信号处理原理

贾珈

2020.10.10

第二章 信号的分解

- 信号的分解方法
- 函数的正交变换
- 信号的正交分解

特例：周期信号的FS

- 非周期信号的FT

回顾：周期信号的FS

- **周期信号的FS:**

周期信号的频谱谱线的**间隔**为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

周期信号的频谱谱线的**长度**为

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

回顾：用周期信号的FS考量周期信号

- **周期 vs. 非周期信号的FS**

非周期信号可以看成是周期T_1趋于无限大的周期信号

⬇

非周期信号的谱线间隔趋于无限小，变成了连续频谱；谱线长度趋于零。

回顾：用周期信号的FS考量周期信号

- **周期 vs. 非周期信号的FS**
  - **从频谱分量到频谱密度**
- 非周期信号，可以视为周期无穷大的周期信号。在周期趋向无穷大时 - ？？？

$$T_1 \to \infty$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0$$

谱线间距变密直至为零

ω 变为连续域

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \to 0$$

谱线高度变矮直至为零

回顾：用周期信号的FS考量周期信号

- **周期 vs. 非周期信号的FS**
  - **从频谱分量到频谱密度**

(1) 物理意义着手：既是信号，必有能量。无论怎样，能量守恒。因此，频域必会以某种形式存在。

(2) 数学角度思考：无限多无穷小量的和，在极限意义下，可能等于一个有限值。前面的问题只是说每个分量变成了无穷小量，但没有说总和(信号)为零！

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \rightarrow 0$$

让我们再暂停一下

一起想想有没有更优的非周期信号傅里叶频谱的定义方式？

- **非周期信号的FT**

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

变换核

IFT：　恢复时域信号的方法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

FT存在的充分条件： 时域信号绝对可积。

非周期信号的FT

- **非周期信号的FT**

  信号的傅里叶变换一般为复值函数

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅度频谱密度函数

相位频谱密度函数

- **非周期信号的FT－物理信号的例子：**

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt \qquad X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$R(\omega) = R(-\omega)$ 频谱实部是偶对称的

$X(\omega) = -X(-\omega)$ 频谱虚部是奇对称的

$\varphi(\omega) = \arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}$ 频谱相位是奇对称的

- **非周期信号的FT** – FT与IFT的唯一性与可逆性

唯一性：

如果两个函数的FT或IFT相等，则这两个函数必然相等。

可逆性：

$$\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

- 信号的分解方法
- 函数的正交变换
- 信号的正交分解

特例：周期信号的FS

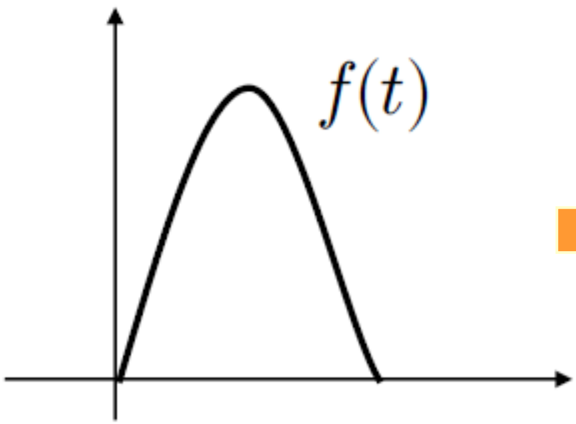
- 非周期信号的FT

梳理：FT与FS的关系

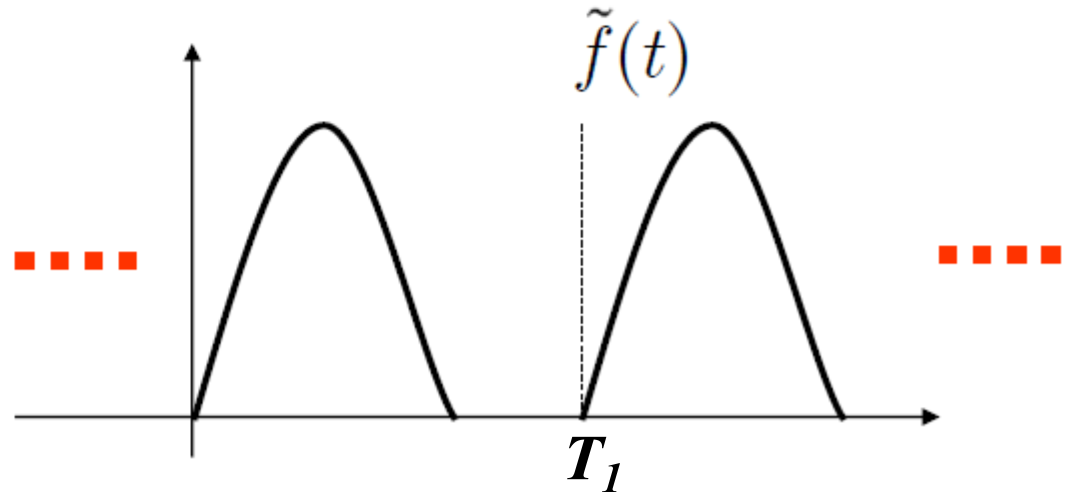
- **FS与FT**

	FS	FT
被分析对象	周期信号	非周期信号
频率定义域	离散频率，谐波频率处	连续频率，整个频率轴
函数值意义	频率分量的数值	频率分量的密度值

- **从FS到FT（后续讨论基于以下图例）**



非周期信号



周期信号

右侧的周期信号是左侧非周期信号以T_1为周期重复的结果

- **从FS到FT**

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

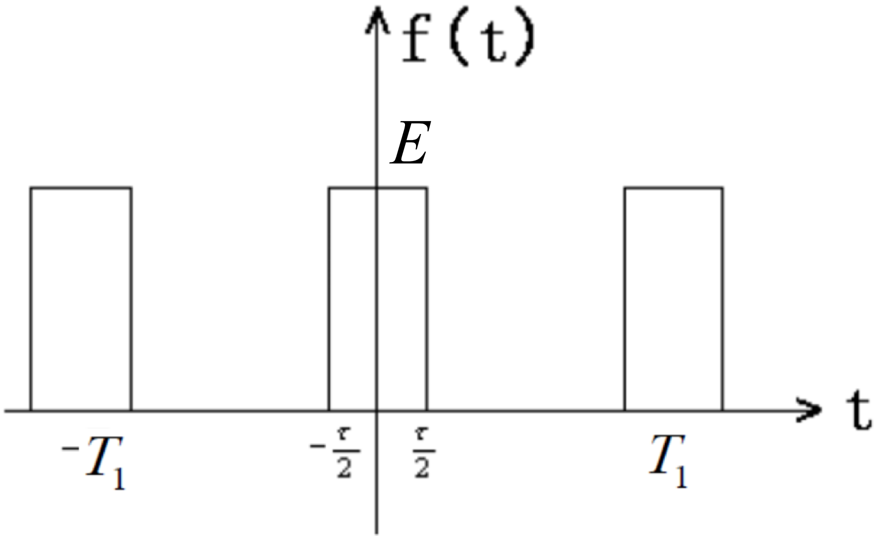
$$\Rightarrow \quad F_n = F(n\omega_1)/T_1$$

- **现象一：从FS到FT**
  - 周期信号的第n个谐波分量系数F_n, 对应频率为$n\omega_1$, 系数值等于非周期信号f(t)的频谱密度函数F(ω)在频率$n\omega_1$处的函数值除以T_1
  - 推论：若以不同的周期对信号f(t)进行周期重复，对这些不同的周期信号，它们FS系数都与信号f(t)的FT有关系！
  - 思考：离散的？连续的？

- **周期信号的FS** －周期矩形脉冲信号的FS

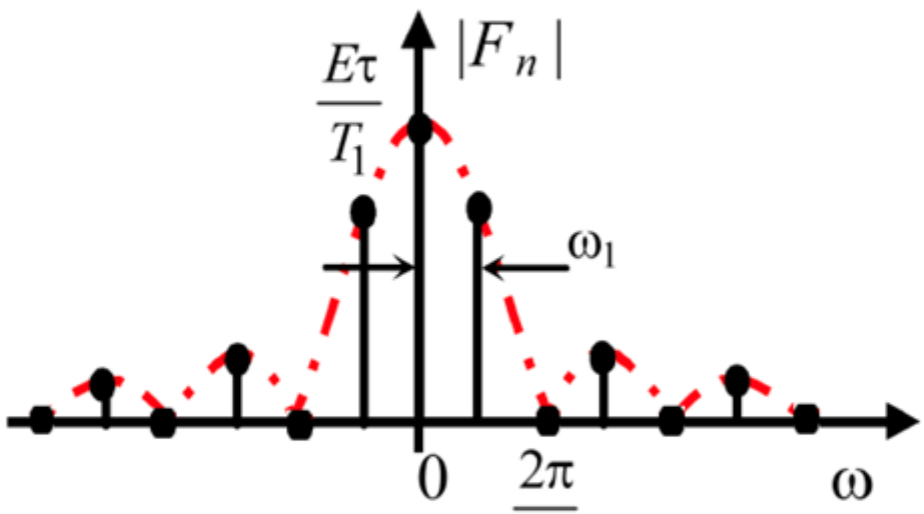
回顾：周期矩形脉冲信号

设周期矩形脉冲信号f(t)的脉冲宽度为τ，脉冲幅度为E，重复周期为T_1



FT与FS：现象一

- **周期信号的FS** – 周期矩形脉冲信号的FS:



谱线包络线为Sa函数

频谱谱线的间隔为

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

思考：（非周期的）矩形脉冲信号的FT是怎样的？

（扩展）FT与FS：现象

- **周期信号的Fn**

频谱谱线间隔

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

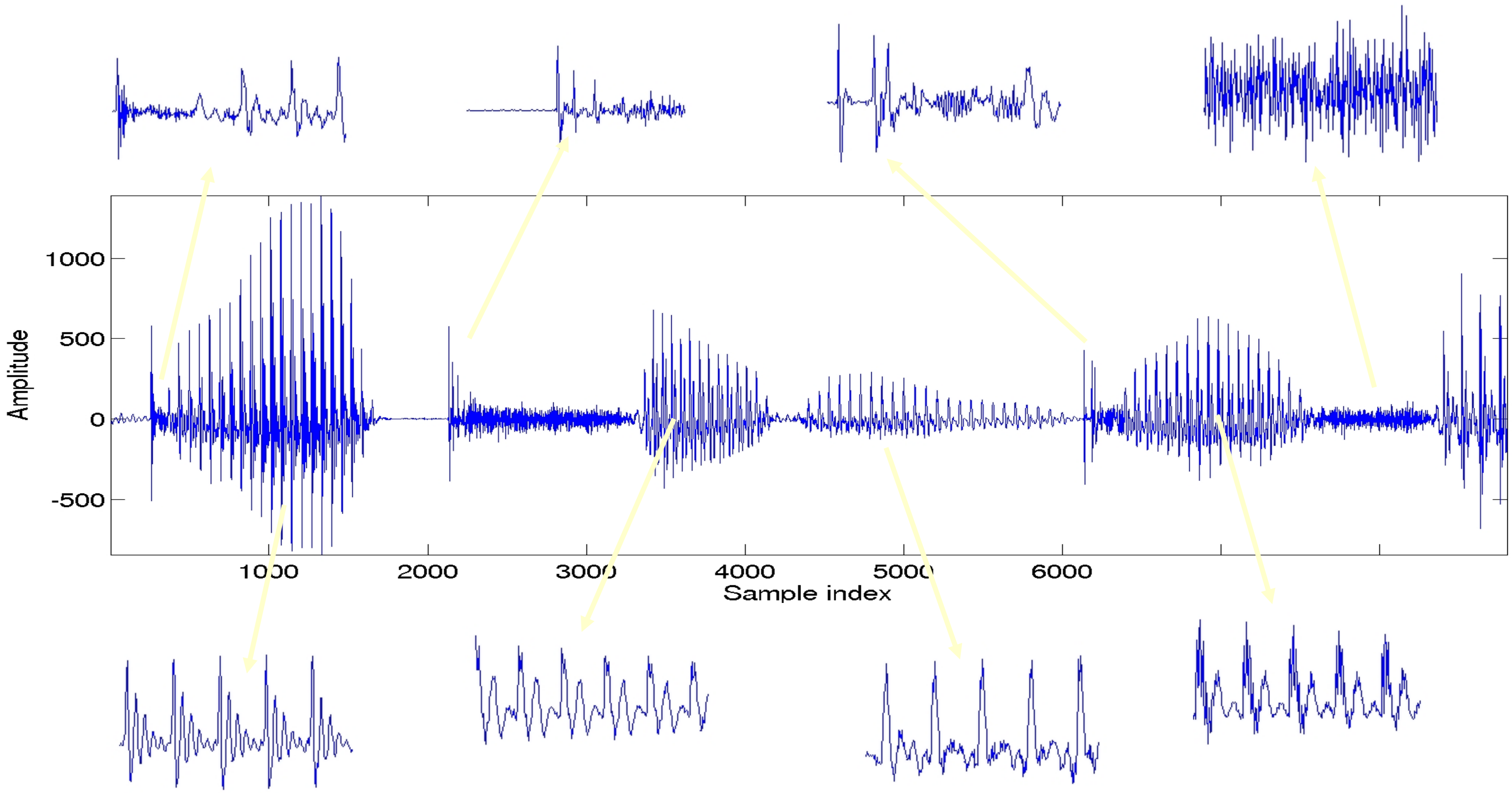
频谱谱线长度

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

- **非周期信号的FT** $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

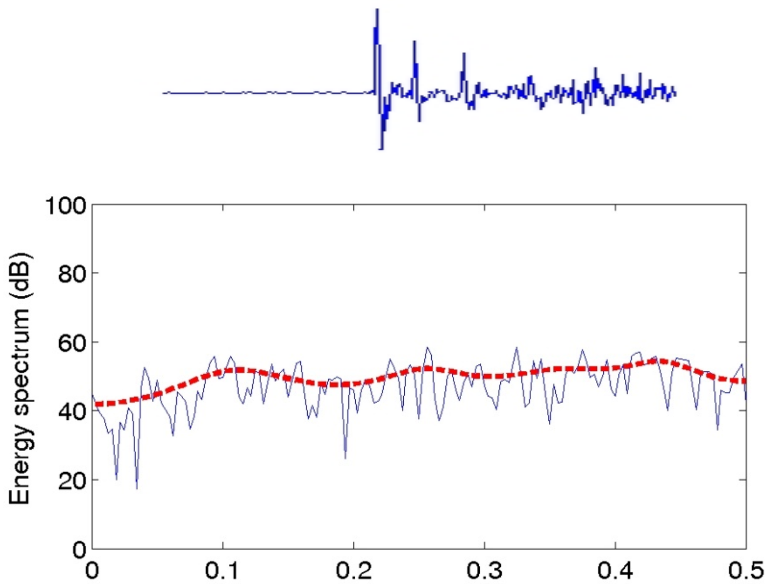
- **准周期信号的FT?**
  - **以语音的浊音（元音）和清音（部分辅音）为例**

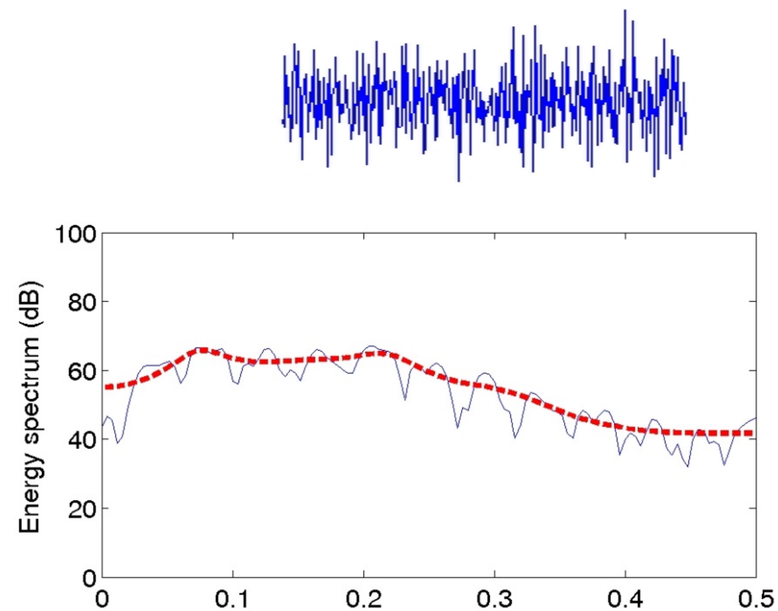
（扩展）F1与F3：现象



- 元音都是浊音，是准周期信号
- 一些辅音（m,l,n,r除外），是非周期信号，是清音

辅音的频率特征-FT变换

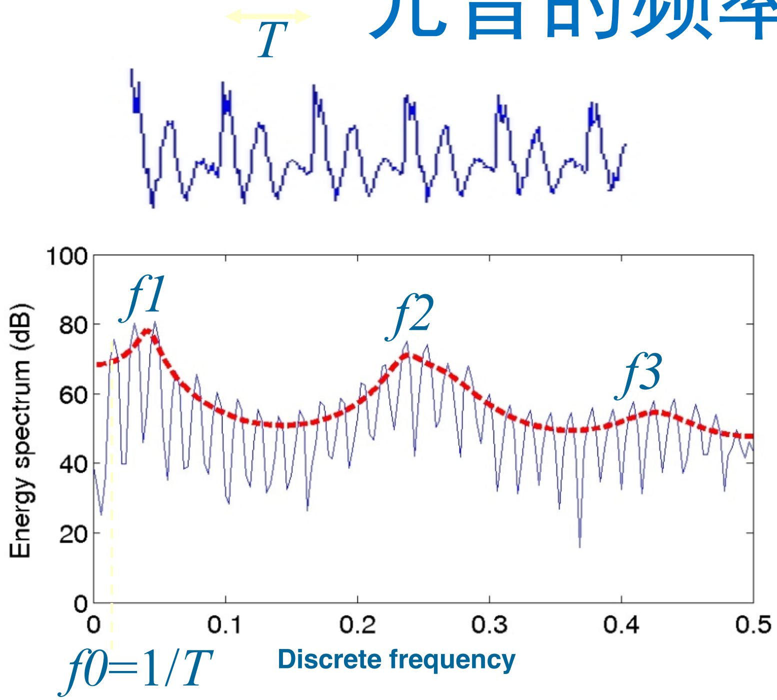


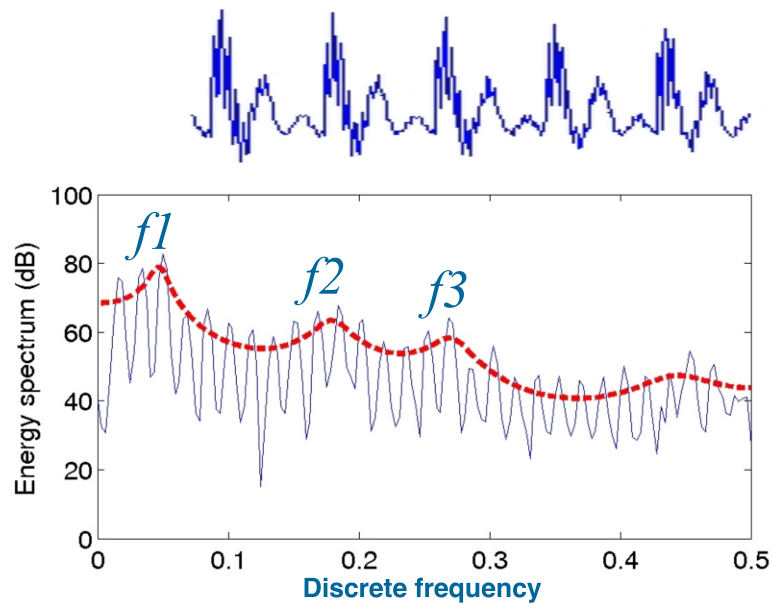


- 无谐波结构
- 几乎平坦的谱包络

（扩展）F1与F3：现象—

元音的频率特征-FT变换





- 元音可清除地看到周期性
  - 基频(pitch), *f0*
  - 具有谐波结构
  - 谱包络的“共振峰”

中文名称：
谐波
英文名称：
harmonic
定义：
其频率为基波的倍数的辅波或分量。

- **现象二：FS与非周期信号**

  – 若f(t)是非周期信号，则分解区间有限制 (t_0, t_0+T_1)，即 FS 仅在区间(t_0, t_0+T_1)内成立。

  – FS是函数正交分解的一种，因此它也可用于对非周期信号在特定区间上的一段进行展开（分解）！

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad t \in (t_0, t_0 + T_1)$$

- **现象三：FT与周期信号**

【课堂练习1】

$$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Tips: 傅里叶变换无法求解，试试逆傅里叶变换？

主观题 0.5分

设置

- **现象三：FT与周期信号**

【课堂练习1】

$$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Tips: 傅里叶变换无法求解，试试逆傅里叶变换？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

信号处理原理

作答

- **现象三：FT与周期信号**

（1）余弦信号的FT

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\mathscr{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

（2）正弦信号的FT

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$$

- FT与FS的关系

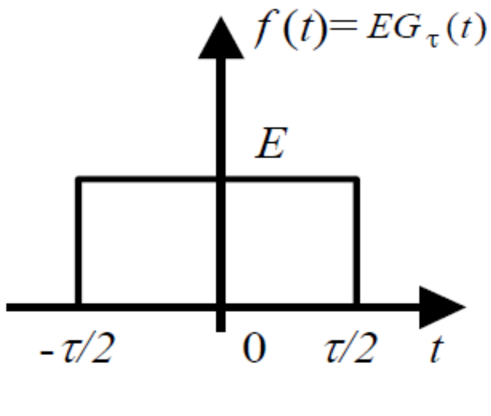
实例：典型非周期信号的FT

- **矩形脉冲信号：** 脉高为E，脉宽为τ

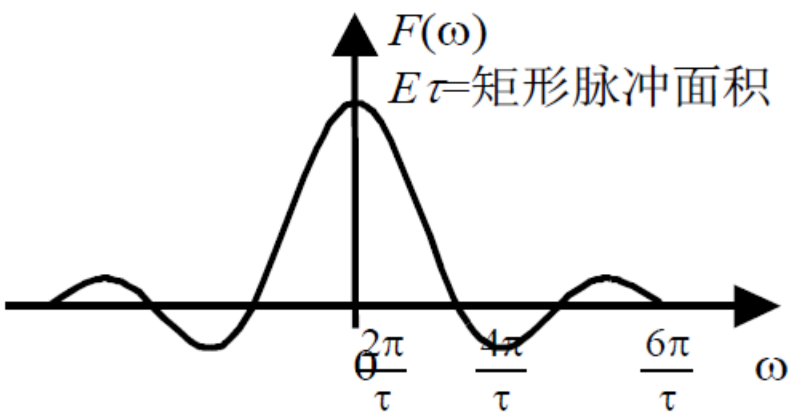
$$f(t) = EG_\tau(t)$$

$$F(\omega) = E\tau \cdot Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$$

幅度谱：
$$|F(\omega)| = E\tau\left|Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$



(a)



(b)

- **矩形脉冲信号：** 脉高为E，脉宽为τ

$$f(t) = EG_{\tau}(t)$$

矩形脉冲信号FT的特点：

FT为Sa函数，原点处函数值等于矩形脉冲的面积

FT的过零点位置为 $\omega = 2k\pi / \tau \quad (k \neq 0)$

频域的能量集中在第一个过零点区间 $\omega \in -2\pi / \tau, 2\pi / \tau$

带宽只与脉宽有关，与脉高E无关。带宽为 $B_{\omega} = 2\pi / \tau$

- **冲激信号：**

$$\mathscr{F}[E\delta(t)] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} E\delta(t)e^{-j\omega t}dt}_{\text{FT定义}} = \underbrace{Ee^{-j\omega 0}}_{\text{冲激函数的抽样性质（或：广义函数定义）}} = E$$

- 上述结果也可由矩形脉冲取极限得到：

当脉宽τ逐渐变窄时，其频谱必然展宽。
可以想象: $\delta(t)$积分为1，因此需要$E\tau = 1$，若$\tau \to 0$，这是矩形脉冲就变成了$\delta(t)$，其相应频谱$F(\omega)$必定等于常数1。

- **冲激信号：**

冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。

显然，在时域中变化异常剧烈的冲激函数中包含了幅度相等的所有频率分布。

因此，这种频谱常被称为均匀谱，或白色谱。

- **冲激信号：**

【课堂练习2】

– 直流信号的傅里叶频谱是位于零点的冲激函数

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right]=\delta(\omega) \qquad \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$$

– 频谱零点处的冲激函数来自信号的直流分量

$$\mathscr{F}^{-1}[E\delta(\omega)]=\frac{E}{2\pi}$$

Tips: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$

$\mathscr{F}[E\delta(t)]=E \qquad F[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

主观题 0.5分 设置

- **冲激信号：**

【课堂练习2】

– 直流信号的傅里叶频谱是位于零点的冲激函数

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(\omega) \qquad \mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

– 频谱零点处的冲激函数来自信号的直流分量

$$\mathscr{F}^{-1}[E\delta(\omega)] = \frac{E}{2\pi}$$

Tips: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$

$\mathscr{F}[E\delta(t)] = E \qquad F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

作答

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

- FT与FS的关系
- 典型非周期信号的FT
- FT的性质

- **FT是线性运算**

对一个信号求FT，等于对其分量（信号）求FT然后再组合

线性

齐次性 $\mathscr{F}[af(t)] = a\mathscr{F}[f(t)]$

叠加性 $\mathscr{F}[f_1(t)+f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)]+\mathscr{F}[f_2(t)]$

$$\mathscr{F}\left[\sum_n a_n f_n(t)\right] = \sum_n a_n \mathscr{F}[f_n(t)]$$

- **FT的反褶和共轭性**

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

反褶与共轭	时域	频域
反褶	$f(-t)$	$F(-\omega)$
共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
反褶 && 共轭	$f^*(-t)$	$F^*(\omega)$

- **IFT和FT的对偶性**

极相似的公式背后隐藏着什么关系？

求IFT与FT本质上是相通的？ ?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

- **IFT和FT的对偶性**

I： FT与IFT的变换核函数是共轭对称的

$$\left\{e^{-j\omega t}\right\}^{*} = e^{j\omega t} \qquad \left\{e^{j\omega t}\right\}^{*} = e^{-j\omega t}$$

- **【课堂练习3】**

$$\mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left\{\boxed{\mathscr{F}_{\omega}\left[F^{*}(\omega)\right]}\right\}^{*}$$

其中，$F_{\omega}[F^{*}(\omega)]$表示按自变量ω进行FT，结果仍是t的函数。

在计算机程序设计实现上， IFT可以通过FT来完成。

- **IFT和FT的对偶性**

I： FT与IFT的变换核函数是共轭对称的

$$\left\{e^{-j\omega t}\right\}^* = e^{j\omega t} \qquad \left\{e^{j\omega t}\right\}^* = e^{-j\omega t}$$

- **【课堂练习3】**

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left\{\boxed{\mathscr{F}_\omega\left[F^*(\omega)\right]}\right\}^*$$

其中，$F_\omega[F^*(\omega)]$表示按自变量ω进行FT，结果仍是t的函数。

在计算机程序设计实现上， IFT可以通过FT来完成。

• IFT和FT的对偶性

II： $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

将变量t与ω互换，可以得到：

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}dt$$

等号右边是对函数$F(t)$的傅里叶变换！

- **IFT和FT的对偶性**

II：$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$\begin{cases} f(t)\text{是偶函数} & F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\omega) \\ f(t)\text{是奇函数} & F(t) \Leftrightarrow -2\pi f(\omega) \end{cases}$$

• FT的尺度变换特性

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (a \neq 0)$$

- I：压扩变化是相反的（注意a的位置）

$$f(at) \Leftrightarrow F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

压 缩→扩 展；扩 展→压 缩

- II：幅度也发生变化，是原先的1/a (或 -1/a)倍。

$$\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- **对任意信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$**

【课堂练习4】 $f(t), F(\omega)$在负无穷到正无穷的积分存在时

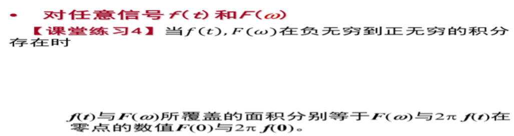
$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$$

$f(t)$与$F(\omega)$所覆盖的面积分别等于$F(\omega)$与$2\pi f(t)$在零点的数值$F(0)$与$2\pi f(0)$。

- **对任意信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$**

【课堂练习4】当 $f(t), F(\omega)$ 在负无穷到正无穷的积分存在时



- 对任意信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$

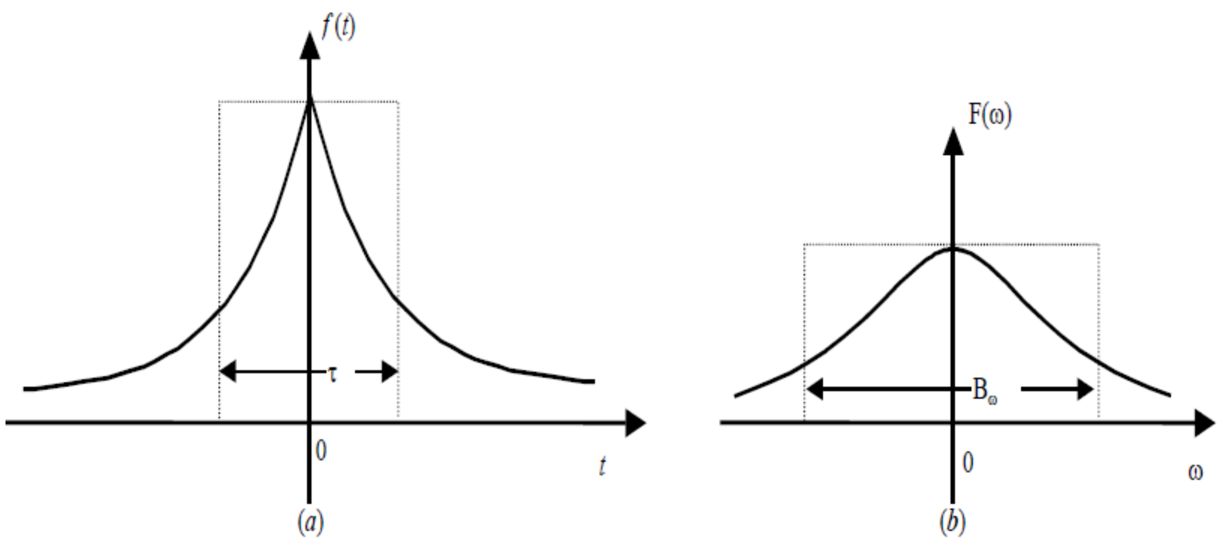
【课堂练习4】当 $f(t), F(\omega)$ 在负无穷到正无穷的积分存在时

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 所覆盖的面积分别等于 $F(\omega)$ 与 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $F(0)$ 与 $2\pi f(0)$。

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$$

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 所覆盖的面积分别等于 $F(\omega)$ 与 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $F(0)$ 与 $2\pi f(0)$。

- **对任意信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$**
- 设$f(0)$与$F(0)$分别等于各自对应曲线的最大值，则定义信号
  - 等效脉宽：　$\tau = F(0)/f(0)$
  - 等效带宽：　$B_f = f(0)/F(0)$



偶双边指数信号 $f(t) = e^{-a|t|}$　　频谱 $F(\omega) = 2a/(a^2+\omega^2)$

FT的性质（六）

- **FT的时移特性**

- 时域延时，频域则是相位变化，不影响幅度谱，只在相位谱上叠加一个线性相位。

$$\mathscr{F}\left[f(t-t_0)\right] = F(\omega)e^{-j\omega t_o} = \mathscr{F}\left[f(t)\right]e^{-j\omega t_0}$$

- 与尺度变换结合

$$\mathscr{F}\left[f(at-t_0)\right] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\omega t_0/a}, \quad (a \neq 0)$$

人耳通过相位信息差异，可以判定声音的远近变化。但声音信号的相位变化不影响理解。

- **FT的频移特性**
- 相位增加，频谱右移

$$\mathscr{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right] = F(\omega - \omega_0)$$

- 与尺度变换结合

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)e^{j\omega_0 t/a}\right] = F(a\omega - \omega_0)\ ,\quad (a \neq 0)$$

• FT的频移特性

- 理论上，时域信号乘以一个复指数信号，原信号的频谱将被搬移到复指数信号的频率处。
- 实际应用中，利用欧拉公式，通过乘以正弦或余弦信号，可以达到频谱搬移的目的。

★ $$\boxed{F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

FT的"波形运算"小结

- 反褶： $f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$

- 平移： $f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

  $F(\omega-\omega_0) \Leftrightarrow f(t)e^{j\omega_0 t}$

- 小结：

  I 时域延时，幅度谱不变

  II 频谱搬移，通过在时域乘复指数信号即可

- **FT微积分运算**

- 微分特性：

时域微分 $$\frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

频域微分 $$\frac{dF(\omega)}{d\omega} \Leftrightarrow -jtf(t)$$

- 积分特性：

时域积分 $$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow (j\omega)^{-1}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

频域积分 $$\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt}f(t)$$

- **FT卷积定理**

- 时域卷积定理：

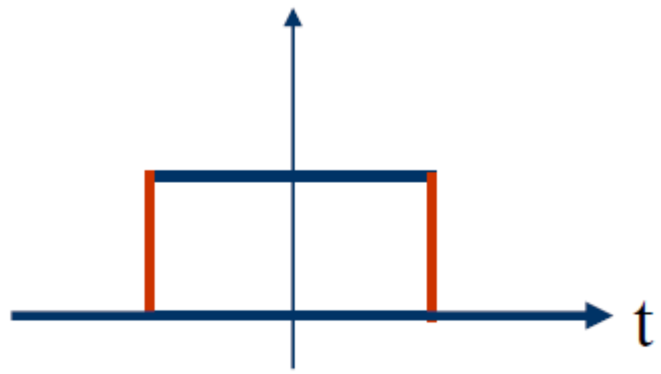
$$\mathscr{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathscr{F}\left[f_1(t)\right] \cdot \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$$

- 频域卷积定理：

$$\mathscr{F}\left[f_1(t) \cdot f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}\left[f_1(t)\right] * \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$$

- **FT卷积定理应用示例**

- 信号截取时，是使用如下矩形窗相乘来实现的：



因此，矩形信号边缘的跳变将引起原信号的频谱会产生畸变：

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)$$

• FT时域相关性定理

$$F\left[R_{f_1 f_2}(t)\right]=F\left[f_1(t)\right]F^*\left[f_2(t)\right]$$

- 若函数f_2(t)是实偶函数，则：

$$F\left[R_{f_1 f_2}(t)\right]=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

- 自相关的傅里叶变换定义为：

$$F\left[R_f(t)\right]=F\left[f(t)\right]F^*\left[f(t)\right]=\left|F\left[f(t)\right]\right|^2$$

- 信号自相关函数与其幅度谱平方是一对傅里叶变换对。

- **【思考】帕斯瓦尔定理**

- 时域和频域的能量守恒。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\omega)\|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\|F(2\pi f)\|^2df$$

第四次作业

作业1：写出指数函数 ($f(t) = e^{-at}\ a > 0, t > 0$)的傅里叶变换。

作业2：

已知 $f(t)=\begin{cases} t & 0 \leqslant t < \tau \\ \tau & \tau \leqslant t < 2\tau \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t \geqslant 2\tau \end{cases}$ ，求该函数的傅里叶变换。

结　束

复习参考1：课堂练习1

【课堂练习1】

$$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Tips: 傅里叶变换无法求解，试试逆傅里叶变换？

$$\begin{cases} F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

对于 $f(t)=e^{j\omega_0 t}$　$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(\omega_0-\omega)t}dt$$

$$=\frac{e^{j(\omega_0-\omega)t}}{j(\omega_0-\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \overset{?}{=}$$

$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{0}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

筛选特性

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow F(\omega)=\delta(\omega)$

$\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega t}dt=\delta(\omega)$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$

$\therefore \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(\omega_0-\omega)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

复习参考2：课堂练习3

- **【课堂练习3】**

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\{\boxed{\mathscr{F}_{\omega}[F^{*}(\omega)]}\}^{*}$$

其中，$F_{\omega}[F^{*}(\omega)]$表示按自变量ω进行FT，结果仍是t的函数。

$$\frac{1}{2\pi}\{\mathscr{F}_{\omega}[F^{*}(\omega)]\}^{*} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} F^{*}(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right\}^{*}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(F^{*}(\omega)e^{-j\omega t}\right)^{*}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

复习参考3：课堂练习4

- **对任意信号 $f(t)$ 和 $F(\omega)$**

【课堂练习4】 当 $f(t), F(\omega)$ 在负无穷到正无穷的积分存在时

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$$

$f(t)$与$F(\omega)$所覆盖的面积分别等于$F(\omega)$与$2\pi f(t)$在零点的数值$F(0)$与$2\pi f(0)$。

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{jwt} dw$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{0} dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w) dw$$