清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

jjia@tsinghua.edu.cn

13651399048

2020.12.24

IIR 数字滤波器的设计

递归差分方程 $$y(n)=\sum_{k=0}^{M}a(k)x(n-k)+\sum_{k=1}^{N}b(k)y(n-k)$$

IIR滤波器与FIR滤波器的比较

1. FIR滤波器仅在z=0处有极点，所以必然是稳定的数字系统。而IIR滤波器则不能保证是稳定的。
2. FIR滤波器很容易实现线性相位(因为FIR的脉冲响应是关于中心点对称的)，而IIR滤波器则很难做到线性相位。
3. 在实现类似性能时，IIR滤波器比FIR滤波器的系数要少得多。

低通IIR滤波器设计步骤：

1．根据滤波器性能要求，设计相应的低通模拟滤波器。

2．通过双线性变换，得到相应的低通数字滤波器。

通常的低通模拟滤波器有：

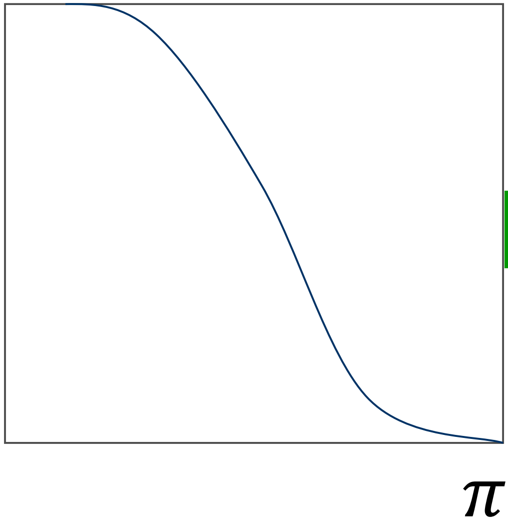
1．巴特沃斯滤波器

2．切比雪夫I型滤波器

3．切比雪夫II型滤波器

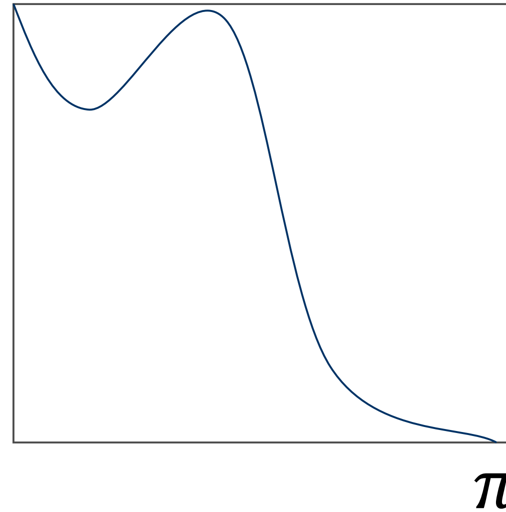
4．椭圆滤波器

这些低通模拟滤波器有什么区别呢？



通带阻带都单调

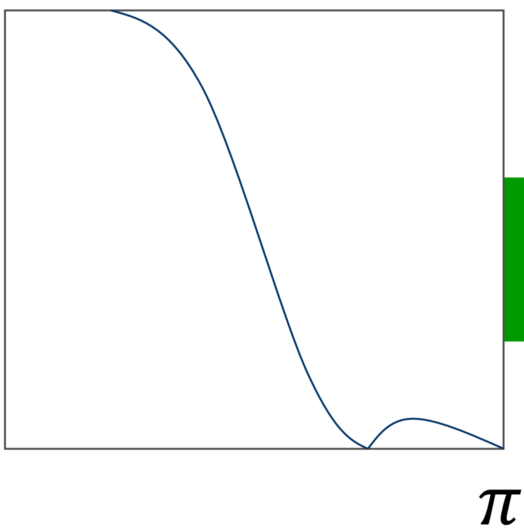
巴特沃斯



通带有波纹

而阻带单调

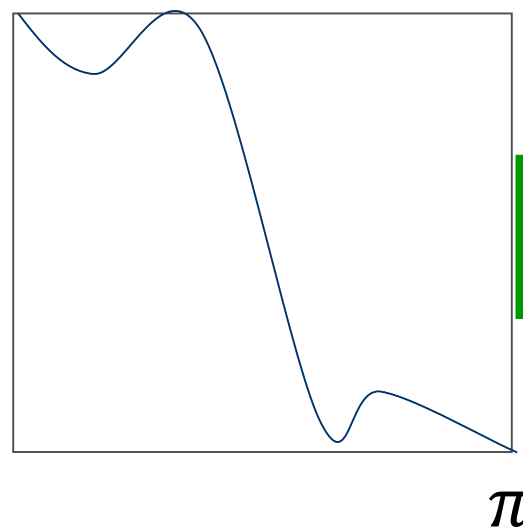
切比雪夫I型



通带单调，

阻带有波纹

切比雪夫II型



通带阻带

都有波纹

椭圆滤波器

模拟低通滤波器 ➔ 数字低通滤波器

1. 根据滤波器性能要求，设计相应的低通模拟滤波器。

2. 通过双线性变换，得到相应的低通数字滤波器。

将模拟滤波器变换为数字滤波器---双线性变换

模拟滤波器的系统函数 H(s)

$$s \Longleftrightarrow 2f_s \frac{z-1}{z+1}$$ 双线性变换

数字滤波器的系统函数 H(z)

模拟低通滤波器 ➔ 数字低通滤波器

1．根据滤波器性能要求，设计相应的低通模拟滤波器。

2．通过双线性变换，得到相应的低通数字滤波器。

求满足性能要求的模拟滤波器的边缘频率---预扭曲方程

$$s \Leftrightarrow 2f_s \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$2f_s \frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}+1} = 2f_s \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$= 2f_s \frac{2j\sin\frac{\omega}{2}}{2\cos\frac{\omega}{2}} = j2f_s\tan\frac{\omega}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}, \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$s = j\Omega$$

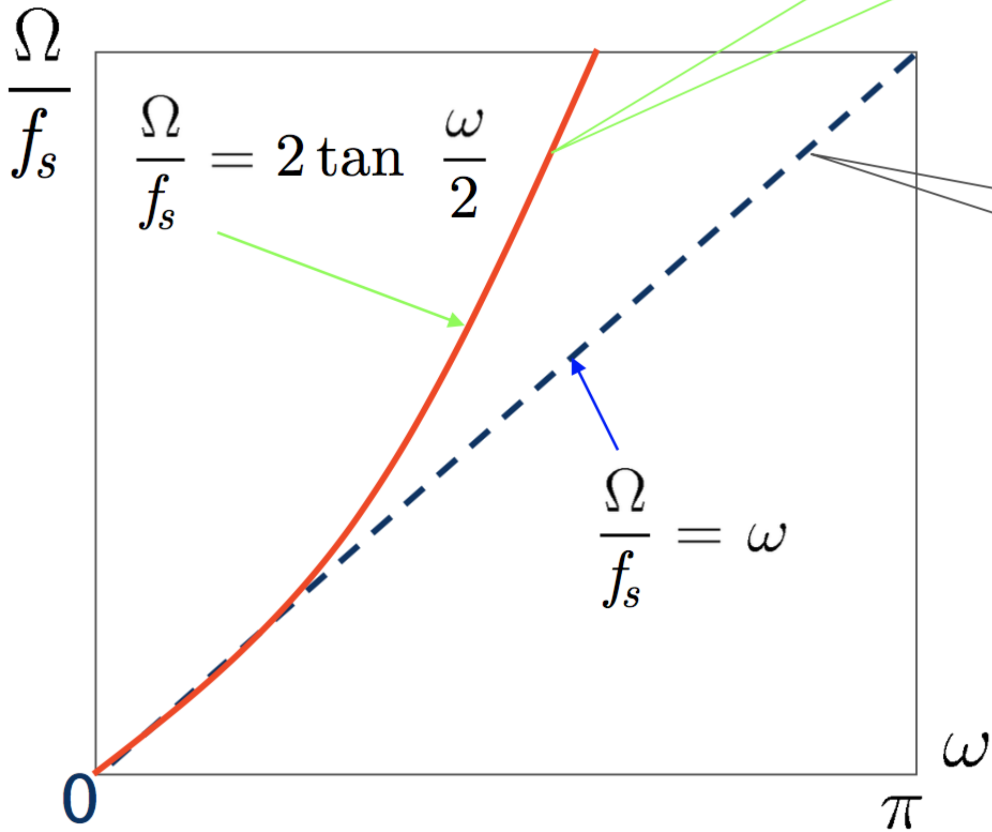
$$\Rightarrow \quad j\Omega \Leftrightarrow j2f_s\tan\frac{\omega}{2}$$

$$\Omega \Leftrightarrow 2f_s\tan\frac{\omega}{2}$$

模拟低通滤波器 ➔ 数字低通滤波器

$$\Omega \Leftrightarrow 2f_s \tan \frac{\omega}{2}$$

双线性变换过程中，模拟频率与数字频率的关系



模拟频率与数字频率的关系

在根据对数字滤波器的设计要求确定模拟滤波器的指标参数时，**应该考虑**双线性变换带来的影响。

要求指标（模拟频率）➔数字频率➔设计用的模拟频率（预扭曲方程）

巴特沃斯滤波器设计---关键是求阶次

（因为系统传递函数可以通过查表得到具体形式）

一阶

$$H(s)=\frac{\Omega_{p1}}{s+\Omega_{p1}}$$

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Omega_{p1}}\right)^2+1}}$$

n阶

传递函数非常复杂，通常借助**滤波器设计软件**来求解和完成对它的双线性变换。

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Omega_{p1}}\right)^{2n}+1}}$$

低通巴特沃斯滤波器设计步骤

1. 求滤波器的通带边缘频率、阻带边缘频率、阻带衰减
2. 求上述两个边缘频率的数字频率
3. 求数字频率对应的模拟频率 Ω_{p1}, Ω_{s1}（用预扭曲方程）
4. 由给定阻带衰减确定阻带边缘增益 δ_s
5. 计算模拟滤波器的阶数

$$n \geq \frac{\log\left(\dfrac{1}{\delta_s^2} - 1\right)}{2\log\left(\dfrac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}\right)}, \quad n \in N$$

6. 查表得模拟滤波器传递函数 H(s)，对其进行双线性变换得数字滤波器的传递函数 H(z)

低通巴特沃斯滤波器设计——例1

设计具有巴特沃斯特性的低通IIR滤波器，-3dB频率为1200Hz，在1500Hz处增益降到-25dB，采样频率8kHz

模拟边缘频率：fp1=1200Hz，fs1=1500Hz

阻带边缘增益：$20\log\delta_s = -25\text{dB} \rightarrow \delta_s = 0.0562$

数字边缘频率：

$$\omega_{p1} = 2\pi\frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi\frac{1200}{8000} = 0.3\pi$$

$$\omega_{s1} = 2\pi\frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi\frac{1500}{8000} = 0.375\pi$$

模拟滤波器的边缘频率：

$$\Omega_{p1} = 2f_s\tan\frac{\omega_{p1}}{2} = 8152.4$$

$$\Omega_{s1} = 2f_s\tan\frac{\omega_{s1}}{2} = 10690.9$$

滤波器的阶次

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_s^2}-1\right)}{2\log\left(\frac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}\right)} = 10.6 \rightarrow 11$$

低通巴特沃斯滤波器设计——例2

低通巴特沃斯滤波器在其通带边缘1kHz处的增益为-3dB，而在12kHz处的阻带衰减则为-30dB，采样频率25kHz。

模拟边缘频率：fp1=1000Hz，fs1=12000Hz

阻带边缘增益：$20\log\delta_s = -30\text{dB} \rightarrow \delta_s = 0.03162$

数字边缘频率：$\omega_{p1} = 2\pi\frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi\frac{1000}{25000} = 0.08\pi$

$$\omega_{s1} = 2\pi\frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi\frac{12000}{25000} = 0.96\pi$$

模拟滤波器的边缘频率：

$$\Omega_{p1} = 2f_s\tan\frac{\omega_{p1}}{2} = 6136.5$$

$$\Omega_{s1} = 2f_s\tan\frac{\omega_{s1}}{2} = 794727.2$$

滤波器的阶次 $n \geq \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{\delta_s^2} - 1\right)}{2\log\left(\dfrac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}\right)} = 0.714 \rightarrow 1$

$$H(s) = \frac{\Omega_{p1}}{s + \Omega_{p1}} = \frac{6136.5}{s + 6136.5}$$

$$H(z) = \frac{6136.5}{50000\dfrac{z-1}{z+1} + 6136.5} = \frac{0.1122(1 + z^{-1})}{1 - 0.7757z^{-1}}$$

$$\boxed{y(n) = 0.7757y(n-1) + 0.1122x(n) + 0.1122x(n-1)}$$

自学

$$y(n) = 0.7757y(n-1) + 0.1122x(n) + 0.1122x(n-1)$$

```
double IIR(double x)
{
    static double x1 = 0.0, y1 = 0.0;          // zero-state
    double y;

    y = 0.7757 * y1 + 0.1122 * x + 0.1122 * x1; // IIR Filter
    y1 = y;     // → y(n-1)
    x1 = x;     // → x(n-1)
    return y;
}
```

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b(k)y(n-k)$$

幅频响应为其他类型的IIR滤波器，如高通、带通、带阻，又该如何设计呢？

低通滤波器 $H_{\mathrm{L}}(s)$, Ω_p →

高通滤波器 $$H_{\mathrm{HP}}(s)=H_{\mathrm{L}}\left(\frac{\Omega_p\Omega_p'}{s}\right)$$

带通滤波器 $$H_{\mathrm{BP}}(s)=H_{\mathrm{L}}\left(\Omega_p\frac{s^2+\Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u-\Omega_l)}\right)$$

带阻滤波器 $$H_{\mathrm{BS}}(s)=H_{\mathrm{L}}\left(\Omega_p\frac{s(\Omega_u-\Omega_l)}{s^2+\Omega_l\Omega_u}\right)$$

根据下列指标设计IIR滤波器：
设有采样率为8000Hz的电话录音数字信号，若某段电话录音中有重要价值的频率成分均在1000Hz以内，要求使用双线性变换法，设计一个二阶IIR数字低通滤波器，把录音中不重要的频率成分去除掉，即低通截止频率设为1000Hz（可作为通带边缘频率）。请给出滤波器的设计过程，列出滤波器差分方程，画出滤波器结构图。已知二阶低通模拟巴特沃斯滤波器的传输函数为：

$$H(s)=\frac{\Omega_{p1}^{2}}{s^{2}+\sqrt{2}\Omega_{p1}s+\Omega_{p1}^{2}}$$

公式中的参数是滤波器的截止频率。双线性变换公式和预扭曲方程分别为：

$$s \Leftrightarrow 2f_s\frac{z-1}{z+1} \qquad \Omega \Leftrightarrow 2f_s\tan\frac{\omega}{2}$$

作答

主观题 10分

设置

【期末复习1】

已知x=[2, 3, 6, 1, 0, 1]

设x的离散时间傅里叶变换DTFT为$X(\omega)$,求$\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

主观题 10分

设置

【期末复习2】

已知信号$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$,求该序列的离散时间傅立叶变换$X\left(e^{j\Omega}\right)$。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

【期末复习3】

已知序列 x1=[1, 6, 5, 3], x2=[2, 7, 5, 4, 0, 1],

求它们的线卷积和 6 点圆卷积。

线卷积： $$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m)$$

N点圆卷积： $$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(h(m)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-m-kN)\right)$$

作答

主观题 10分

设置

【期末复习4】

$f(t)=\sin(t)\cos(2t)-\frac{1}{4}je^{jt}$, 其中$t$是实数，

（1）求$f(t)$的傅里叶级数 FS。

（2）求$f'(t)$的傅里叶变换 FT。

（3）求$f'(t)*\frac{1}{\pi t}$的傅里叶变换 FT。

作答

【期末复习5】

在 A/D 变换之前和 D/A 变换之后都要让信号通过一个低通滤波器，他们分别起什么作用？↵

作答

结束