

一、朴素贝叶斯

朴素贝叶斯是一组功能强大且易于训练的分类器，它使用贝叶斯定理来确定给定一组条件的结果的概率，“朴素”的含义是指所给定的条件都能独立存在和发生。朴素贝叶斯是多用途分类器，能在很多不同的情景下找到它的应用，例如垃圾邮件过滤、自然语言处理等。

1. 概率

1) 定义

概率是反映随机事件出现的可能性大小。随机事件是指在相同条件下，可能出现也可能不出现的事件。例如：

- (1) 抛一枚硬币，可能正面朝上，可能反面朝上，这是随机事件。正/反面朝上的可能性称为概率；
- (2) 掷骰子，掷出的点数为随机事件。每个点数出现的可能性称为概率；
- (3) 一批商品包含良品、次品，随机抽取一件，抽得良品/次品为随机事件。经过大量反复试验，抽得次品率越来越接近于某个常数，则该常数为概率。

我们可以将随机事件记为A或B，则 $P(A)$ ， $P(B)$ 表示事件A或B的概率。

2) 联合概率与条件概率

① 联合概率

指包含多个条件且所有条件同时成立的概率，记作 $P(A, B)$ ，或 $P(AB)$ ，或 $P(A \cap B)$

② 条件概率

已知事件B发生的条件下，另一个事件A发生的概率称为条件概率，记为： $P(A|B)$

③ 事件的独立性

事件A不影响事件B的发生，称这两个事件独立，记为：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

因为A和B不相互影响，则有：

$$P(A|B) = P(A)$$

可以理解为，给定或不给定B的条件下，A的概率都一样大。

3) 先验概率与后验概率

① 先验概率

先验概率也是根据以往经验和分析得到的概率，例如：在没有任何信息前提的情况下，猜测对面来的陌生人姓氏，姓李的概率最大（因为全国李姓为占比最高的姓氏），这便是先验概率。

② 后验概率

后验概率是指在接收了一定条件或信息的情况下的修正概率，例如：在知道对面的人来自“牛家村”的情况下，猜测他姓牛的概率最大，但不排除姓杨、李等等，这便是后验概率。

③ 两者的关系

事情还没有发生，求这件事情发生的可能性的的大小，是先验概率（可以理解为由因求果）。事情已经发生，求这件事情发生的原因是由某个因素引起的可能性的大小，是后验概率（由果求因）。先验概率与后验概率有不可分割的联系，后验概率的计算要以先验概率为基础。

2. 贝叶斯定理

1) 定义

贝叶斯定理由英国数学家托马斯.贝叶斯 (Thomas Bayes)提出，用来描述两个条件概率之间的关系，定理描述为：

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

其中， $P(A)$ 和 $P(B)$ 是A事件和B事件发生的概率。 $P(A|B)$ 称为条件概率，表示B事件发生条件下，A事件发生的概率。推导过程：

$$\begin{aligned} P(A, B) &= P(B)P(A|B) \\ P(B, A) &= P(A)P(B|A) \end{aligned}$$

其中 $P(A, B)$ 称为联合概率，指事件B发生的概率，乘以事件A在事件B发生的条件下发生的概率。因为 $P(A, B) = P(B, A)$ ，所以有：

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

两边同时除以 $P(B)$ ，则得到贝叶斯定理的表达式。其中， $P(A)$ 是先验概率， $P(A|B)$ 是已知B发生后A的条件概率，也被称作后验概率。

2) 贝叶斯定理示例

【示例一】计算诈骗短信的概率

事件	概率	表达式
所有短信中，诈骗短信	5%	P (A) = 0.05
所有短信中，含有“中奖”两个字	4%	P (B) = 0.04
在所有诈骗短信中，含有中奖两个字	50%	P(B A) = 0.5

求：收到一条新信息，含有“中奖”两个字，是诈骗短信的概率？

$$P(A|B) = P(A)P(B|A)/P(B) = 0.05 * 0.5/0.04 = 0.625$$

假设一个学校中 60%的男生 和40%的女生

女生穿裤子的人数和穿裙子的人数相等

所有的男生都穿裤子

一个人随机在远处眺望，看一个穿裤子的学生

请问这个学生是女生的概率

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

3. 朴素贝叶斯分类器

1) 分类原理

朴素贝叶斯分类器就是根据贝叶斯公式计算结果进行分类的模型，“朴素”指事件之间相互独立无影响. 例如：有如下数据集：

Text	Category
A great game（一个伟大的比赛）	Sports（体育运动）
The election was over（选举结束）	Not sports（不是体育运动）
Very clean match（没内幕的比赛）	Sports（体育运动）
A clean but forgettable game（一场难以忘记的比赛）	Sports（体育运动）
It was a close election（这是一场势均力敌的选举）	Not sports（不是体育运动）

构建朴素贝叶斯模型

求：“A very close game” 是体育运动的概率？数学上表示为 P(Sports | a very close game). 根据贝叶斯定理，是运动的概率可以表示为：

A very close game 是sports的概率是多少

A very close game 是 not sports的概率是多少

$$P(\text{Sports} | \text{a very close game}) = \frac{P(\text{a very close game} | \text{sports}) * P(\text{sports})}{P(\text{a very close game})}$$

不是运动概率可以表示为：

$$P(\text{Not Sports} | \text{a very close game}) = \frac{P(\text{a very close game} | \text{Not sports}) * P(\text{Not sports})}{P(\text{a very close game})}$$

即比较

$$\frac{P(\text{a very close game} | \text{sports}) * P(\text{sports})}{P(\text{a very close game} | \text{Not sports}) * P(\text{Not sports})}$$

概率更大者即为分类结果. 由于分母相同，即比较分子谁更大即可. 我们只需统计“A very close game” 多少次出现在Sports类别中，就可以计算出上述两个概率. 但是“A very close game” 并没有出现在数据集中，所以这个概率为0，要解决这个问题，就假设每个句子的单词出现都与其它单词无关（事件独立即朴素的含义），所以，P(a very close game)可以写成：

$$P(\text{a very close game}) = P(a) * P(\text{very}) * P(\text{close}) * P(\text{game})$$

$$\frac{P(a | \text{Sports}) * P(\text{very} | \text{Sports}) * P(\text{close} | \text{Sports}) * P(\text{game} | \text{Sports})}{P(a | \text{Not Sports}) * P(\text{very} | \text{Not Sports}) * P(\text{close} | \text{Not Sports}) * P(\text{game} | \text{Not Sports})}$$

统计出“a”, “very”, “close”, “game”出现在“Sports”类别中的概率，就能算出其所属的类别. 具体计算过程如下：

- 第一步：计算总词频：Sports类别词语总数11，Not Sports类别词语总数9
- 第二步：计算每个类别的先验概率

```
# Sports和Not Sports概率
P(Sports) = 3 / 5 = 0.6
P(Not Sports) = 2 / 5 = 0.4

# Sports条件下各个词语概率
P(a | Sports) = (2 + 1) / (11 + 14) = 0.12
P(very | Sports) = (1 + 1) / (11 + 14) = 0.08
P(close | Sports) = (0 + 1) / (11 + 14) = 0.04
P(game | Sports) = (2 + 1) / (11 + 14) = 0.12

# Not Sports条件下各个词语概率
P(a | Not Sports) = (1 + 1) / (9 + 14) = 0.087
P(very | Not Sports) = (0 + 1) / (9 + 14) = 0.043
P(close | Not Sports) = (1 + 1) / (9 + 14) = 0.087
P(game | Not Sports) = (0 + 1) / (9 + 14) = 0.043
```

其中，分子部分加1，是为了避免分子为0的情况；分母部分都加了词语总数14，是为了避免分子增大的情况下计算结果超过1的可能.

- 第三步：将先验概率带入贝叶斯定理，计算概率：

是体育运动的概率:

$$\begin{aligned} &P(sport) * P(a \text{ very close game} | Sports) = \\ &P(a | Sports) * P(very | Sports) * P(close | Sports) * P(game | Sports) = \\ &0.6 * 0.12 * 0.08 * 0.04 * 0.12 = 0.00004608 \end{aligned}$$

不是体育运动的概率:

$$\begin{aligned} &P(notsport) * P(a \text{ very close game} | Not Sports) = \\ &P(a | Not Sports) * P(very | Not Sports) * P(close | Not Sports) * P(game | Not Sports) = \\ &0.4 * 0.087 * 0.043 * 0.087 * 0.043 = 0.000013996 \end{aligned}$$

分类结果: $P(Sports) = 0.00004608$, $P(Not Sports) = 0.000013996$, 是体育运动.

2) 实现朴素贝叶斯分类器

在sklearn中, 提供了三个朴素贝叶斯分类器, 分别是:

- GaussianNB (高斯朴素贝叶斯分类器): 适合用于样本的值是连续的, 数据呈正态分布的情况 (比如人的身高、城市家庭收入、一次考试的成绩等等)
- MultinomialNB (多项式朴素贝叶斯分类器): 适合用于大部分属性为离散值的数据集
- BernoulliNB (伯努利朴素贝叶斯分类器): 适合用于特征值为二元离散值或是稀疏的多元离散值的数据集

该示例中, 样本的值为连续值, 且呈正态分布, 所以采用GaussianNB模型. 代码如下:

```
# 朴素贝叶斯分类示例
import numpy as np
import sklearn.naive_bayes as nb
import matplotlib.pyplot as mp

# 输入, 输出
x, y = [], []

# 读取数据文件
with open("../data/multiple1.txt", "r") as f:
    for line in f.readlines():
        data = [float(substr) for substr in line.split(",")]
        x.append(data[:-1]) # 输入样本: 取从第一列到倒数第二列
        y.append(data[-1]) # 输出样本: 取最后一列

x = np.array(x)
y = np.array(y, dtype=int)

# 创建高斯朴素贝叶斯分类器对象
model = nb.GaussianNB()
model.fit(x, y) # 训练

# 计算显示范围
left = x[:, 0].min() - 1
right = x[:, 0].max() + 1

bottom = x[:, 1].min() - 1
top = x[:, 1].max() + 1
```

```

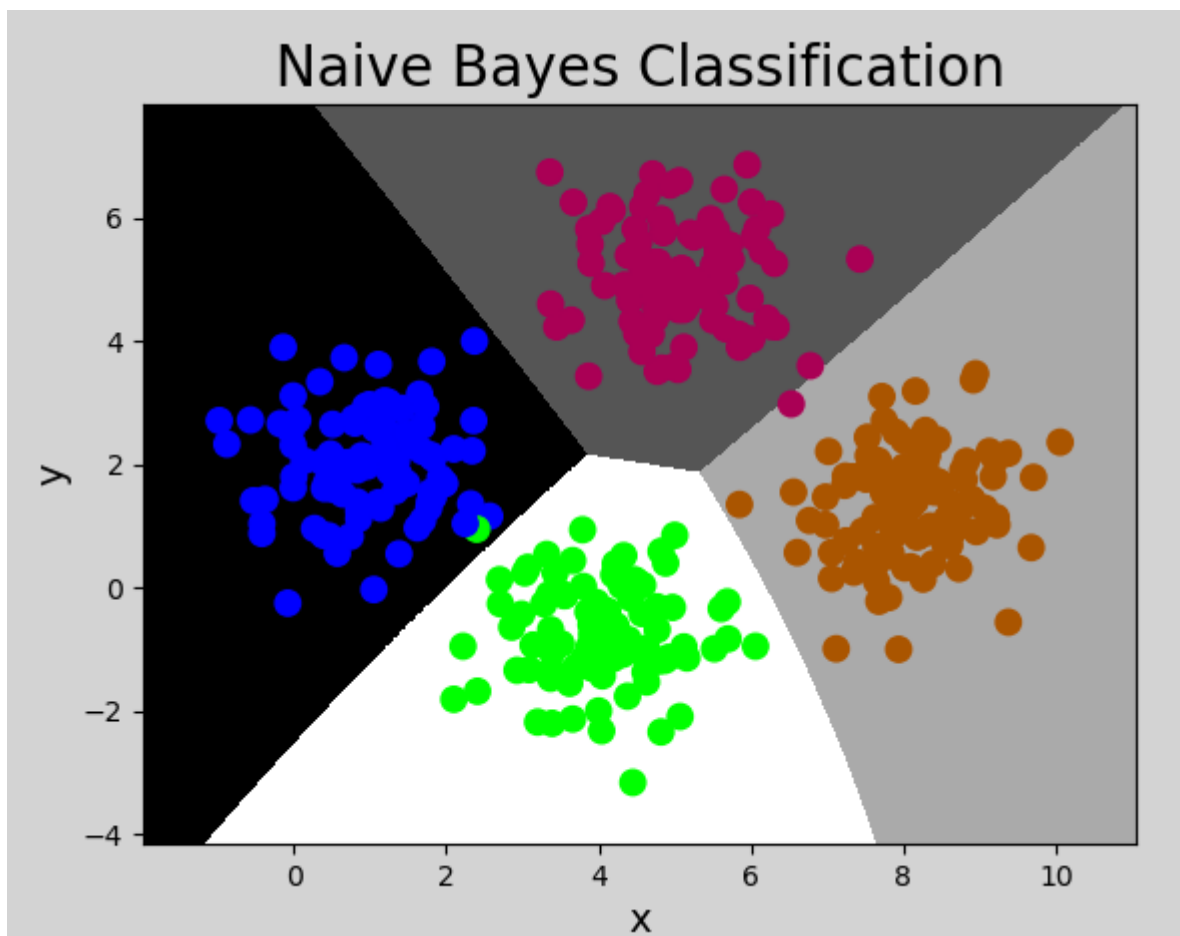
grid_x, grid_y = np.meshgrid(np.arange(left, right, 0.01),
                             np.arange(bottom, top, 0.01))

mesh_x = np.column_stack((grid_x.ravel(), grid_y.ravel()))
mesh_z = model.predict(mesh_x)
mesh_z = mesh_z.reshape(grid_x.shape)

mp.figure('Naive Bayes Classification', facecolor='lightgray')
mp.title('Naive Bayes Classification', fontsize=20)
mp.xlabel('x', fontsize=14)
mp.ylabel('y', fontsize=14)
mp.tick_params(labelsize=10)
mp.pcolormesh(grid_x, grid_y, mesh_z, cmap='gray')
mp.scatter(x[:, 0], x[:, 1], c=y, cmap='brg', s=80)
mp.show()

```

执行结果：



4. 总结

- 1) 什么是朴素贝叶斯：朴素贝叶斯法是基于贝叶斯定理与特征条件独立假设的分类方法。“朴素”的含义为：假设问题的特征变量都是相互独立地作用于决策变量的，即问题的特征之间都是互不相关的。
- 2) 朴素贝叶斯分类的特点

① 优点

- 逻辑性简单
- 算法较为稳定。当数据呈现不同的特点时，朴素贝叶斯的分类性能不会有太大的差异。
- 当样本特征之间的关系相对比较独立时，朴素贝叶斯分类算法会有较好的效果。

② 缺点

- 特征的独立性在很多情况下是很难满足的，因为样本特征之间往往都存在着相互关联，如果在分类过程中出现这种问题，会导致分类的效果大大降低。

3) 什么情况下使用朴素贝叶斯：根据先验概率计算后验概率的情况，且样本特征之间独立性较强。