清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.11.12

DFT/IDFT与连续时间信号的频谱分析

- 用DFT计算非周期信号的FT
  - ?
- 用IDFT计算非周期信号的IFT
  - ?
- 用DFT计算周期信号的FS
  - ?

DFT应用的理论要点

（FT谱）

$$F(\omega)$$

$$\updownarrow$$

$$f(t)$$

DFT应用的理论要点

$((F(\omega)/T_s))_{\omega_s}$表示$F(\omega)/T_s$以$\omega_s$为周期复制

$$
\begin{tikzcd}
\text{(FT谱)}\ ((F(\omega)/T_s))_{\omega_s} \arrow[d, leftrightarrow] & F(\omega) \arrow[l, "\text{(值相等)}"', "\text{(周期重复)}"] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{f(n)} & f(t) \arrow[l, "\text{(值相等)}"', "\text{(时域采样)}"]
\end{tikzcd}
$$

DFT应用的理论要点

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{（FT谱）}\ ((F(\omega)/T_s))_{\omega_s} \arrow[d, leftrightarrow] & F(\omega) \arrow[l, "\text{（值相等）}", "\text{（周期重复）}"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{f(n)} \arrow[d, leftrightarrow] & f(t) \arrow[l, "\text{（值相等）}", "\text{（时域采样）}"'] \\
X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jnw} &
\end{tikzcd}
$$

（DTFT谱）

DFT应用的理论要点

（FT谱）

二者相等

$$
\begin{tikzcd}
((F(\omega)/T_s))_{\omega_s} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dd, bend right, dashed, leftrightarrow] & F(\omega) \arrow[l, "\text{（值相等）}", "\text{（周期重复）}"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
f(n) \arrow[d, leftrightarrow] & f(t) \arrow[l, "\text{（值相等）}", "\text{（时域采样）}"'] \\
X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jnw} &
\end{tikzcd}
$$

（DTFT谱）

DFT应用的理论要点

（FT谱）$((F(\omega)/T_s))_{\omega_s} \xleftarrow[\text{（周期重复）}]{\text{（值相等）}} F(\omega)$

二者相等 $f(n) \xleftarrow[\text{（时域采样）}]{\text{（值相等）}} f(t)$

$$X(k) \xleftarrow[\text{（频谱采样）}]{\text{（值相等）}} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jnw}$$

（DFT谱）　　（DTFT谱）

探讨一：

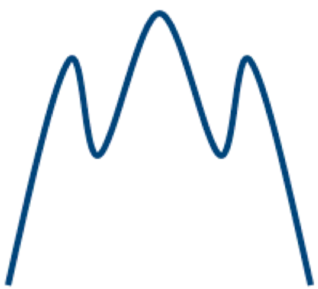
- 用DFT计算非周期信号的FT

【课堂练习一】

已知连续时间信号$f(t)$按T_s采样后的DFT函数$X(k)$，求其FT函数$F(\omega)$的图像（近似）

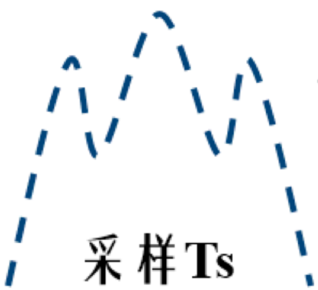
【课堂练习一】

已知连续时间信号$f(t)$按T_s采样后的DFT函数$X(k)$，求其FT函数$F(\omega)$的图像（近似）



$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$



$$x(n) \longleftrightarrow \boxed{\left(\left(F(\omega)/T_s\right)\right)_{\omega_s}}$$

$$X(k) = X(\omega_k) = X(\omega)\big|_{\omega=\omega_k}$$

$$X(k) = X(\omega_k) = \left(F(\omega)/T_s\right)\big|_{\omega=\omega_k} = F(\omega_k)/T_s$$

逐点绘制 $\boxed{F(\omega_k) = T_s X(k)}$

探讨—结论

- 用DFT计算非周期信号的FT
  - 频谱在对应频率处的取值等于DFT结果乘以Ts

探讨二：

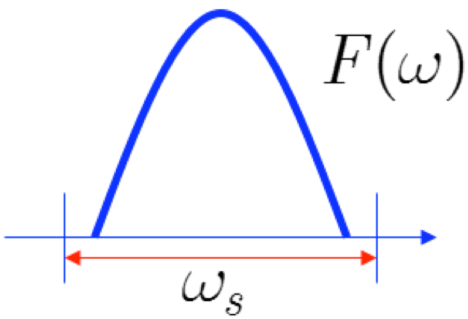
- 用IDFT计算非周期信号的IFT

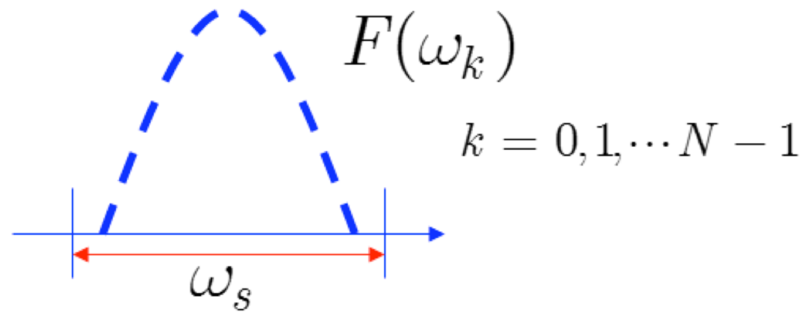
【课堂练习二】

▶ 已知连续时间信号 $f(t)$ 的FT函数 $F(\omega)$，试由 $F(\omega)$ 求信号 $f(t)$ 的图象(近似)

【课堂练习二】

▶ 已知连续时间信号 $f(t)$ 的FT函数 $F(\omega)$，试由 $F(\omega)$ 求信号 $f(t)$ 的图象(近似)





$$\mathrm{IDFT}\left[F(\omega_k)\right]=\mathrm{IDTFT}\left[\left(\left(F(\omega)\right)\right)_{\omega_s}\right]$$

$$=T_s\cdot\mathrm{IDTFT}\left[\left(\left(F(\omega)/T_s\right)\right)_{\omega_s}\right]=T_s\cdot f(n)$$

$$\boxed{f(n)=\frac{1}{T_s}\cdot\mathrm{IDFT}\left[F(\omega_k)\right]}$$

$T_s=2\pi/\omega_s$ 样本时间间隔。与 $F(\omega_k)$ 的范围有关

探讨二结论

- 用IDFT计算非周期信号的IFT
  - 信号在对应时间点取值等于IDFT结果除以Ts

探讨三：

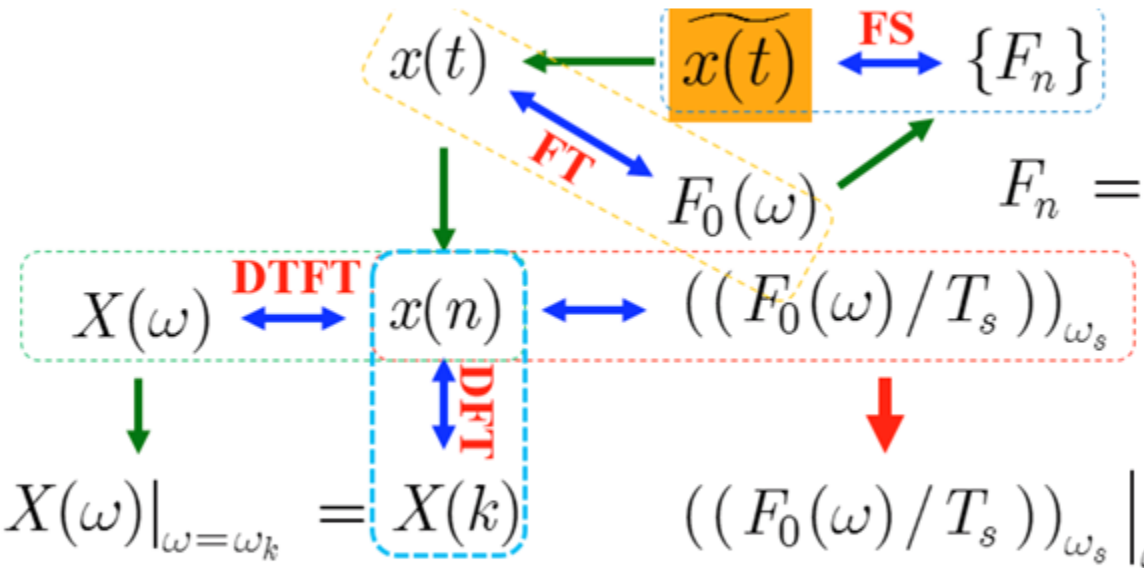
- 用DFT计算周期信号的FS

【课堂练习三】

周期信号抽样满足抽样定理，正好在一个周期内有N个抽样值，求N点DFT与原周期信号FS谱的关系。

【课堂练习三】

周期信号抽样满足抽样定理，正好在一个周期内有N个抽样值，求N点DFT与原周期信号FS谱的关系。



$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1} \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_k = k\frac{\omega_s}{N}$$

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=\omega_k} = F_0(\omega)/T_s|_{\omega=\omega_k} = F_0(k\frac{\omega_s}{N})/T_s$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{(T_1/N)} = N\frac{2\pi}{T_1} = N\omega_1$$

$$X(k) = F_0(k\omega_1)/T_s \Rightarrow F_0(k\omega_1) = T_s X(k)$$

$$F_k = \frac{1}{T_1}F_0(k\omega_1) = \frac{1}{T_1}(T_s X(k)) = \frac{1}{N}X(k)$$

探讨三结论

- 用DFT计算周期信号的FS
  - FS频谱分量值等于DFT结果除以N

结论

- 用DFT计算非周期信号的FT
  - 频谱在对应频率处的取值等于DFT结果乘以Ts
- 用IDFT计算非周期信号的IFT
  - 信号在对应时间点取值等于IDFT结果除以Ts
- 用DFT计算周期信号的FS
  - FS频谱分量值等于DFT结果除以N

【作业点评】

1、 求$x(n)=\{1,2,3,4\}$的4点DFT和8点DFT。

2、 求$x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)$的N点DFT，其中$0\le n\le N-1$， $0<m<N$且$m\in Z$ 。

FFT应用 —— 序列卷积的快速算法

计算DFT的快速算法 -- FFT

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

计算DFT的计算量：

每算一个X(k)，需要N次复数乘法，N-1次加法。因此，N点DFT需要N*N次复数乘法，N(N-1)次复数加法。

直接计算DFT的复杂度为O(N²)

尽管预先算好并保存旋转因子 W_N^k 可以节省部分运算，但按定义式直接编程求DFT的运算量仍然很大。

FFT的原理

特别说明：FFT是DFT的快速算法，不是新的变换方法。其算法基础是：W的两个性质。

1. W具有周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{nk\%N}$$

2. W具有对称性

$$W_N^{nk+\frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$$

经过周期性与对称性简化之后，容易发现DFT运算中存在着不必要的重复计算，避免这种重复，是简化运算的关键。

N点DFT运算可以分解为两组N/2点DFT运算，然后再取和。

DFT的复杂度与点数N有关！

FFT的原理

$$X(k) = \sum_{偶数n} x(n)W_N^{nk} + \sum_{奇数n} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{(2r)k} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \boxed{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk}} + W_N^k \boxed{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk}}$$

$$\begin{cases} g(r) = x(2r) \\ h(r) = x(2r+1) \end{cases} \quad r = 0,1,2\ldots\ldots\frac{N}{2}-1$$

FFT的原理

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)W_{N/2}^{rk} = G(k) \\ \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)W_{N/2}^{rk} = H(k) \end{cases} \quad k = 0,1,2\ldots\ldots\frac{N}{2}-1$$

$$X_N(k) = G_{N/2}(k) + W_N^k H_{N/2}(k),$$

$$k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

注意G(k)与H(k)的周期是N/2

FFT的原理

$$\boxed{\begin{aligned} G(\tfrac{N}{2}+k) &= G(k) \\ H(\tfrac{N}{2}+k) &= H(k) \end{aligned}}$$

$$W_N^{(\frac{N}{2}+k)} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k$$

于是，N点X(k)可用N/2点的G(k)和H(k)来计算：

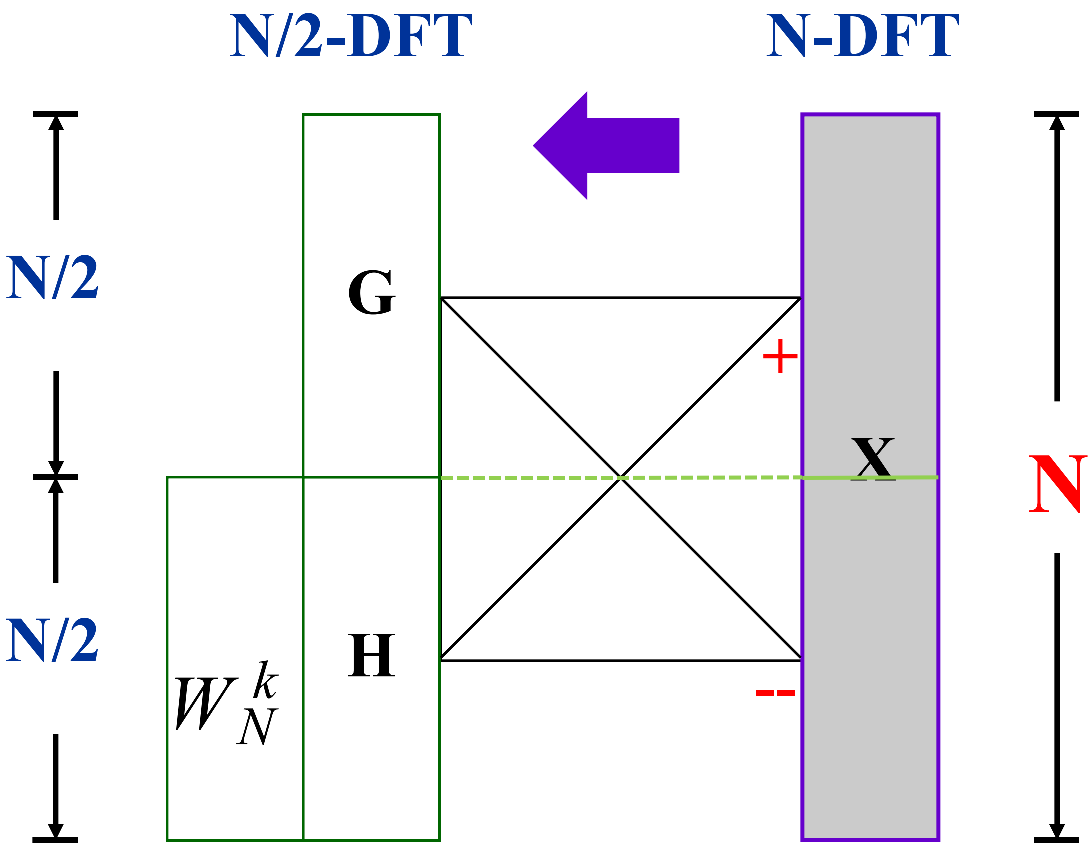
$$X(k) = \underline{G(k) + W_N^k H(k)}$$

$$X(\tfrac{N}{2}+k) = G(\tfrac{N}{2}+k) + W_N^{(\frac{N}{2}+k)} H(\tfrac{N}{2}+k)$$

$$= \underline{G(k) - W_N^k H(k)}$$

$$k = 0, 1, \cdots, \tfrac{N}{2}-1$$

FFT的原理



$$N = 2^r$$

复数加法次数 $Nr = N \log_2 N$

复数乘法次数 $\frac{N}{2} r = \frac{1}{2} N \log_2 N$

$$O(N \log_2 N)$$

IDFT同样可用FFT实现，算法复杂度相同。

作业

1. 周期信号$f(t)$抽样满足抽样定理，一个周期内采N个抽样值，其N点 DFT 为$X(k)$，试用$f(t)$的 FS 系数F_n表示$X(k)$。要求：根据 FS 和 DFT 的相关定义求解，求解过程中**不利用**傅里叶变换 FT。

2. 设有限长序列$x(n)$的取值范围为$0 \sim N-1$，长度N为偶数。若该序列的N点DFT 为$X(k)$，试用$X(k)$表示下列各序列的DFT。

   (a) 将$x(n)$以N为周期进行周期延拓，然后对$0 \sim MN-1$点组成的有限长序列求其MN点DFT。

   (b) 将$x(n)$按如下方式进行时域扩展，得到MN点新序列$y(n)$，求其MN点DFT。

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{M}\right), & n/M \in \mathbb{Z} \\ 0, & n/M \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

   (c) 将$x(n)$尾部补上若干零，成为长度为MN的有限长序列$y(n)$，求其MN点DFT。

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le MN-1 \end{cases}$$

实验二：语音信号的频分复用

背景

- 语音的频带分布在300HZ到3400HZ
- 8K采样后的数字音频信号是频带受限的信号。
- 经过对语音进行适当处理，使多路不同的语音的频带在频域互不重叠，实现多路语音同时传输

任务

- 使用任意编程语言(python/matlab) 验证“频分复用原理”
  - 收集四段不同的长度为30s的语音
  - 预处理音频信号：过滤3400Hz以上的频率，统一原始信号的采样率至8000Hz
  - 编码处理：将多段音频调制到一段音频中
  - 解码处理：将叠加在一起的多路语音分开，分离得到多路语音，应保证失真尽可能小

- 注意事项：
  - **在调制解调的过程中，要保持频谱共轭对称的性质**

选做

- 利用均方误差(Mean Squared Error)度量音频调制解调前后的差异，给出MSE的结果
- 前面的实验是整段语音进行频分复用，这在通信场景中是较为少见的。下面我们进行分帧频分复用，每一帧的长度为N秒。具体来讲，将音频切为多个等长的片段，每一个片段的长度为N秒，分别对每一片段进行频分复用，最终再解码组合成完整的音频。请尝试N=1s，2s，5s，10s，20s时，解码得到的音频与原始音频的均方误差(MSE)

结 束