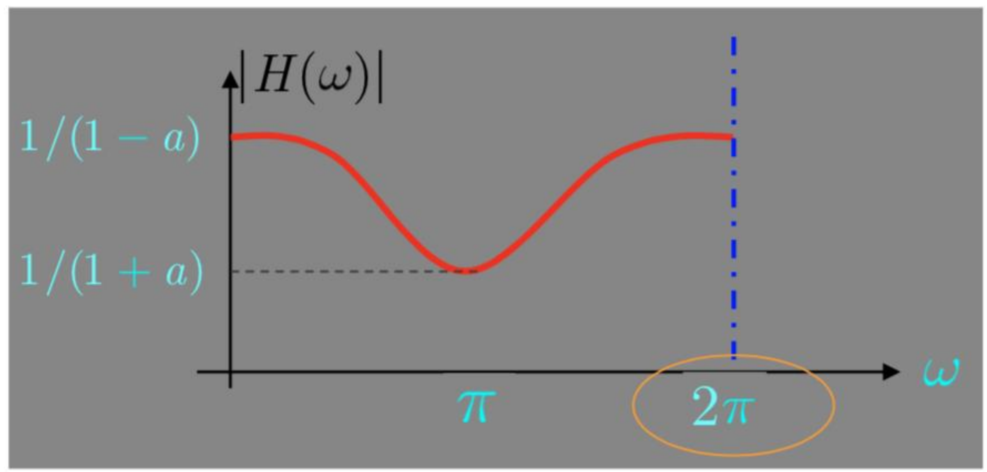
$$\sum_{k=0}^{N} b(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a(k)x(n-k)$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} a(k)e^{-jk\omega} \Bigg/ \sum_{k=0}^{N} b(k)e^{-jk\omega}$$

系统频率响应 $$H(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

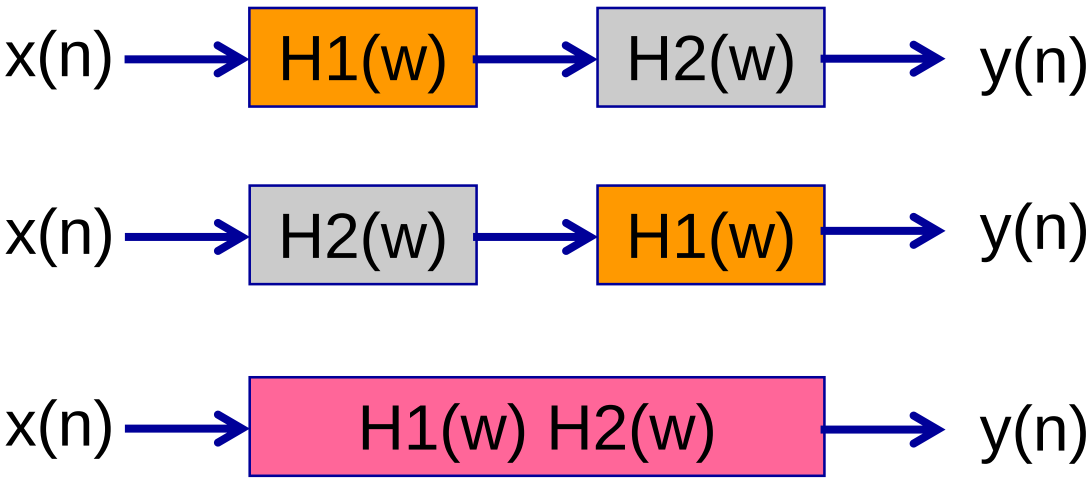
系统幅频响应图



低通滤波器系统

频率响应的用途 II

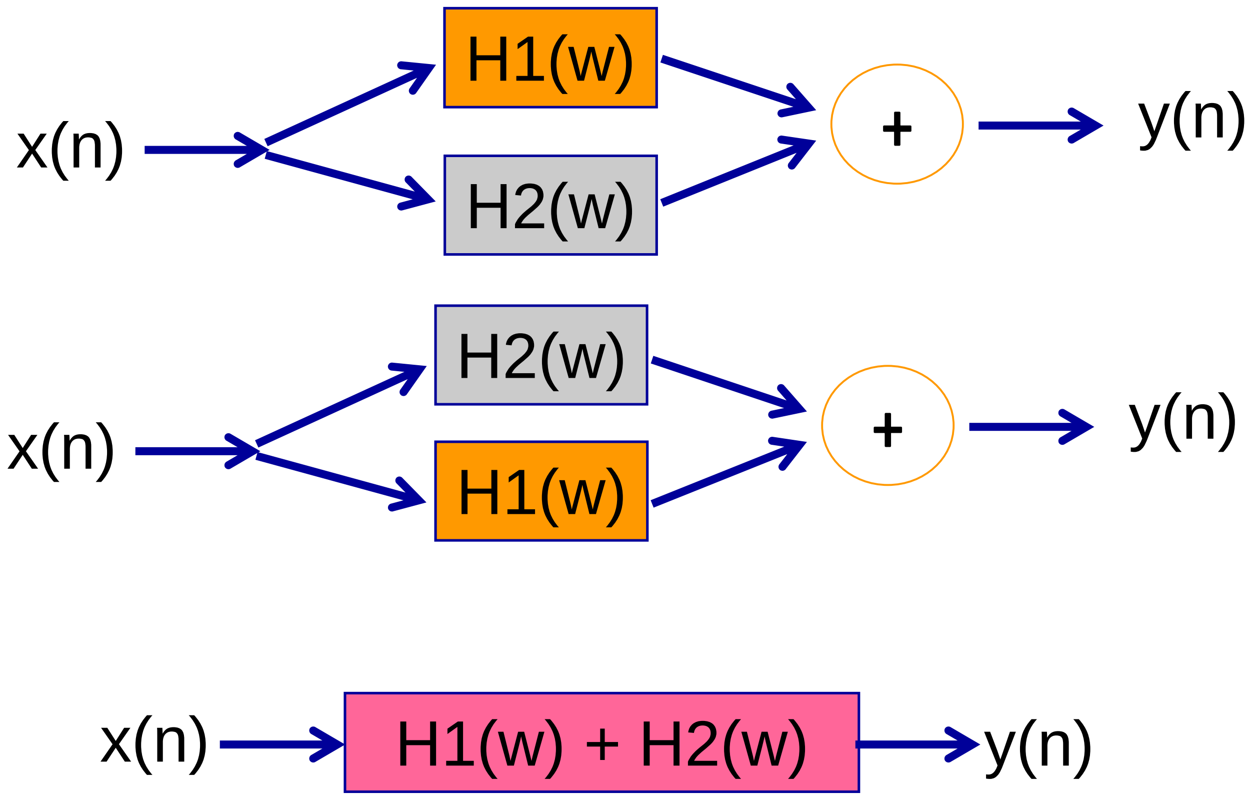
系统串联（级联）



系统串联（级联），频率响应函数作乘法

频率响应的用途 II

系统并联



系统并联，频率响应函数作加法

流程图

因果系统吗？

LTI System

系统稳定吗？

差分方程

频率响应

冲激响应

已知系统的差分方程，如何求系统的脉冲响应？

$$a(n) * x(n) = y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k) x(n-k)$$

FIR

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

卷积

IIR → **h(n) = ???**

$$\sum_{k=0}^{N} b(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a(k) x(n-k)$$

已知系统的差分方程，如何求系统的其他输入响应？

回顾

求下列滤波器脉冲响应的前6个采样值

$$y(n) - 0.4y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

设滤波器是因果系统，即脉冲响应在n=0之前为零。

用 $\delta(n)$ 代替 $x(n)$，$h(n)$ 代替 $y(n)$，则有：

$$h(n) - 0.4h(n-1) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \longrightarrow$$

$h(0) = 1.0$ $h(1) = -0.6$ $h(2) = -0.24$

$h(3) = -0.096$ $h(4) = -0.0384$ $h(5) = -0.01536$

ZT的意义

Z变换是离散时间信号与系统的理论研究中的一种重要的数学工具

它把离散系统的数学模型——差分方程转化为简单的代数方程，使其求解过程得以简化。

ZT与DTFT、DFT的关系

连续时间傅里叶变换

离散时间信号（序列）
与离散时间系统的分析

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\underline{e^{-jn\omega}}$$

DTFT

DFT

变换核取值从单位圆
扩展到整个复平面

（极坐标系）

Z变换

直接定义

$$e^{-jn\omega} \longrightarrow (e^{j\omega})^{-n} \Rightarrow z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Z变换定义

单边Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$ 幂级数形式

双边Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$ 幂级数形式

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

$$x(n) \overset{ZT}{\Leftrightarrow} X(z) \qquad x(n) \Leftrightarrow X(z)$$

Z域分析

让我们先暂停一下，总结回顾之前知识点的关联

1、从流图、差分方程、**DTFT**的角度理解**Z**变换**?**

2、如何用**Z**变换建立差分方程、**H(Z)**、**h(n)**之间的关系**?**

Z变换的收敛域

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

这是一种幂级数求和的形式。显然，这种幂级数和并不是总能收敛。它既不是对所有序列都能成立，也不是对某序列的所有z值都成立。

但如果给定了具体的序列，则可以求出使上式成立的所有z值集合。

我们称使X(z)收敛的z的取值范围为X(z)的收敛域，简记为ROC。

Z变换收敛域的一般特点

收敛域的一般形式是z平面上以原点为中心的圆环

收敛域不会包含极点，而且常以极点作为收敛域的边界。

在ROC内，ZT及其导数是z的连续函数，即ZT函数是收敛域内每一点的解析函数。

注：1、上述三点数学结论的推导主要见《复变函数（第四版）》高等教育出版社，P137，P139，P139

2、零点、极点的定义见书上P178-179

Z变换收敛域的求解

Z变换是一个幂级数，幂级数的收敛范围称为收敛圆，收敛圆的半径称为幂级数的收敛半径，收敛半径求法有比值法和根值法
复习收敛半径求法

比值法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

如果ρ不等于**0**， 那么收敛半径**R= 1/**ρ

如果ρ等于**0**，收敛半径**R**为∞

如果ρ等于∞，收敛半径**R**为**0**

特定序列的ROC

有限长序列　x(n)在$n<n_1$和$n>n_2$时为零（其中$n_1<n_2$）

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$ ⟵ 有限项的级数

ROC至少是 $0<|z|<\infty$

序列的左右端点只会影响其在零点和无穷点的收敛情况

$$\begin{cases} \boxed{n_1<0, n_2>0} & 0<|z|<\infty \\ \boxed{n_1<0, n_2\le 0} & 0\le|z|<\infty \\ \boxed{n_1\ge 0, n_2>0} & 0<|z|\le\infty \end{cases}$$

特定序列的ROC

右边序列 序列$x(n)$在$n<n_1$时为零

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

由根值法，若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|}<1$ 则 $|z|>\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x1}$

右边序列的收敛域是半径为R_{x1}的圆外部分

端点只影响无穷远处的收敛情况

$$\begin{cases} n_1\geq 0 & R_{x1}<|z|\leq\infty \\ n_1<0 & R_{x1}<|z|<\infty \end{cases}$$

特定序列的ROC

左边序列　序列$x(n)$在$n>n_2$时为零

若满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)z^n|}<1$

则左边序列的收敛域为

$$|z|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}}=R_{x2}$$

左边序列的收敛域是半径为R_{x2}的圆内部分

端点只影响无穷远处的收敛情况
$$\begin{cases} n_2>0 & 0<|z|<R_{x2} \\ n_2\le 0 & 0\le|z|<R_{x2} \end{cases}$$

特定序列的ROC

双边序列　　序列在整个区间都有定义。

看成左边序列和右边序列的组合

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}$$

$$R_{x1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}\qquad R_{x2}=1/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}$$

若R_{x1}和R_{x2}存在且$R_{x2}>R_{x1}$，则双边序列的ROC为

$$R_{x1}<|z|<R_{x2}$$

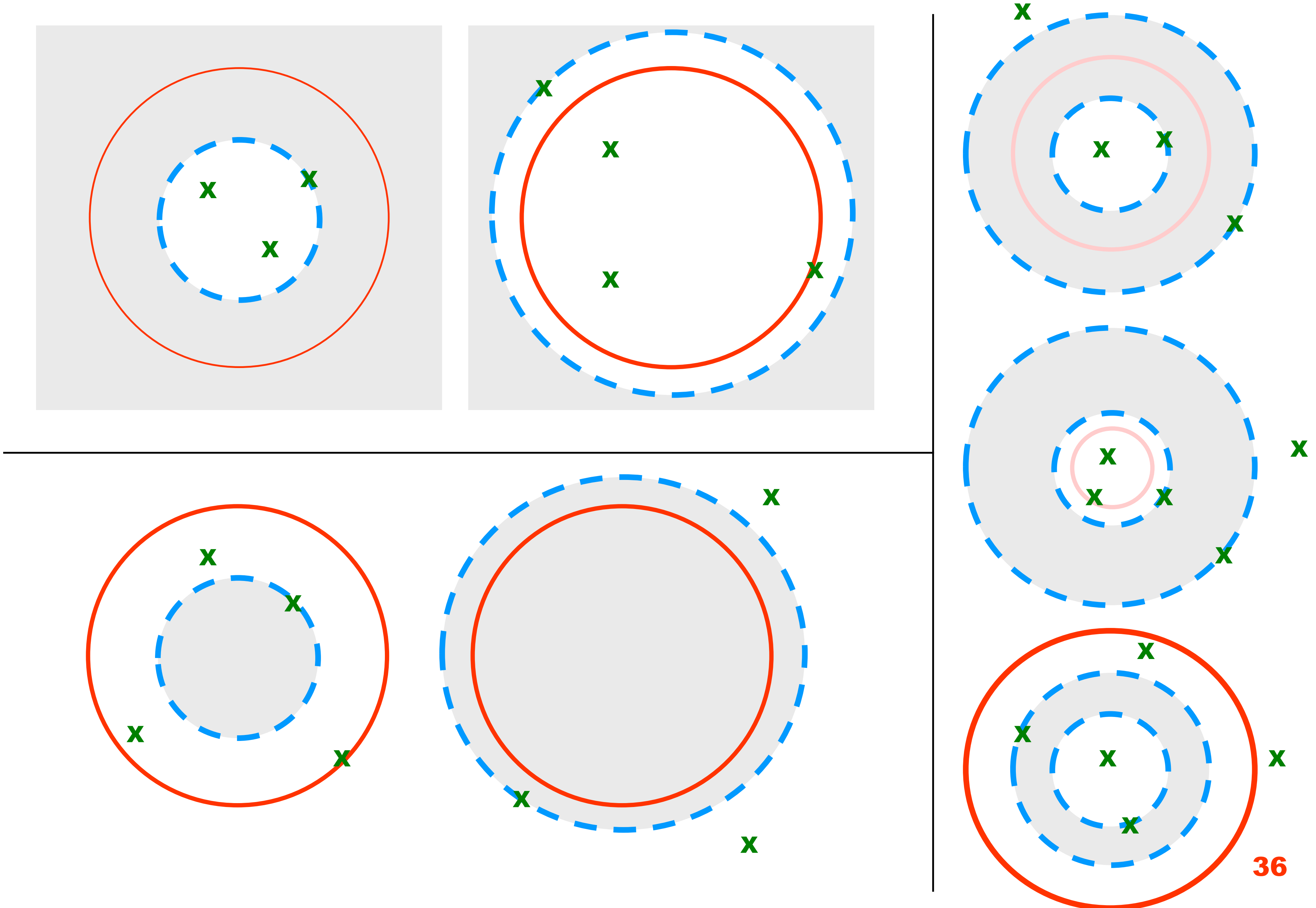
否则，ROC为空集，即双边序列不存在Z变换。

ROC与极点的关系

序列 ROC	以极点为边界，是连通的，内部不包含任何极点
右边序列	以其模最大的有限极点的模为半径的圆外面的区域(不包括圆周)
左边序列	以其模最小的非零极点的模为半径的圆内部的区域(不包括圆周)
双边序列	以模的大小相邻近的两个极点的模为半径的两个圆所形成的圆环区域(不包括两个圆周)

注：推导详见
http://pilot.cnxproject.org/content/collection/col10064/latest/module/m10622/latest

ROC与极点的关系



补充说明

求ROC所求得的是级数收敛的充分而非必要条件，实际的收敛域可能会更大。

实际的离散信号通常都是**因果序列**，收敛域是z平面上的**某个圆外面的区域**。

常见序列及其ZT

单位冲激序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & (n=0)\\ 0, & (n\neq 0)\end{cases} \rightarrow Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=\delta(0)=1$$

ROC: $0\leq |z| \leq \infty$

单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & (n\geq 0)\\ 0, & (n<0)\end{cases} \rightarrow$$

$$Z[u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

ROC: $(|z|>1)$

常见序列及其ZT

矩形脉冲序列

$$G_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < N \\ 0, & n < 0,\ n \ge N \end{cases}$$

$$Z[G_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \qquad (0 < |z| \le \infty)$$

单位指数序列

$$Z[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}} \qquad |z| > |a|$$

$$Z[-a^n u(-n-1)] = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n z^{-n}) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & |z| < |a| \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

结束