第三节 傅立叶级数

杜雨峰

涵盖了刘老师“第三次课”和贾老师“Chap02.1”的内容。

函数的分解

提示：Parseval定理是重点。

- 直流、交流分解：直流分量就是信号在无穷时间的均值；交流分量就是信号减去直流分量
- 奇偶分解：奇$f_o(t)=(f(t)-f(-t))/2$，偶$f_e(t)=(f(t)+f(-t))/2$
- 实虚分解：$\mathfrak{Re}[f(t)]=(f(t)+f^*(t))/2,\quad \mathfrak{Im}[f(t)]=(f(t)-f^*(t))/2j$
- 脉冲分解：$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\approx\sum_{-\infty}^{\infty}f_{t_i}(t)$,其中

  $f_{t_i}(t)=f(t_i)[u(t-t_i)-u(t-t_i-\Delta t_i)]$

正交分解

函数在$[t_1,t_2]$上连续可导且逐段二阶连续可导时，可以用完备的正交函数集的线性组合来表示。

$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(t)$

其中$\{\varphi_i\}$是$[t_1,t_2]$上的正交函数集，

$c_i=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i}=\frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)\mathrm{d}t,$

k_i为函数$\varphi_i(t)$在该正交空间的模长的平方：$\int_{t_1}^{t_2}\|\varphi_i(t)\|^2\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_i^*(t)\mathrm{d}t$。

Parseval's Theorem

$\int_{t_1}^{t_2}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}\|c_i\|^2k_i$

物理意义：信号的能量=∑各分量的能量=∑分量的强度*各分量基函数的能量

信号的分解

提示：了解涉及到的概念名称，避免看文本时不知所云。

信号变换的概念

级数展开：用一个函数序列$\{\varphi_i\}$，将信号展开成$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_i\varphi_i(t)$的形式。

信号变换：求展开系数c_i的公式（通常是积分式/和式）。

信号的正交分解

当$\{\varphi_i\}$是标准完备正交基时，$k_i=1$，此时的正交变换称为Karhunen-Loeve变换

傅立叶级数展开

提示：重点。要记住Dirichlet条件，并牢记傅立叶级数展开的三种形式和相互转化的方式。理解傅立叶频谱的意义。

Dirichlet条件（三个有限）

在一个周期内

- 间断点个数有限
- 极值点个数有限
- 绝对积分数值有限

定理：满足Dirichlet条件的周期函数都能在一组正交基函数上展开成为无穷级数。

用三角函数集$\{1, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t | n \in \mathbb{N}^+\}$或指数函数集$\{e^{jn\omega_1 t} | n \in \mathbb{Z}\}$展开的级数是傅立叶级数。两个函数集展开的形式分别称为三角形式傅立叶级数和指数形式傅立叶级数。

总结

提示：复指数形式可以通过三角形式+欧拉公式直接推出。注意三角形式是单边的，复指数形式是双边的；复指数正负系数间是共轭的。

提示2：如果已经得到信号的某种形式的傅立叶变换，则使用“形式互换”换成另一种形式。否则，一般硬算是最快的。

	三角形式FS	紧凑型三角形式FS	复指数形式FS
级数形式	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$	$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$	$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$
信号变换	$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} x(t)\mathrm{d}t \\ a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \\ b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t \end{cases}$	-	$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}\mathrm{d}t$
形式互换	$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n \cos\varphi_n \\ b_n = -c_n \sin\varphi_n \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = 2\mathfrak{Re}[F_n] = F_n + F_{-n} \\ b_n = 2j\mathfrak{Im}[F_n] = (F_n - F_{-n})j \end{cases}$	$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$ $\begin{cases} c_n = 2\Vert F_n \Vert \\ \varphi_n = \angle F_n \end{cases}$	$F_n = \begin{cases} \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2}c_n\angle\varphi_n (n \geq 0) \\ \frac{a_n + jb_n}{2} = -\frac{1}{2}c_n\angle\varphi_n (n < 0) \end{cases}$ $F_n = F_{-n}^*$

傅立叶级数的一些时域变换性质

- 将**周期函数**做放缩$f(t) \to f(at)$，傅立叶级数的系数不变。

  这是因为，其周期也变成了T/a，因此有

  $$\begin{aligned} F_n' &= \frac{a}{T}\int_{\frac{T}{a}} f(at)e^{-jna\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{a}} f(at)e^{-jn\omega at}\mathrm{d}(at) \\ &= \frac{1}{T}\int_{T} f(\tau)e^{-jn\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= F_n. \end{aligned}$$

  - 对需要延拓的非周期函数而言，做放缩$f(at)$以后，需要将延拓周期从T变成T/a，才有上述性质。
- 做时移$f(t) \to f(t + t_0)$，傅立叶级数的幅角增加ωt_0。

有效频带$B_\omega(\mathrm{rad/s})$或$B_f(\mathrm{Hz})$

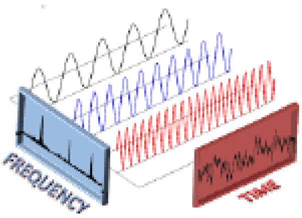
从零频率到所需考虑的最高频率的频率范围叫做有效频带。

周期信号傅立叶频谱的理解

频谱图：c_n和φ_n关于频率的图像

$\|F_n\| \sim \omega = n\omega_1$：振幅谱

$Arg(F_n) \sim \omega$：相位谱

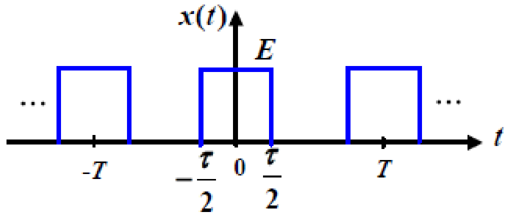
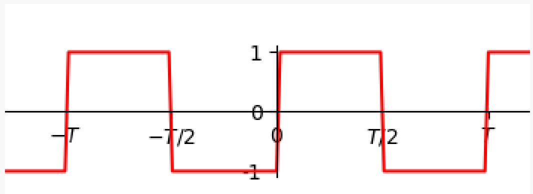
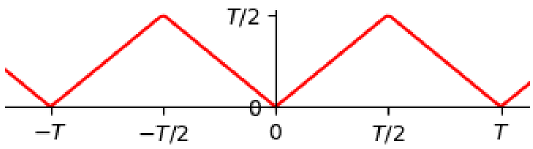
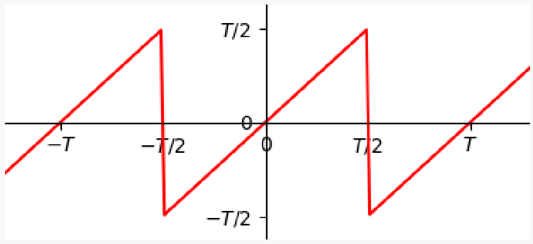


1. 离散的：只在$n\omega_1$上有值，间隔为$\omega_1 = 2\pi/T_1$
2. 单/双边谱：F_n表示的是双边谱，正负频幅度相加才是实际幅度；c_n, φ_n表示的是单边谱。
3. 信号的功率为$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|F_n\|^2$

附：一些函数的傅立叶级数表

提示：可以用作练习，精力允许的情况下也可以记一下。

若无特殊说明，下列函数是周期为T的周期函数或非周期函数以T为周期的延拓；下表也可以理解为函数在$[-T/2, T/2]$上的傅立叶级数展开。令$\omega_1 = 2\pi/T$。

$f(t)$	傅立叶系数(未标出者为0)	时域图像
$G_\tau(t)$	$\begin{cases} a_0 = \frac{E\tau}{T} \\ a_n = \frac{2E\tau}{T} Sa\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \end{cases}$	
$sgn(\sin\omega_1 t)$	$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n为奇 \\ 0 & n为偶 \end{cases}$	
$\omega_1 \lvert t \rvert$	$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_n = -\frac{4}{n^2\pi} & n为奇 \\ a_n = 0 & n为偶, n \neq 0 \end{cases}$	
$\omega_1 t$	$b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n-1}$	
$(\omega_1 t)^2$	$\begin{cases} a_0 = \pi^2/3, \\ a_n = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n \end{cases}$