第二节 信号运算与典型信号

杜雨峰

本节涵盖了刘老师“第二次课”和贾老师“Chap01.2”的内容。

信号的基本运算

信号的运算是将一个或多个信号转化为一个新信号的过程。

提示：基本上是老知识，但要注意特定运算的**称呼**；重点为**波形变换**和**相互运算**两部分，以及**数学运算**部分关于**能量信号**和**功率信号**的定义。此外注意**积分运算**的定义。

常规（四则）运算

提示：在分析三角信号时，**和差化积公式**、**积化和差公式**是很有用的数学手段，运用积化和差**相当于对信号作傅立叶展开**。

A. 线性运算 $+, -$

B. 乘除运算 $\cdot, /$

- 共性：四则运算是点运算（某一点处的运算结果等于两个信号在该点的取值的运算结果）

附：和差化积、积化和差公式

$$
\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

$$
\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

$$
\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

$$
\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
$$

$$
\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}
$$

$$
\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}
$$

$$
\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}
$$

$$
\sin\alpha\sin\beta=\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}
$$

波形运算

提示：要能反映出数学变换的几何意义（或物理意义），能画图。

一个比较复杂的时域变换通常可以分解为下列变换的复合，而且可以有多种分解方式。注意，变换的复合需要依照一定的顺序，不能随意交换。

- 时移运算：$f(t) \to f(t-b)$，$b>0$为右移
- 反褶运算：$f(t) \to f(-t)$，按纵轴对称
- 压扩运算（尺度变换）：$f(t) \to f(at)$，$|a|>1$为**压缩**，$a<0$时附带反褶

数学（分析）运算

- 微分运算：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$
- 积分运算：$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau$

信号的能量和功率

- 信号的能量：信号的**模的平方**在信号定义域上的积分（离散场合：求和）

  $E[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t$

  $E[x(n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} \|x(n)\|^2$

  - 特别注意：不是~~信号的平方~~！信号的模的平方等于信号与其共轭相乘。
- 信号的功率：即**平均功率**，能量与时间的比值在整个定义域上的极限。

  $$P[f(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t$$

  $$P[x(n)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \|x(n)\|^2$$

能量信号与功率信号

提示：注意能量信号、功率信号等是建立在信号的**平方积分**的基础上的，不能轻易根据信号的积分性质下结论。

若信号的能量有限，则该信号称为能量（有限）信号；若信号（不是能量信号但）功率有限，则该信号称为功率（有限）信号；若信号功率无限，则该信号为非能非功信号。

- 有限能量+零功率=能量信号（例：矩形脉冲；信号$e^{-|t|}$，$\frac{1}{|t|+1}$等平方积分有限的信号）
- 无穷能量+有限功率=功率信号（例：三角信号）
- 无穷能量+无穷功率=非能非功信号（例：信号t, t^2 等）

相互运算

卷积运算

注意卷积存在的条件和卷积的分析（微积分）性质

定义

1. 连续场合：对于**连续**函数f, g，

   $$(f*g)(t) = f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

   - 卷积存在的条件：f，g是可积的；上述积分是有界的
2. 离散场合：对于**离散**函数f, g，

   $$(f*g)(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(m-n)$$

性质

- 交换律，分配律，结合律
- 微分：两个信号卷积的微分等于任一信号的微分与另一信号的卷积
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)\right]=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)\right]*f_2(t)$$
  - 推广：高阶导数$(f_1*f_2)^{(n)}(t)=f_1^{(m)}(t)*f_2^{(m)}(t)$
- 积分：两个信号卷积的积分等于任一信号的积分与另一信号的卷积
  $$\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\tau)\mathrm{d}\tau=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right)*f_2(t)$$
  - 推广：多重积分（类似高阶导数的规律）
- 其他性质（包括典型信号的卷积性质、卷积定理等），请查看后续内容。

相关运算

$R_{f_1f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)]\mathrm{d}\tau=\int_{\mathbb{R}}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)]\mathrm{d}\tau$

- $R_{f_1f_2}(t)=R_{f_2f_1}^*(-t)$
- $R_{f_1f_2}(t)=f_1(t)*f_2^*(-t)$

用自相关运算$R_f(t)=R_{f,f}(t)$可以检测准周期信号的准周期。

典型的奇异信号

- 单位斜变信号$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$
  - 截顶的单位斜变信号$R_\tau(t)=\min(R(t),\tau)$
- 单位阶跃信号$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$
  - $R'(t)=u(t)$
  - 常用于描述分段信号（通过把某个信号乘以$u(t)$）：$R(t)=t\cdot u(t)$
  - 卷积特性：$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$
- 单位矩形脉冲信号$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$
  - $G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$
  - 脉高：1；脉宽：τ
  - 用于乘法运算，截取信号特定区间。
- 符号函数信号$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$

单位冲激信号$\delta(t)=\lim\limits_{\tau\to 0}G_\tau(t)/\tau$

- $\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \delta(t)=\infty & t=0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 & \text{（冲激强度为}1\text{）}\end{cases}$
- 波形图表示：一个箭头，长度/方向与冲激强度相同，用*(A)*标注符号和大小。
- 筛选特性：$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$
- 取样特性：$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=x(t_0)$
- 展缩特性：$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$