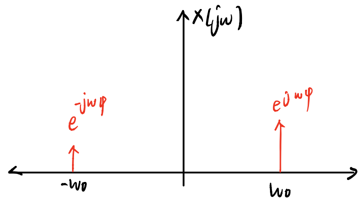
本次作业有4道题，分别在课件的第11页，第98页

作业1：参照课堂练习2的图例，画图以及文字说明 $x(t)=\cos(w_0t+\varphi)$ 欠采样时，恢复的信号不仅频率降低，而且相位相反

注：1) $w_0 < w_s < 2w_0$

2) 理想低通滤波器的带宽 w_c，满足 $w_s - w_0 < w_c < w_0$



- [解]：$x(t)=\cos(w_0t+\varphi)$

$x(t)$ 的频谱 $X(jw)$

$f(t)\leftrightarrow F(w)$

$$\cos(w_0t+\varphi)=\frac{1}{2}\left(e^{j(w_0t+\varphi)}+e^{-j(w_0t+\varphi)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{jw_0t}e^{j\varphi}+e^{-jw_0t}e^{-j\varphi}\right.$$

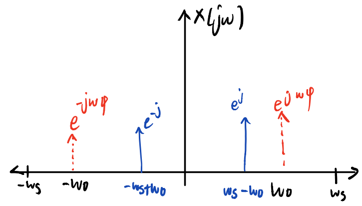
由 FT 性质和

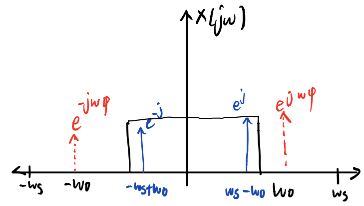
$f_1(t)=e^{jw_0t}$ $\quad f_2(t)=e^{-jw_0t}$

$F_1(w_0)=2\pi\delta(w-w_0)$ $\quad F_2(w_0)=2\pi\delta(w+w_0)$

可知 $X(jw)=\pi\ \left(\delta(w-w_0)e^{j\varphi}+\delta(w+w_0)e^{-j\varphi}\right)$

当 $w_0<w_s<2w_0$ 产生频谱混叠，$X_r(jw)=\pi\{\delta(w-(w_s-w_0))e^{-j\varphi}+\delta(w+(w_s-w_0))e^{j\varphi}\}$





$$\text{IFT}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{jwt}dw$$

$$x_r(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(w-(w_s-w_0))e^{-j\varphi}e^{jwt}dw+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(w+(w_s+w_0))e^{j\varphi}e^{jwt}dw$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-j\varphi}e^{j(w_s-w_0)t}+e^{j\varphi}e^{-j(w_s-w_0)t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j[(w_s-w_0)t-\varphi]}+e^{-j[(w_s-w_0)t-\varphi]}\right]$$

$$\cos[(w_s-w_0)]t-\varphi$$

恢复的信号频号频率降低，相位相反

作业2

- 1) 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(w)$，试证明

$$T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(nw_0)$$

其中，$w_0=2\pi/T$

设 $f(t)$ 的抽样信号 $\hat{f}(t)$ 为

$$\hat{f}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

$$\hat{f}(t)\Leftrightarrow\hat{F}(w)$$

$$\hat{F}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{-jwt}dt$$

$$\hat{F}(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\Sigma f(kT)\delta(t-kT)e^{-jwt}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{jwkT}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(w-mw_s)$$

当 $w=0$：$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(-mw_s)$

$$T\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(-mw_s)$$

$w_0=w_s$

$$T\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(nw_0)$$

- 2) 已知 $x(n)$ 的 DNFT 为 $X(w)$，试求下列各序的 DTFT

a) $x(n)\cdot x^*(-n)$

$$\text{DTFT}(x(n)\cdot x^*(-n))=\text{DTFT}(x(n))\cdot\text{DTFT}(x^*(-n))$$

$$=X(w)X^*(w)$$

b) $x(2n+1)$

$$\text{DTFT}(x(2n+1))$$

$$=\text{DTFT}(2n)e^{jw}$$

$$=X(\tfrac{1}{2}w)e^{jw}$$

c) $x(n)-x(n-2)$

$$\text{DTFT}(x(n))-\text{DTFT}(x(n-2))$$

$$=X(w)-X(w)e^{-2jw}$$

$$=X(w)(1-e^{-2jw})$$

d) $x(n)*x(n-1)$

$$=\text{DTFT}(x(n))\cdot\text{DTFT}(x(n-1))$$

$$=X(w)\cdot X(w)-e^{-jw}$$

$$=X(w)^2e^{-jw}$$

- 3. 若 $X(w)$ 是 $x(n)$ 的 DTFT，则

$$y(n)=\begin{cases}x(n/L) & n=0,\pm L,\pm 2L\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

的 DTFT 为 $Y(w)=X(Lw)$

$$Y(w)=\text{DTFT}(y(n))$$

$$=\sum_{n=\infty}^{\infty}y(n)e^{-jwn}$$

$$=\sum_{n=0,\pm L}x\left(\frac{n}{L}\right)e^{-jwn}$$

设 $m=\frac{n}{L}$，$n=mL$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{jwLm}$$

$$=X(Lw)$$ ■