清华大学计算机科学与技术系

信号处理原理

贾珈

2020.10.8

【课堂练习1】：

已知某信号$f_0(t)$是一个关于纵轴对称的三角波，设它的底边长为2，高为1，试绘出信号$f(t)$的波形：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t)*\delta(t-2n)$$

并回答$f(t)$是否是周期信号？如是，其周期为多少？

【课堂练习1】：

已知某信号$f_0(t)$是一个关于纵轴对称的三角波，设它的底边长为2，高为1，试绘出信号$f(t)$的波形：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t)*\delta(t-2n)$$

并回答$f(t)$是否是周期信号？如是，其周期为多少？

作答

- 信号的分解方法
- 函数的正交分解
- 信号的正交变换

- 信号的分解方法
- 函数的正交分解
- 信号的正交变换

- **信号分解方法**

分解方法

直流分量+交流分量

偶分量+奇分量

实部分量+虚部分量

分解结果是唯一的

脉冲分量

基于正交分量的分解

• 信号分解方法

信号的直流分量 $f_{DC}(t)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$ → 信号的均值

信号的交流分量 $f_{AC}(t)=f(t)-f_{DC}(t)$

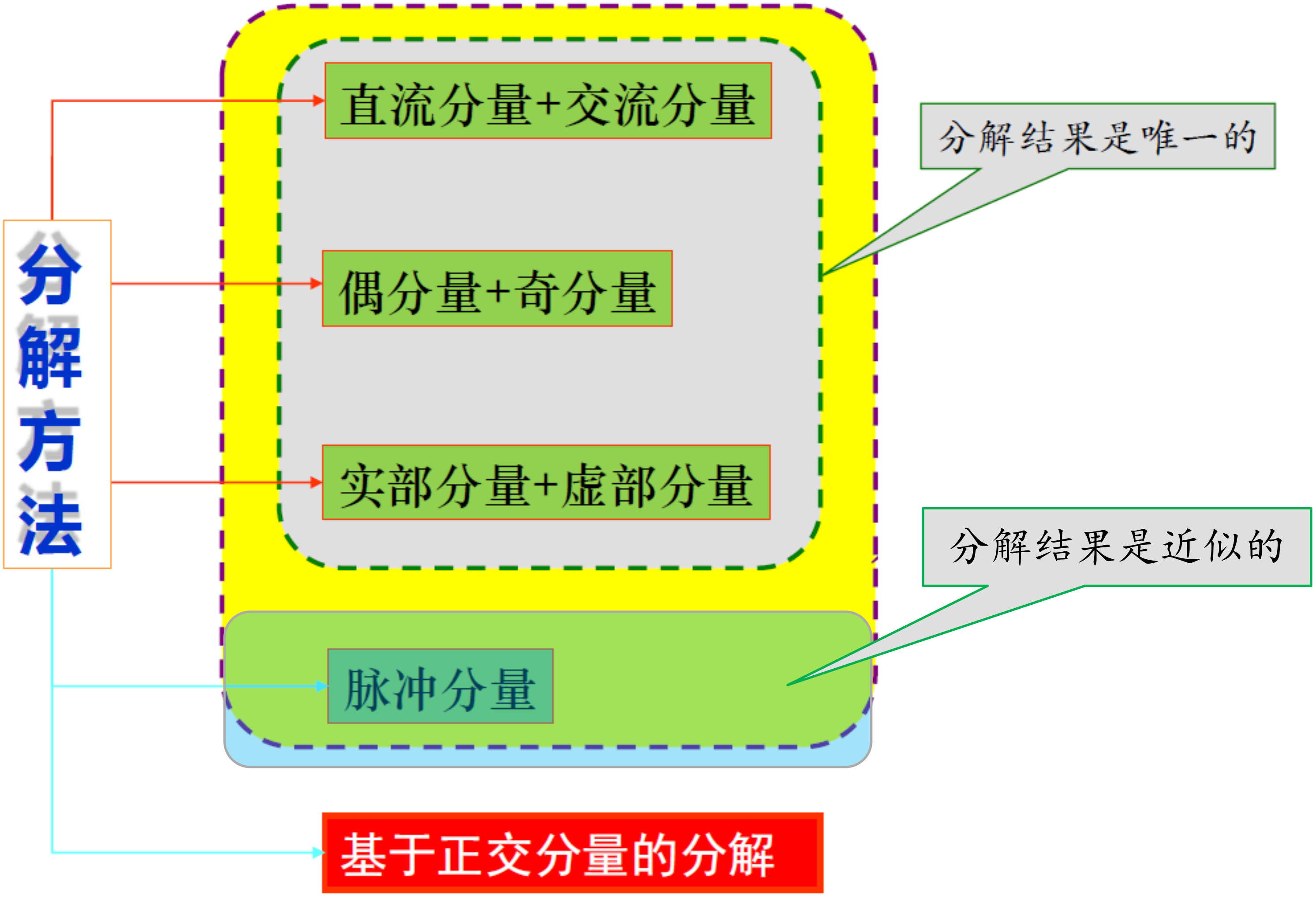
信号的偶分量 $f_e(t)=Ev[f(t)]=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

信号的奇分量 $f_o(t)=Od[f(t)]=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$

信号的实部分量 $f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\dfrac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right)$

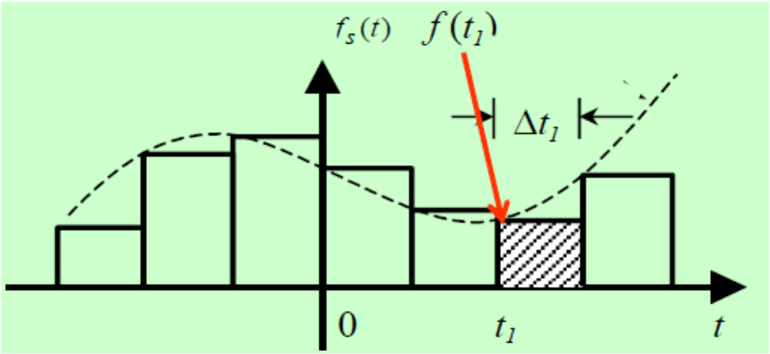
信号的虚部分量 $f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\dfrac{1}{2j}\left(f(t)-f^*(t)\right)$

- **信号分解方法**


分解方法
直流分量+交流分量
偶分量+奇分量
实部分量+虚部分量
脉冲分量
基于正交分量的分解
分解结果是唯一的
分解结果是近似的

• 信号分解方法

- 信号的脉冲分解：信号可以近似表示为一组矩形脉冲的和的形式。



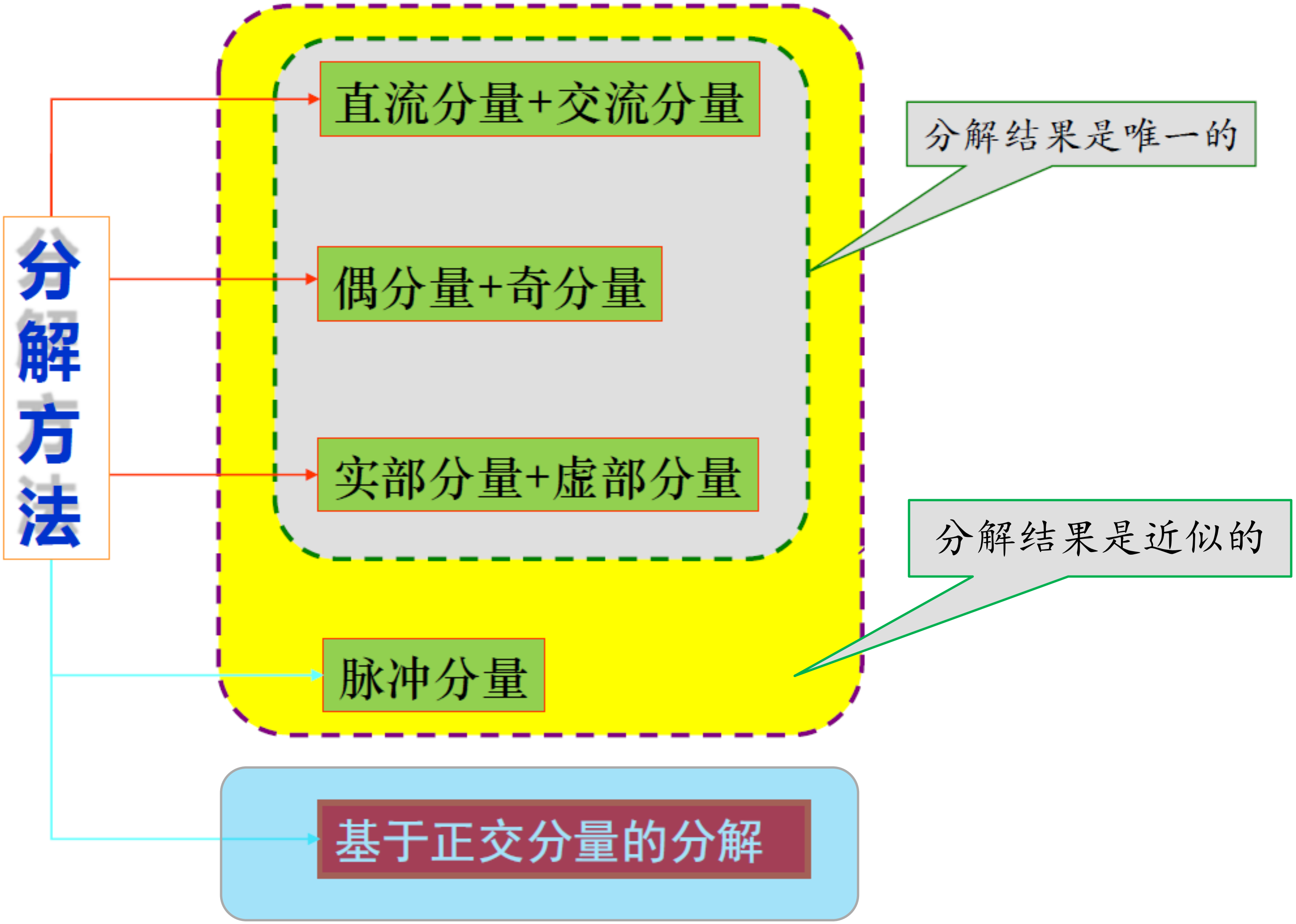
- 其中t_1处的矩形脉冲可以表示为：

$$f_{t_1}(t)=f(t_1)\left[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)\right]$$

- 原始函数可以表示为：

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty}f_{t_1}(t)=\sum_{t_1=-\infty}^{\infty}f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta_{t_1})]$$

- **信号分解方法**


分解方法
直流分量+交流分量
偶分量+奇分量
实部分量+虚部分量
脉冲分量
基于正交分量的分解
分解结果是唯一的
分解结果是近似的

- 信号的分解方法
- 函数的正交分解
- 信号的正交变换

- **正交函数集**
  - （储备）函数的一些基本概念：（1）平方可积

令$x(t)$为一实函数，若

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty$$

则称$x(t)$为平方可积（分）函数，并记作

$$x(t) \in L^2(R)$$

即，$L^2(R)$表示所有平方可积函数组成的函数空间。

正交函数集

–（储备）函数的一些基本概念：（2）正交、内积与共轭

- 如果在区间(t_1, t_2)上，函数$f_1(t)$和$f_2(t)$互不含有对方的分量，则称$f_1(t)$和$f_2(t)$在(t_1, t_2)上正交

- 函数正交的充要条件是它们的内积为0，即$< f_1, f_2 > = 0$

- 函数$f_1(t)$和$f_2(t)$在(t_1, t_2)上的内积:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt$$

• 正交函数集

–（储备）函数的一些基本概念：（3）正交函数集

➢ 在$[t_1, t_2]$区间上定义的非零函数序列$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$，其中任意两个函数$\varphi_i(t)$与$\varphi_j(t)$均满足条件：

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)d_t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ k_i, & i = j \end{cases}$$

式中k_i为实常数，则称函数序列$\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$为在区间$[t_1, t_2]$上的正交函数集。

注：*表示共轭。两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数。

- **正交函数集**
  - （储备）函数的一些基本概念：（4）标准正交函数集

➢ 如果在[t_1, t_2]区间，正交函数集{$\varphi_i(t)$} 满足下式：

$$(\varphi_i,\varphi_i)=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_i^*(t)d_t=\int_{t_1}^{t_2}\|\varphi_i(t)\|^2 d_t=1,\forall i$$

则称此正交函数集{$\varphi_i(t)$}为标准正交函数集。

注：*表示共轭。两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数。

• 正交函数集

–（储备）函数的一些基本概念：（5）完备正交函数集

➢ 如果在$[t_1, t_2]$区间，除正交函数集$\{\varphi_i(t)\}$之外，不存在有非零的函数$x(t)$满足下式：

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt = 0$$

则称此正交函数集$\{\varphi_i(t)\}$为完备的正交函数集。

• 函数的正交分解

当函数 $f(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 区间具有连续的一阶导数和逐段连续的二阶导数时， $f(t)$ 可以用完备的正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 来表示，即：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(t)$$

其中c_i为常数。则称此表示为函数的正交分解。

• 函数的正交分解

其中：

$$c_i=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))}=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i}=\frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,d_t$$

式中 k_i 为函数$\boldsymbol{\varphi}_i(t)$的内积：

$$k_i=(\varphi_i,\varphi_i)=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_i^*(t)d_t=\int_{t_1}^{t_2}\|\varphi_i(t)\|^2 d_t$$

• 函数的正交分解

➢ 帕斯瓦尔定理(Parseval‘s theorem)：

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

表明用一个正交函数集来准确地表示一个信号时，这信号的能量等于相应的正交函数各分量的能量之和。

帕斯瓦尔定理的证明：

Tips：

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 d_t = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right\|^2 d_t$$

$$k_i = (\varphi_i, \varphi_i) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_i^*(t) d_t = \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_i(t)\|^2 d_t$$

- 信号的分解方法
- 函数的正交分解
- 信号的正交变换

• 信号的级数展开

➢ 信号 $x(t)$ 用一组函数展开：

考虑使用一组函数$\boldsymbol{\varphi_i}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{Z}$，将信号$\boldsymbol{x(t)} \in \boldsymbol{L^2(R)}$展开成级数，即

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

这一形式称为信号$\boldsymbol{x(t)}$的级数展开。

通常，展开系数$\boldsymbol{c_i}$使用信号$\boldsymbol{x(t)}$的某种积分形式来确定。这一积分公式(即求展开系数的公式)习惯称为信号变换。

• 信号的正交变换

若信号级数展开的基函数φ_i(t)为标准完备正交基，则积分变换

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt$$

称为信号$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$的正交变换，亦称为Karhunen-Loeve变换

对比：函数的正交分解求解

$$c_i = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))} = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i} = \frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,d_t$$

让我们暂停一下

一起来做一次概念梳理

• 概念梳理

1、信号的级数展开 $x(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\varphi_i(t)$

求系数c_i： 信号变换

2、函数的正交分解 $f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(t)$ $\{\varphi_i(t)\}$为完备正交函数集

求系数c_i：$c_i=\dfrac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))}=\dfrac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i}=\dfrac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,d_t$

3、信号的正交变换，亦称为Karhunen-Loeve变换

$\varphi_i(t)$为标准的完备正交基 $c_i=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_i^*(t)dt$

4、如果信号为符合狄义赫利条件的周期函数，则正交分解的系数c_i形式会很漂亮（见下一节）

- 信号的分解方法
- 函数的正交分解
- 信号的正交变换

特例：周期信号的正交分解

• 周期信号的正交分解

- 满足狄义赫利条件(Dirichlet condition)的周期函数都可以在一组完备的正交基函数上展开成为无穷级数。

狄义赫利条件：在一个周期内

(1) 间断点的个数有限

(2) 极值点的个数有限

(3) 绝对积分数值有限

- **傅里叶级数展开**
  - 如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集，则周期函数展成的级数就是**“傅里叶级数”**。
  - 相应的级数通常被称为“三角形式傅里叶级数”和
  - “指数形式傅里叶级数”。

$$
\text{正交函数集}\begin{cases}\text{三角函数集} \\ \{1, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t : n \in N^{+}\} \\ \text{复指数函数集} \\ \{e^{jn\omega_1 t} : n \in Z\}\end{cases}
$$

n是正整数

n是整数

• 三角形式傅里叶级数

➢ 设周期函数 $f(t)$的周期为T_1，函数{1, cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$} 是正交函数集，令 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ，则展开成三角函数的无穷级数形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

傅里叶级数展开

- **三角形式傅里叶级数**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- 系数a_n和b_n统称为三角形式的傅里叶级数系数，简称为傅里叶系数。系数计算：

$$c_i = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))} = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i} = \frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,dt$$

➢常用的正交函数集的基本函数，除正弦型函数（含复指数函数）外，还有勒让德函数(Legendre function)、贝塞尔函数(Bessel function)、沃尔什函数(Walsh function)等，不一一列举。

• 三角形式傅里叶级数

【课堂练习2】： 设周期函数 $f(t)$的周期为T_1，函数{cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$}是正交函数集，$T_1 = 2\pi/\omega_1$ ，试求：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ T_1 & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt = 0 \quad m,n\text{为任意非负整数}$$

- ## 三角形式傅里叶级数

【课堂练习2】： 设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_1，函数{cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$}是正交函数集，$T_1 = 2\pi/\omega_1$ ，试求：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ T_1 & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt = 0 \qquad m,n\text{为任意非负整数}$$

作答

• 三角形式傅里叶级数

➢ 满足狄义赫利条件(Dirichlet condition)的周期函数可以分解为三角形式的级数 - 傅里叶级数FS

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

【课堂练习3】

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\,dt \end{aligned}\right\}$$

Tips：

$$c_i = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))} = \frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i} = \frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,d_t$$

主观题 0.5分

设置

- **三角形式傅里叶级数**

➢ 满足狄义赫利条件(Dirichlet condition)的周期函数可以分解为三角形式的级数 - 傅里叶级数FS

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

【课堂练习3】

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,dt\\ a_n&=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt\\ b_n&=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\,dt \end{aligned}\right\}$$

Tips：

$$c_i=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))}=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i}=\frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)\,d_t$$

作答

• 复指数形式傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t}\right]$$

$$f(t) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty}[F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t}]$$

简写为 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$，其中：$F(0) = a_0$，$\boxed{F_n = F(n\omega_1)}$

➢ 欧拉公式：

$$\cos n\omega_i t = (e^{jn\omega_i t} + e^{-jn\omega_i t})/2$$
$$\sin n\omega_i t = (e^{jn\omega_i t} - e^{-jn\omega_i t})/(2j)$$

- **复指数形式傅里叶级数**

➢ 复指数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

【课堂练习4】系数计算方法：

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

Tips：

可以根据F_n和a_n, b_n的关系

$$\boxed{F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}}$$

也可以根据定义

主观题 0.5分

设置

• 复指数形式傅里叶级数

➢ 复指数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

【课堂练习4】 系数计算方法：

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Tips：

可以根据F_n和a_n, b_n的关系

$$\boxed{F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}}$$

也可以根据定义

作答

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

- **复指数形式傅里叶级数**

偶周期信号的FS

Fn是偶对称的实数序列

思考：如何证明偶对称？是实数序列？

奇周期信号的FS

Fn是奇对称的纯虚序列

思考：如何证明奇对称？是虚数序列？

Tips:

$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

偶周期信号的FS

Fn只有直流分量和余弦项。

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt = 0$$

奇周期信号的FS

Fn只有正弦项。

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt \neq 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt = 0$$

- **傅里叶级数展开:** 时域与频域的关系—— 帕斯瓦尔方程
  - 周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量有效值的平方和，也即时域和频域的能量守恒。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$P = \overline{\|f(t)\|^2} = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} \|f(t)\|^2 d_t$$

$$= \|a_0\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\|a_n\|^2 + \|b_n\|^2)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Tips:帕斯瓦尔定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

• 傅里叶变换 – 频谱:

$\{F_n\}$ FS谱 → $|F_n|$ $\varphi_n = Arg(F_n)$

FS幅度谱 FS相位谱

周期信号的傅里叶频谱特点:

(1) 仅在一些离散频率点 $n\omega_1$ 上有值。（谐波）

(2) 离散间隔为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1$

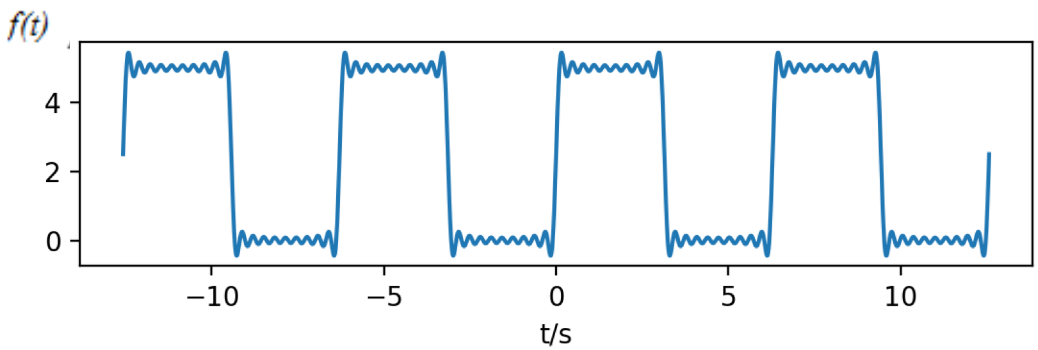
(3) Fn是双边谱，正负频率的频谱幅度相加才是实际幅度。

(4) 信号的功率为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$

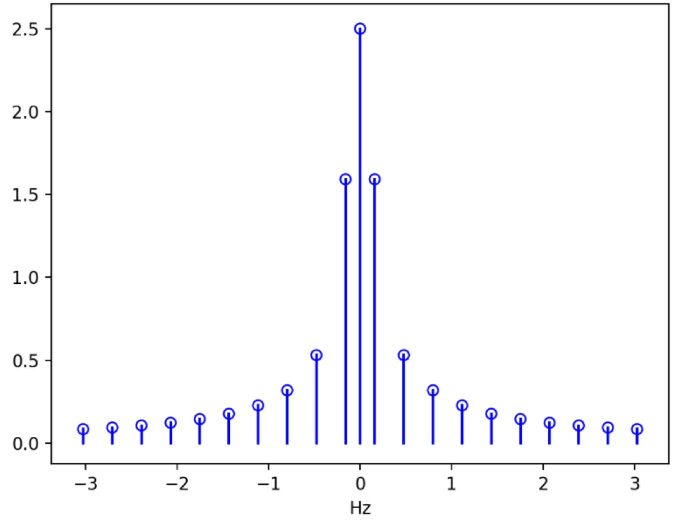
由于复指数完备正交函数集中含有正负项，故为双边谱

周期信号的FS示例

信号 $f(t)$ 举例：



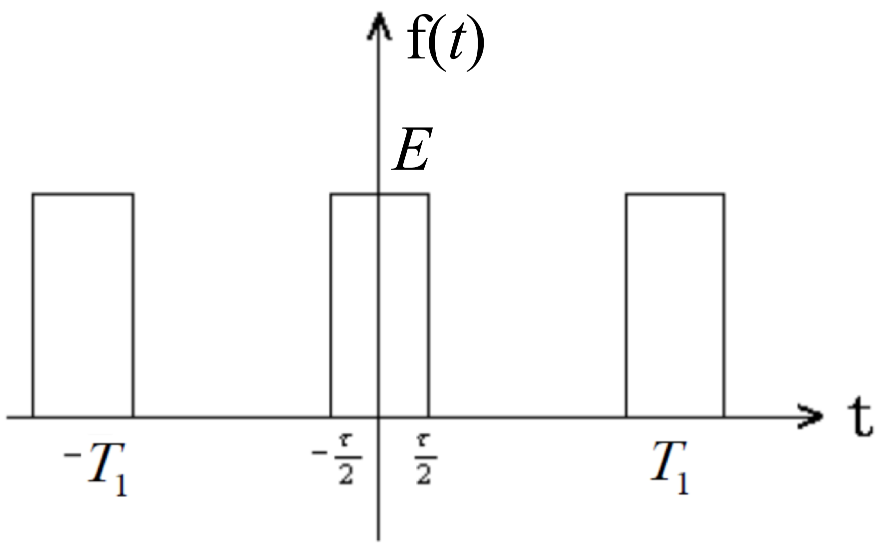
该信号傅里叶频谱的几何直观：



- **周期信号的FS** －周期矩形脉冲信号的FS

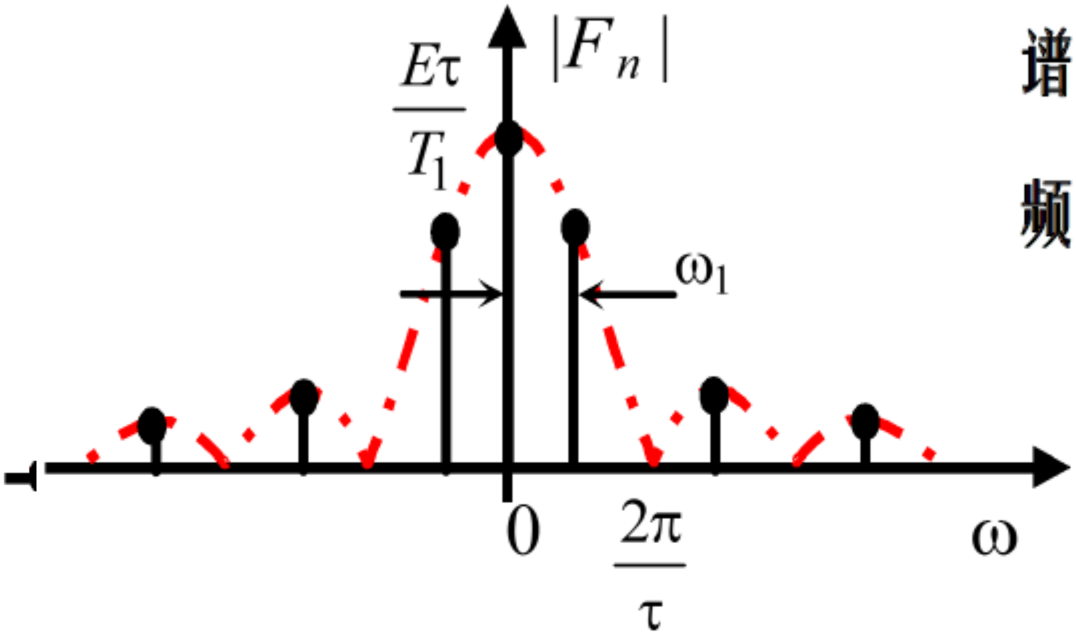
周期矩形脉冲信号 ？

设周期矩形脉冲信号f(t)的脉冲宽度为τ， 脉冲幅度为E,
重复周期为T_1



周期信号的FS示例

- **周期信号的FS – 周期矩形脉冲信号的FS：**



谱线包络线为Sa函数

频谱谱线的间隔为

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

谱线包络线过零点位置

$$\omega = \frac{2k\pi}{\tau}, k \in N^+$$

Tips：周期为T_1，脉冲宽度为τ，脉冲幅度为E的周期矩形脉冲信号，谱线包络线为$\frac{E\tau}{T_1}sa(\frac{\omega\tau}{2})$ （证明见课后参考）

- **周期信号的FS:**
  - 在频域，能量主要集中在第一个零点以内!
  - 实际上，在允许一定失真的条件下，可以要求一个通信系统只把$|\omega| \le \frac{2\pi}{\tau}$频率范围内的各个频率分量传送过去，而舍弃$|\omega| \ge \frac{2\pi}{\tau}$的分量。
  - 常把 $-\frac{2\pi}{\tau} \le |\omega| \le \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形信号的频带宽度，简称带宽。
  - 带宽只与脉冲的脉宽有关，而与脉高和周期均无关。

总结：周期信号的FS

- **周期信号的FS:**

周期信号的频谱谱线的间隔为 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$

周期信号的频谱谱线的长度为

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

思考：周期信号的FS

- **周期 vs. 非周期信号的FS**

非周期信号可以看成是周期T_1趋于无限大的周期信号

⬇

非周期信号的谱线间隔趋于无限小，变成了连续频谱；谱线长度趋于零。

思考：非周期信号的FS

- **周期 vs. 非周期信号的FS**
  - **从频谱分量到频谱密度**
- 非周期信号，可以视为周期无穷大的周期信号。在周期趋向无穷大时 - ？？？

$$T_1 \to \infty$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0$$

谱线间距变密直至为零

ω 变为连续域

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \to 0$$

谱线高度变矮直至为零

思考：非周期信号的FS

- **周期 vs. 非周期信号的FS**
  - **从频谱分量到频谱密度**

(1) 物理意义着手：既是信号，必有能量。无论怎样，能量守恒。因此，频域必会以某种形式存在。

(2) 数学角度思考：无限多无穷小量的和，在极限意义下，可能等于一个有限值。前面的问题只是说每个分量变成了无穷小量，但没有说总和(信号)为零!

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \to 0$$

第三次作业

作业1：（只有一天半的做作业时间哦）

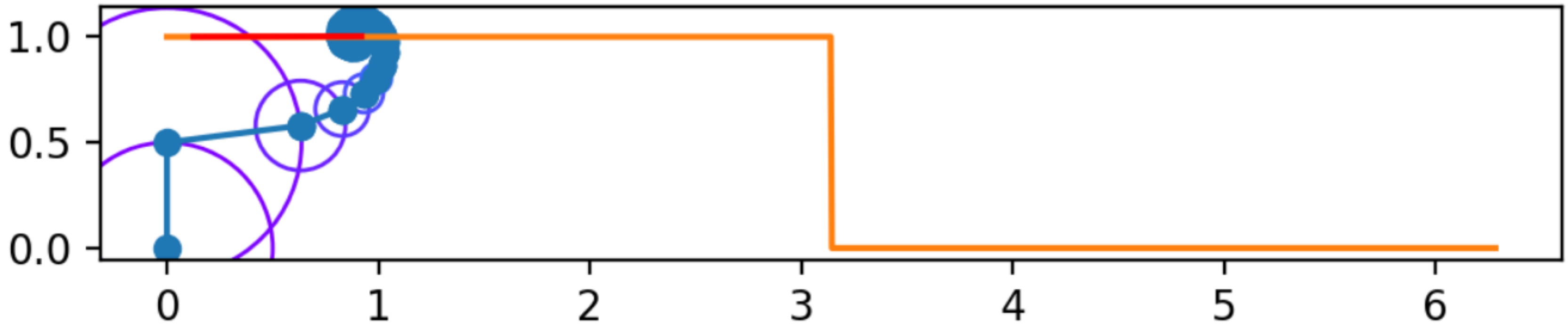
已知 $f(t) = \sin(t)\cos(2t) + 5\cos(3t)\sin(4t)$，求该函数的傅里叶级数。

实验一: 傅里叶级数可视化

- 对于周期为T_1的周期函数$f(t)$，傅里叶级数展开可以写为

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- 傅里叶级数展开可以如下图构造为多个圆上运动的点m_i纵坐标的叠加，每个点的转动角频率固定



- 在实验一中以代码补全的形式可视化这一过程
- 可视化方波信号，选做:半圆波信号
- 环境：python3.6
- **截止时间：10月21日晚上12点（网络学堂）**

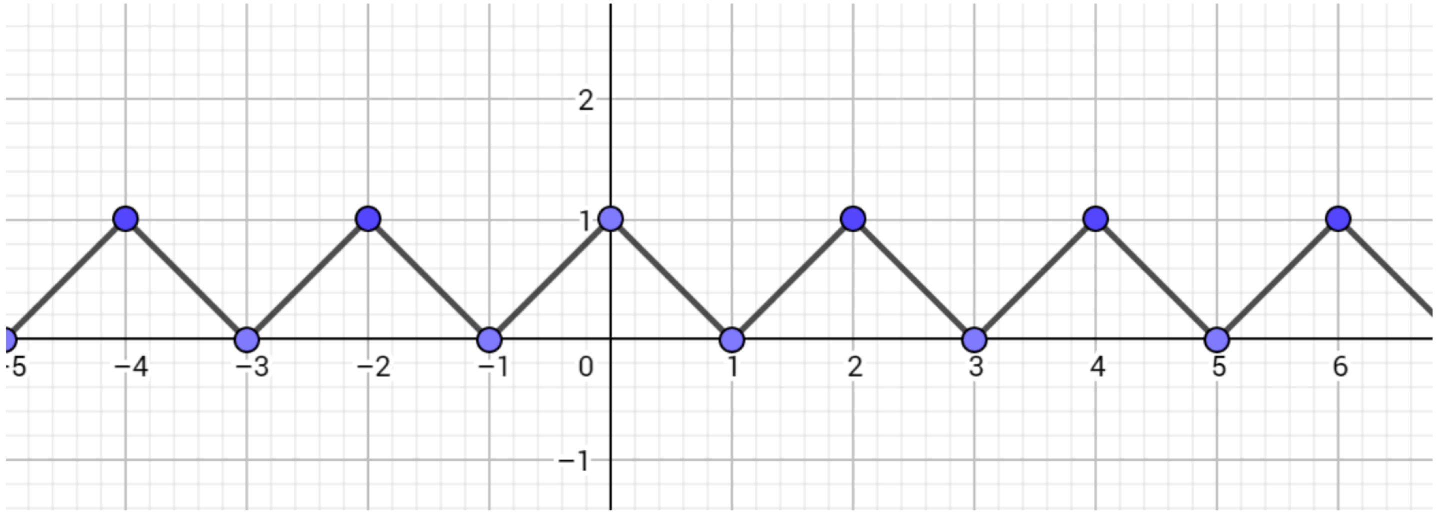
结　束

复习参考1：课堂练习1

已知某信号$f_0(t)$是一个关于纵轴对称的三角波，设它的底边长为2，高为1，试绘出信号$f(t)$的波形：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t)*\delta(t-2n)$$

并回答$f(t)$是否是周期信号？如是，其周期为多少？



复习参考2：帕斯瓦尔定理证明

- 帕斯瓦尔定理(Parseval's theorem)：

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

Tips：

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 d_t = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right\|^2 d_t$$

$$k_i = (\varphi_i, \varphi_i) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_i^*(t) d_t = \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_i(t)\|^2 d_t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right\|^2 dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^* \varphi_i^*(t) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_i^*(t) + \sum_{i \neq j} c_i c_j^* \cdot \varphi_i(t) \cdot \varphi_j^*(t) \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i\|^2 k_i$$

复习参考3：课堂练习2

- **三角形式傅里叶级数**

【课堂练习2】： 设周期函数 $f(t)$的周期为T_1，函数{cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$}是正交函数集，令 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ 证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ T_1 & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos m\omega_1 t \cos n\omega_1 t dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_1} \frac{1}{2} [\cos(m-n)\omega_1 t + \cos(m+n)\omega_1 t] dt$$

$$= \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ T_1 & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

复习参考3：课堂练习2

- **三角形式傅里叶级数**

【课堂练习2】： 设周期函数 $f(t)$的周期为T_1，函数{cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$}是正交函数集，令 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ 证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t d_t = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & others \end{cases}$$

证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin m\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_1} \frac{1}{2} \left[\cos(m-n)\omega_1 t - \cos(m+n)\omega_1 t\right] dt$$

$$= \begin{cases} \frac{T_1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & others \end{cases}$$

复习参考3：课堂练习2

- **三角形式傅里叶级数**

【课堂练习2】： 设周期函数 $f(t)$的周期为T_1，函数{cos $n\omega_1 t$, sin $n\omega_1 t$}是正交函数集，令 $T_1=2\pi/\omega_1$ 证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1}\sin m\omega_1 t\cos n\omega_1 t\,dt=0$$

m,n为任意非负整数

证明：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1}\sin m\omega_1 t\cos n\omega_1 t\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+T_1}\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)\omega_1 t+\sin(m-n)\omega_1 t\right]dt$$

$$=0$$

复习参考4：课堂练习3

- **三角形式傅里叶级数**

  - 满足狄义赫利条件(Dirichlet condition)的周期函数可以分解为三角形式的级数 - 傅里叶级数FS

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

【课堂练习3】

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\,dt \end{aligned}\right\}$$

Tips:

$$c_i = \frac{\langle f(t),\varphi_i(t)\rangle}{\langle \varphi_i(t),\varphi_i(t)\rangle} = \frac{\langle f(t),\varphi_i(t)\rangle}{k_i} = \frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i^*(t)d_t$$

对于 a_0，其 $k_i = T_1$

对于 a_n，b_n，其 $k_i = \frac{T_1}{2}$　　代入即可得

对于 F_n，其 $k_i = T_1$

复习参考5：课堂练习4

➢ 复指数形式的傅里叶级数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

【课堂练习4】 系数计算方法：

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

Tips：
可以根据F_n和a_n, b_n的关系

$$\boxed{F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}}$$

也可以根据定义

方法一：

$$F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)(\cos n\omega_1 t-j\sin n\omega_1 t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt$$

方法二：

$$k_i=\int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{jn\omega_1 t}\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt=T_1$$

复习参考6：周期矩形脉冲信号的FS

思考：周期为T_1，脉冲宽度为τ，脉冲幅度为E的周期矩形脉冲信号，谱线包络线为$\frac{E\tau}{T_1}sa(\frac{\omega\tau}{2})$

对于周期为T_1，脉宽为τ，脉幅为E的矩形脉冲信号

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt = \frac{E}{T_1} e^{-jn\omega_1 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{E}{T_1}\cdot\frac{1}{-jn\omega_1}\cdot\left(e^{-jn\omega_1\frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_1\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$= \frac{E}{T_1}\cdot\frac{\tau}{2}\cdot\frac{-2j\sin n\omega_1\frac{\tau}{2}}{-jn\omega_1\cdot\frac{\tau}{2}} = \frac{E\tau}{T_1}Sa\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$