清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

2020.09.24

- 信号的概念
- 信号的描述
- 信号的数学基础
- 信号的基本运算

信号运算

- 常规运算（四则运算）
  - 线性运算
  - 乘除运算
- 数学运算
  - 微分运算
  - 积分运算
- 波形变换
  - 时移运算
  - 压扩运算
  - 反褶运算
- 相互运算
  - 卷积运算
  - 相关运算

- **四则运算：** 四则运算后的信号在**任意一点的取值**定义为原信号在**同一点处函数值**作相同四则运算的结果。

$$f_1(t)+f_2(t) \Rightarrow f_1(t_i)+f_2(t_i)$$

$$f_1(t)-f_2(t) \Rightarrow f_1(t_i)-f_2(t_i)$$

$$f_1(t)\bullet f_2(t) \Rightarrow f_1(t_i)\bullet f_2(t_i)$$

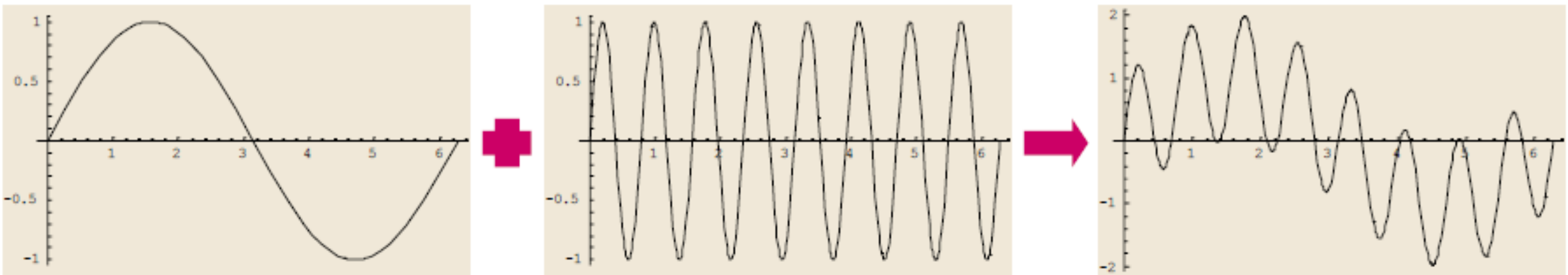
$$f_1(t)/f_2(t) \Rightarrow f_1(t_i)/f_2(t_i)$$

注意：**乘法不能用星号＊表示**（因为＊表示卷积运算）

计算机专业的人尤其应注意这一区别

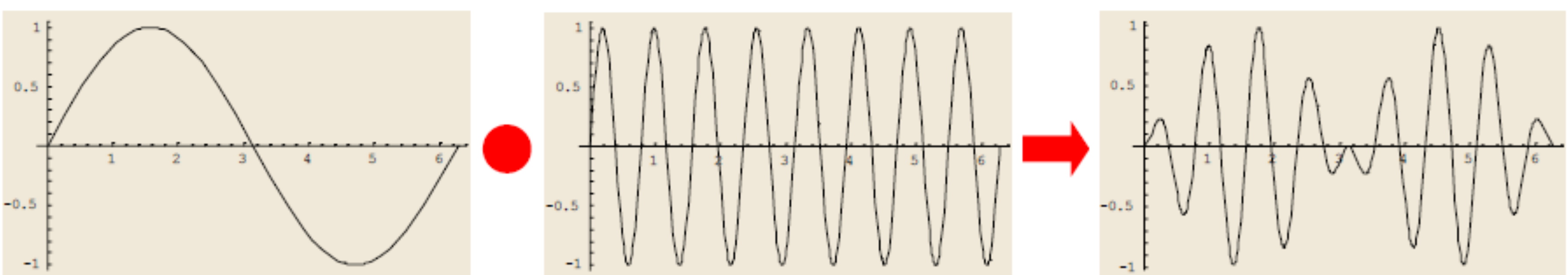
- **四则运算：** 四则运算后的信号在任意一点的取值定义为原信号在同一点处函数值作相同四则运算的结果。

加法



$\sin(t)$ $\sin(8t)$

乘法



信号运算

常规运算
(四则运算)
- 线性运算
- 乘除运算

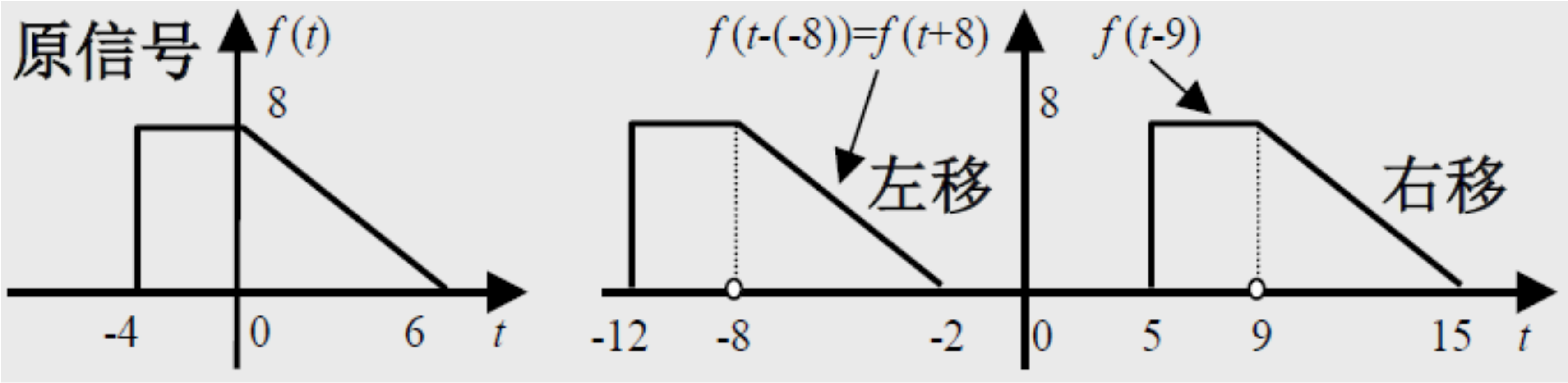
数学运算
- 微分运算
- 积分运算

波形变换
- 时移运算
- 压扩运算
- 反褶运算

相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

- **时移运算：** 将原信号$f(t)$的波形沿横轴平移b个单位

$$f(t) \to f(t-\mathrm{b})$$

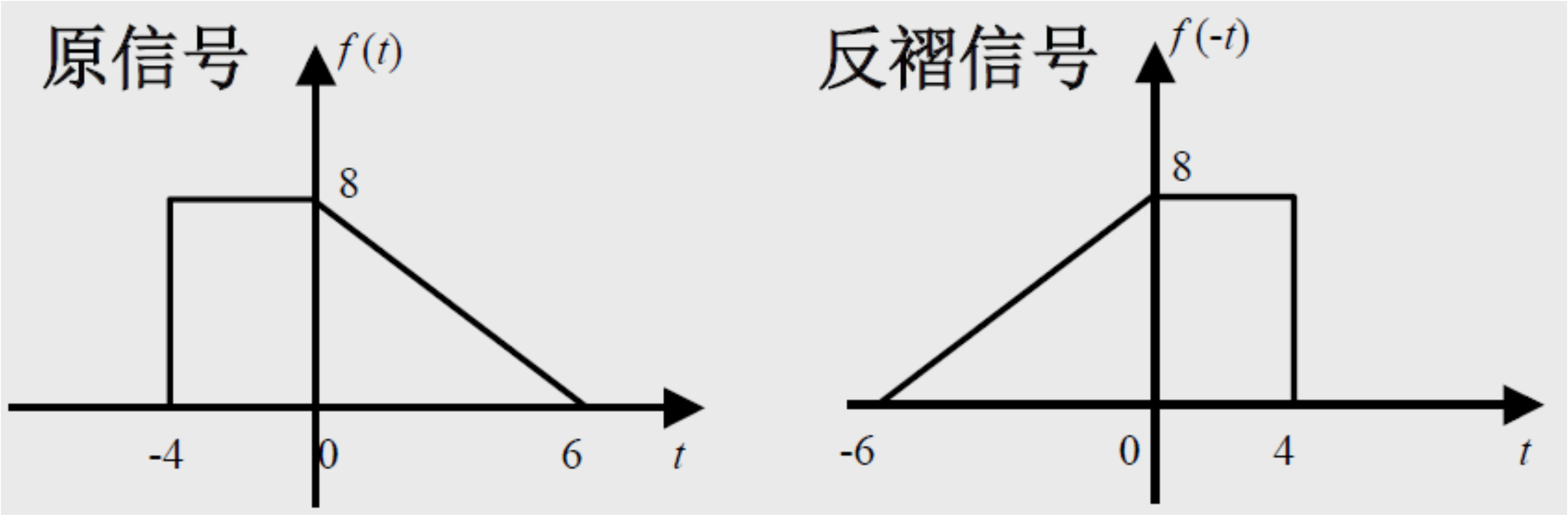


实参数b决定平移方向和位移量：

b>0：右移 b<0：左移

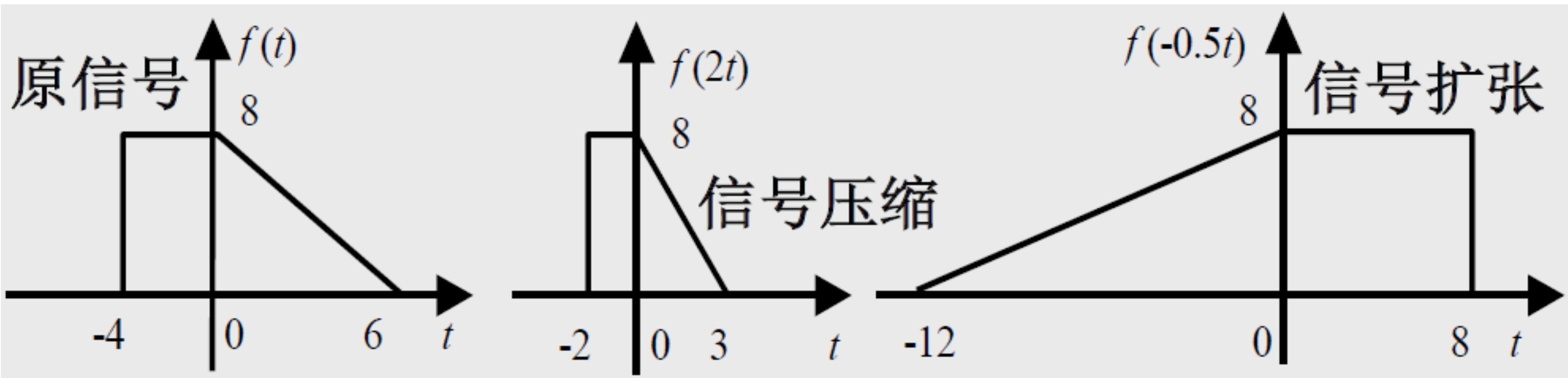
- **反褶运算：** 将原信号$f(t)$的波形按纵轴对称翻转过来

$$f(t) \rightarrow f(-t)$$



- **压扩运算：** 又称尺度变换

$$f(t) \rightarrow f(at)$$



参数a的符号控制是否先要反褶？

>0：不需反褶 **<0：需要反褶**

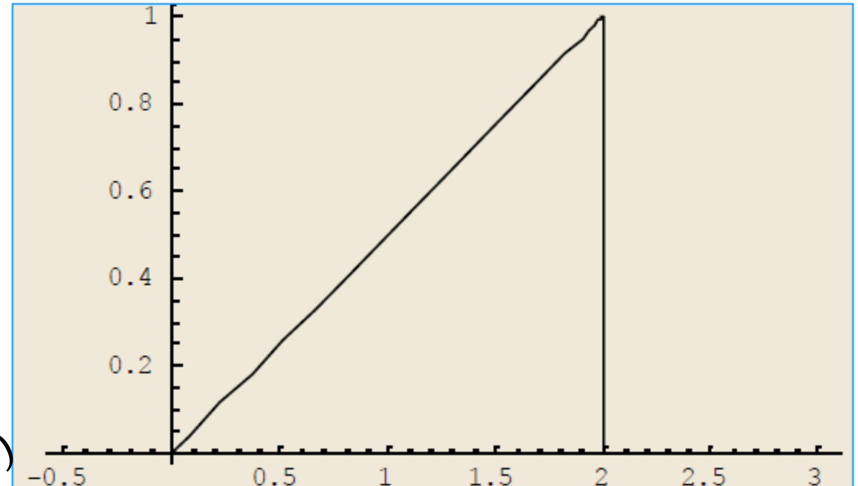
参数a的绝对值控制是压缩还是扩张？

>1：压缩 **<1：扩张**

波形变换

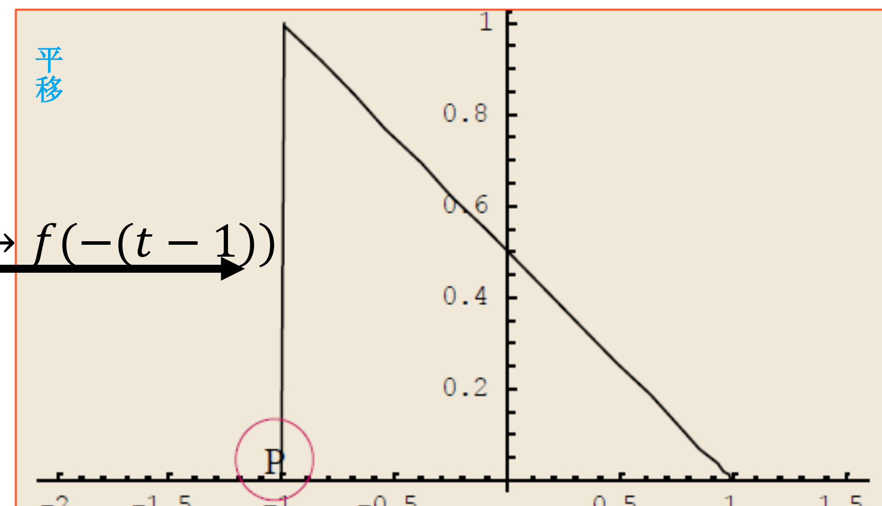
- **例：**

$$f(t) \rightarrow f(1 - t)$$



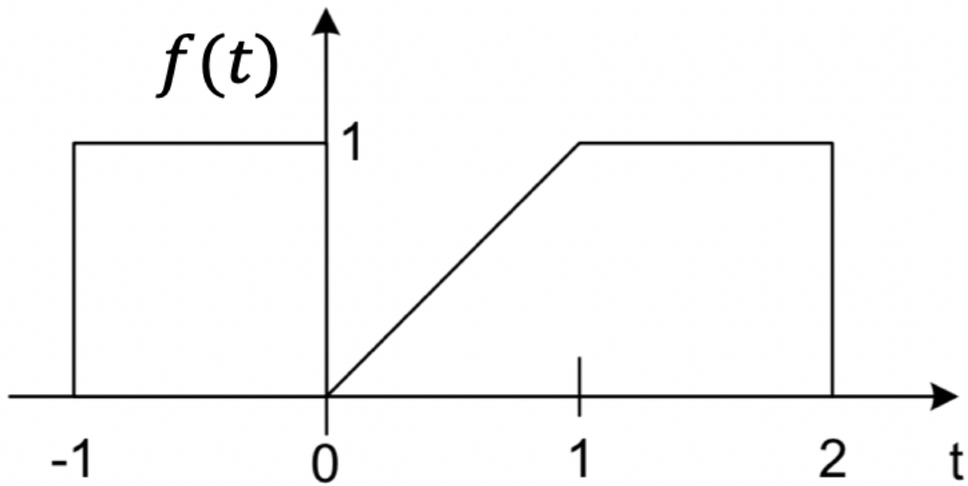
$$f(t) \rightarrow f(-t)$$

$$f(-t) \rightarrow f(-(t-1))$$



课堂练习1：

已知$f(t)$的图形如下所示，请画出$y(t)=3f\left(1-\frac{t}{2}\right)-1$的图形。$(t\in R)$



信号运算

- 常规运算 (四则运算)
  - 线性运算
  - 乘除运算
- 数学运算
  - 微分运算
  - 积分运算
- 波形变换
  - 时移运算
  - 压扩运算
  - 反褶运算
- 相互运算
  - 卷积运算
  - 相关运算

数学运算

$f(t)$

微分运算 → $\frac{d}{dt}[f(t)]$

描述变化现象

图像边缘提取

积分运算 → $\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$

描述累积现象

充电过程

连续进行 →

连续n次微分

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n$$

连续n次积分

$$\left(\int_{-\infty}^{t} dt\right)^n$$

• 能量信号与功率信号：

信号的能量定义：

连续时间信号 $E[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2 dt$

离散时间信号 $E[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2$

信号的功率定义：

连续时间信号 $P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\|f(t)\|^2 dt$

离散时间信号 $P[f(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|f(n)\|^2$

$(N=0,1,2,3,\ldots)$

- **能量信号与功率信号：**
  - 如果信号的能量是有限的，则称为能量有限信号，简称能量信号。
  - 如果信号的功率是有限的，则称为功率有限信号，简称功率信号。

信号运算

常规运算（四则运算）
- 线性运算
- 乘除运算

数学运算
- 微分运算
- 积分运算

波形变换
- 时移运算
- 压扩运算
- 反褶运算

相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

- **卷积：**

  - f, g为两个**连续时间信号**函数，

  其卷积定义为：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

两个信号的卷积是否存在是有条件的:

- f, g是可积函数
- f, g卷积运算得到的结果是有界的

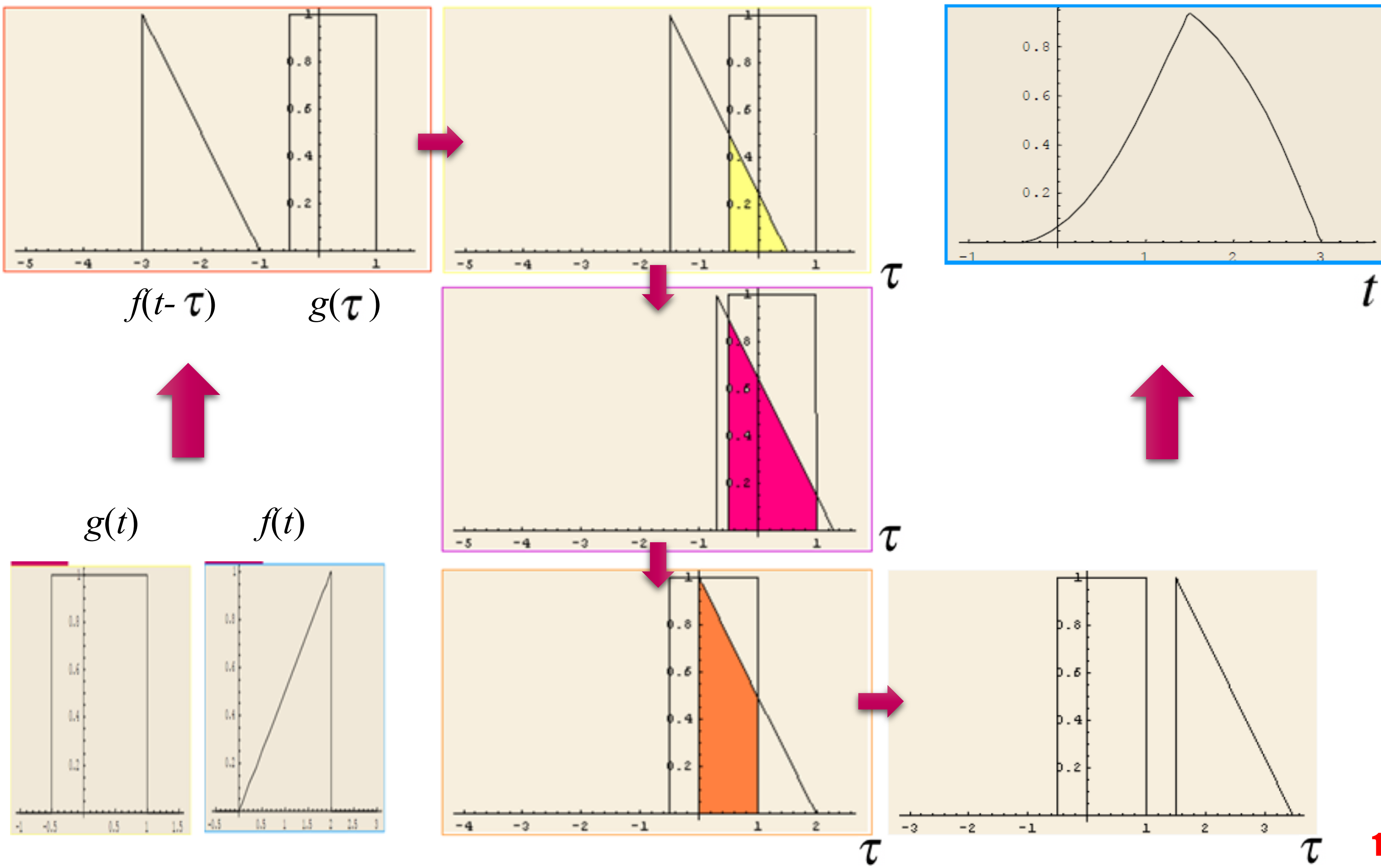
- **卷积：**

  - f, g为两个离散时间信号，f, g为Z上离散序列，

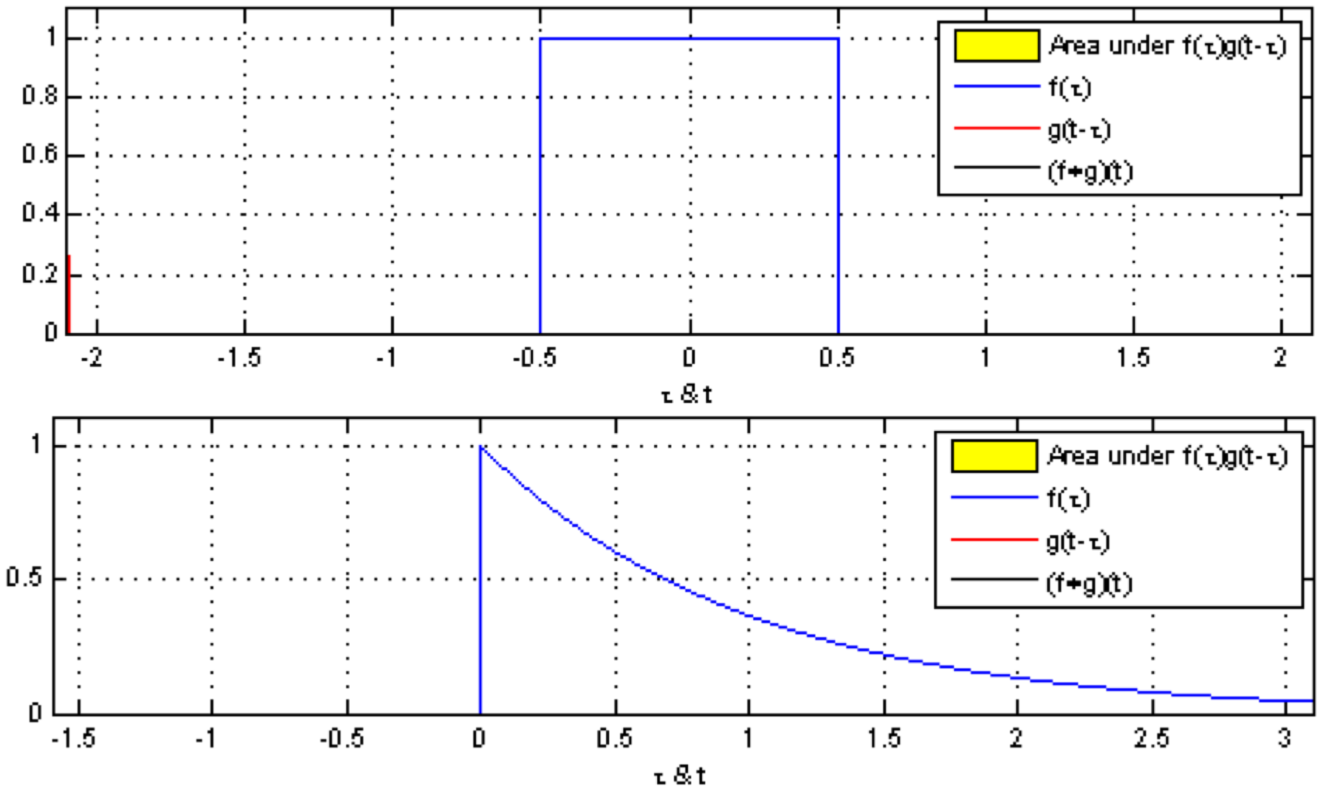
  其卷积定义为：

$$(f*g)(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(m-n)$$

- **卷积：**



- **卷积：**



不是求图形相交部分的面积，而是求相乘结果函数的面积

- **卷积：**

  - f, g为两个连续时间信号函数，

  其卷积定义为：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

一个信号的反褶信号的在t轴滑动过程中，它与另外一个信号重合部分相乘得到的新信号的面积随t的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。

• 卷积的性质：

I 交换律 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ 卷积积分的次序可以交换

(通过变换积分变量来证明)

II 分配律 $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ 用于并联系统的分析

(利用积分运算的线性性来证明)

III 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ 用于串联系统的分析

- **卷积的性质：**

I 交换律 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ 卷积积分的次序可以交换

(通过变换积分变量来证明)

推导：

$$
\begin{aligned}
&(f_1 * f_2)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a) f_2(a)\, da \\
&\xlongequal{b=t-a} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(b) f_2(t-b)\, db \\
&= (f_2 * f_1)(t)
\end{aligned}
$$

• 卷积的性质：

II 分配律 $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ **用于并联系统的分析**

(利用积分运算的线性性来证明)

推导：

$$
\begin{aligned}
&(f_1 * (f_2 + f_3))(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)(f_2(a)+f_3(a))da \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)f_2(a)da + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-a)f_3(a)da \\
&= (f_1 * f_2)(t) + (f_1 * f_3)(t)
\end{aligned}
$$

主观题 0.5分

设置

- **卷积的性质：** 课堂练习：推导卷积的结合律

III 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ 用于串联系统的分析

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

信号处理原理

作答

卷积的微分：$(f_1, f_2$为R上连续可导函数)

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

作业1：推导上述公式。

卷积的积分：(f_1, f_2为R上连续可导函数)

两个信号卷积的积分等于其中任一信号的积分与另一信号的卷积

$$\int_{-\infty}^{t}(f_1 * f_2)(\lambda)d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)d\lambda = \left(\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)d\lambda\right) * f_2(t)$$

作业2：推导上述公式。

卷积的微分：(f_1, f_2为R上无限阶连续可导函数)

- 应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律

$$\left(f_1 * f_2\right)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的 m、n及n-m取正整数时为导数的阶次，而取负整数时为重积分的次数。

卷积的微分：(f_1, f_2为R上无限阶连续可导函数)

- 应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律

$$\left(f_1 * f_2\right)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

提示：用数学归纳法推导

1、n=1 时 为上述作业题证略

2、假设 $n=k$ 时成立，则利用作业题结论可推导 $n=k+1$ 成立

（n, m负数的情况用反向归纳法）

相关运算：

相对平移量

$$R_{f_1f_2}(t)=R\left(f_1(t),f_2(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R\left(f_2(t),f_1(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau+t)f_1^*(\tau)d\tau$$

- 相关与次序有关： $R_{f_1f_2}(t)=R_{f_2f_1}^*(-t)$
- 相关与卷积的关系： $R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$

推导：

$$\begin{aligned}
&R_{f_1f_2}(t)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(a)f_2^*(a-t)da\\
&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^*(a)f_2(a-t)da\right]^*\\
&=R_{f_2f_1}^*(-t)
\end{aligned}$$

相关运算：

相对平移量

$$R_{f_1 f_2}(t)=R\big(f_1(t),f_2(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2 f_1}(t)=R\big(f_2(t),f_1(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)f_1^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau+t)f_1^*(\tau)d\tau$$

- 相关与次序有关： $R_{f_1 f_2}(t)=R_{f_2 f_1}^*(-t)$
- 相关与卷积的关系： $R_{f_2 f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$

推导：

$$R_{f_1 f_2}(t)$$

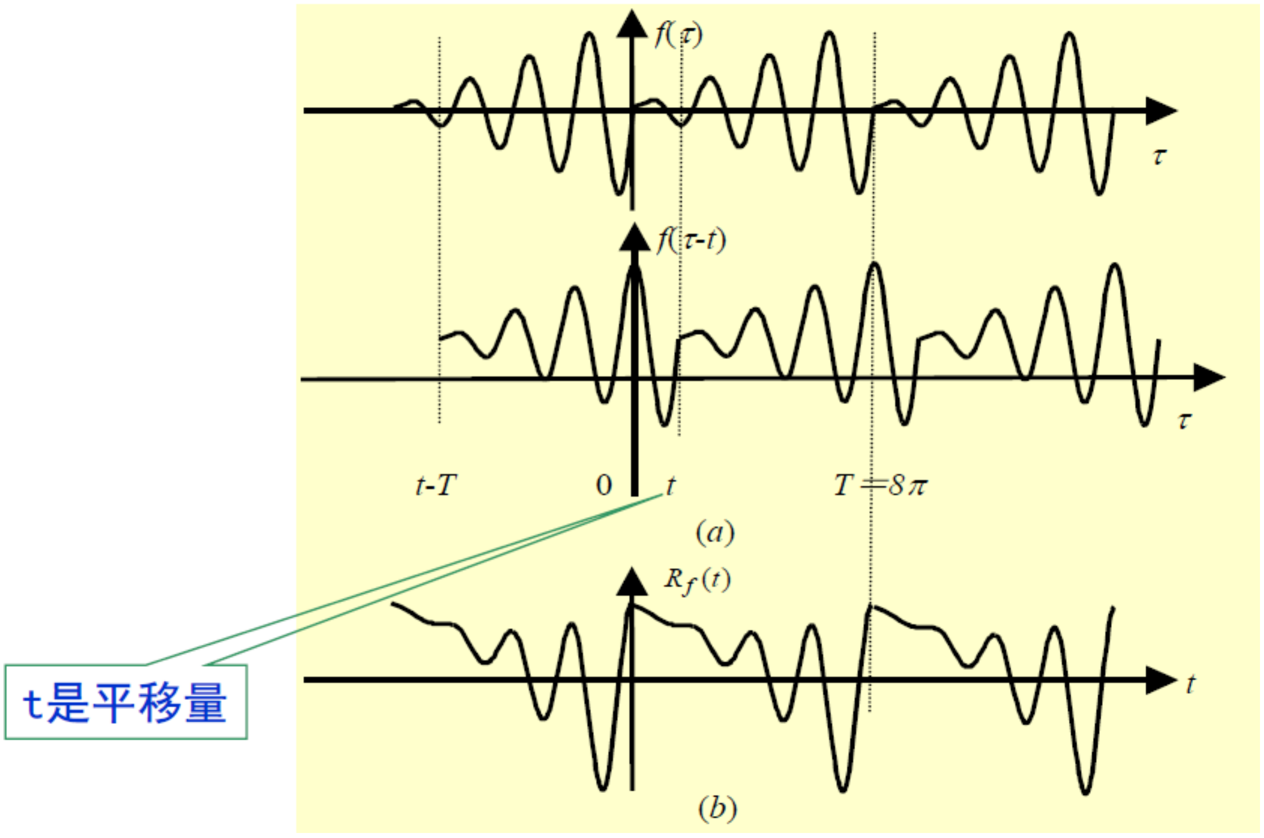
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a)f_2^*(a-t)da$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a)f_2(a-t)da\right]^*$$

$$=R_{f_2 f_1}^*(-t)$$

课堂练习：推导相关与卷积的关系

- **自相关运算：**（函数自己与自己求相关）
- 用自相关函数检测准周期信号的准周期。



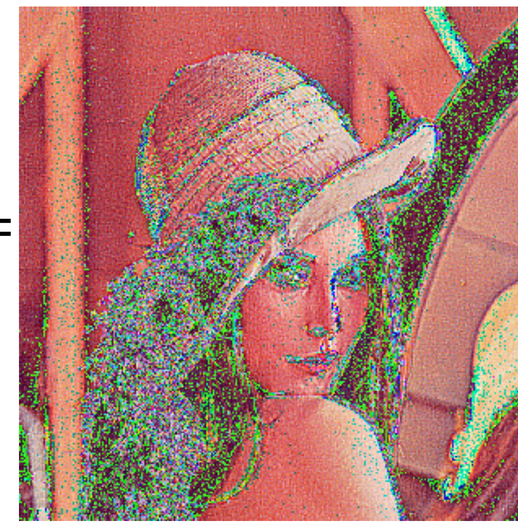
相互运算

• 扩展：卷积的物理意义？

$g(x,y)$表示图像， $f(x,y)$表示卷积核

g

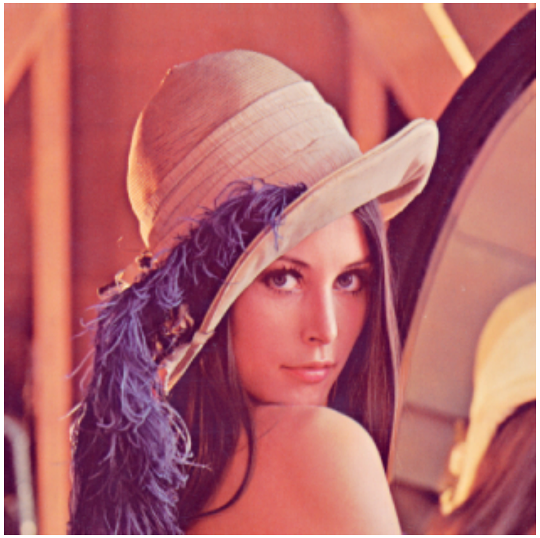
$$* f = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$



- **卷积的定义中，为何要对*f*做反摺？**为了数学上的便利性，反摺后卷积可以满足交换律；另一方面， 在后续的学习中，我们会发现时域的卷积在频域上有很简洁的形式。

• 扩展：卷积的物理意义？

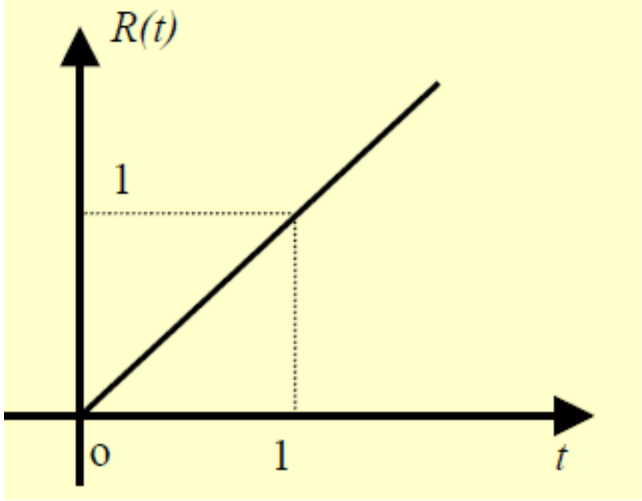
$g(x,y)$表示图像， $f(x,y)$表示卷积核

g  $* f = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$ 

- 为何“积”？：“积”的过程中，我们得到了一个叠加值，我们通过定义f，使得叠加值包含图像的特定信息，*e.g.* 边缘信息，平滑处理。

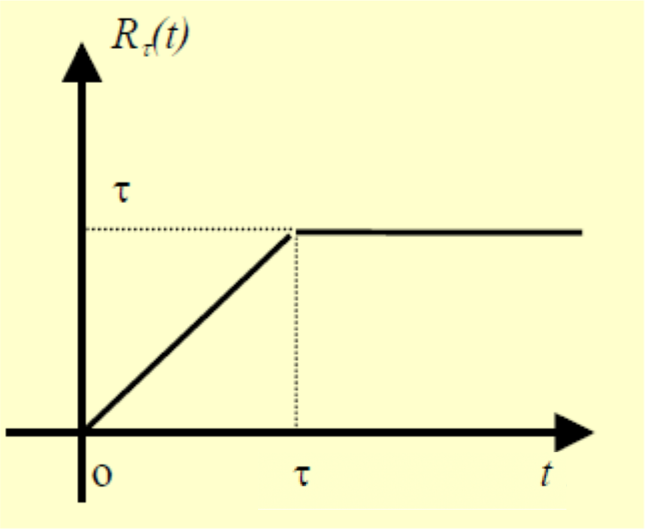
- 信号的概念
- 信号的描述
- 信号的数学基础
- 信号的基本运算
- 奇异信号

- **单位斜变信号：**



$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

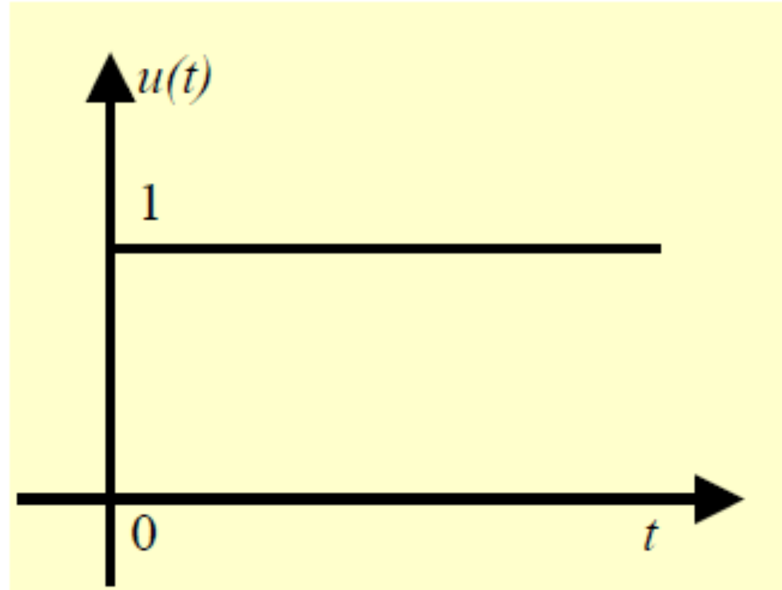
截顶的单位斜变信号：



$$R_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & \tau>t\geq 0\\ \tau, & t\geq\tau\end{cases}$$

• 单位阶跃信号：

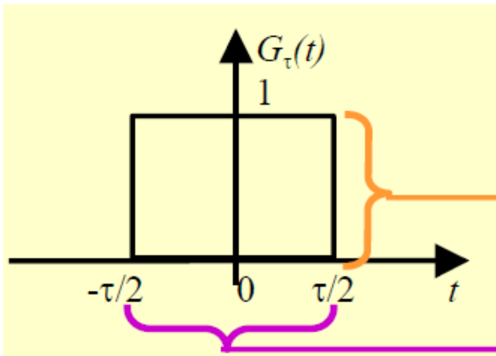
$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$$



- 特点：
- (1) 与单位斜变信号是积分/微分关系
- (2) 用于描述分段信号

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt \qquad \frac{dR(t)}{dt}=u(t)$$

- **单位矩形脉冲信号：**

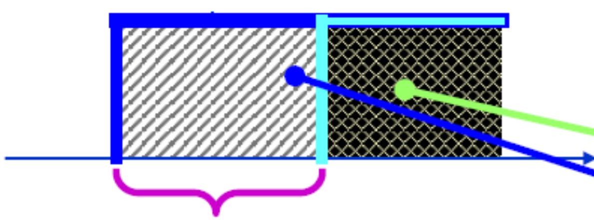


$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

脉高：矩形脉冲的高度

脉宽：矩形脉冲的宽度

– 与单位阶跃信号之间的关系



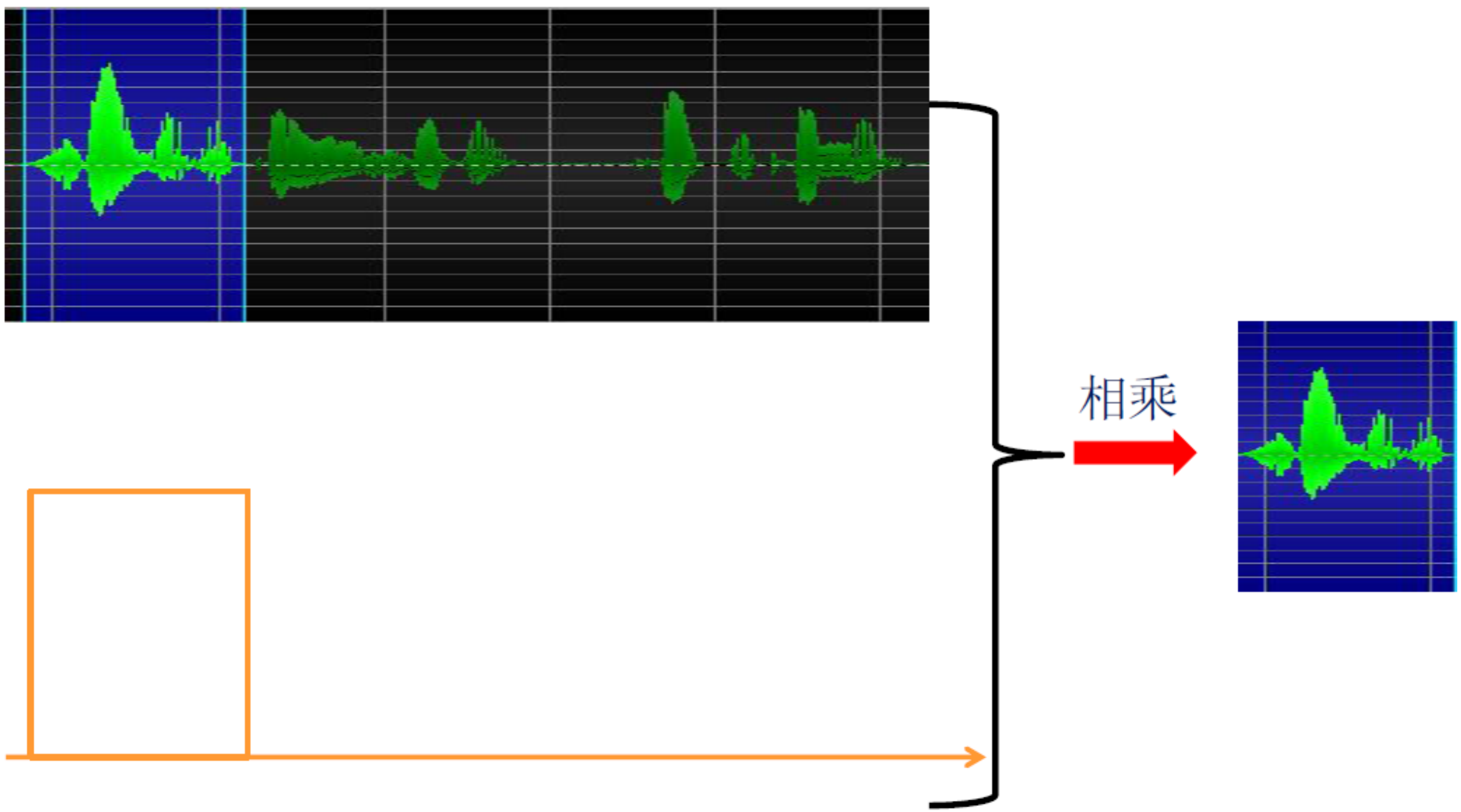
$$G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$$

- **单位矩形脉冲信号：**
  - **与单位阶跃信号之间的关系：**
    1. 通过单位阶跃信号的运算结果，可以不必再用分段的形式表示信号了！
    2. 其他信号与矩形信号相乘时，只有在矩形信号对应的区间内，其他信号的信息才被保留下来，其余范围都是零。

用矩形信号和乘法运算，可以截取信号的特定区间片段！

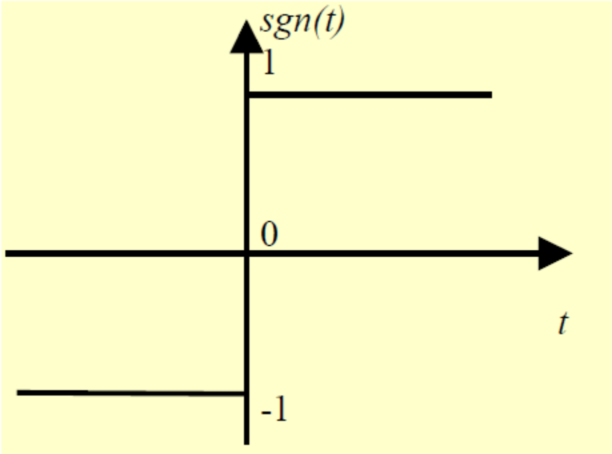
–窗函数

- **单位矩形脉冲信号：**
  - 窗函数的截取功能



- **符号函数信号：**
  - 用于表示自变量的符号特性

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ -1, & t<0\end{cases}$$



$$\mathrm{sgn}(t)+1=2u(t)$$

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$$

- **单位冲激信号：**
  - 用于描述自然界中那些发生后持续时间很短的现象。
  - 定义（1）：

设冲激信号有一个总的冲激强度，它在整个时间域上的积分等于该强度值，而在除冲激点之外的其他点的函数取值为零。

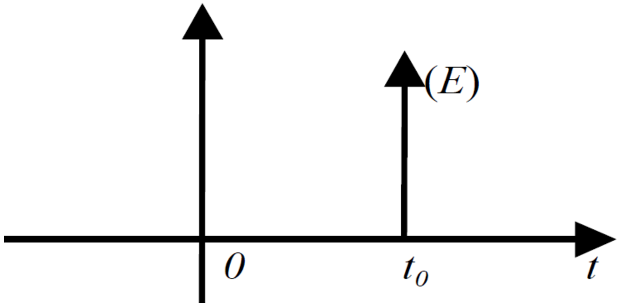
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases}$$

狄拉克定义式

- # 单位冲激信号：

  - 波形表示：

在冲激点处画一条带箭头的线，线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致。



更一般地可以如下定义：

冲激点在t_0、强度为E的冲激信号 $\delta_{E,t_0}(t) = E\delta(t-t_0)$

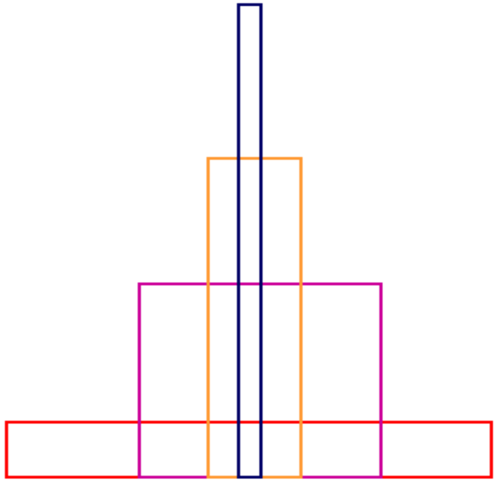
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{E,t_0}(t)dt = E \\ \delta_{E,t_0}(t) = 0 \quad (t \neq t_0) \end{cases}$$

- **单位冲激信号：**
  - 从另外角度理解：

    定义（2）普通函数取极限逼近

    （矩形脉冲，三角脉冲，。。。）

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{G_\tau}{\tau}$$



- 卷积的性质（1）：

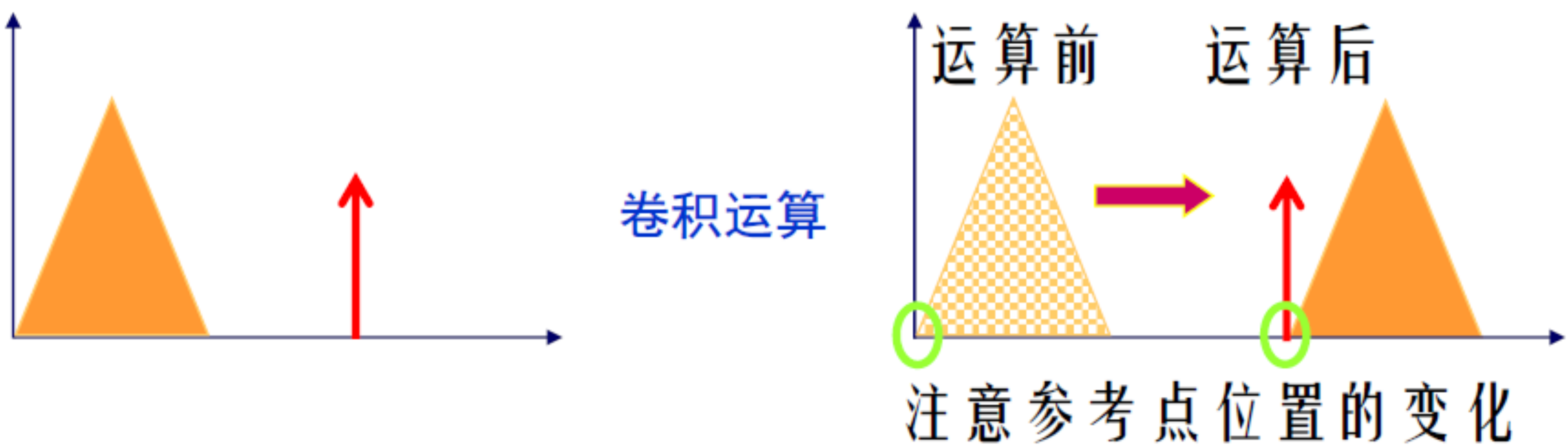
$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

• 冲激函数的性质（1）扩充：搬移抽样特性

函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。



• 冲激函数的性质（1）扩充：搬移抽样特性

函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数平移到单位冲激函数的冲激点位置。

快速理解：

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(a)\delta(t-t_0-a)da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\delta(t-t_0-a)da=f(t-t_0)$$

• 单位冲激信号：

- 卷积的性质（2）：

  函数→值映射关系

  冲激函数能从检验函数中筛选出零点处的函数值。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

- 上式只是借用了积分的形式，表达的意思是：冲激函数对测试函数分配（或赋予）一个数的过程，所以不能按普通的积分运算来考虑。
- 之所以借用积分的形式，是因为它形式上与积分运算的相应性质一致，且普通积分运算实际上也是产生一个“值”。

• 冲激函数的性质（3-5）

对称性：　冲激函数是偶函数

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

时域压扩性：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\quad(a\neq 0)$$

积分：

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1\quad(t>0)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=0\quad(t<0)$$

$$\rightarrow\ \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

抽样特性☆：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

← 也称“筛选特性”

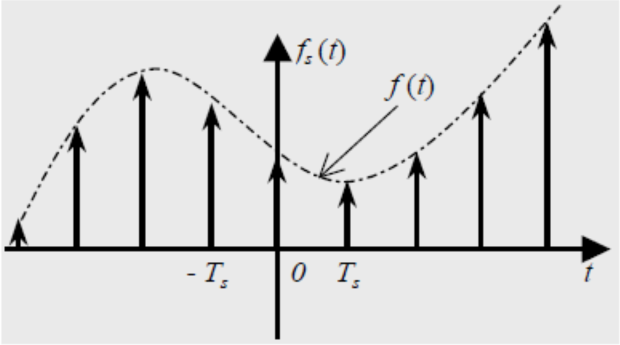
- **冲激函数的抽样特性：**

冲激信号 $\xrightarrow{\text{加法}}$ 冲激串

冲激串、连续信号 $\xrightarrow{\text{乘法}}$ 抽样信号

冲激串信号: $\Delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

抽样信号
波形表示



抽样信号: $f_s(t) = f(t) \cdot \Delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$

（n为整数）

第二周作业

作业1：推导卷积的微分公式

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)] = f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right] = \left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

作业2：推导卷积的积分公式

$$\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\lambda)d\lambda = f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda = \left(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda\right)*f_2(t)$$

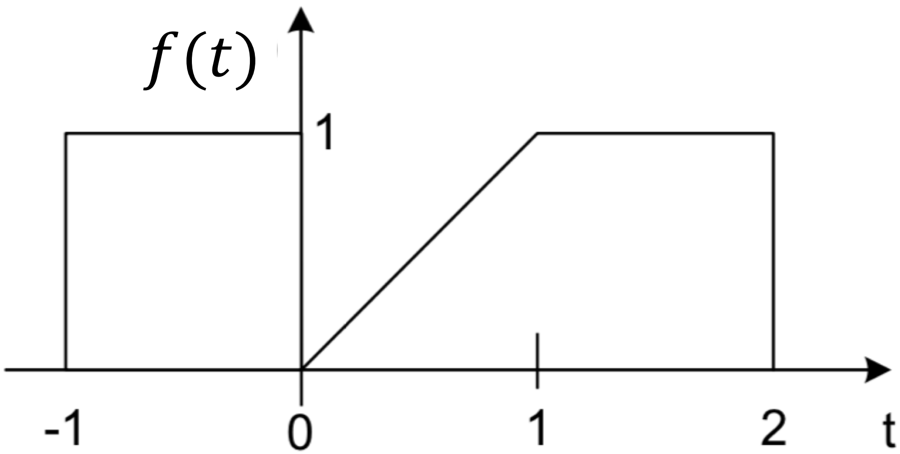
作业3：推导一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分，即

$$f(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t}f(t)dt$$

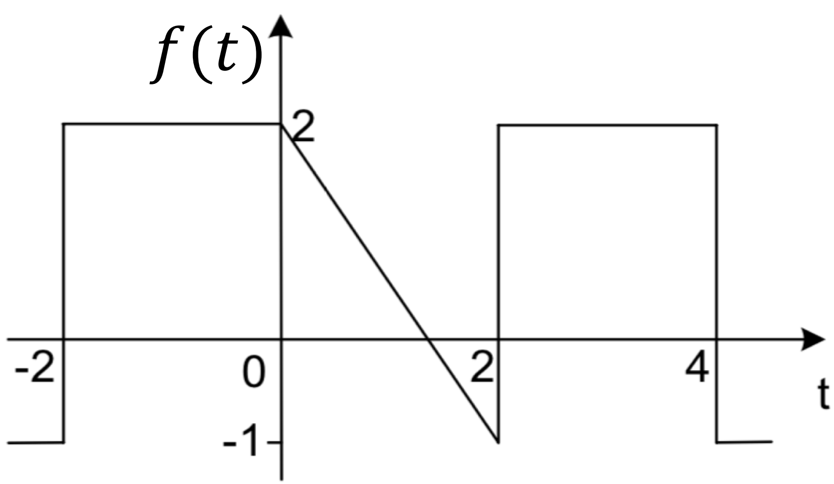
结 束

复习参考1：课堂练习1波形变换

已知$f(t)$的图形如下所示，请画出$y(t)=3f\left(1-\frac{t}{2}\right)-1$的图形。$(t\in R)$



答案：



复习参考2：卷积的结合律

- **卷积的性质：**

III 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ 　**用于串联系统的分析**

$$
\begin{aligned}
&((f_1 * f_2) * f_3)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2(b-a) da \right] f_3(t-b) db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) f_2(b-a) f_3(t-b) da db \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(b-a) f_3(t-b) db \right] da \\
&\xlongequal{b=a+c} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(c) f_3(t-a-c) dc \right] da \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(a) \left[(f_2 * f_3)(t-a) \right] da \\
&= (f_1 * (f_2 * f_3))(t)
\end{aligned}
$$

复习参考3：相关与卷积的关系

相关运算：

相对平移量

$$R_{f_1f_2}(t)=R\big(f_1(t),f_2(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R\big(f_2(t),f_1(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau+t)f_1^*(\tau)d\tau$$

- 相关与卷积的关系： $R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$

$$\begin{aligned}
&R_{f_2f_1}(t)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(a)f_1^*(a-t)da\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^*(a-t)f_2(a)da\\
&=f_1^*(-t)*f_2(t)
\end{aligned}$$