Chapter 5 矩阵特征值计算

6．利用反幂法求矩阵

$$\begin{bmatrix}6&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

的最接近 7 的特征值及对应的特征向量。

$B=A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&-4&1\\1&1&-6\end{bmatrix}$　　$u=[1\ 0\ 0]^T$

由反幂法　while (判停)

$v=A\backslash u$

$\lambda n=1/\max(v)$

$u=\lambda n v$

end

计算得 $\lambda-p=0.2880$　特征向量为 $[1, 0.5229, 0.2422]^T$

$\Rightarrow \lambda=7.2880$　特征向量为 $[1, 0.5229, 0.2422]^T$

7．试用 Householder 变换对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做 QR 分解，求出矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\2&-4&5\end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\2&-4&5\end{bmatrix}$　　$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix}$

$w=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$　　$H_1=I-2ww^T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac23&\frac13&\frac13\\\frac13&\frac16&\frac16\\\frac13&\frac16&\frac16\end{pmatrix}\times2=\begin{pmatrix}-\frac13&-\frac23&-\frac23\\-\frac23&\frac23&-\frac13\\-\frac23&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}$

$\beta_1=v_1v_1^T=24$

$A^{(2)}=H_1A=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\0&0&-3\\0&-3&3\end{bmatrix}$

$V_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\-3\end{bmatrix}$　　$w=\begin{bmatrix}0\\-\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$　　$H_2=I-2ww^T=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac12&\frac12\\0&\frac12&\frac12\end{bmatrix}\times2$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\0&3&-3\\0&0&3\end{bmatrix}$　　$Q=H_1H_2=\begin{bmatrix}-\frac13&\frac23&\frac23\\-\frac23&\frac13&-\frac23\\-\frac23&-\frac23&\frac13\end{bmatrix}$

8. 用 Householder 变换将下述矩阵进行正交三角化，写出计算步骤，包括 Householder 变换对应的 $\boldsymbol{v}$ 向量以及结果 $\boldsymbol{R}$ 矩阵。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&5&5\\2&5&5\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&5&5\\2&5&5\end{bmatrix}$$

$$V_1=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\4\\2\end{bmatrix}\qquad A_1=\begin{bmatrix}-6&-5&-5\\0&3&3\\0&4&4\end{bmatrix}$$

$$V_2=\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\\4\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}-6&-5&-5\\0&-5&-5\\0&0&0\end{bmatrix}=R$$

9. 用一系列 Givens 旋转变换将矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

化为上三角矩阵，将结果与例 5.11 的结果进行比较。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$G_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&&&\frac{\sqrt2}{2}&&\\&1&&&&\\&&&&&\\-\frac{\sqrt2}{2}&&&\frac{\sqrt2}{2}&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{bmatrix}\quad G_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt6}{3}&&&&\frac{\sqrt3}{3}&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\-\frac{\sqrt3}{3}&&&&\frac{\sqrt6}{3}&\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}\sqrt3&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}\sqrt3&\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt3}{3}\\0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{3}\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

同理 $A_2=\begin{bmatrix}\sqrt3&-\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt3}{3}\\0&\frac{2\sqrt6}{3}&-\frac{\sqrt7}{3}\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{15}}{5}\\0&0&\frac{\sqrt{10}}{5}\end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix}\sqrt3&-\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt3}{3}\\0&\frac{2\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt6}{3}\\0&0&\sqrt2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

得到的矩阵为5.11的负矩阵

14. 设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非亏损矩阵，设 $P(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，试证明：$P(\mathbf{A})=c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$。

$P(\lambda)=c_0+c_1+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$ 为特征多项式 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

由A非亏损 ⇒ 可对角化 $A=Q\Lambda Q^{-1}$

⇒ $P(A)=c_0+c_1A+\cdots+c_{n-1}A^{n-1}+\lambda^n=c_0QQ^{-1}+c_1Q\Lambda Q^{-1}+\cdots+c_{n-1}(Q\Lambda Q^{-1})(Q\Lambda Q^{-1})\cdots$

$=Q(P(\Lambda))Q^{-1}$

但 $P(\Lambda)=c_0+c_1\Lambda+\cdots+c_{n-1}\Lambda^{n-1}+\Lambda$

对应的对角元为 $P(\lambda_i)=0$

⇒ $P(\Lambda)=0$ ⇒ $P(A)=0$ □

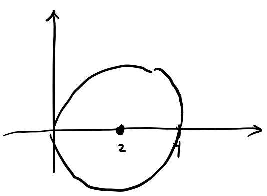
16. 双向对称矩阵(persymmetric matrix)是一种关于正对角线和反对角线都对称的矩阵。一些通信理论问题的解涉及双向对称矩阵的特征值与特征向量。下面的 4×4 双向对称矩阵就是一个例子：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}。$$

(1) 用圆盘定理证明，若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值，则 $|\lambda-4|=\rho(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})$。

(2) 计算矩阵 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$ 的所有特征值与谱半径，并根据它们求 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值以及对应的特征向量。

(1) 由圆盘定理 $|\lambda-2|\le|-1-1|=2$



$\rho(A-4I)=\max\{|\lambda_{min}-4|,|\lambda_{max}-4|\}$

由圆盘，λ 最小时，$|\lambda-4|$ 更大

⇒ $\rho(A-4I)=|\lambda-4|$ □

(2) $A-4I=\begin{bmatrix}-2&-1&&\\-1&-2&-1&\\&-1&-2&-1\\&&-1&-2\end{bmatrix}$

$\det(A-4I-\lambda I)=-2-\lambda\det\begin{bmatrix}-2-\lambda&-1&0\\-1&-2-\lambda&-1\\0&-1&-2-\lambda\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}-1&-1&\\&-\lambda-2&-1\\&-1&-\lambda-2\end{bmatrix}$

$-(2+\lambda)(-(2+\lambda)^3+(2+\lambda)\times 2)-(\lambda+2)^2+1$

$(2+\lambda)^4-3(2+\lambda)^2+1$

⇒ $\lambda=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt5}{2}}-2=\pm\left(\frac{\sqrt5\pm1}{2}\right)-2$ 负的最大

特征向量 $v=\begin{bmatrix}1\\\frac{\sqrt5+1}{2}\\\frac{\sqrt5+1}{2}\\1\end{bmatrix}$