Chapter 5 矩阵特征值

特征值的性质 $\lambda(A)=\lambda(A^T), \lambda(A^k)=\{\lambda_j^k\}$, \lamda$(A^{-1})=\{\lambda_j^{-1}\}$ 主特征值：模最大的特征值

圆盘定理：复平面

幂法 （A 有唯一的主特征值）$v_k=Av_{k-1}, lim\frac{(v_{k+1})_j}{(v_k)_j}=\lambda$ 绝对值最大元素相处。实用的幂法：规格化向量 $v=Au, \lambda=max(v), u=v/\lambda$

反幂法：对 A^{-1} 用幂法，得到 A 最小特征值，要求 A 按模最小的特征值唯一。

Householder $H(\mathrm{w})=\mathrm{I}-2\mathrm{ww^T}, \mathrm{w^Tw}=1$ 对称阵、正定阵 $\mathrm{Hx}=\mathrm{y}=-\sigma\mathrm{e}_1, \mathrm{v}=\mathrm{x}+\sigma\mathrm{e}_1, \sigma=\mathrm{sign}(\mathrm{x}_1)||\mathrm{x}||_2, \mathrm{w}=\mathrm{v}/||\mathrm{v}||_2, \mathrm{Ha}=\mathrm{a}-2\frac{\mathrm{v^Ta}}{\mathrm{v^Tv}}\mathrm{v}$

$\mathrm{v_k}=[0\ldots0, \mathrm{a_{kk}}, \ldots \mathrm{a_{mk}}]^\mathrm{T}+\sigma_\mathrm{k}\mathrm{e_k}$.

Givens $\mathrm{G}=[c\, s; -s\, c], \mathrm{c}=\mathrm{x}_1/\alpha, \mathrm{s}=\mathrm{x}_2/\alpha, \alpha=\sqrt{\mathrm{x}_1^2+\mathrm{x}_2^2}, \mathrm{G}[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2]=[\alpha\ 0]$

QR 算法 $\mathrm{A_k}=\mathrm{Q_kR_k}; \mathrm{A_{k+1}}=\mathrm{R_kQ_k}$ 基本收敛于拟上三角。奇异值σ_k是$\mathrm{AA^T}$或$\mathrm{A^TA}$的特征值的算术平方根。

Chapter 6 函数逼近与函数插值

最佳平方逼近：法方程法 求解 Gx=b；勒让德多项式

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_n\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\langle f,\varphi_1\rangle\\ \langle f,\varphi_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f,\varphi_n\rangle\end{bmatrix}$$

名称	定义域	权函数	表达式 / 递推公式
勒让德多项式	[-1, 1]	$\rho(t)=1$	$\begin{cases} P_0(t)=1, \quad P_1(t)=t, \\ (k+1)P_{k+1}(t)=(2k+1)tP_k(t)-kP_{k-1}(t), k=1,2,\cdots \end{cases}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \cdots & \varphi_n(t_1)\\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \cdots & \varphi_n(t_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \cdots & \varphi_n(t_m)\end{bmatrix}$$

最小二乘法 求解$\mathrm{A^TAx}=\mathrm{A^Tf}$；正交变换法：$\mathrm{R_{1x}}=\mathrm{Q_1^Tf}, \mathrm{R_1}$前 n 行$, \mathrm{Q_1}$前 n 列

Lagrange 插值 $\mathrm{L_n(x)}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\mathrm{y_k}\,\mathrm{l_k(x)}, \mathrm{l_k(x)}=\frac{\omega_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x})}{(\mathrm{x}-\mathrm{x_k})\omega'_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x_k})}$, $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$, $\omega'_{n+1}(x_k)=\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)$, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

Newton $\mathrm{N_n(x)}=\mathrm{c_0}+\mathrm{c_1(x-x_0)}+\cdots+\mathrm{c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$, $\mathrm{c_k}=\mathrm{f[x_0,\ldots,x_k]}$, $\mathrm{f[x,x_0,\ldots x_n]}=\frac{\mathrm{f^{n+1}(\xi)}}{(\mathrm{n}+1)!}, \mathrm{R_n(x)}=\mathrm{f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_n)}$

分段插值 分段线性插值误差限$\frac{\mathrm{M_2}}{8}\mathrm{h^2}$,/, $\mathrm{M_2}=\max\left|\mathrm{f''(x)}\right|$ 整体埃尔米特插值，导数值也相等 $\mathrm{H_{2n+1}(x)}=\sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{n}}[\mathrm{f_j}\alpha_\mathrm{j}(\mathrm{x})+\mathrm{f'_j}\beta_\mathrm{j}(\mathrm{x})]$, $\alpha_\mathrm{j}(\mathrm{x})=$

$[1-2(\mathrm{x}-\mathrm{x_j})\mathrm{l'_j}(\mathrm{x_j})], \beta_\mathrm{j}(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-\mathrm{x_j})^2\mathrm{l_j^2}(\mathrm{x})$ 两点三次埃尔米特插值，n=1 时的情况 保形分段插值：xk 的斜率是两侧割线加权调和平均（同号）或零（异号）

样条函数 二阶导数连续 三弯矩方程 $\mathrm{h_j}=\mathrm{x_{j+1}}-\mathrm{x_j}, \mu_\mathrm{j}=\mathrm{h_{j-1}}/(\mathrm{h_{j-1}}+\mathrm{h_j}), \lambda_\mathrm{j}=\mathrm{h_j}/(\mathrm{h_{j-1}}+\mathrm{h_j}), \mathrm{d_j}=6[\mathrm{f_{j-1}}/\mathrm{h_{j-1}}$

// TODO

Chapter 7 数值积分

牛顿-科特斯公式 积分节点均匀分布 $\mathrm{A_k}=(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{C_K^{(n)}}$ 梯形公式 $\mathrm{n}=1, \mathrm{T(f)}=\frac{\mathrm{b-a}}{2}[\mathrm{f(a)}+\mathrm{f(b)}], \mathrm{R_T}=-\frac{\mathrm{f''(\eta)}}{12}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^3$ Simpson 公式 n=2 $\mathrm{S(f)}=$

$\frac{\mathrm{b-a}}{6}\left[\mathrm{f(a)}+4\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{a+b}}{2}\right)+\mathrm{f(b)}\right], \mathrm{R_S}=-\frac{\mathrm{f^{(4)}(\xi)}}{2880}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^5$ Cotes 公式 n=4 $\mathrm{C(f)}=\frac{\mathrm{b-a}}{90}[7\mathrm{f(x_0)}+32\mathrm{f(x_1)}+12\mathrm{f(x_2)}+32\mathrm{f(x_3)}+7\mathrm{f(x_4)}]$ n 为偶数时，n 阶公式有 n+1 次代数精度

复合求积公式 复合梯形公式 1 次代数精度 2 阶准确度 复合 Simpson 公式 步长折半的复合求积公式

理查森外推

高斯求积公式 积分节点为高斯点 2n+1 次代数精度 高斯-勒让德公式

数值微分 有限差分公式，向前/向后/中心 $\mathrm{D_f(h)}=\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{\mathrm{h}}, \mathrm{D_b(f)}=\frac{\mathrm{f(x)-f(x-h)}}{\mathrm{h}}, \mathrm{D_c(f)}=\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x-h)}}{2\mathrm{h}}$ 外推 $\frac{4\mathrm{D_c(h/2)}-\mathrm{D_c(h)}}{3}$ 4 阶准确度

Chapter 8 常微分方程初始问题 $\mathrm{y'}=\mathrm{f(t,y)}$

ODE 初值问题的稳定性：t 趋于无穷时，y(t)的偏差。模型问题稳定 $\lambda\le0$ 局部稳定性 $\mathrm{J}=\frac{\partial\mathrm{f(t_c,y_c)}}{\partial\mathrm{y}}, \mathrm{Re(J)}\le0$ 数值解法的稳定性 $\delta_{\mathrm{n}+1}\le\delta_\mathrm{n}$

局部截断误差 $\mathrm{l_{n+1}}=\mathrm{y(t_{n+1})}-\mathrm{y_{n+1}}$ 准确值减估计值 $\mathrm{l_{n+1}}=\mathrm{O(h^{p+1})}$ p 阶准确度

欧拉法，1 阶准确度 $\mathrm{y_{n+1}}=\mathrm{y_n}+\mathrm{h_nf(t_n,y_n)}$ 模型问题稳定$|1+\mathrm{h}\lambda|\le1$ 若λ为实数则 $\lambda<0$ && $\mathrm{h}\le-2/\lambda$

向后欧拉法，1 阶准确度 $\mathrm{y_{n+1}}=\mathrm{y_n}+\mathrm{h_nf(t_{n+1},y_{n+1})}$ 梯形法，2 阶准确度 $\mathrm{y_{n+1}}=\mathrm{y_n}+0.5\mathrm{h_n}[\mathrm{f(t_n,y_n)}+\mathrm{f(t_{n+1},y_{n+1})}]$ 都是无条件稳定

Runge-Kutta 4 级 4 阶 R-K 法

多步法 泰勒展开法 单项式函数代入法 Adams 公式

Chapter 1

设 $\bar{x}$是x的近似值，若$\bar{x}$的前 p 位有效数字正确，则相对误差 $|e_r| < \frac{1}{d_0} * 10^{-p+1}$；若相对误差满足$|e_r| \le \frac{1}{2(d_0+1)} * 10^{-p+1}$，则$\bar{x}$的前 p 位数字正确或保留 p 位有效数字后与 x 相同。机器精度$\epsilon_{match} = 2^{-p}$。浮点表示的误差 $\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \le \epsilon$。一定大数吃小数：$\left|\frac{x_2}{x_1}\right| \le \frac{1}{2}\epsilon$。

Chapter 2 非线性方程求根

二分法 无法求偶数重的重根；不动点迭代法：局部收敛和全局收敛的条件; p 阶收敛 $g^{(p-1)}(x^*) = 0, g^{(p)}(x^*) \ne 0$

牛顿法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(xk)}{f'(xk)}$ 割线法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$

非线性方程组求解 若 $J_g(x^*)$ 的特征值都满足 $|\lambda| \le 1$ 则迭代法局部收敛 牛顿法 $x_{k+1} = x_k - [J_f(x_k)]^{-1} f(x_k)$

Chapter 3 线性方程组直接解法

问题的敏感性 $cond \le \left||A|\right|\left||A^{-1}|\right|$ 矩阵条件数 $cond(A) = \left||A|\right|\left||A^{-1}|\right|$ 任一算子范数下 $cond(A) = \max\frac{||Ax||}{||x||} / \min\frac{||Ax||}{||x||}$ $cond(A) \ge 1, cond(A) = cond(A^{-1})$ $cond(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$ 正交阵条件数为 1，正交变换不改变条件数（二范数意义下）

高斯消去法 // TODO 算法 3.1

矩阵的 LU 分解 // TODO 算法 3.5、3.6

高斯消去不出现零主元等价于 A 的前 n-1 个顺序主子式不为零，等价于 LU 分解存在且唯一

部分主元的 LU 分解 // TODO 算法 3.9

对称正定阵的 Cholesky 分解 // TODO 算法 3.10

Chapter 4 线性方程组的迭代解法

矩阵分裂法 $A = M - N, x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ ，M 非奇异。谱半径 $\rho(A) = \max|\lambda|$，$\rho(A) \le \left||A|\right|$ 算子范数。若 A 实对称，$\left||A|\right|_2 = \rho(A)$

迭代法的收敛性 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$，I-B 非奇异，则任意 x 收敛等价于 $\rho(B) < 1$

Jacobi 迭代法 $x^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}b$，D 是对角阵；Gauss-Seidel $x^{(k+1)} = L^{-1}(L-A)x^{(k)} + L^{-1}b$，L 是 A 的下三角；SOR

判断收敛 Jacobi：$\rho(B_J) < 1, B_J = D^{-1}(D-A)$，若 A 是对角元大于零的对称阵，全局收敛，等价于 A 和 2D-A 都正定。若 $\left||B_J|\right|_1 < 1$ 或 $\left||B_J|\right|_\infty < 1$则 GS 收敛。 若 A 为严格对接占优矩阵，或者不可约的弱对接占优矩阵，则 A 非奇异，对这样的 A，Jacobi 和 GS 都收敛，若 $0 < \omega \le 1$ 则 SOR 收敛。对于对称正定阵，GS 收敛，若 $0 < \omega < 2$ 则 SOR 收敛。SOR 收敛的必要条件：$0 < \omega < 2$

其它

函数范数、向量范数、矩阵范数 // TODO