清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.11.19

主观题 1分

设置

根据DFT推导过程，求 $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ 前N点，2N点，N + 1点，N - 1点的DFT形状。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

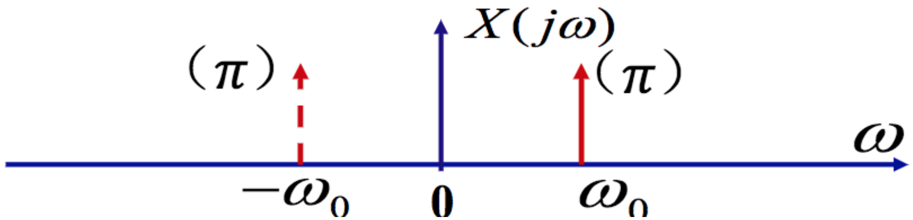
作答

【课堂练习1】

根据DFT推导过程，求 $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ 前N点，2N点，N+1点，N-1点的DFT形状。

$x(t)=\cos\omega_0 t$

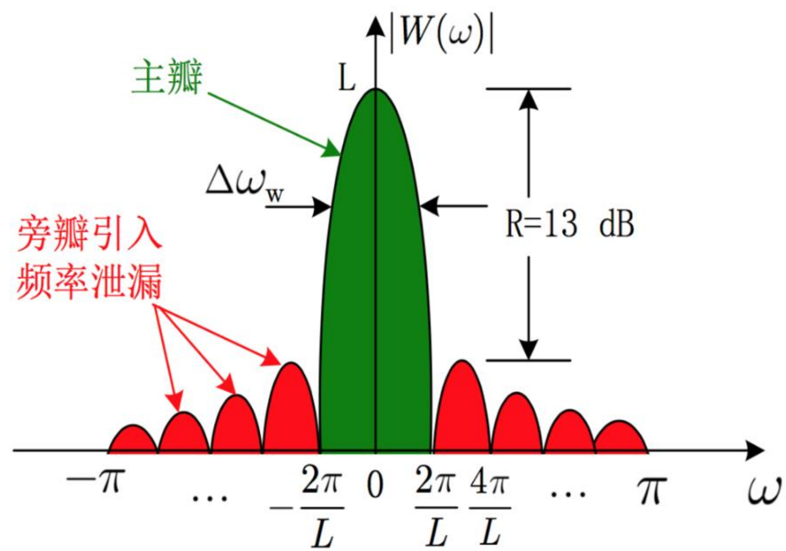
$x(t)$的频谱 $X(j\omega)$



$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\mathscr{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

宽为L的矩形窗 $W(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le L-1\\ 0, & n\ge L\end{cases}$

$$W(\omega)=\frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(L-1)/2}$$

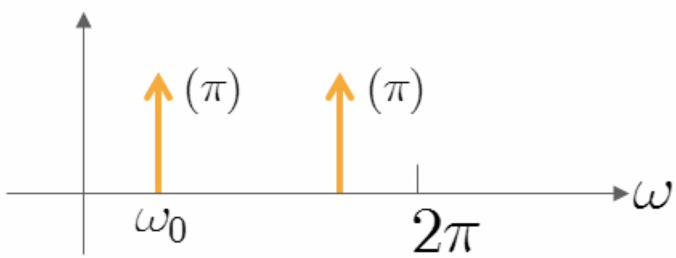


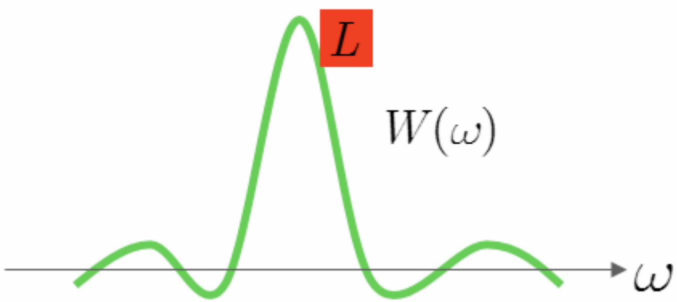
根据DFT推导过程，求$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$前N点，2N点，N+1点，N-1点的DFT形状。

$$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)=\cos(\omega_0 n) \longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$ 信号基频

离散信号是周期谱，数字频率下周期是2π考察一个周期

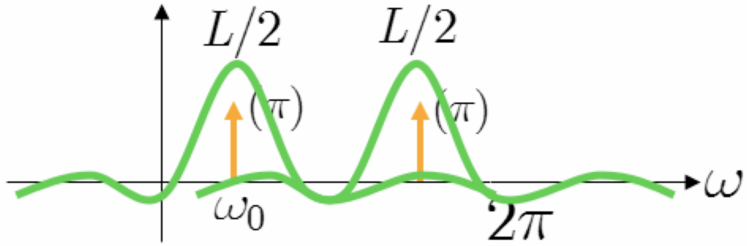
则根据信号基频值可知，频谱在 $\omega_0, 2\pi-\omega_0$ 处有冲激





数据被截断后，相当于是乘以W(n)，频域将作卷积

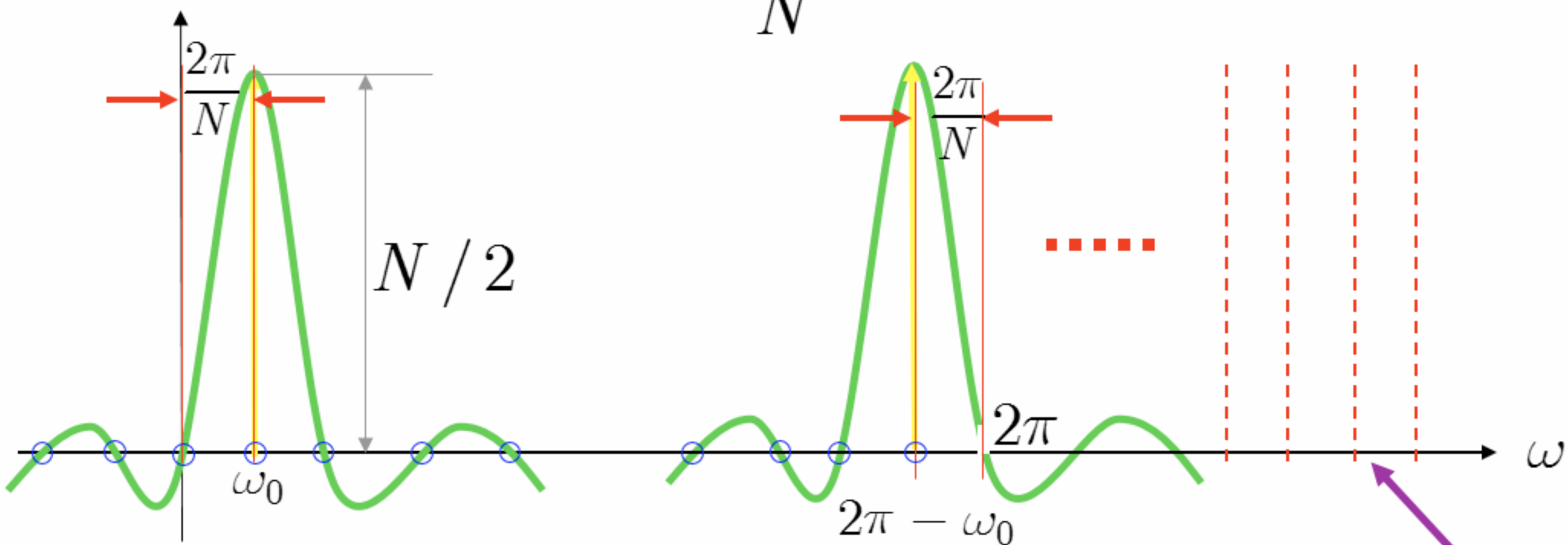
$$X'(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*W(\omega)$$



信号谱中的过零位置由窗函数谱零点位置决定

设L是窗宽(数据样本点数)，则过零点相对中心的位置为 $m \cdot \dfrac{2\pi}{L}$

1. L = N 窗函数主瓣基底宽 $2 \cdot \dfrac{2\pi}{N}$ 其中心位置为 $\omega_0 = 2\pi / N$



连续谱中的零点位置 $m \cdot \dfrac{2\pi}{N}$　　　DFT的采样位置 $k \cdot \dfrac{2\pi}{N}$

$$X(k) = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & k = 1, N-1 \\ 0, & else \end{cases}$$

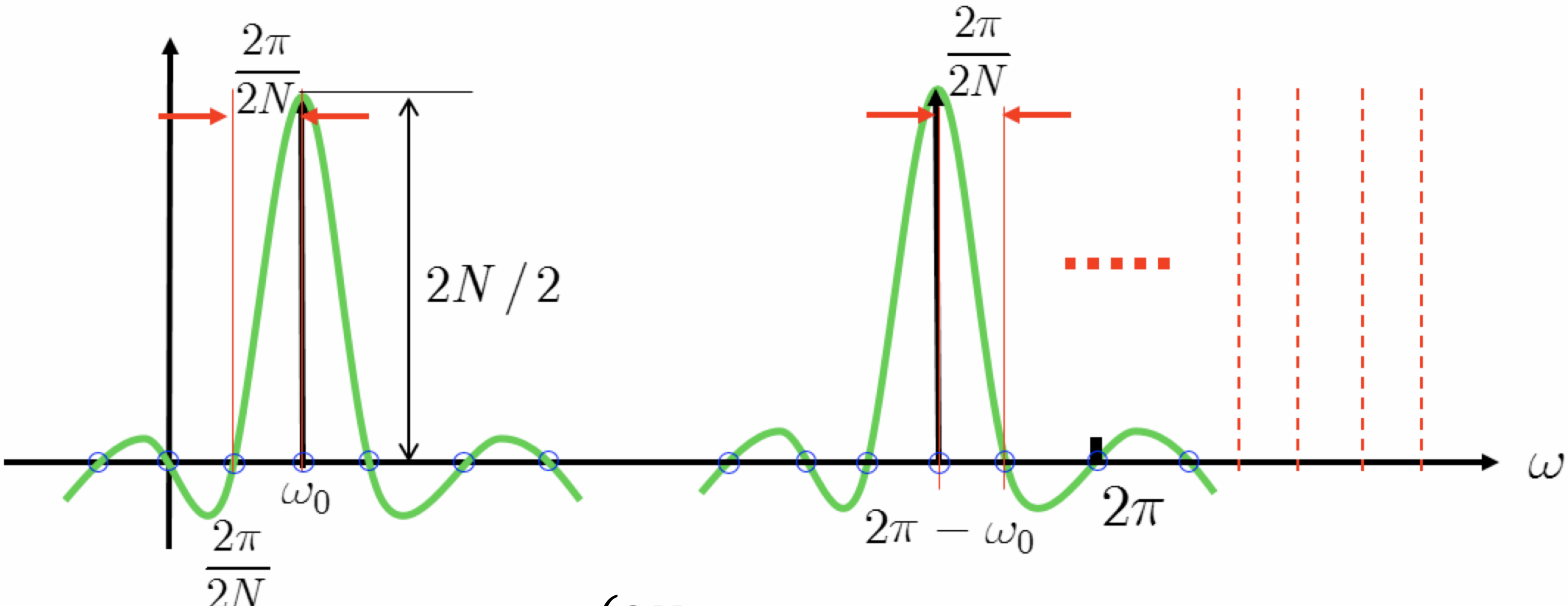
2. L = 2N

窗函数主瓣基底宽$2\cdot\frac{2\pi}{2N}$ 其中心位置为$\omega_0 = 2\pi / N$

连续谱中的零点位置 $m\cdot\frac{2\pi}{2N}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{2\pi}{N}$

过零点之间的间隔比（1）中的正好小了一倍

DFT的采样位置$k\cdot\frac{2\pi}{2N}$



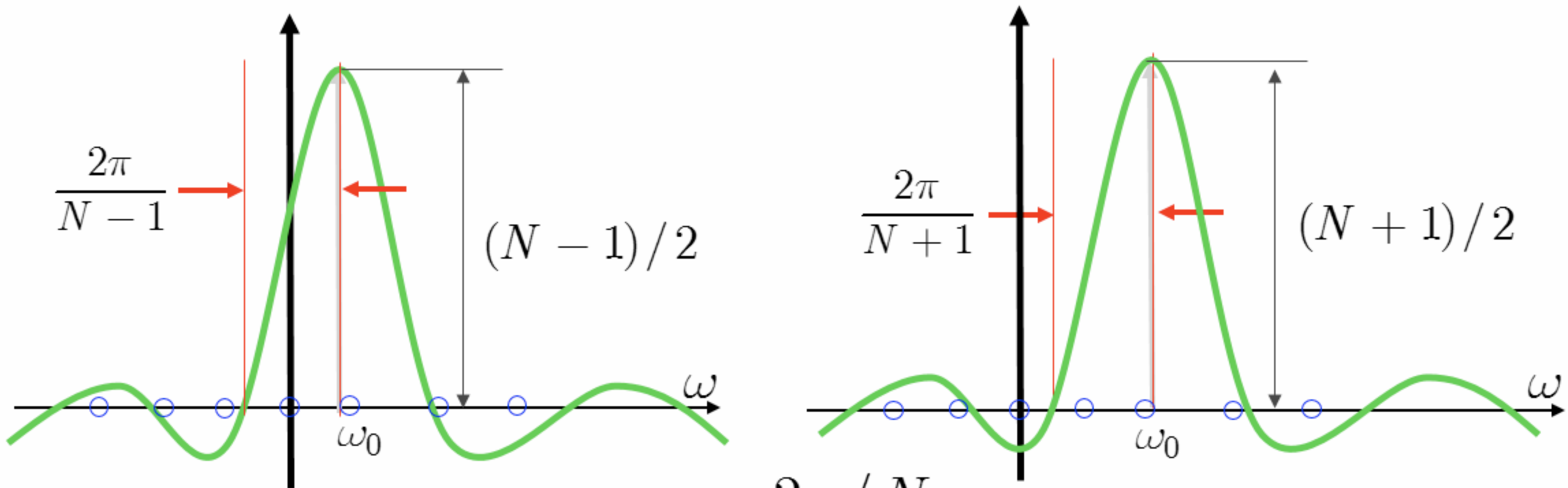
$$X(k)=\begin{cases}\frac{2N}{2}, & k=2, N-2\\ 0, & else\end{cases}$$

3. L = N – 1, N + 1

连续谱中的过零点位置 $m\cdot\frac{2\pi}{L} = m\cdot\frac{2\pi}{N\pm 1}$

过零点位置与 $\omega_0 = 2\pi/N$ 不吻合

DFT的采样位置 $k\cdot\frac{2\pi}{N\pm 1}$ 也与过零点位置不吻合



$\omega_0 = 2\pi/N$

→ $[?,?,?,?,?,\cdots ?,?,?,?,?]$

设有序列为$x(n)=\cos(n5\pi/9)$，计算该序列的DFT。设序列是以22kHz采样频率从连续时间信号采样得到的。

(1) 此序列的数字频率对应的模拟频率是多少?

(2) 用DFT计算信号频谱时，峰值与信号真实频率在位置上有误差。求最小的DFT采样值N，使得当采样值大于等于N时，始终满足误差在$\pm 4Hz$范围内。由于使用FFT来计算，所以请仅考虑N为2的幂的情况。

(3) 当以上一问确定的N来进行FFT时，序列频谱的峰值$X(k)$所对应的k等于多少?

作答

【课堂练习第一问知识点回顾】

在第二章中，FT得到的是模拟频率Ω
在DTFT引入归一化时间后，变换结果是数字频率ω

序列及其数字频谱的概念： $x(n) \Leftrightarrow X(\omega)$

模拟频率的奈奎斯特区间：

$$\left[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}\right]$$

数字频率的奈奎斯特区间：

$$-\pi, \pi$$

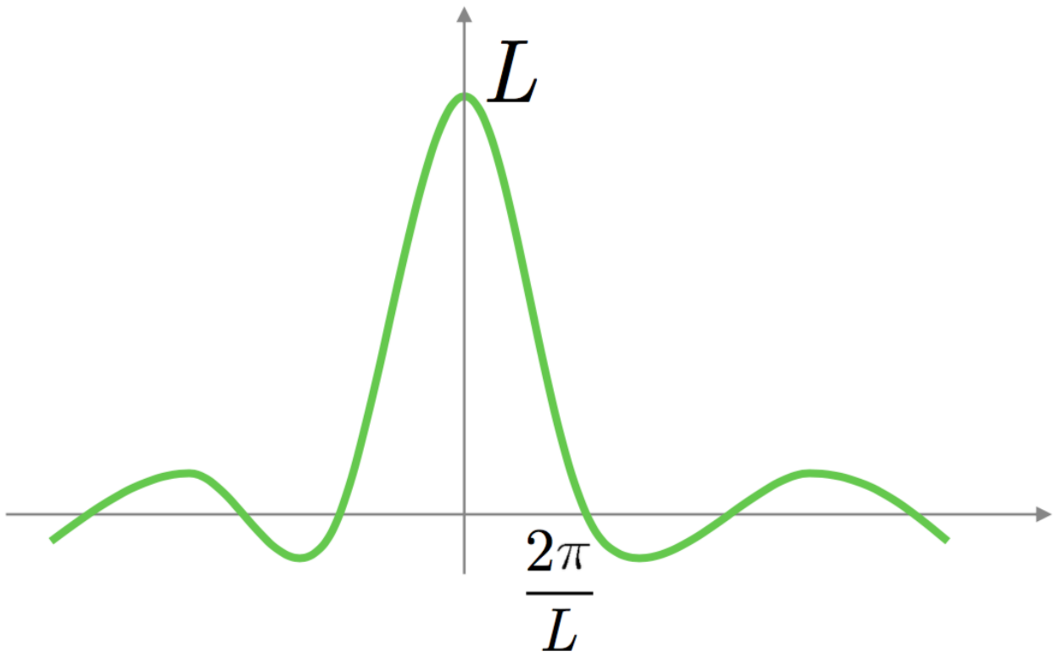
关系：

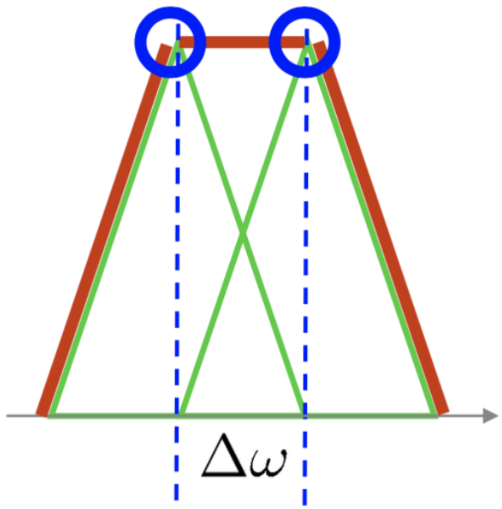
$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s = \Omega / f_s \qquad \Omega = \omega f_s$$

【课堂练习第二问知识点扩展】

▶ DTFT的频率分辨率---物理频率分辨率

- 定义1：在由序列求得的连续频谱中，谐波分量之间的最小间隔
- **定义2：序列被截断后，在新的连续频谱中，可分辨出来的最小谐波分量间隔**





因此，若要找到信号频谱中的分量位置，则要求上图满足“波峰可分辨”的条件，这要求

$\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s = \Omega / f_s$　　$\Omega = \omega f_s$

$$\Delta\omega \geq \frac{2\pi}{L} \rightarrow 2\pi(\Delta f / f_s) \geq \frac{2\pi}{L} \rightarrow$$

$$\Delta f \geq \frac{f_s}{L}$$ 采样率和数据点数确定时，频率位置的精度就定了

$$L \geq f_s / \Delta f$$ 采样率确定时，要达到某频率分量位置精度，数据点数须…

【课堂练习第三问知识点回顾】

序列DFT的定义与物理意义

序列长度为**L**，求其DTFT谱上$[0,2\pi]$区间上均匀分布的**N**个谱值由$x(n),n=0,1,\cdots L-1$**直接计算**$X(k),k=0,1,\cdots N-1$的过程：

$$\omega_k = 0 + k\cdot\frac{2\pi}{N} = 2k\pi/N \qquad k = 0,1,\cdots N-1$$

$$\boxed{X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}}$$ **DFT**

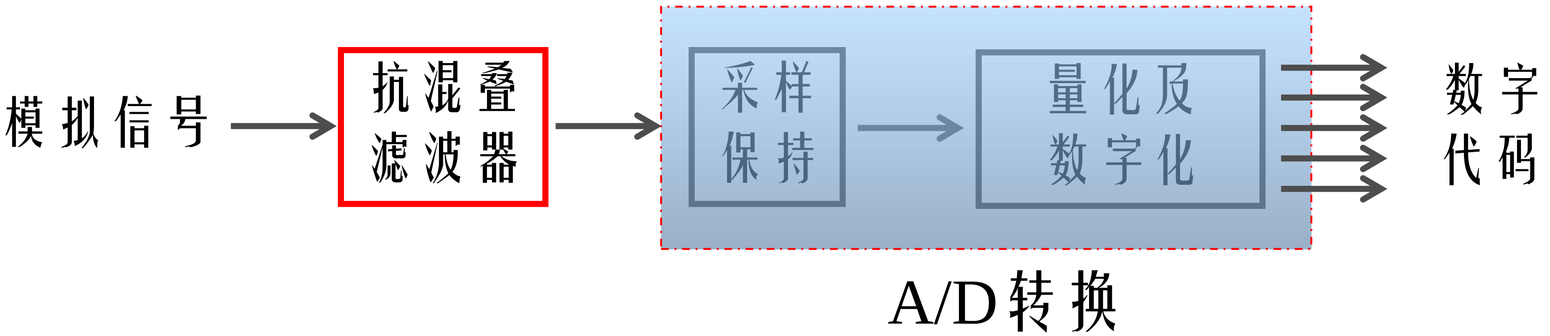
为了表示方便（因为$\omega_k = 2\pi k/N$只与k有关）

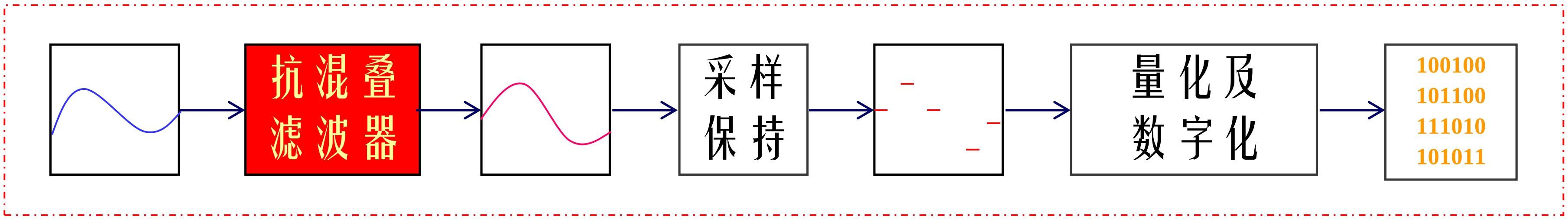
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad\qquad X(\omega_k) \to X(k)$$

DFT $$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)W_N^{nk}, k = 0,1,\cdots N-1$$

过采样和抽取、提升采样率和插零

模拟信号到数字信号的转换





A/D转换的过程

为什么要使用抗混叠滤波器?

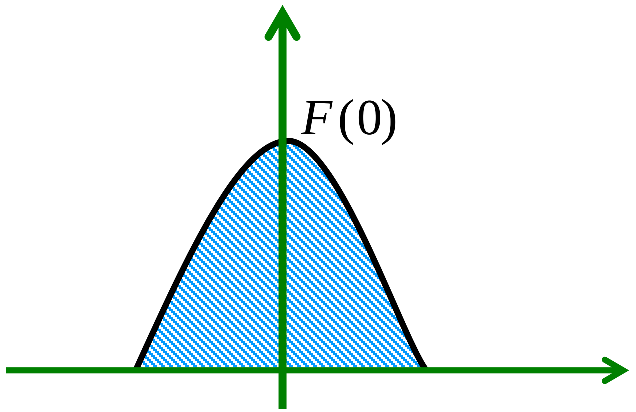
$$f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}$$

频谱变化

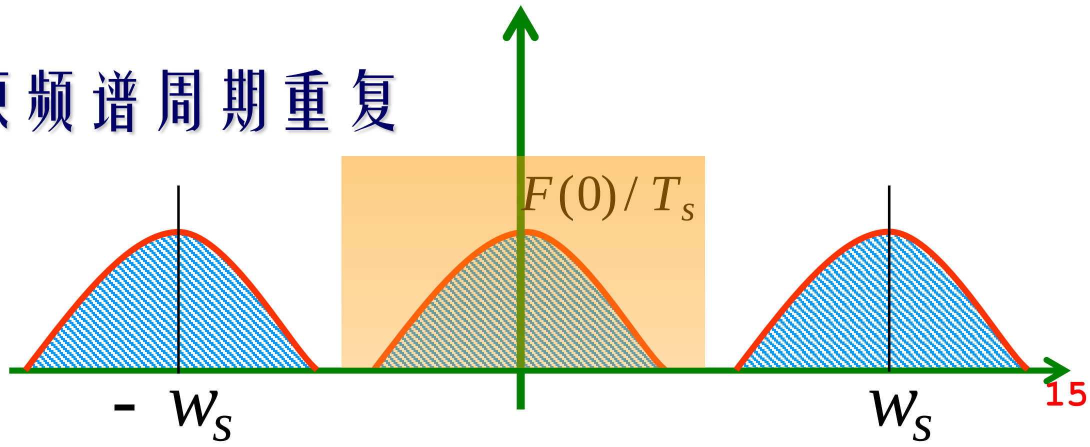
$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left(\omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$



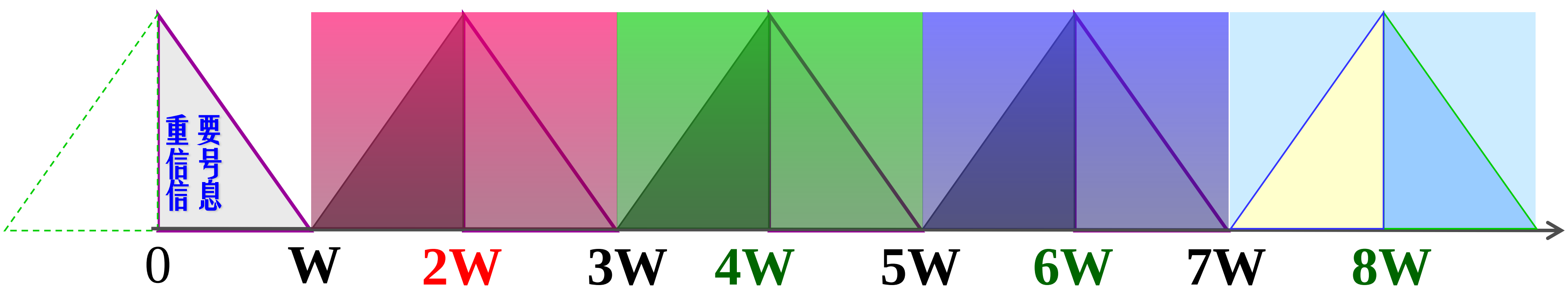
原频谱周期重复



信号处理举例－过采样和抽取

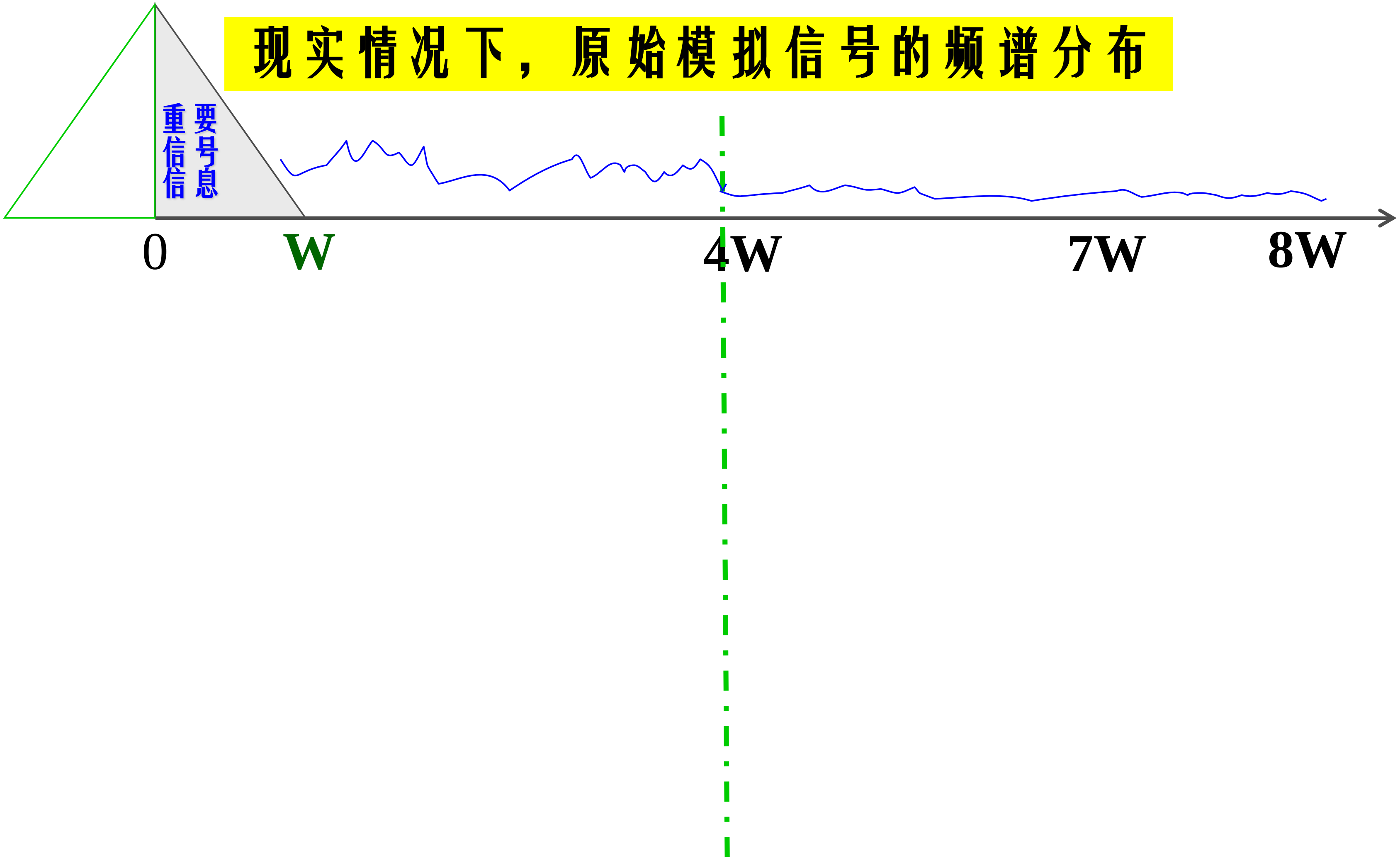
理想情况下，原始模拟信号的频谱分布[0..W]

以2W采样得到的数字信号的数字频谱



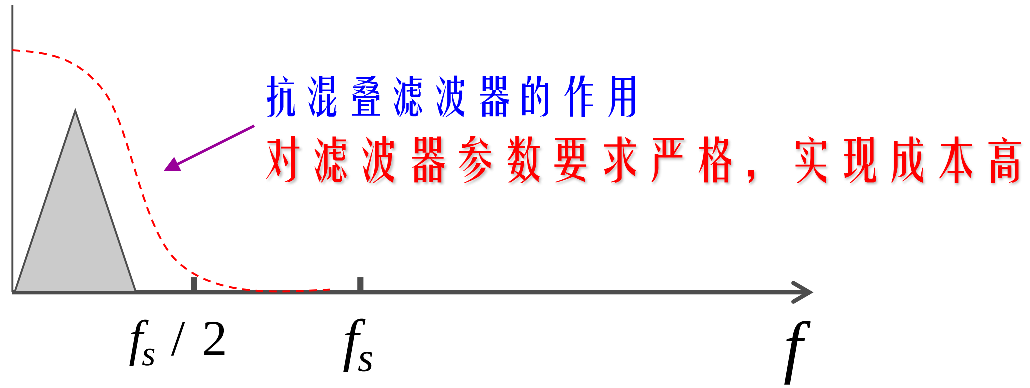
频谱以2W为周期进行重复

信号处理举例 – 过采样和抽取

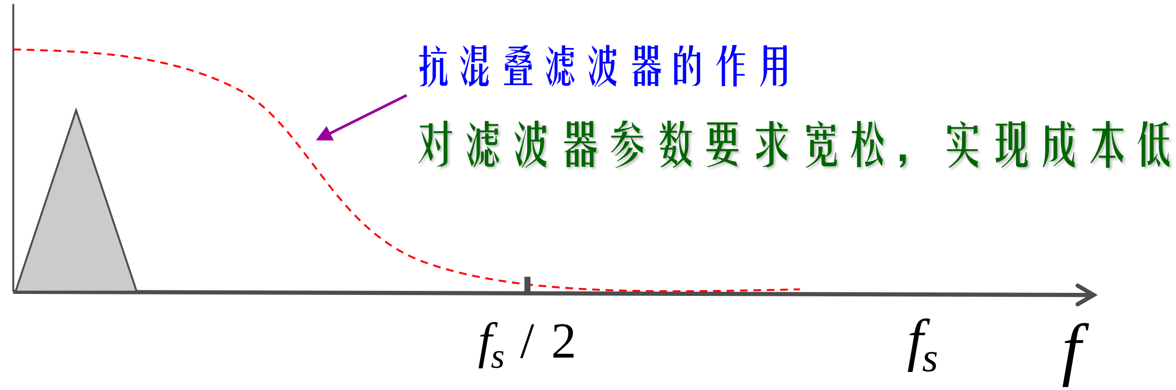


信号处理举例－过采样和抽取

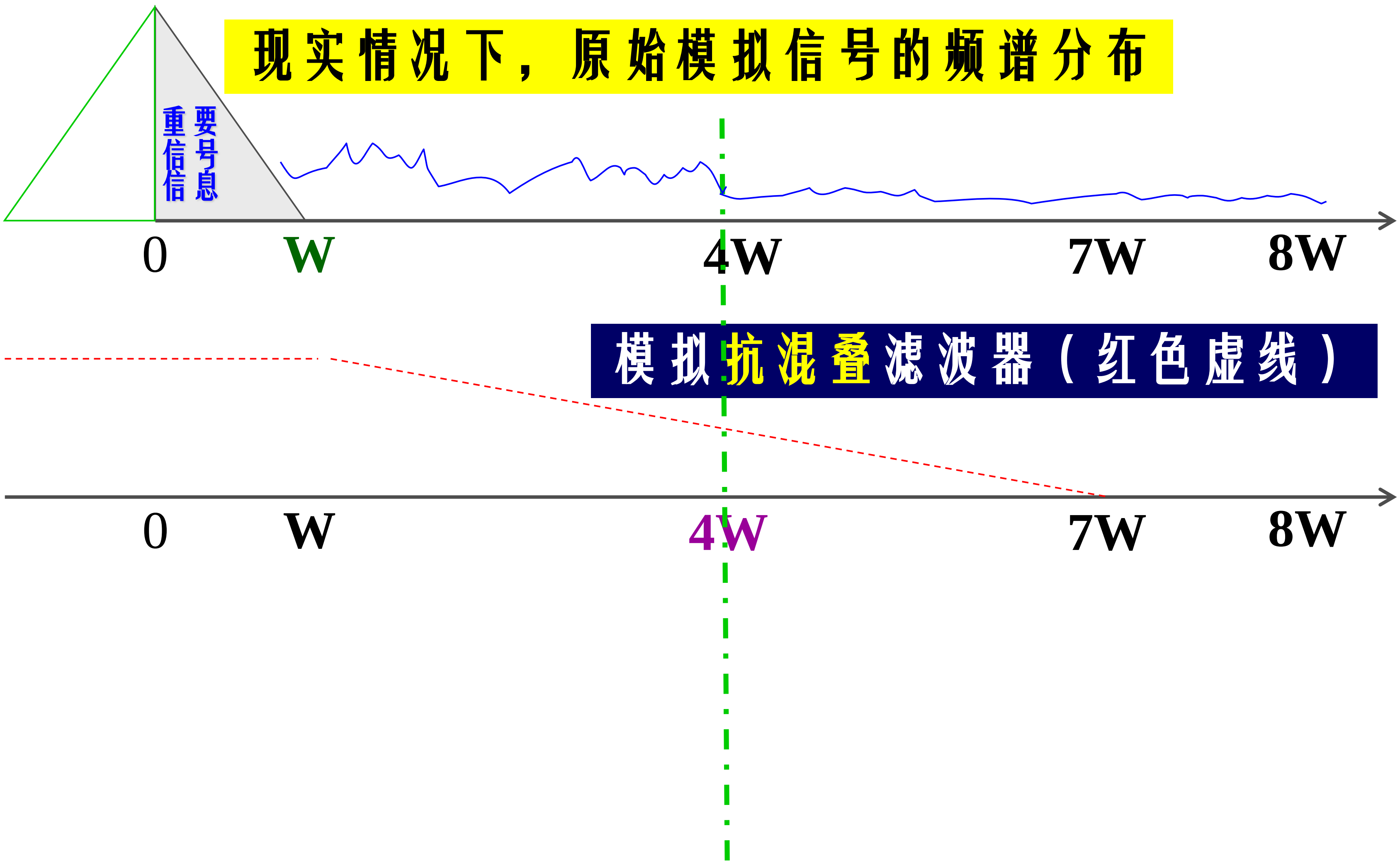
低采样率



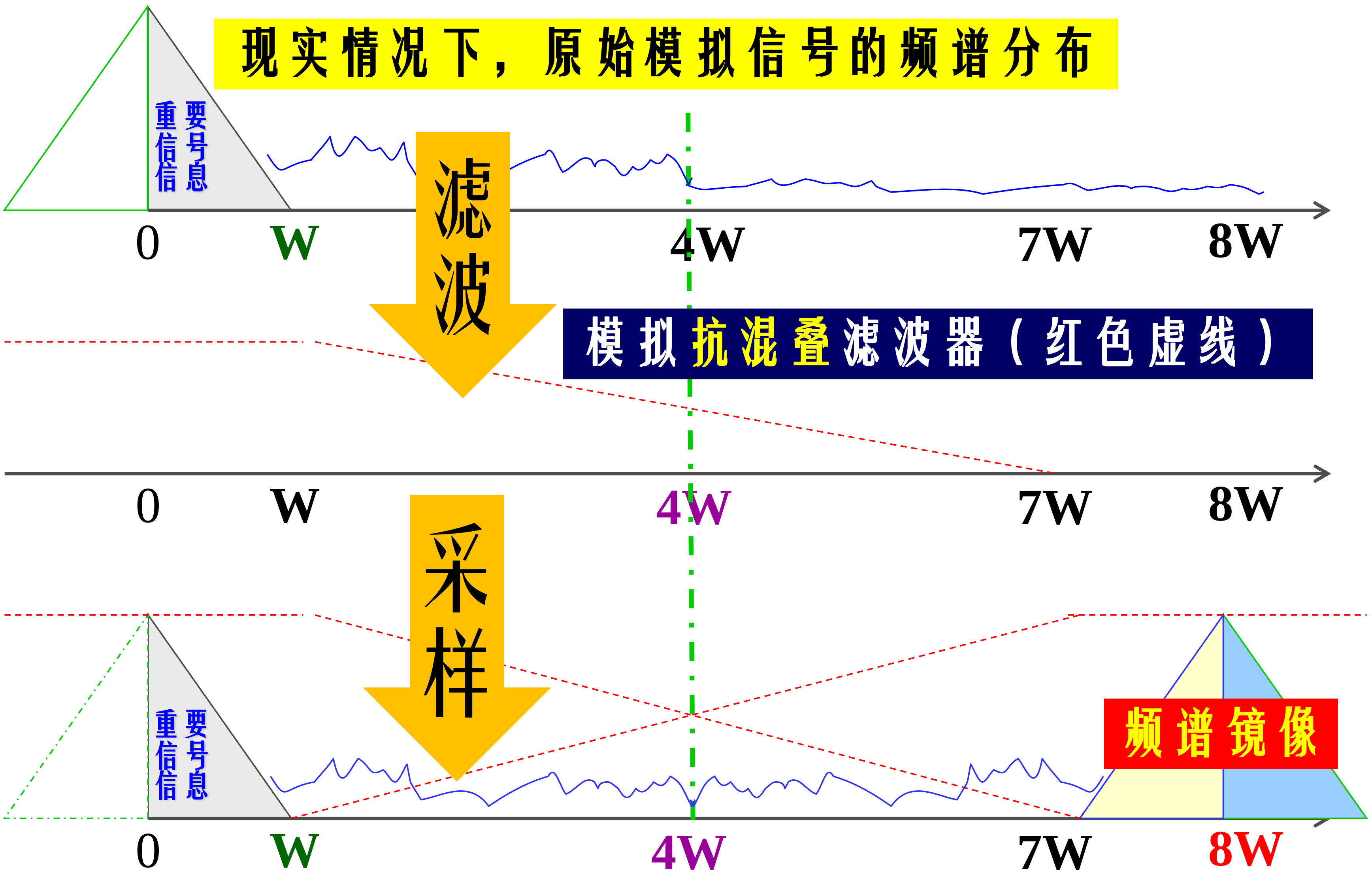
高采样率



信号处理举例－过采样和抽取

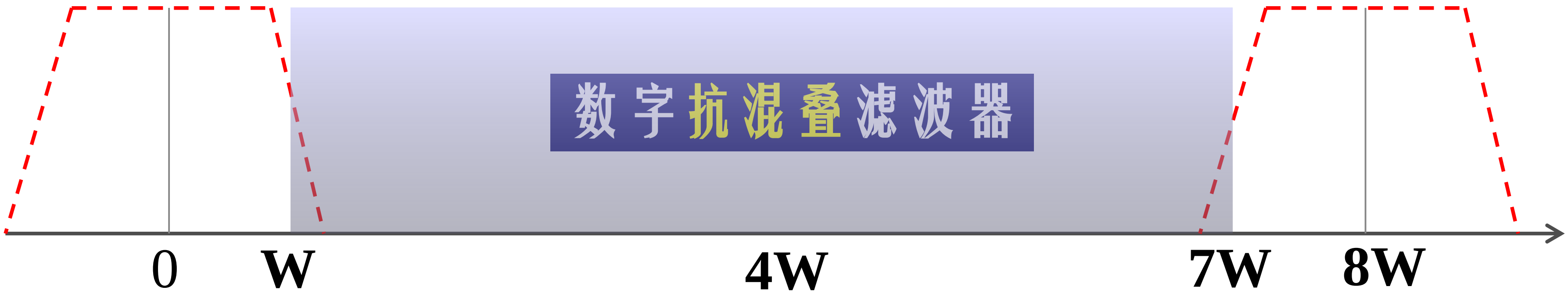


信号处理举例－过采样和抽取

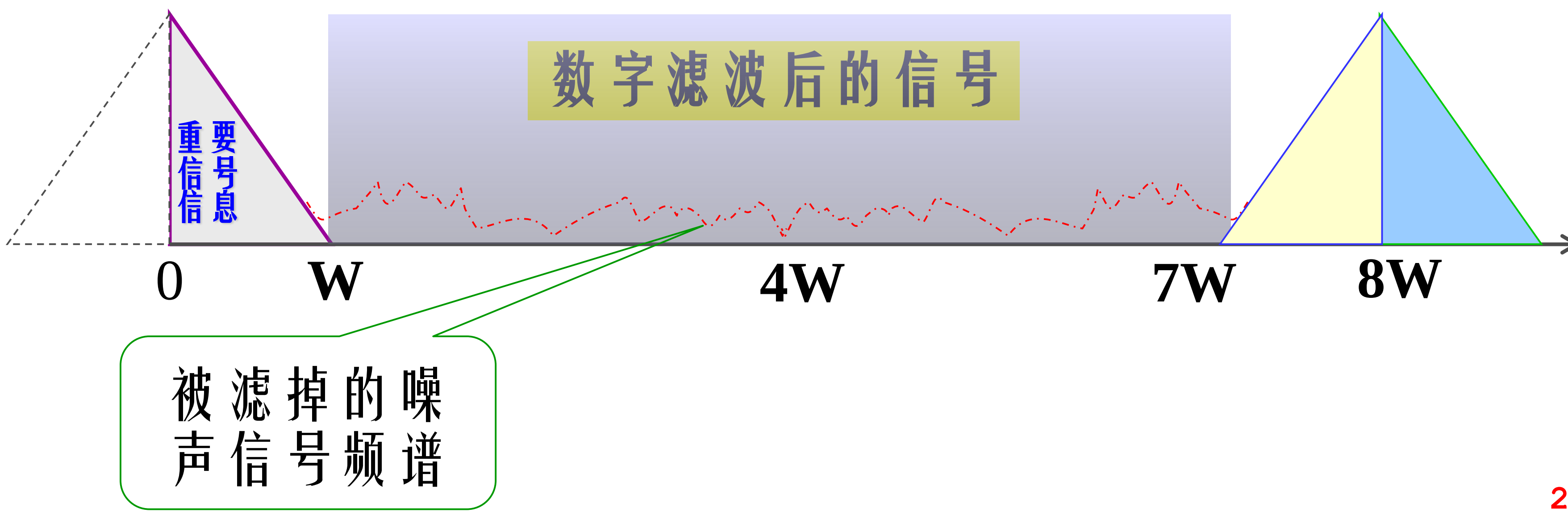


8W采样后的离散信号（序列）的频谱

信号处理举例－过采样和抽取



对过采样信号进行数字滤波

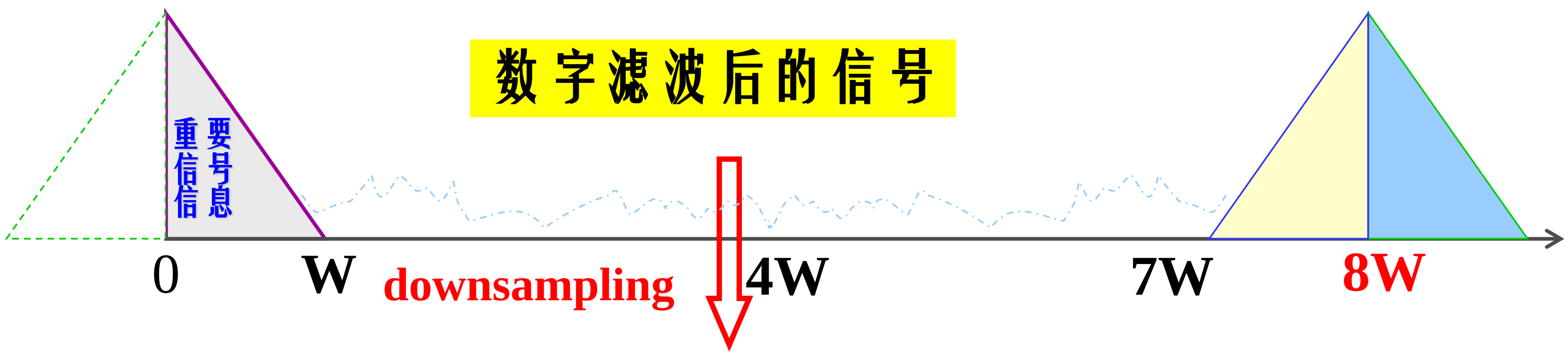


信号处理举例－过采样和抽取

但是，采样率高，必然会得到更多的样本，这就会加重后续数字信号处理的负担，而且原始信号其实并不需要那么高的采样频率。

为了随后的数字信号处理，必须降低信号的采样频率，从而使得执行时间提高，使算法复杂度最小。

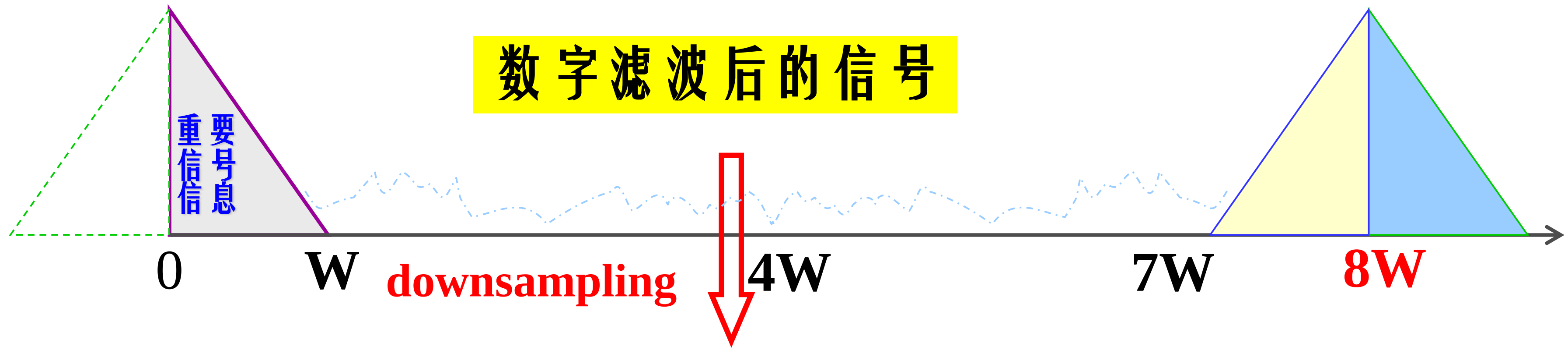
信号处理举例－过采样和抽取



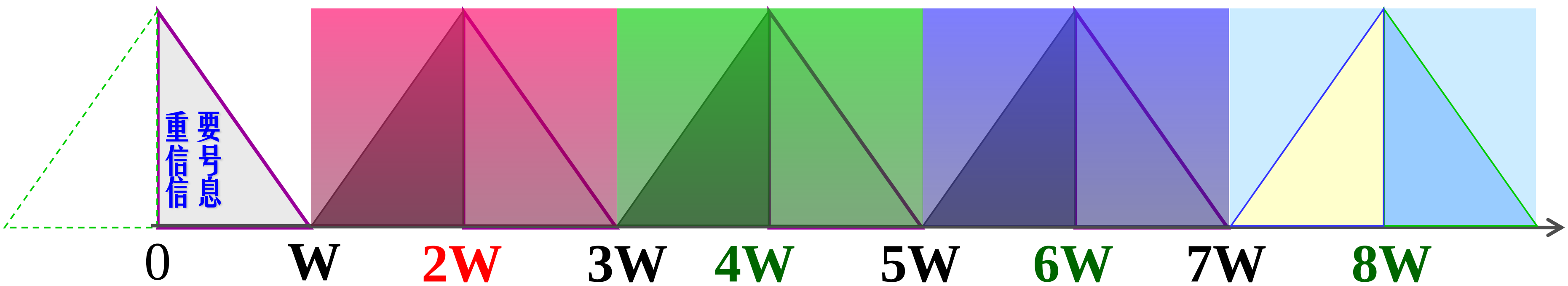
¼抽取（二次采样）后数字信号的频谱分布

¼抽取，即每4个点保留1个点，抛弃3个点。这样，8W采样的数据就成了2W采样的数据。为什么？可以这样理解：相当于是一个包含两步的采样过程：第一步以8W采样率取4N个点，第二步从4N个点中再抽取N个点。显然，这种“两步采样”的效果，与以2W采样率“一步”抽取同样的N个点是完全相同的。

信号处理举例 – 过采样和抽取



¼抽取（二次采样）后数字信号的频谱分布

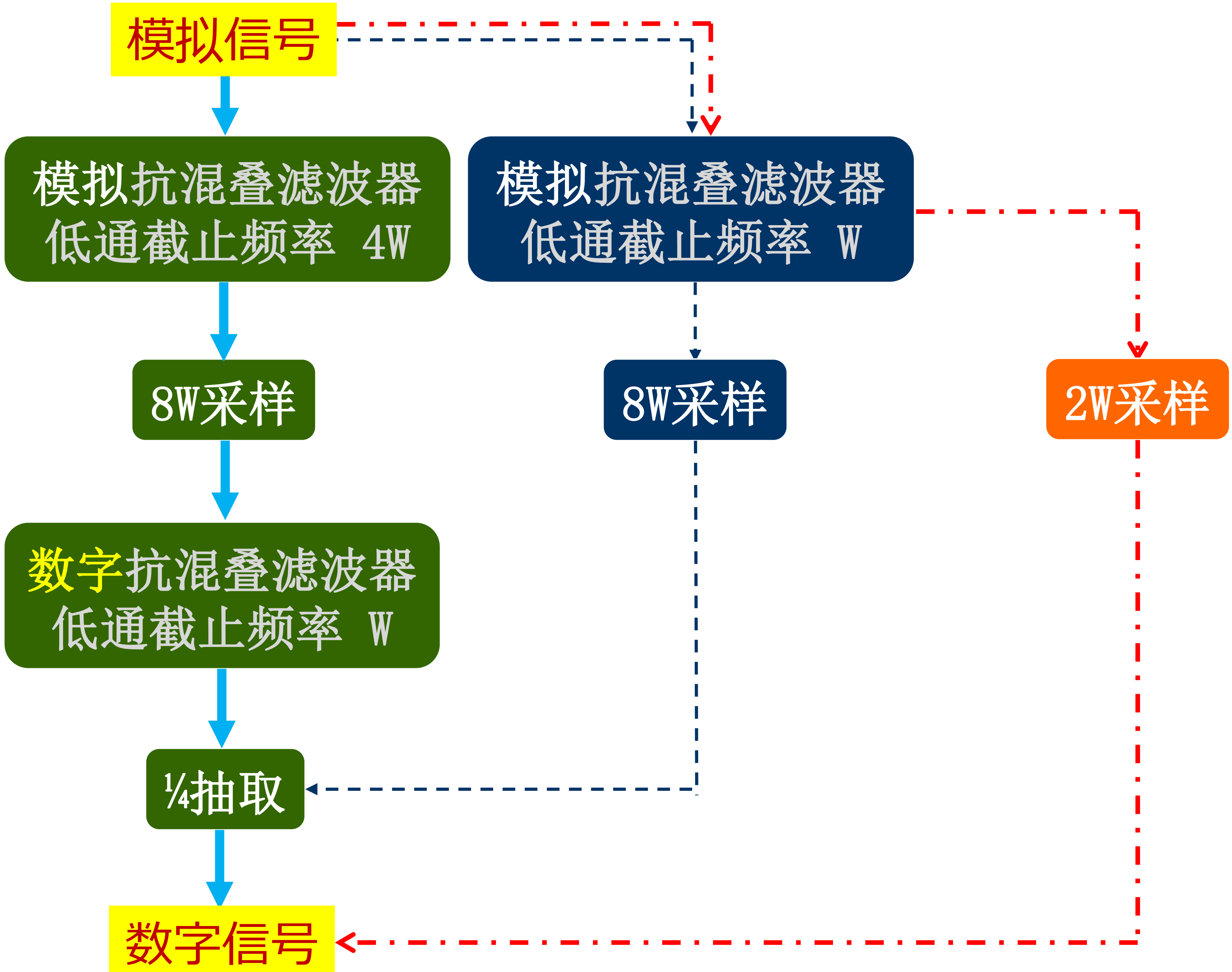


频谱以2W为周期进行重复

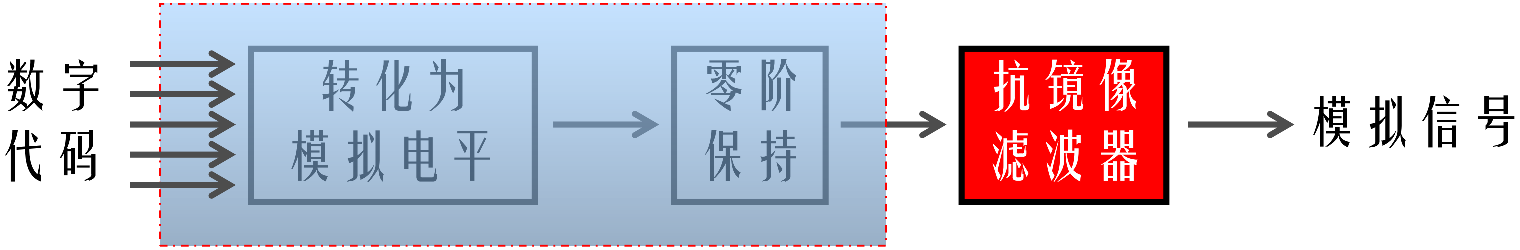
最终的数字信号与原信号以2W采样得到的数字信号是一样的！

目的：以高质量的DSP来弥补低成本的模拟抗混叠滤波器

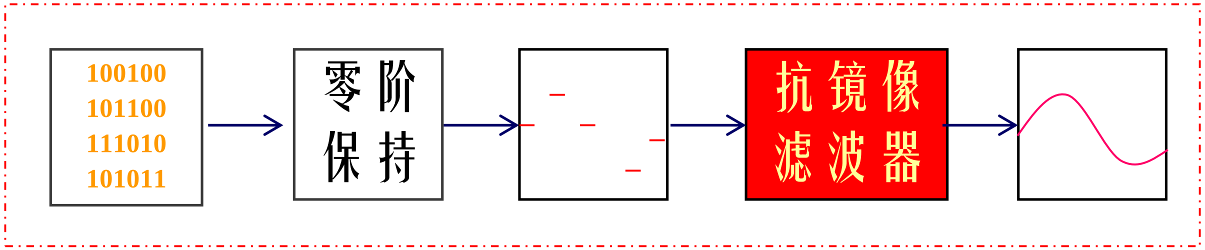
信号处理举例－过采样和抽取



数字信号到模拟信号的转换

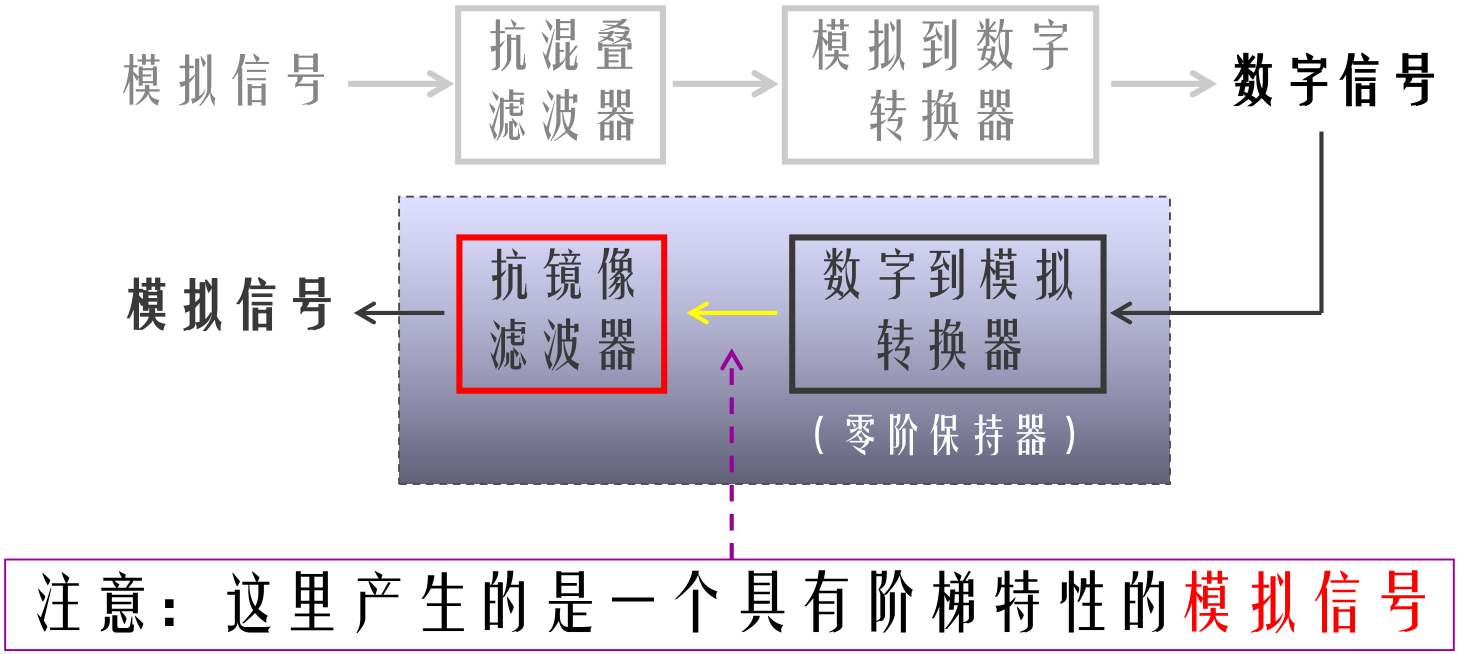


D/A转换



D/A 转换过程中，“信号”的形态变化

信号处理举例－采样提升与插零



由于阶梯信号中包含有数字处理所引入的高频成分，因此，必须把它们去掉。

此工作是由截止频率为WHz的抗镜像滤波器完成的。

【知识点回顾】采样与采样定理

内插：由样本值重建某一函数的过程。

- **理想内插:**以理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应（Sa函数形态）作为内插函数

设 $h(t)$ 为理想低通滤波器的单位冲激响应，则

$$x(t)=x_p(t)*h(t)=\sum_{n-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$$

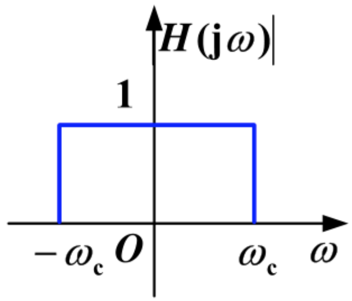
函数与单位冲激函数的卷积

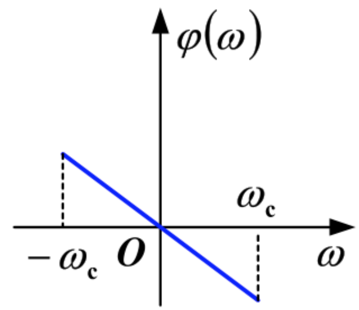
$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。

【**课堂练习2**】理想低通滤波器（频域矩形脉冲）的单位冲激响应是Sa函数形态

理想低通滤波器





$$H(j\omega)=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

即

$$|H(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0$$

理想低通滤波器的单位冲激响应$h(t)$，即为其傅立叶逆变换。

【知识点回顾】采样与采样定理

理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

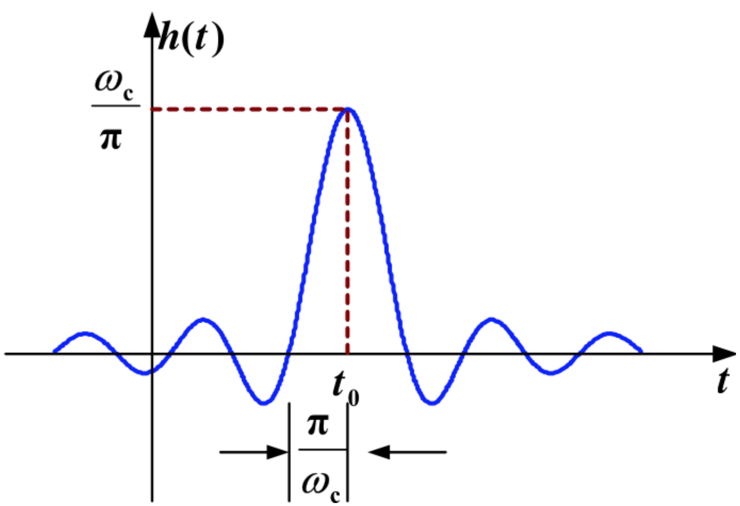
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(t-t_0)}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c(t-t_0)}\right]$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c(t-t_0)\right]$$

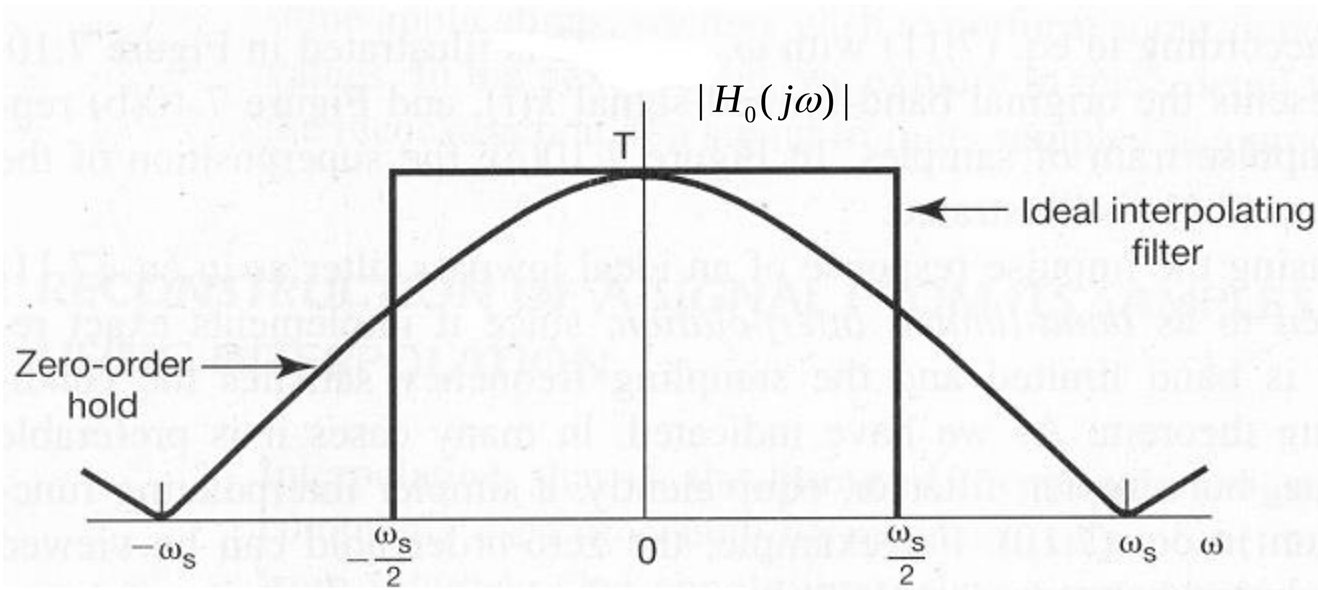
$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\mathrm{Sa}\left[\omega_c(t-t_0)\right]$$

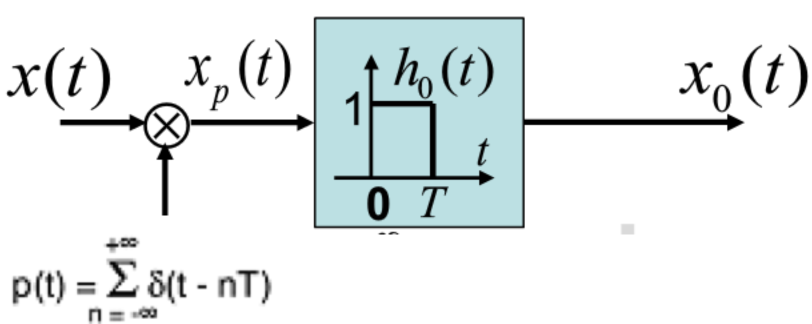


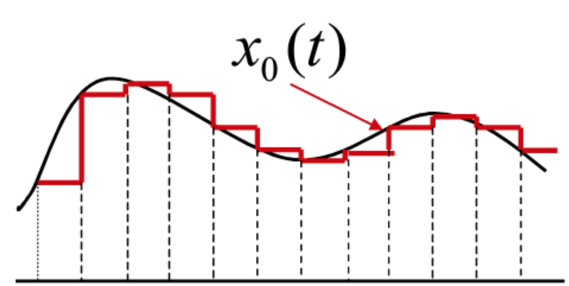
【知识点回顾】采样与采样定理

- **零阶保持内插:**

零阶保持内插的内插函数 $h_0(t)$ 是矩形脉冲



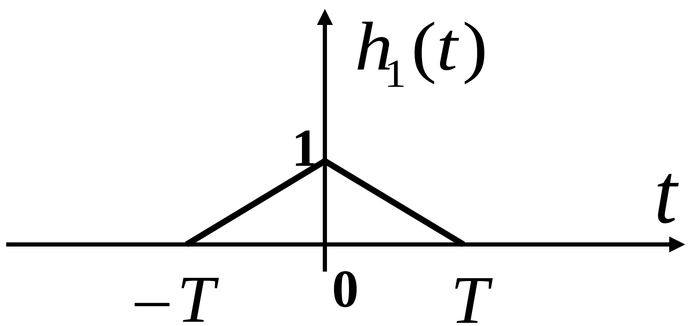


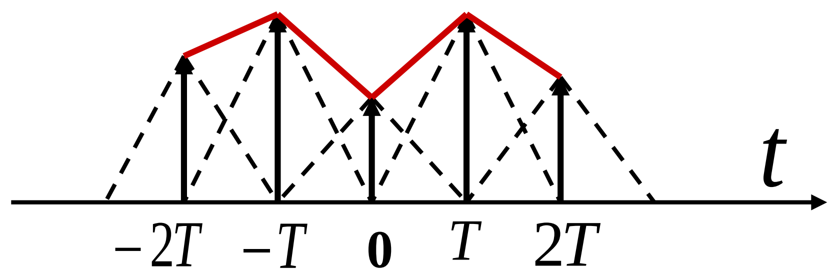


【知识点回顾】采样与采样定理

一阶保持内插(线性内插):

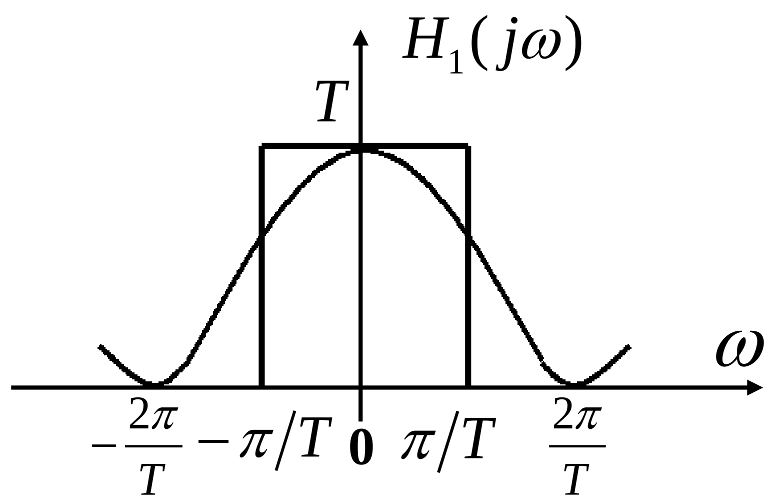
线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。





$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



Tips: 三角形脉冲可以表示成两个矩形脉冲的卷积

信号处理举例－采样提升与插零

根据前面过采样一节的知识，截止频率越高，模拟抗镜像滤波器越是容易实现（成本越低）。

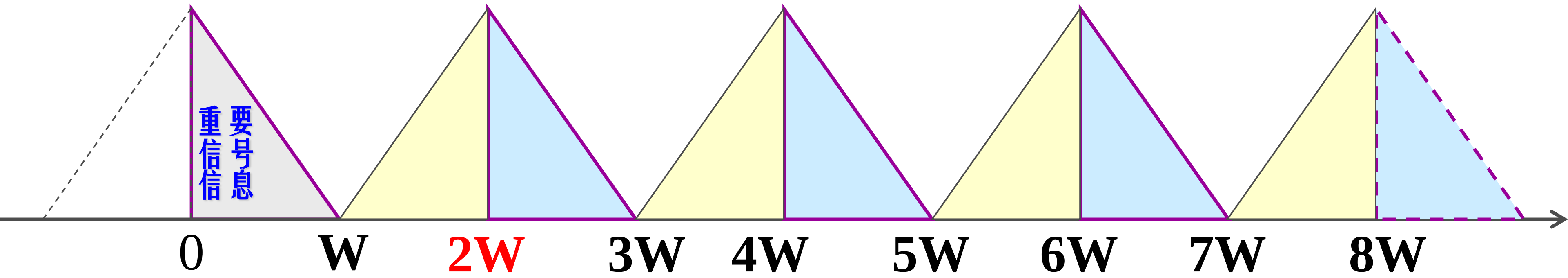
因此，为了提高截止频率，数字信号的采样率需要进行“提升”。

对于数字信号，要实现采样率提升很容易。最简单的办法是在原数字序列中插入一定数目的零，

$$x(n) \rightarrow x(n/M), M \in \mathbb{Z}^{+}$$

再经过一个数字抗镜像滤波器，就可以达到提升信号采样率的目的。

信号处理举例－采样提升与插零



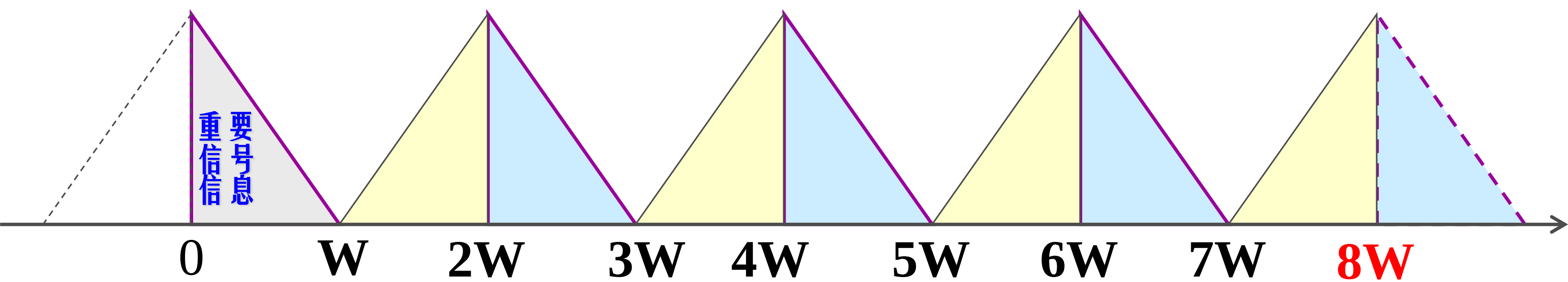
f_s

2W采样的数字信号

upsampling

$$x'(n) \to x(n\,/\,M), M \in \mathbb{Z}^{+} \Rightarrow X'(k) = X(k)$$

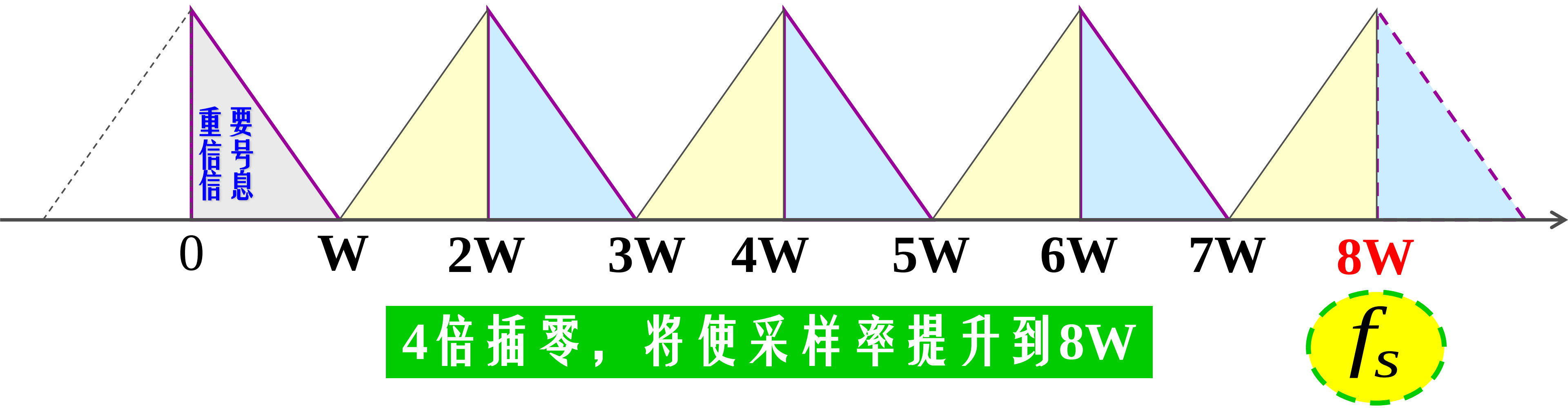
时域扩展（插零），频域压缩 ➔ 相同宽度的频带容纳更多频谱分布



4倍插零，将使采样率提升到8W

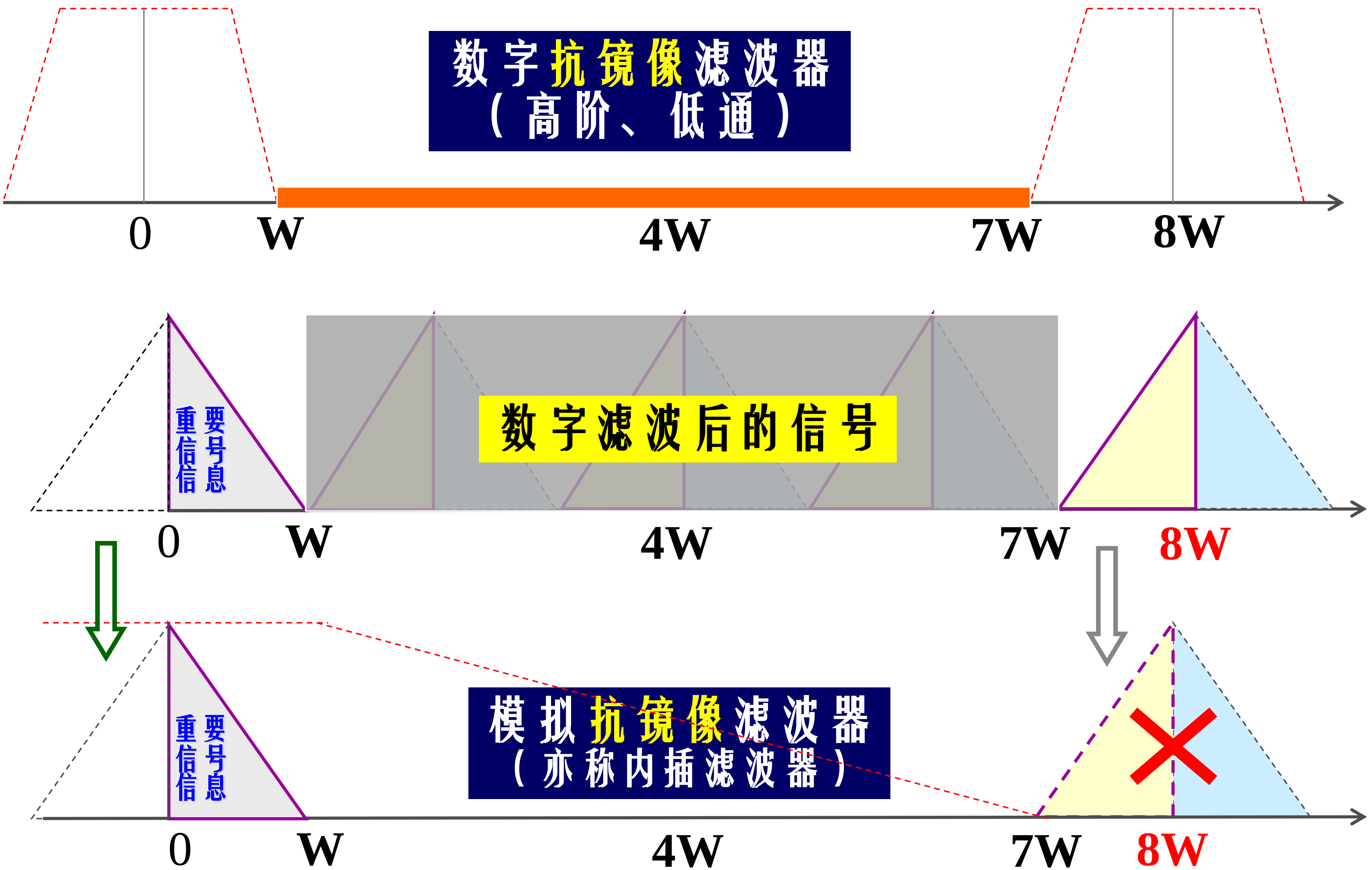
f_s

信号处理举例 – 采样提升与插零



注意：对已经存在的采样点，其物理时刻是客观不变的。现在多了一些“样本”点，则“样本之间的时间间隔”就由原来的T，变成T/4。换算成采样频率的变化，就是从2W上升到 2W*4=8W 了。

信号处理举例－采样提升与插零



信号处理举例－采样提升与插零

- 如果不通过插零改变信号的采样频率，数字抗镜像滤波器就不能改变原始信号的频谱，因为数字滤波器形状的频谱镜像将出现在2W处而不是8W处。
- 插零在信号频谱中生成的“空间”使得模拟抗镜像滤波能顺利进行。
- 经过数字抗镜像滤波后，用一个低阶模拟滤波器就可以轻易恢复所需的信号频谱。
- 通过使用数字技术可以获得任意的滤波器锐度，从而提高输出信号的保真度。

信号处理举例－采样提升与插零

模拟信号

模拟抗混叠滤波器
低通截止频率 4W

8W采样

数字抗混叠滤波器
低通截止频率 W

¼抽取

数字信号

4倍插零

数字抗镜像滤波器
低通截止频率 7W

模拟抗镜像滤波器
（亦称内插滤波器）

模拟信号

周期信号$f(t)$抽样满足抽样定理，一个周期内采N个抽样值，其N点 DFT 为$X(k)$，试用$f(t)$的 FS 系数F_n表示$X(k)$。要求：根据 FS 和 DFT 的相关定义求解，求解过程中**不利用**傅里叶变换 FT。

作业：

1. 设有某个用于信号频谱分析的记录仪，能以万分之一秒的采样频率对信号进行采样，如果要求频谱分析时频率分辨率不大于10Hz，则至少要记录多长时间的信号采样值？输入信号的最高频率是多少？

2. 对一个频率为5 kHz的正弦信号进行采样，采样频率为40 kHz，共采得128点数据。

   (a) 为得到这128点数据，要花多长的时间？

   (b) 如果对这128点数据进行128点的DFT，则在所得到的频谱图中，哪些下标k处会有局部峰值出现？

3. 以10 kHz为采样频率，采得某信号的10 ms的数据。已知该信号含有三个正弦谐波分量，它们的频率满足$f_1 < f_2 < f_3$，其中$f_1 = 1\text{kHz}$，$f_3 = 2\text{kHz}$。如果要从采样数据的DFT频谱图中区分出这三个分量的谱峰，则谐波分量频率f_2的最大值和最小值分别是多少？

结 束