数值分析 hw6

第三章练习题15(要有中间步骤), 16, 第四章练习题1, 2, 3, 5

第三章 线性方程组的直接解法

15.

15. 分别计算矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}$$

的 Cholesky 分解。

15. $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}=LL^T$

$j=1$ $\quad a_{11}=\sqrt{3-1}=\sqrt{3}$ $\quad a_{21}=1/\sqrt{3}$ $\quad a_{31}=(0-0)/\sqrt{3}=0$

$j=2$ $\quad a_{22}\ \sqrt{3-1/3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\quad a_{32}=(1-0)/\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

$j=3$ $\quad a_{33}=\sqrt{3-0-\frac{6}{16}}=\sqrt{\frac{42}{16}}=\frac{\sqrt{42}}{4}$

$$\Rightarrow L=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&&\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2\sqrt{6}}{3}&\\0&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{42}}{4}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}4&2&4&2\\2&10&8&1\\4&8&9&5\\2&1&5&19\end{bmatrix}=LL^T$$

$j=1$ $\quad a_{11}=2$ $\quad a_{21}=2/2=1$ $\quad a_{31}=4/2=2$ $\quad a_{41}=2/2=1$

$j=2$ $\quad a_{22}\ \sqrt{10-1}=3$ $\quad a_{32}=(8-2)/3=2$ $\quad a_{42}=(1-1)/3=0$

$j=3$ $\quad a_{33}=\sqrt{9-4-4}=1$ $\quad a_{43}=(5-2-0)/1=3$

$j=4$ $\quad a_{44}=\sqrt{19-1-0-9}=3$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&&&\\1&3&&\\2&2&1&\\1&0&3&3\end{bmatrix}$$

16 $A=\begin{bmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&-1&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

using 追赶法, first calculate LU分解 and $b' \triangleq f$

$$A=\begin{bmatrix}1&&&&\\m_2&1&&&\\&m_3&1&&\\&&m_4&1&\\&&&m_5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1&-1&&&\\&d_2&-1&&\\&&d_3&-1&\\&&&d_4&-1\\&&&&d_5\end{bmatrix}$$

$a_i=-1$ $\quad b_i^{(0)}=2$

$d_1=2$ $\quad f_1=1$

$m_2=-1/2$

$m_3=-1/1.5=-2/3$

$m_4=-1/\frac{4}{3}=-\frac{3}{4}$

$m_5=-1/\frac{5}{4}=-\frac{4}{5}$

$d_2=2-(-0.5)\cdot(-1)=1.5$

$d_3=2-(-\frac{2}{3})\cdot(-1)=4/3$

$d_4=2-(\frac{3}{4})=5/4$

$d_5=2-4/5=\frac{6}{5}$

$f_2=0+0.5\times1=0.5$

$f_3=0+\frac{2}{3}\times0.5=1/3$

$f_4=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$f_5=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x_5=f_5/d_5=\frac{1}{6}$

$x_4=(f_4+x_5)/\frac{5}{4}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})\times\frac{4}{5}=\frac{1}{3}$

$x_3=(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})/\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$

$x_2=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})/\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

$x_1=(1+\frac{2}{3})/2=\frac{5}{6}$

$\Rightarrow x=[5/6, 2/3, 1/2, 1/3, 1/6]^T$

第四章 线性方程的迭代解法

1.

1. 试证明$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$ 的充要条件是对任何向量 x，都有

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}x=Ax。$$

1. $\Rightarrow$: If $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A \Rightarrow \forall i,j \ \lim\limits_{k\to\infty}A_{ij}^{(k)}=A_{ij} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(A^{(k)}e_i)=Ae_i$

其中 $e_i=[0,\dots,0,1,0,\dots0]^T$ 令 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}x=\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_i\sum\limits_{i=1}^{n}A^{(k)}e_i)=\alpha_i\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}e_i=\alpha_i\sum\limits_{i=1}^{n}Ae_i=A(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i)=Ax$ □

$\Leftarrow$: $\forall x \ \lim\limits_{k\to\infty}A^kx=Ax$ 令 $x=e_i \Rightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}e_i=Ae_i \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}e_j^TA^{(k)}e_i=e_j^TAe_i$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}A_{ji}^{(k)}=A_{ji} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}A^k=A$ □

2.

2. 设有方程组 $Ax=b$，其中 A 为实对称正定矩阵，试证明当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$，$\beta\geqslant\rho(A)$ 时，迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

收敛。

2. 设 x^* 为 $Ax=b$ 的解

$= x^{(k+1)} - x^* + w(b - Ax^{(k)} - b + Ax^*)$

$= x^{(k)} - x^* + wA(x^* - x^{(k)})$

$= (I - wA)(x^{(k)} - x^*)$

由 $w \in (0, \frac{2}{\beta}) \Rightarrow \rho(wA) = w\rho(A) \leq w\beta < 2$

$\rho(wA) > 0$

$\Rightarrow \lambda_{max}(I-wA) < 1-0 = 1$ 且 $\lambda_{min}(I-wA) > 1-2 = -1$

$\Rightarrow \rho(I-wA) < 1 \Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^*\| = \rho^{k+1}(I-wA)\|x^{(0)} - x^*\| \to 0$

$\Rightarrow$ 收敛□

3.

3. 设方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases},$$

（1）考查用雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法解此方程组的收敛性。

（2）取初始解为 $[0,0,0]^T$，用雅可比迭代法及高斯-赛德尔迭代法解此方程组，要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-2}$ 时终止迭代。

3. (1) 由于对角线元素 5, 4, 10 都严格对角占优 $\Rightarrow$ A 严格对角占优

Jacobi 与 G-S

Jacobi

$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) + \frac{-12}{5}$

$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}(-x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + \frac{20}{4}$

$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{10}(2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) + \frac{3}{10}$

$\vec{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$

After 11 steps

$\vec{x}^{(11)} = [-4.000, 3.003, 2.000]$

G-S

$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) + \frac{-12}{5}$

$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}) + \frac{20}{4}$

$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{10}(2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}) + \frac{3}{10}$

$\vec{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$

After 6 steps

$\vec{x}^{(6)} = [-3.999, 3.000, 2.000]$

5.

5. 基于高斯-赛德尔迭代法可得到一种新的迭代法。在第 k 步迭代中($k=0,1,2,\cdots$)，先由高斯-赛德尔迭代公式根据 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 算出 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k)}$，然后将分量的更新顺序改为从 n 到 1。类似地，再计算一遍根据 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ 得到 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$。这种迭代法称为对称高斯-赛德尔(SGS)方法。试推导 SGS 方法的迭代计算公式，并证明它也属于分裂法，且当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 也是对称的。

5 由 G-S 迭代法

$$\bar{x}_1^{(k)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)}) + \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$\bar{x}_2^{(k)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}\bar{x}_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)}) + \frac{b_1}{a_{21}}$$

$$\bar{x}_3^{(k)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}\bar{x}_1^{(k)} + a_{32}\bar{x}_2^{(k)}) + \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$\bar{x}^{(k)} = L^{-1}(L-A)x^{(k)} + L^{-1}b$$

After another iteratio

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_2^{(k+1)} + a_{13}x_3^{(k+1)}) + \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_2\bar{x}_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k+1)}) + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}\bar{x}_1^{(k)} + a_{32}\bar{x}_2^{(k)}) + \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$Dx^{(k+1)} = \hat{L}\bar{x}^{(k)} + \hat{U}x^{(k+1)} + b$$

$$(D-\hat{U})x^{(k+1)} = \tilde{L}(\bar{x}^{(k)}) + b$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = U^{-1}(U-A)(\bar{x}^{(k)}) + U^{-1}b = U^{-1}(U-A)(L^{-1}(L-A)x^{(k)} + L^{-1}b) + U^{-1}b$$

$$= U^{-1}(U-A)L^{-1}(L-A)x^{(k)} + (U^{-1}(U-A)L^{-1} + U^{-1})b$$

$$= U^{-1}(U-A)L^{-1}(L-A)x^{(k)} + U^{-1}(DL^{-1} - I + I)b$$

$$= U^{-1}(U-A)L^{-1}(L-A)x^{(k)} + U^{-1}DL^{-1}b$$

$$= U^{-1}(DL^{-1} - I)(L-A)x^{(k)} + U^{-1}DL^{-1}b$$

$$= U^{-1}DL^{-1}(LD^{-1}U + \underbrace{D-L-U}_{-A})x^{(k)} + U^{-1}DL^{-1}b$$

$$= U^{-1}DL^{-1}(LD^{-1}U - A)x^{(k)} + U^{-1}DL^{-1}b$$，$\Rightarrow$ 分裂法 $M = LD^{-1}U$

其中 L 为下三角，U 为上三角，D 为对角，

(其中 L，U 含对角线元素)

$A = U + L - D$

当 A 对称 $U = L^T$

$M = LD^{-1}L^T \qquad M^T = (LD^{-1}L^T)^T = LD^{-1}L^T = M \Rightarrow M$ 对称 $\square$