4.2 Z变换

> 杜雨峰 计84

> Z变换的时域尺度变换性质（时域扩展、尺度变换）与傅立叶变换很不一样！

Z变换

> DTFT换元

在DFDT

$$\mathfrak{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-j\omega nT}$$

中，令 $\mathrm{e}^{j\omega T} = z$，即可得到Z变换

$$\mathfrak{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

注意：这个级数第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

Z变换的收敛域ROC

定义

使X(z)收敛的z的范围叫做X(z)的收敛域。

求法

注意：第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

注意：第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

由于X(z)是一个洛朗级数（既有正幂项又有负幂项），所以收敛域在复数平面上形如一个圆环。其中，**正幂项确定了圆环的外半径，负幂项决定了圆环的内半径。**

也就是说，遇到X(z)可以这样分析：

- 仅含正项（负幂）的洛朗级数的收敛域形如：$r < |z| \le +\infty$；
- 仅含负项（正幂）的洛朗级数的收敛域形如：$0 \le |z| < R$；
  - 上面的r和R的取值范围为$\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}$
- 两个洛朗级数相加，收敛域为两个洛朗级数的收敛域取交集。

> 只有双边序列需要这样求。单边序列只用求一边，有限项序列甚至不用求。

可以用比值法或根值法，分别求出内外收敛半径，比如对于正项（负幂）：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right| = \rho, \quad \ldots \text{比值法}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x(n)|} = \rho, \quad \ldots \text{根值法}$$

有收敛半径$R = \frac{1}{\rho}$。收敛半径可能为正数、0或∞。

有限/单边序列的ROC

注意：第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

注意：第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

注意：第n项的幂指数是-n，正项是负幂，负项是正幂！！！

有限序列

- 若序列有正项有负项（有正幂有负幂），则$0 < |z| < \infty$
- 若序列只有负项或0项（只有负幂或常数项），则$0 \leq |z| < \infty$
- 若序列只有正项或0项（只有正幂或常数项），则$0 < |z| \leq \infty$
- 什么时候两边都能取等？仅含n=0项的序列才能两边取等！

右边序列

> 只有右半边的序列叫右边序列233

$n < n_1$时，序列$x(n)$为0；也即幂次只有上限，没有下限。

设正项（负幂）求出的收敛半径为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = r_1$$

那么序列的收敛域是一个**圆外部分**。

序列左端点**仅影响无穷远处的收敛情况**：

- 若左端点$n_1 \geq 0$，那么可以取无穷：$r_1 < |z| \leq \infty$
- 若左端点$n_1 < 0$，那么不能取无穷：$r_1 < |z| < \infty$

左边序列

> 只有左半边的序列叫左边序列233

$n > n_2$时，序列$x(n)$为0；也即幂次只有下限，没有上限。

设正项（负幂）求出的收敛半径为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = r_2$$

那么序列的收敛域是一个**圆内部分**。

序列右端点**仅影响0点处的收敛情况**：

- 若右端点$n_2 \leq 0$，那么可以取0：$0 \leq |z| < r_2$
- 若右端点$n_2 > 0$，那么不能取0：$0 < |z| < r_2$

双边序列

[拆成左边序列与右边序列的和]

因果序列

> 这才是我们要用到的

因果序列是左端点为0的右边序列，收敛域是圆外部分，包含无穷远。

极点与ROC

> 回忆0：z0是函数f(z)的极点，当且仅当其关于z0的洛朗级数展开有且只有有限多个(z-z0)的负幂项。负幂的最高指数为极点的阶数。如果有无穷个负幂项，则这个点为函数的本性奇点。
>
> 极点的便利判定法是：
>
> 1. 若z0是1/f(z)的零点，则z0是f(z)的极点；
> 2. 若z0是f(z)的非零极点，那么1/z0是f(1/z)的极点。该点可以用来判定无穷远是否是极点。

根据Z变换的极点也可以求出ROC，但可能有多个解。

> 你可能觉得惊讶。但事实是这样的：一个序列的Z变换是唯一的，其收敛域也是唯一的；但是多个序列的Z变换形式可能一样，只是收敛域不同。如果你只有Z变换的形式，而没有收敛域信息，那么这个Z变换的式子可能对应多个原信号，也对应多个ROC。

一个Z变换的式子可以被解释成下列三种中的任何一种：

右边序列：模最大的有限极点为边界的圆外部分

左边序列：模最小的非零极点为边界的圆内部分

双边序列：以任意两个模相邻的极点为界画一个圆环，都是合法的

例：

1. 某个式子的极点有1, 2, 3，那么它的ROC可能是[0, 1), (1, 2), (2, 3)或(3, +inf]。
2. 某个式子的极点有1, 2, 3和无穷，那么它的ROC可能是[0, 1), (1, 2), (2, 3)或(3, +inf)。
3. 某个式子的极点有0, 1, 2, 3和无穷，那么它的ROC可能是(0, 1), (1, 2), (2, 3)或(3, +inf)。

而每个ROC都对应了一个原信号。**如果题目要求的是因果信号，那么只能取圆外部分。**

ZT的性质

> 数学较好的同学可以跳过

线性性

$$\mathfrak{Z}\left[\sum_{k=1}^{K} a_k x_k(n)\right] = \sum_{k=1}^{K} a_k X_k(z)$$

时域平移性

左移（前移）乘以z，右移（后移）除以z；

下标n+k，乘个z^k

$\mathfrak{Z}[x(n+k)] = z^k X(z), k \in \mathbb{Z}$

时域扩展性

新定义：对x(n)做时域扩展

$$x_{(a)}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{a}), & \frac{n}{a} \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \frac{n}{a} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

其中a是非零整数，称为“扩展因子”。

扩展因子不同于函数部分的压扩运算$f(t) \to f(at)$。离散情况只有“扩展”（在中间插入|a|-1个0），没有“压缩”。

$\mathfrak{Z}\left[x_{(a)}(n)\right] = X[z^a]$，收敛域不变。

对称性

对于偶序列$x(n)$，$X(z) = X(z^{-1}) = X(1/z)$；

对于奇序列$x(n)$，$X(z) = -X(z^{-1}) = -X(1/z)$。

如果对称序列有非零的零点，那么该零点的倒数也是零点；对称序列的极点同样如此。

时域共轭性

$\mathfrak{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*)$，收敛域不变

由此可得实序列的时域共轭性：

$$X(z) = X^*(z^*)$$

如果实序列有一个零点/极点，那么它也含有一个与之共轭的零点/极点

尺度变换

尺度变换又称为序列指数加成，是原信号乘上一个指数信号的形式。**尺度变换要变收敛域，而之前写的那些变换是不变收敛域的！**

注意尺度变换是“反的”。死背。

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}[a^n x(n)] &= X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad r_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < r_2; \\ \mathfrak{Z}[a^{-n} x(n)] &= X(az), \qquad r_1 < |az| < r_2\end{aligned}$$

- $\mathfrak{Z}[(-1)^n x(n)] = X(-z)$
- $\mathfrak{Z}[e^{jn\omega} x(n)] = X(e^{-j\omega} n)$：调相

Z域微分

又称序列线性加权

$$\mathfrak{Z}[n^k x(n)] = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \mathfrak{Z}[x(n)]$$

初值定理和终值定理

对因果序列x(n)，

$$\begin{aligned}x(0) &= \lim_{z\to\infty} X(z), \\ x(\infty) &= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)\end{aligned}$$

极限存在的时候才能用！

也就是说，对于终值定理，极点必须在单位圆内，且位于单位圆上的最多是一阶极点z=1。后续我们会知道，系统稳定的一个充分条件也就是所有极点在单位圆内。

时域卷积定理

$$\mathfrak{Z}[x(n)*y(n)]=\mathfrak{Z}[x(n)]\mathfrak{Z}[y(n)]$$

常见序列的ZT

序列名称	定义$x(n)$	$X(z)$	ROC
单位冲激	$\delta(n)=\begin{cases}1,(n=0)\\0,(n\neq0)\end{cases}$	1	$[0,\infty]$
单位阶跃	$u(n)=\begin{cases}1,(n\geq0)\\0,(n<0)\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$(1,\infty]$
矩形脉冲	$G_N=u(n)-u(n-N)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$(0,\infty]$
单位指数	$a^nu(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$(a,\infty]$
同上	$-a^nu(-n-1)$	$\begin{cases}\frac{1}{1-az^{-1}},\|z\|<a\\0, \quad z=0\end{cases}$	$[0,a)$

逆Z变换的求法

部分分解法

将式子分解为

$$X(z)=\sum\frac{A_k}{1-z_kz^{-1}}+\sum\frac{B_k}{(1-z_kz^{-1})^{j_k}}+C$$

注意把z^{-n}看作一个整体来分解。分解法采用方程、特殊值或求留数的方法。

求留数的方法：如果分母某个因子为$(1-z_0z^{-1})^m$，那么分解出来的从1到m次幂都有。m次幂的系数只需要把函数乘上$(1-z_0z^{-1})^m$算z_0处的极限。m-1次幂先要乘同样的因数，然后求一次导。m-i就要求i次导，而且要除以i的阶乘。

例如

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{2+z^{-2}}{(1-2z^{-1})(z^{-1}+1)^2}=\frac{A}{1-2z^{-1}}+\frac{B}{(1+z^{-1})^2}+\frac{C}{1+z^{-1}}+D,\\A&=\lim_{z\to2}(1-2z^{-1})f(z)=1,\\B&=\lim_{z\to-1}(1+z^{-1})^2f(z)=1,\\C&=\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(1+z^{-1})^2f(z)]=0,\\D&=\lim_{z\to0}f(z)=0.\end{aligned}$$

留数法

> 数学知识

> 回忆0：洛朗级数$\sum c_n(z-z_0)^n$的系数为
>
> $$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$
>
> 回忆1：把复变函数在某个奇点处展开成洛朗级数，对仅包围该点的闭合曲线计算围道积分，那么只有洛朗级数的负一次幂项c_{-1}留了下来（积分为$2\pi i c_{-1}$），其它项的积分都为0，因此称$Res[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}(\oint_C f(z)\mathrm{d}z)$为函数在奇点处的留数。
>
> 回忆2（留数定理）：复变函数对一个闭合曲线的围道积分等于该曲线内所有奇点的留数之和乘上$2\pi i$。
>
> 回忆3（留数和）：所有**奇点**（包括0和无穷远，如果有的话）的留数之和为0。
>
> 回忆4（留数的求法）一级极点的留数
>
> $$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z),$$
>
> m级极点的留数
>
> $$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$
>
> 无穷远点的留数
>
> $$Res[f(z),\infty]=-Res\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

由于$x(n)$是第-n项，所以其值为（IZT的定义）：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

C是收敛域中的一条闭合曲线。根据留数定理有

$$x(n)=\sum_m Res[X(z)z^{n-1},p_m],p_m\text{是曲线内的奇点}$$

根据回忆3，有

$$x(n)=-\sum_m Res[X(z)z^{n-1},p_m],p_m\text{是曲线外的奇点}$$

注意：后者更实用，因为我们常常求的是因果信号，而后者相当于只包含了一个奇点：无穷远点。无穷远点的留数由回忆4的式3得到。