

1 1.2 最大公因子和小公倍数

题目4. 设 $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, 则 $a \mid bc$ 当且仅当 $\frac{a}{(a,b)} \mid c$

题目5. m 和 n 是互素的正整数: 证明:

(1) 对于每个整数 $a, (a, mn) = (a, m)(a, n)$

(2) mn 的每个正因子 d 均可惟一地表示成 $d = d_1 d_2$, 其中 d_1 和 d_2 分别为 m 和 n 地正因子。

题目6. 设 n 为正整数, a, b 是不全为零的整数, 证明:

(1) $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

(2) 若 a 和 b 是互素的正整数, $ab = c^n, c \in \mathbb{Z}$, 则 a 和 b 都是正整数的 n 次方幂, 事实上, $a = (a, c)^n, b = (b, c)^n$

题目9. 用辗转相除法求963和957地最大公因子, 并求出方程 $963x + 657y = (963, 957)$ 的全部整数解

题目10. 求下列方程的全部整数解

(1) $6x + 20y - 15x = 23$

(2) $25x + 13y + 7x = 2$

题目12. 设 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} - 1 + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 是首项系数为1的整系数多项式, 则 $f(x)$ 的每个有理数必为整数

题目13. 说 m 和 n 为正整数, 则在 $n, 2n, \dots, mn$ 这 m 个数当中恰有 (m, n) 个是 m 的倍数。

题目16. 设 m 和 n 是互素的非零整数, 证明: 对每个整数 a , 如果 $m \mid a, n \mid a$, 则 $mn \mid a$

2 1.3 惟一分解定理

题目3. 设 a, b, c 均为正整数, 证明

题目4. 整数 n 叫作无平方因子, 是指不存在整数 $m \geq 2$, 是的 $m^2 \mid n$, 证明