数值分析 hw4

计 83 李天勤 2018080106

1. 1. 设

$$A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\0.1 & 0.3\end{bmatrix},$$

计算 A 的∞-范数、1-范数及 2-范数。

【解】计算题

$\infty - norm : ||A||_\infty = 0.6 + 0.5 = 1.1$

$1 - norm : ||A||_1 = 0.5 + 0.3 = 0.8$

$2 - norm : A^T A = \begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\0.1 & 0.3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.37 & 0.33\\0.33 & 0.34\end{bmatrix}$

$det(A^T A - \lambda I) = \begin{bmatrix}0.37-\lambda & 0.33\\0.33 & 0.34-\lambda\end{bmatrix} = (0.37-\lambda)(0.34-\lambda) - 0.33^2$

最大绝对值 $\approx -.685, \therefore ||A||_2 = \sqrt{\lambda} \approx 0.828,$

2. 2. 设 $x \in \mathbb{R}^n$，求证：$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$。

【解】Proof

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$||\vec{x}||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$
$$\arg\max_{1\le i\le n} |x_i| = t, |x_t| \text{是最带绝对值}$$
$$||\vec{x}||_1 = |x_1| + \ldots |x_t| + |x_{t+1}| + \ldots + |x_n| \le |x_t| = ||\vec{x}||_\infty$$
$$||\vec{x}||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \le n * |x_t| = n||\vec{x}||_\infty \Rightarrow ||\vec{x}||_\infty \le ||\vec{x}||_1 \le ||\vec{x}||_\infty * n \text{ \qed}$$

3. 3. 设 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且非奇异，又设 $\|x\|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上一向量范数，定义

$$\|x\|_p = \|Px\|,$$

试证明 $\|x\|_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上向量的一种范数。

【解】 Proof

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, ||x||_p = ||p_x|| \ge 0, \text{ 且 } Px = 0 \iff x = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha||x||_p = \alpha||Px|| = ||\alpha Px|| = ||P(\alpha x)|| = ||\alpha x||_p$$

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n,||x||_p+||y||_p\geq||Px+Py||=||P(x+y)||=||x+y||_p$$

$$\therefore ||x_p||\text{是}\mathbb{R}^n\text{上的一种范数}$$

4. 4．设矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

其中，$\lambda\in\mathbb{R}$，证明当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{cond}(\mathbf{A})_\infty$ 有最小值。

【解】计算题

$$cond(A)_\infty=||A||_\infty||A^{-1}||_\infty$$

$$A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix},A^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda} & -1\\ -\frac{1}{\lambda} & 2\end{bmatrix}$$

$$cond(A)_\infty=\max 2,|3\lambda|\cdot(2+\frac{1}{|\lambda|})$$

当 $|\lambda|<2/3$ 时，$cond(A)_\infty=4+2/|\lambda|$ 单调递减

当 $|\lambda|>2/3$ 时，$cond(A)_\infty=6|\lambda|+3$ 单调递增

当 $|\lambda|=2/3$时，最小值，$\therefore\lambda=\pm2/3,cond(A)_\infty$取最大值

7. 7．设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵，且 $a_{11}\neq0$，经过高斯消去法一步后，$\mathbf{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}。$$

证明 $\mathbf{A}_2$ 是对称矩阵。

【解】Proof

高斯消去法一部后、

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \vec{a}^T\\ \overrightarrow{a_1} & A_2'\end{bmatrix}$$

$$A_2'-\frac{1}{a_{11}}\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_1}^T=A_2$$

if A is symmetrical, then A_2' is symmetrical and $\vec{a_1}\vec{a_1}^T$ is also symmetrical

$\therefore A_2 = A_2' - \frac{1}{a_{11}}\vec{a_1}\vec{a_1}^T$ is also symmetrical

8. 8. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是对称正定矩阵，经过高斯消去法一步后，$\mathbf{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}。$$

试证明：

(1) $\mathbf{A}$ 的对角元素 $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) $\mathbf{A}_2$ 是对称正定矩阵。

9. 设 $\mathbf{M}_k$ 为第 k 类初等消去矩阵，即

【解】Proof

1) We know that A is orthogonal, $x^T Ax > 0$, thus $a_{11} > 0$

2) From 7, we know that A is symmetrical, next we have to prove orthogonality

Using the above matrix, we can eliminate the top right element using the left column, resulting in the matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

is also orthogonal $\forall x_o \in \mathbb{R}^{n-1}, x = (0, x_o^T)^T, A''x = A_2 x_o > 0, A_2$ is also orthogonal