数值分析 hw5

第三章练习题12(只做矩阵A、C，要有中间步骤), 13(要有中间步骤), 14, 17, 18

12. 分别采用高斯消去法和直接 LU 分解法对下述矩阵进行 LU 分解，写出矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&2&3&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}。$$

12.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{k=1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{k=2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&1&2&2\\1&2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{k=1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{k=2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{k=3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

直接LU

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\&u_{22}&u_{23}\\&&u_{33}\end{bmatrix}$$

$[u_{11}, u_{12}, u_{13}]=[1,1,1]$

$l_{21}=a_{21}/u_{11}=0 \qquad l_{31}=a_{31}/u_{11}=2$

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=4-0=4 \qquad u_{23}=a_{23}-l_{21}\cdot u_{13}=-1$

$a_{32}=a_{32}-u_{12}l_{31}=-2-2=-4 \Rightarrow l_{32}=\frac{a_{32}}{u_{22}}=-1$

$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=1-2\cdot1+1\cdot(-1)=-2$

$$\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&4&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$C: [u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}]=[1,1,1,1]$

$l_{21}=l_{31}=l_{41}=1 \qquad u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-1=1 \qquad u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=1 \qquad u_{24}=1$

$l_{32}=0 \quad l_{42}=1 \qquad u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=1 \qquad u_{34}=2-1-0=1$

$l_{43}=\frac{6-1-1}{u_{33}}=1 \qquad u_{44}=a_{44}-l_{41}u_{14}-l_{42}u_{24}-l_{43}u_{34}=4-1-1-1=1$

$$\Rightarrow L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

13. 采用部分主元高斯消去法对矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$$

13.

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow[P_1\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}]{}\begin{bmatrix}3&5&6\\2&4&5\\1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[M_1]{}\begin{bmatrix}3&5&6\\2/3&4/3&1\\1/3&1/3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[M_2]{}\begin{bmatrix}3&5&6\\2/3&4/3&1\\1/3&1/4&1/2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow PA=LU\quad P=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}1&&\\2/3&1&\\1/3&1/4&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}3&5&6\\&4/3&1\\&&1/2\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\2&2&2&3\\4&2&4&3\\0&0&6&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[P_1=\begin{pmatrix}&&1&\\&1&&\\1&&&\\&&&1\end{pmatrix}]{}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\2&2&2&3\\2&1&1&2\\0&0&6&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[M_1]{}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\\frac{1}{2}&1&0&3/2\\\frac{1}{2}&0&-1&1/2\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[M_2]{}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\1/2&0&-1&1/2\\0&0&6&-1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[P_2=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&&1\\&&1&\end{pmatrix}]{}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\1/2&0&-1&1/2\end{bmatrix}\xrightarrow[M_3]{}\begin{bmatrix}4&2&4&3\\1/2&1&0&3/2\\0&0&6&-1\\1/2&0&-1/6&1/6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&&1\\&&1&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&1&\\&1&&\\1&&&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}1&&&\\1/2&1&&\\0&0&1&\\1/2&0&-1/6&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}4&2&4&3\\&1&0&3/2\\&&6&-1\\&&&1/6\end{pmatrix}$

14. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 $n\times n$ 矩阵，且 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 非奇异，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维向量，要计算

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}^{-1}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{b},$$

14. $x=B^{-1}(2A+I)(C^{-1}+A)b \Leftrightarrow Bx=(2A+I)(C^{-1}+A)b=(2A+I)(C^{-1}b+Ab)$

$t=C^{-1}b \Rightarrow Ct=b$ 时，B, C 均进行 LU 分解 $P_BB=L_BU_B$, $P_CC=L_CU_C$

$\Downarrow$

$P_CCt=P_Cb$

① 解 $L_Cy=P_Cb$

② 解 $U_Ct=y$ ⇒ 从而解得 $t=C^{-1}b$

③ 求 $2A+I$, $C^{-1}b+Ab$, matrix multiplication

④ 求 $(2A+I)(C^{-1}b+Ab)$, set as z

⑤ 解 $L_Bw=P_Bz$

⑥ 解 $U_Bx=w$, solve for x

17. 下述矩阵能否进行 LU 分解(其中，$\boldsymbol{L}$ 为单位下三角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵)？若能分解，分解是否唯一？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}。$$

17. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\\4&6&7\end{bmatrix}=LU=\begin{bmatrix}1&&\\l_1&1&\\l_2&l_3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\&u_4&u_5\\&&u_6\end{bmatrix}$ $u_1=1$ $u_2=2$ $u_3=3$ $l_1=2$ $l_2=4$

$u_4=4-u_2l_1=4-4=0$

$u_5=1-u_3l_1=1-6=-5$ ⇒ 无论如何 $l_3u_4\neq 8/6$

⇒A 不能分解

设 $B=\begin{bmatrix}1&&\\l_1&1&\\l_2&l_3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\&u_4&u_5\\&&u_6\end{bmatrix}$ $u_1=1$ $u_2=1$ $u_3=1$ $l_1=2$ $l_2=3$ $u_4=2-2=0$ $u_5=-1$.

$u_2l_2+u_4l_3=3=a_{32}$ ⇒ 任意 l_3 均可， $u_3l_2+l_3u_5+u_6=1$ ⇒ $u_6=l_3-2$ 均可

⇒分解唯一的

18. 设矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 按列严格对角占优，试证明：

(1) 对矩阵 $\mathbf{A}$ 做部分主元高斯消去时，不需要交换行，即假设经过 $k-1$ 步消去后矩阵 $\mathbf{A}$ 变为 $\mathbf{A}^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$|a_{kk}^{(k)}|>|a_{sk}^{(k)}|,\quad (s>k)。$$

(2) 矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异。