数值分析 hw3

第一章练习题 7 (简单分析原因), 第二章练习题1, 4, 5, 6, 9.

第1章

7. 计算$f=(\sqrt{2}-1)^6$,取$\sqrt{2}\approx 1.4$, 利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好

【解】第3个，因为第2，4个的减法在抵消现象，而1的乘法比较多

第2章

1. 为求方程$x^3-x^2-1=0$ 在 $x_o=1.5$附近的一个根，将方程改写程下列等价形式，并建立相应的迭代公式

1. $x=1+1/x^2$ 迭代公式 $x_k+1=1+1/x_k^2$

$$\psi(x)=1+1/x^2,\psi'(x)=-2/x^2,\text{区}\,D_1=\left[\sqrt{2},\sqrt{\frac{7}{3}}\right]$$

$$|\psi(x)|\le\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

$$\psi(x)\in\left[\frac{10}{7},\frac{3}{2}\right]\subseteq D_1$$

$$x_0=1.5\in D_1$$

   所以ψ在D_1 内全局收敛。用$\psi(x)$进行迭代，因为

$$x_1=\psi(x_0)=1.444444,x_2=1.479290,x_3=1.45976$$

$$x_{22}=1.465573,x_{23}=1.465570,x_{24}=1.465572$$

   所以approximation附近根为1.466

2. $x^2=1/(x-1)$ 迭代公式$x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$

$$x_1=1.41421,x_2=1.55377,\dots,x_7=0.8802,\dots$$

   不收敛，找不到相应的区间

3. $x^3=1+x^2$ d迭代公式 $x_k+1=\sqrt[3]{1+x_k^2}$

$$\psi(x)=\sqrt[3]{1+x^2},\psi'(x)=\frac{1}{3(1+x^2)^{2/3}},\ D=[1,2]$$

   for $x\in D$,

$$|\psi'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1$$

$$\psi(x) \in [\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}] \subseteq D$$

$$x_0 = 1.5 \in D$$

所以ψ 在D内全局收敛

4. 应用牛顿法与方程$x^3 - a = 0$，导出求立方根$\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其局部收敛性。

【解】

$$f(x) = x^3 - a, f'(x) = 3x^2$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2}$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3x^2}, g'(x) = \frac{2}{3}(1 - \frac{a}{x^3}), g''(x) = \frac{2a}{x^4}$$

因为$x^* = \sqrt[3]{a}$, 所以

$g(x^*) = 0, g'(x) = 0$

若$a \neq 0$,则 $g''(x) \neq 0$, 2阶收敛

若$a = 0$,则 ,$g'(x) = 2/3$, 1阶收敛

5. 证明迭代公式 $x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 是计算 $\sqrt{a}$ 的**3**阶方法。假定处置x_o充分靠近根x^*,求 $\lim_{k\to\infty}(\sqrt{a} - x_{k+1})/(\sqrt{a} - x_k)^3$

【解】

$$\psi'(x) = \frac{3(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2}, \psi''(x) = \frac{48ax(x^2 - a)}{(3x^2 + a)^3}$$

$$\psi^{(3)}(x) = \frac{-48a(9x^4 - 18ax^2 + a^2)}{(3x^2 + a)^4}$$

则 $\psi'(x^*) = \psi''(x^*) = 0, \psi^{(3)}(x^*) = \frac{3}{2a} \neq 0$

所以式计算$\sqrt{a}$的3阶方法

6. 证明式 （**2.11**）

【解】

$$\psi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\psi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\psi''(x)=\frac{(f'(x)\cdot f''(x)+f(x)\cdot f'''(x))\cdot(f'(x)^2)-2f'(x)f''(x)\cdot f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^4}$$

$$\psi''(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{f(x)f'''(x)}{(f'(x))^2}-\frac{2f(x)f''(x)^2}{(f'(x))^3}$$

则

$$\psi''(x)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

9. 用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在$x_o=2$附近的根。根的准确值 $x^*=1.87938524...$，要求计算结果有**4**为准确的有效数字 **(1)** 用牛顿法 **(2)** 用割线法，取$x_o=2,x_1=1.9$

【解】牛顿法

$$f'(x)=3x^2-3,\psi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{2x^3+1}{3(x^2-1)}$$

则

$$x_{k+1}=\frac{2x_k^2+1}{3(x_k^2-1)},x_0=2,x_1=1.8888...,x_2=1.87946\ldots$$

【解】割线法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{fx_k-f(x_{k-1})},x_0=2,x_1=1.9,x_2=1.88109....,x_3=1.87841...$$