Сессия по второму модулю Дискретной Математики

Авторы: АКЕБ

1 Билет

Условие: *Дискретное вероятностное пространство. Формула полной вероятности. Формула Байеса.*

Дискретное вероятностное пространство - это пара из некоторого (не более чем счетного) множества элементарных исходов Ω и функции $P\colon \Omega \to R_+$ - дискретной вероятностной мерой (или просто вероятности). P удовлетворяет аксиомам вероятности:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(A) \geq 0, \quad P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \quad \text{если } A_i \text{ попарно несовместны.}$$

Формула полной вероятности: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно несовместимые события, такие что $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, то для произвольного события B выполняется:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).$$

Доказательство: Заметим, что событие B можно выразить как объединение событий $B \cap A_i$ для всех i, то есть:

$$B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i).$$

Так как события $B \cap A_i$ попарно несовместимы (потому что $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместимы), имеем:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$

Используя условную вероятность, получаем:

$$P(B \cap A_i) = P(B|A_i)P(A_i).$$

Таким образом, получаем требуемую формулу:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).$$

Формула Байеса: Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно несовместимые события, которые составляют полную систему, то для условной вероятности $P(A_i|B)$ выполняется:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

Доказательство: Согласно формуле полной вероятности, $P(B) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)$. Тогда по определению условной вероятности для $P(A_i|B)$ имеем:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Это и есть требуемая формула.

2 Билет

Условие: *Независимые события. Схема Бернулли. Обобщение схемы Бернулли.*

Независимость событий: Два события A и B называются независимыми, если выполняется условие:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Для дохулиарда событий это определяется так:

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого I (какого-то подмножества множества индексов от 1 до n-ого) верно, что $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Схема Бернулли: Это последовательность независимых испытаний, каждый из которых имеет два возможных исхода: успех (обозначим как 1) или неудача (обозначим как 0). Пусть вероятность успеха в одном испытании равна p, а неудачи — $1 - p$. Если в n испытаниях произошло k успехов, то вероятность этого события по формуле биномиального распределения равна:

$$P(k \text{ успехов}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Доказательство: А какое тут нахуй доказательство

Обобщение схемы Бернулли: Схема Бернулли может быть обобщена на случай, когда в каждом испытании могут быть более двух исходов - например, k. Для каждого испытания вероятность каждого исхода фиксирована, и все испытания независимы, сумма всех вероятностей, естественно 1.

$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$, где $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$

3 Билет

Условие: *Дискретные случайные величины. Распределение дискретной случайной величины. Распределение Бернулли. Биномиальное распределение.*

Дискретная случайная величина: Случайная величина X называется дискретной, если множество её возможных значений состоит из счётного числа элементов. Распределение такой случайной величины задаётся функцией вероятности $P(X = x) = p_x$, где $\sum_x p_x = 1$.

Распределение Бернулли: Если случайная величина X описывает результат одного испытания с двумя исходами (успех — 1, неудача — 0), то её распределение называется распределением Бернулли. Для этого распределения вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи $1 - p$:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Биномиальное распределение: Если случайная величина X — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p в каждом испытании, то её распределение биномиально:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Доказательство: Сначала находим количество способов, которыми можно получить k успехов среди n испытаний, что равно числу сочетаний $\binom{n}{k}$. Вероятность того, что из k успехов и $n - k$ неудач в последовательности испытаний получится конкретная последовательность, равна $p^k(1-p)^{n-k}$. Таким образом, общая вероятность равна:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4 Билет

Условие: *Независимые случайные величины. Попарная независимость и независимость в совокупности.*

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются **независимыми**, если для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполняется условие:

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Иначе говоря, две случайные величины называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая, то есть по значению одной нельзя сделать выводы о значении другой.

Пример: система двух игральных кубиков, где результат броска одного кубика никак не влияет на вероятности выпадения граней другого кубика.

Попарная независимость: Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно независимы, если для всех пар i, j выполняется:

$$P(X_i \in A_i, X_j \in A_j) = P(X_i \in A_i) P(X_j \in A_j).$$

Независимость в совокупности: Случайные величины независимы в совокупности, если выполняется условие независимости для всех возможных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

5 Билет

Условие: *Математическое ожидание. Свойства. Примеры.*
Математическое ожидание случайной величины X — понятие, означающее среднее (взвешенное по вероятностям возможных значений) значение случайной величины. На практике математическое ожидание обычно оценивается как среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины (выборочное среднее, среднее по выборке). Для дискретной случайной величины:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x P(X = x).$$

Свойства математического ожидания:

- Линейность: $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.
- Если случайные величины независимы, то $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ (математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий).
- Математическое ожидание сохраняет неравенства, то есть если $0 \leq X \leq Y$ почти наверняка, и Y — случайная величина с конечным математическим ожиданием, то математическое ожидание случайной величины X также конечно, и более того, не меньше нуля и не больше матожидания Y.
- Математическое ожидание не зависит от поведения случайной величины на событии вероятности нуль, то есть если X=Y почти наверняка, то E[X] = E[Y].
- Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной.
- Математическое ожидание суммы любых случайных величин равно сумме их математических ожиданий.
- Если случайная величина принимает значения с одинаковой вероятностью, то математическое ожидание равно среднему арифметическому числовых значений случайной величины.
- Математическое ожидание не зависит от поведения случайной величины на событии вероятности нуль, то есть если почти наверняка, то математическое ожидание равно самому себе.

Пример: для случайной величины X, распределённой по закону Бернулли с вероятностью успеха p, математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X] = p.$$

6 Билет

Условие: *Дисперсия. Свойства. Примеры.*

Дисперсия случайной величины X измеряет её разброс относительно математического ожидания:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Свойства дисперсии:

- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.
- Если случайные величины независимы, то $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ (дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий).
- Дисперсия постоянной величины равна нулю (D(C) = 0).
- При сдвиге значений дисперсия случайной величины не меняется (D(X + a) = DX).

Пример: для случайной величины X, распределённой по закону Бернулли с вероятностью успеха p, дисперсия:

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p) = pq.$$

7 Билет

Условие: *Неравенства Маркова и Чебышева. Пример использования.*

Неравенство Маркова: Для случайной величины X, принимающей неотрицательные значения, и для любого $a > 0$ выполняется:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Неравенство Чебышева: Для случайной величины X с конечным математическим ожиданием и дисперсией:

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2}.$$

Доказательств не будет. Там какая-то хуйня с интегралами, не думаю, что спросят.

Пример: Пусть X — случайная величина с $\mathbb{E}[X] = 5$ и $\mathrm{Var}(X) = 4$. Тогда по неравенству Чебышева:

$$P(|X - 5| \geq 3) \leq \frac{4}{9}.$$

8 Билет

Условие: *Теория графов. Основные определения (ориентированные и неориентированные графы, простые графы и мультиграфы, смежность, инцидентность, степени вершин, подграфы, остовные и индуцированные подграфы). Матрицы смежности и инцидентности. Лемма о рукопожатиях.*

Определение:

Неориентированный граф $G = (V, E, I)$ — это тройка, где:

- V — множество вершин;
- E — множество рёбер;
- $I : E \to V^2$ — отображение, сопоставляющее ребру $e \in E$ неупорядоченную пару вершин $\{x, y\}$ $(x, y \in V)$.

Определение:

Ориентированный граф $D = (V, E, I)$ — это тройка, где:

- V — множество вершин;
- E — множество рёбер;
- $I : E \to V \times V$ — отображение, сопоставляющее ребру $e \in E$ упорядоченную пару вершин (x, y) $(x, y \in V)$.

Определение:
Простой граф — это граф без петель и мультирёбер. Примером простого графа является полный граф K_n, в котором любая пара вершин соединена ребром.

Определение:
Мультиграф — это граф, в котором могут быть петли и мультирёбра (несколько рёбер между одними и теми же вершинами).

Определение:
Смежность: В неориентированном графе вершина y называется смежной с вершиной x, если существует ребро $\{x, y\}$. В ориентированном графе вершина y смежна с x, если существует ребро (x, y).

Определение:
Инцидентность: Ребро графа называется инцидентным своим концевым вершинам, соединяемым этим ребром.

Определение:
Степень вершины: Число рёбер, инцидентных вершине. Петля даёт вклад 2 в степень вершины.

Определение:
Подграф: Граф H является подграфом графа G, если:

- $V(H) \subseteq V(G)$;
- $E(H) \subseteq E(G)$;
- Любое ребро $e \in E(H)$ соединяет те же вершины в H и G.

Определение:
Остовный подграф: Подграф, содержащий все вершины исходного графа, но лишь часть его рёбер.

Определение:
Индуцированный подграф: Подграф, содержащий все рёбра, соединяющие выбранное подмножество вершин исходного графа.

Матрицы смежности и инцидентности

- **Матрица смежности:** Для графа $G = (V, E)$ это квадратная матрица, где элемент a_{ij} равен числу рёбер, соединяющих вершины i и j.
- **Матрица инцидентности:** Матрица, в которой строки соответствуют вершинам, а столбцы — рёбрам. Элемент равен 1, если вершина инцидентна ребру, иначе — 0

Лемма о рукопожатиях

Формулировка: В любом неориентированном графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Доказательство: Каждое ребро добавляет 2 к общей сумме степеней вершин (по одному вкладу от каждой вершины ребра)

9 Билет

Условие: *Маршруты в графах. Связность. Сильная и слабая связность. Граф компонент сильной связности. Топологическая сортировка.*

> **Определение:**
> **Маршрут** — чередующаяся последовательность вершин и рёбер, в которой каждые два соседних элемента инцидентны.

> **Определение:**
> **Связный граф** — такой граф, что из любой вершины существует путь в другую вершину.

> **Определение:**
> **k-связный граф** — такой связный граф, который остаётся связным при удалении любых $k - 1$ вершин.

> **Определение:**
> **Компонента связности** — подмножество вершин графа такое, что между любыми двумя существует путь.

> **Определение:**
> **Компонента слабой связности** — подмножество вершин *ориентированного* графа такое, что если все рёбра заменить на неориентированные, между любыми двумя вершинами будет существовать путь.

> **Определение:**
> **Компонента сильной связности** — подмножество вершин *ориентированного* графа такое, что от любой вершины существует путь к любой другой вершине.

> **Определение:**
> **Конденсация графа** — граф компонент сильной связности, такой что из одной его вершины c_1 существует ребро в другую вершину c_2 только в том случае, если существуют такие $a \in c_1$, $b \in c_2$, что существует ребро из a в b.

> **Определение:**
> **Топологическая сортировка** — линейный порядок на вершинах графа такой, что если существует ребро из a в b, то a имеет меньший номер, чем b. Очевидно, что если в графе есть циклы, топологической сортировки не существует.

10 Билет

Условие: *Деревья. Свойства и эквивалентные определения.*

> **Определение:**
> **Дерево** — простой связный граф без циклов.

> **Определение:**
> **Лес** — простой граф без циклов.

> **Определение:**
> **Лист** — вершина дерева, имеющая степень 1.

Свойства деревьев:

1. В дереве ровно $n - 1$ ребро.
   Доказательство: рассмотрим путь максимальной длины. Его края - листья. Почему? Пусть не так. Тогда если ребро ведёт к одной из вершин на этом пути, получаем цикл, иначе - получаем более длинный путь. Получается, у любого дерева на $n > 1$ вершинах хотя бы 2 листа. База индукции: в графе из 1 вершины 0 рёбер. Переход: возьмём дерево на $n+1$ вершинах. Уберём 1 лист и инцидентное ему ребро. Граф остался связным, циклов не появилось, значит это дерево, и в нём по индукционному предположению $n - 1$ ребро, значит в графе до удаления $n = n + 1 - 1$.

2. Любой простой связный граф на n вершинах, имеющий $n - 1$ ребро - дерево.
   Доказательство: выберем в G вершину и покрасим её. Потом будем провдить следующую процедуру: окрасим случайную вершину, смежную с какой-то из окрашенных, и ребро, их соединяющее. Так за $n - 1$ шагов покрасим все вершины. И, получается, $n-1$ рёбер. Окрашенный подграф всегда связен и ацикличен, а значит и изначальный тоже.

3. Дерево - минимально связный граф (удаление 1 ребра приводит к нарушению связности).

4. Все рёбра связного графа - мосты $\Leftrightarrow$ этот граф - дерево.
   Доказательство: пусть все рёбра мосты, но связный граф - не дерево. Тогда существует цикл, значит, есть ребро, принадлежащее циклу, оно по определению не мост. Противоречие. Пусть граф - дерево, и какое-то ребро не мост. Удалим его, граф остался связным, значит есть маршрут между вершинами, которые соединяло это ребро, значит был цикл. Противоречие.

5. Граф - дерево $\Leftrightarrow$ между любыми двумя вершинами существует единственный путь.
   Доказатеьлство: пусть граф - дерево, и между вершинами 2 пути. 2 пути $=$ цикл. противоречие. Пусть между любыми двумя вершинами существует единственный путь, но граф не дерево. Граф несвязный? 0 путей - противоречие. В графе есть циклы? 2 пути - противоречие.

11 Билет

Условие: *Двудольные графы. Критерий двудольного графа. Примеры двудольных графов: деревья, гиперкубы.*

> **Определение:**
> **Двудольный граф** - такой граф, что его можно разбить на две части таким образом, что любое ребро соединяет вершины из разных частей, то есть между вершинами одной половины рёбра отсутствуют.

> **Определение:**
> **Критерий двудольности графа:** все циклы в графе имеют чётную длину.

Доказательство: пусть граф двудольный. Если мы пройдём из вершины a нечётное число шагов, окажемся в другой доле, значит циклы чётные. Пусть все циклы чётные. Тогда выберем a и разобьём на множества A и B такие что кратчайший путь из a в b чётный значит b в A, иначе в B. Докажем что нет таких u, v что они принадлежат одной группе и соединены ребром. Возьмём путь из a в v и в u. Оба пути имеют одинаковую чётность. Возьмём a_0 - последнюю вершину, принадлежащую обоим путям. Пути от a_0 до v и u одинаковой чётности, так что если там есть ребро - нечётный цикл. противоречие. Примеры двудольных графов:

- Дерево.
- Куб.
- Гиперкуб.
- Чётный цикл.
- Полный двудольный граф.

12 Билет

Условие: *k-дольные графы. Хроматическое число. Примеры. Жадный алгоритм раскраски графа.*

> **Определение:**
> `k-дольные графы` - граф, множество вершин которого можно разбить на k независимых множеств (долей)

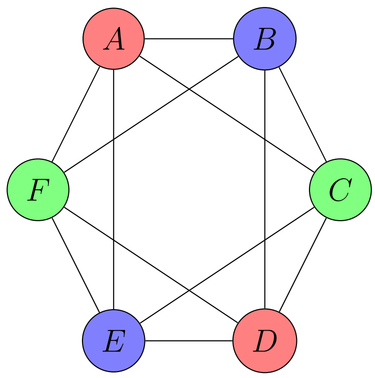


Рис. 1: Полный трёхдольный граф правильного октаэдра, состоящий из трёх независимых множеств, каждое из которых включает в себя две противоположные вершины октаэдра

Пример:

Определение:
`Хроматическое число` - минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета
Обозначение: $\chi(G)$

Определение:
`Жадная раскраска в теории графов` - раскраска вершин неориентированного графа, созданная жадным алгоритмом, который проходит вершины графа в некоторой предопределённой последовательности и назначает каждой вершине первый доступный цвет

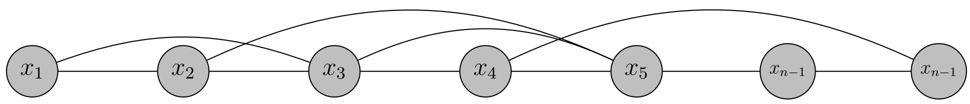
Пример

Задача раскраски вершин графа разбивается на две подзадачи:
1. Проверка графа G на k-раскрашиваемость.
2. Определение хроматического числа $\chi(G)$, минимального количества цветов, необходимых для раскраски графа.

Для $k = 2$ существует простой критерий двураскрашиваемости, позволяющий проверить, является ли граф двудольным. *Однако для $k > 2$ задача проверки k-раскрашиваемости является NP-полной, а задача определения $\chi(G)$ — NP-сложной.* На практике часто применяют эвристические алгоритмы, такие как жадный алгоритм раскраски. Этот алгоритм позволяет найти верхнюю границу хроматического числа.

Жадный алгоритм раскраски

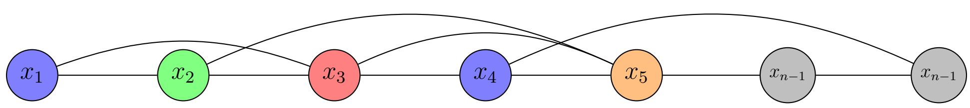
Рассмотрим связный граф G на n вершинах с линейным порядком вершин. Мы будем окрашивать его вершины, используя множество цветов $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$, следующим образом:



1. Окрасим первую вершину x_1 в цвет 1.
2. Для вершины x_2:
   - Если x_2 смежна с x_1, то окрашиваем её в цвет 2.
   - Если x_2 не смежна с x_1, окрашиваем её в цвет 1.
3. Для вершины x_3:
   - Если x_3 смежна с x_1 и x_2, и x_1 смежна с x_2, то окрашиваем x_3 в новый цвет (цвет 3).
   - Если x_3 смежна с x_1 и x_2, но x_1 не смежна с x_2, то окрашиваем её в цвет 2.
   - Если x_3 не смежна с x_1 и x_2, то окрашиваем её в цвет 1.
   - Если x_3 смежна только с одной из вершин x_1 или x_2, то окрашиваем её в цвет той вершины, с которой она не смежна.
4. Для k-й вершины x_k (на общем шаге):
   - Рассматриваем все вершины, смежные с x_k, с меньшими индексами. Эти вершины уже окрашены.
   - Исключаем из множества цветов Y те цвета, которые использованы для смежных вершин с меньшими индексами.
   - Из оставшихся цветов выбираем минимальный и окрашиваем вершину x_k в этот цвет.

Этот алгоритм гарантирует корректную раскраску графа, не нарушая условия, что соседние вершины имеют разные цвета.

Иллюстрация жадного алгоритма раскраски графа



Результат работы жадного алгоритма для графа, после 5-ого шага алгоритма.

Заключение

Жадный алгоритм раскраски не всегда находит минимальное число цветов, но является простым и эффективным методом для определения верхней границы хроматического числа $\chi(G)$.

13 Билет

Условие: *Эйлеровы пути и циклы. Необходимые и достаточные условия. Случай ориентированного графа.*

> **Определение:**
> `Эйлеров путь` - простой путь, который проходит по каждому ребру, причем ровно один раз.

> **Определение:**
> `Эйлеров цикл` - замкнутый эйлеров путь.

Необходимое условие существования эйлерова цикла в графе

Формулировка: *Для существования в графе эйлерова цикла необходимо, чтобы он был связным, и чтобы все вершины этого графа имели четную степень.*
Доказательство:
Требование связности очевидно. Далее, если мы хотим пройти каждое ребро в графе лишь однажды, то, войдя в какую-то из вершин по одному ребру, мы должны выйти из этой же вершины по какому-то другому ребру. При этом количество входов в любую вершину должно совпадать с количеством выходов. Удовлетворить этим требованиям мы можем лишь тогда, когда степень любой вершины является четной.

Достаточное условие существования эйлерова цикла в графе

Формулировка(аналогично необходимому условию): *Для того, чтобы граф имел эйлеров цикл, достаточно, чтобы он был связным и любая его вершина имела четную степень.*
Переформулировка: *Связный граф G имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все степени его вершин четные.*
Доказательство: Доказательство максимально очевидное, надо один раз увидеть. https://stepik.org/lesson/10765/step/5?unit=11574

Случай ориентированного графа.

Формулировка: Сильно связанный орграф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда входящая степень любой его вершины совпадает с исходящей степенью.
Доказательство: Аналогично случаю неориентированного графа.

14 Билет

Условие: *Гамильтоновы пути и циклы. Примеры. Существование гамильтонова пути в турнире. Необходимые условия существования гамильтонова цикла в неориентированном графе.*

> **Определение:**
> `Гамильтонов путь` -простой путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.

> **Определение:**
> `Гамильтонов цикл` - замкнутый гамильтонов путь.

Примеры

Существование гамильтонова пути в турнире

> **Определение:**
> `Турнир` - ориентированный граф, в котором для любой пары вершин задано одно направление ребра. Турнир является полным ориентированным графом.

Теорема(Редеи-Камиона): *В любом турнире T существует ориентированный гамильтонов путь.*
Доказательство: По индукции.

1. **База:** Для $n = 3$ очев работает.
2. **Переход:** Рассмотрим турнир T с $n + 1$ вершинами.
   Пусть u — произвольная вершина турнира T.
   Тогда турнир $T - u$ имеет n вершин $\Rightarrow$ в нем есть гамильтонов путь P.
   Заметим, что одно из рёбер (u, v_1) или (u_1, v) обязательно содержится в T. Тогда, если ребро $(u, v_1) \in T$, то путь $(u \to P)$ — гамильтонов.
   Если $(u, v_1) \notin T$, тогда пусть v_i - первая вершина на пути P, для которой $(u, v_i) \in T$.
   Тогда, если такая вершина существует, то в T существует ребро $(v_{i-1}, u) \Rightarrow$ нашли гамильтонов путь.
   Если же такой вершины не существует, то (т.к. граф связный) путь $(P \to u)$ гамильтонов.

Необходимые условия существования гамильтонова цикла в неориентированном графе.

Формулировка:
Доказательство:

15 Билет

Условие: *Теоремы Оре и Дирака.*

Определение:

`Теорема Оре` — Если $v(G) \geqslant 3$ и $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G)$ для любых двух различных несмежных вершин u и v неориентированного графа, то G — гамильтонов граф.

Вначале докажем лемму о том, что если P $= \{v_1, v_2 ... v_n\}$ - максимальный путь и $deg(v_1) + deg(v_n) \geqslant n$, то существует цикл длины n.

Доказательство: Пусть v_1 и v_n - несмежные (иначе очевидно цикл есть). Понятно, что $N_G(v_1), N_G(v_n)$ принадлежат P, тогда, если $v_i \in$N$_G(v_n)$ и $v_{i+1} \in$N$_G(v_1)$, то мы нашли цикл длины n - $v_1, v_2 ... v_i, v_n, v_{n-1}, ... v_{i+1}$. В ином случае первые i вершин в пути - соседи v_1, а начиная с вершины i - соседи v_n. Но тогда $deg(v_n) \leqslant n - 1 - deg(v_1)$ - противоречие.

Теперь докажем, что есть гамильтонов путь.

Пусть G — негамильтонов граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Рассмотрим максимальный путь в графе P $= \{v_1, v_2, v_3 ... v_n\}$. Возьмем две любые несмежные вершины u и v. Тогда из условия теоремы выходит, что у них есть общие соседи, значит граф G - связен. Тогда возьмем вершины $v_1 v_n$ - если они смежные, то у нас есть цикл из n вершин. Иначе мы получаем, что $deg(v_1) + deg(v_n) \geqslant v(G) \geqslant n$, значит в нашем графе по лемме есть цикл из n вершин. Тогда существует хотя бы одна невошедшая в цикл вершина, но связанная хотя бы с одной из вошедших в цикл. Получается, что существует путь из $n + 1$ вершины. Но мы предположили, что максимальный из n - противоречие. Значит существует гамильтонов путь.

Наконец все это прикрутим к основной теореме:

Тогда из предыдущего доказательства мы получили, что $n = v(G)$. Применим лемму - ура, у нас есть цикл длины $v(G)$. Победа

Определение:

`Теорема Дирака` — Если $v(G) \geqslant 3$ и $deg(v) \geqslant \frac{v(G)}{2}$ для любой вершины v неориентированного графа, то G— гамильтонов граф.

Это прямое следствие теоремы Оре. Буквально тогда сумма любых двух вершин будет больше v(G).

16 Билет

Условие: *Замыкание графа. Теорема Бонди-Хватала.*

Определение:

`Замыкание графа G` — это граф C(G), полученный путём последовательного добавления новых рёбер в граф G между парами несмежных вершин u и v (пока существуют), для которых $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G)$, пока добавление новых рёбер возможно.

Пример:

1. Нашли несмежные u и v, такие что $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G)$
2. Добавили в граф ребро между ними
3. Повторили 1-2 пока можем
4. Получили C(G)

Определение:

`Теорема Бонди-Хватала` — граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание C(G) является гамильтоновым.

$\Rightarrow$

Очевидно, ибо если граф был гамильтоновым, то добавление нового ребра это не испортит

$\Leftarrow$

Пусть есть какой-то граф G, в нем есть два u и v - несмежные такие, что $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G)$. Тогда пусть G + uv - гамильтонов. Докажем что из этого следует, что G - гамильтонов.

Либо гамильтонов цикл не проходит через uv, то ура в G есть гамильтонов цикл. Либо проходит, тогда очевидно в G есть гамильтонов путь u .. v (просто из цикла удалили одно ребро). Но тогда по лемме из предыдущего билета - существует цикл длины v(G). Победа

Получаем, что если доказали для двух вершин, то доказано для C(G)

17 Билет

Условие: *Теорема Хватала.*

Определение:

`Теорема Хватала` — Пусть $v_1, v_2 ... v_n$ — последовательность степеней вершин в графе G (где $v(G) = n$), упорядоченная по неубыванию их степеней (deg). Если для всех k таких что $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$ выполняется условие $v_k > k$ или $v_{n-k} \geqslant n - k$, то граф G является гамильтоновым.

Условие можем переписать так: Для любых вершин $v_i + v_{n-i} \geqslant n$. Тогда давайте докажем, что замыкание такого графа C(G) будет гамильтоновым. Тогда для любых $i + j \geqslant n$: $deg(v_i) + deg(v_j) \geqslant deg(v_i) + deg(v_{n-i}) \geqslant n$ (следует из того как мы отсортировали вершины изначально). Тогда вершины v_i и v_j - смежны в C(G).

Тогда мы можем построить гамильтонов цикл в C(G).

При n = 2m + 1: $v_1, v_{2m}, v_2, v_{2m-1} ... v_m, v_{m+1}, v_{2m+1}$.

При n = 2m: $v_1, v_{2m-1}, v_2, v_{2m-2} ... v_{m-1}, v_{m+1}, v_m, v_{2m}$.

Ну а раз C(G) - гамильтонов, то и G - гамильтонов.

18 Билет

Условие: *Последовательности де Брёйна. Нахождение с помощью гамильтоновых и эйлеровых циклов в графе де Брёйна.*

Определение:

`Последовательность де Брёйна длины` n `над алфавитом размера` k — это циклическая последовательность, содержащая каждую возможную подстроку длины n из символов этого алфавита ровно один раз.

Часто рассматриваются периодические последовательности с периодом T, содержащие T различных подпоследовательностей $a_i+1, \ldots, a_i+n$, — то есть такие периодические последовательности, в которых любой отрезок длины $T+n-1$ является последовательностью де Брёйна с теми же параметрами n и k.

Рассмотрим примеры циклов для $k = 2$ ($\{0,1\}$), $T = 2$:

1. 01 (последовательности длины $n = 1$: $\{0,1\}$)
2. 0011 (последовательности $\{00, 01, 11, 10\}$)
3. 00010111 ($\{000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100\}$
4. 0000100110101111 (ну тут сами блять разберетесь)

Кстати эти хуйни для 2−буквенного алфавита выражаются соотношением вида $a_i = a_{i-2} + a_{i-3} \ (mod\ 2)$, где a_i − цифра на i месте циклического порядка.

Для работы с последовательностями де Брёйна существует их удобная интерпретация − графы де Брёйна.

> **Определение:**
> `Граф де Брёйна` - ориентированный граф с k^n вершинами, каждая из которых соответствует некоторой последовательности длины n на алфавите размера k. Если есть две вершины $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда ребро $x \to y$ существует в том случае, если $x_i = y_{i-1} \forall i \in [2, n]$. Обозначается как $B(k, n)$.

Можно заметить, что ребру, соединяющему $x \to y$ можно сопоставить последовательность длины $n+1$ на все том же k: $(x_1, \ldots, x_n, y_n)$ или $(x_1, y_1, \ldots, y_n)$.

Чем же полезны такие графы? Тем, что эйлеровы пути (циклы) в таких графах соответствуют последовательностям (циклам) де Брёйна длины $n+1$ на алфавите размера k, а гамильтоновы пути (циклы) − аналогично для длины n.

`Граф де Брёйна` - эйлеров.

Доказательство: Ориентированный граф является эйлеровым, если число входящих рёбер равно числу исходящих. Докажем, что это верно для $B(k, n)$. А именно, что $\forall v \in V$ верно, что $deg_{out}(v) = deg_{in}(v)$. Рассмотрим левую часть равенства, правая аналогично. Существует ровно k символов алфавита, которые можно добавить в конец слова α, соответствующему вершине v. Получим ровно k различных слов. И у всех этих слов различные суффиксы длины n. Таким образом, из вершины v выходит ровно k рёбер и входит тоже k рёбер. Значит, граф де Брёйна − эйлеров.

19 Билет

Условие: *Паросочетания. Основные определения. Теорема Бержа.*

> **Определение:**
> Пусть G = (V, E) - неоринетированный граф, тогда подмножество ребер M - паросочетание, если никакие два ребра M не имеют общих вершин;

Определение:

Пусть M - паросочетание в графе G. Тогда путь в G называется увеличивающим путем, если первая и последняя вершины пути не насыщены паросочетанием M и типы ребер на пути чередуются, причем путь простой

Определение:

Чередование вдоль увеличивающегося пути: все ребра не лежащие в M добавляем в M, лежащие убираем из M, тогда размер парососчетания увеличится на 1

Лемма (о графах с deg <= 2)

Формулировка: *Пусть H - неориентированный граф, все степени вершин в котором не больше 2. Тогда любая компонента связности в графе H - либо путь, либо цикл*

- Уберем вершины степени 0 - это просто вершины
- Уберем вершины степени 1 - начинается путь, потом идет по вершинам степени 2, рано или поздно закончится и получим другое ребро степени 1
- Остались ребра степени 2 - идем по вершинам, каждый раз идем в новую вершину, если не в новую, то в изначальную

Теорема Бержа

Формулировка: *В графе G паросочетание паросочетание M максимально <=> относительно него нет увеличивающих путей. Докажем <=, в обратную сторону очевидно*

- От противного: пусть M - не максимально, но относительно него нет увеличивающих путей. Тогда пусть M' - максимальное паросочетание. $|M'| > |M|$.
- Рассмотрим H - граф, в котором есть все вершины G и ребра которые входят только в M или только в M', в H все степени не больше 2 (т. к. не более 2 ребер из разных парсочей), тогда он удовлетворяет Лемме (о графах с deg <= 2)
- В H нет циклов нечетной длины (т. к. внутри цикла чередование по тому, из какого графа она пришла, но в конце получим два ребра из одного паросоча)
- Остаются пути четной длины, пути нечетной длины, циклы четной длины, тогда каждый из четных путей/циклов вносит поровну ребер в M и M', тогда существует хотя бы один путь нечетной длины, в котором ребер из M' больше
- Этот путь: M' -> M -> M' -> M -> ... -> M'
- Докажем, что этот путь являются увеличивающим относительно M: действительно, чередование типов ребер есть, причем первая и последняя вершины не насыщены паросочетанием (если насыщены, то в H не учли ребро), тогда нашли увеличивающий путь

20 Билет

Условие: *Характеристики графа: $\alpha(G), \alpha'(G), \beta(G), \beta'(G)$. Определения. Примеры. Неравенства.*

> **Определение:**
> Размер наибольшего паросочетания графа G обозначается как $\alpha'(G)$

> **Определение:**
> Вершиное покрытие графа G называется множество вершин V, такое, что каждому ребру G инцидентна хотя бы одна вершина из V. Размер наименьшего вершиного покрытия обозначается как $\beta(G)$

Лемма о слабой двойственности

Формулировка: *Для любого графа G справедливо:* $\alpha'(G) \leq \beta(G)$

- Очевидно, т. к. мы не можем покрыть одну вершину дважды паросочетанием

> **Определение:**
> Вершино независимым множеством называется множество в котором все вершины попарно независимыми. Размер наибольшего независимого множетсва обозначается как $\alpha(G)$

> **Определение:**
> Реберное покрытием графа называется множеством набор ребер L, который покрывает все вершины множества. Размер минимального реберного покрытия обозначается как $\beta'(G)$

Лемма о слабой двойственности (X2)

Формулировка: *Для любого графа G справедливо:* $\alpha(G) \leq \beta'(G)$

21 Билет

Условие: *Теорема Кенига-Эгервари. Теорема Холла.*

Алгоритм поиска наименьшего вершиного покрытия

- Запускаем алгоритм нахождения наибольшего паросочетания + ориентируем ребра по ходу (из M справа налево, не из M слева направо)

- Из каждой вершины, ненасыщенной паросочетанием левой доли начинаем обход

- L+ - левая доля, посещена хотя бы одним обходом, другие аналогично: L-, R+, R-
- L+ or R- - максимальное независимое множество
- L- or R+ - минимальное вершиное покрытие

Теорема Кенинга

Формулировка: *$L{+}\cup R-$ - максимальное независимое множество + по мощности равно размеру паросочетания*

- Очевидно ребер из L+ в R- и из R+ в L- нет
- Докажем, что нет ребер из R- в L+, если такое ребро есть, то это ребро из паросочетания (т. к. это ребро справа налево), тогда вершины насышены, но мы не могли попасть в L+, т. к. обход начинается из ненасыщенных вершин, т. е. попасть могли только из одной вершины R-, но она очевидно не посещена
- Таким образом доказали, что $L+\cup R-$ - независимое множество
- Уже знаем, что $|M| \leq \beta(G)$, тогда если докажем, что если $L+\cup R- \leq |M|$, то нашли максимальное независимое множество
- В L- только насыщенные вершины, в R+ тоже только насыщенные вершины (т. к. иначе легко найдем увеличивающий путь, т. к. идем по ребрам чередуясь), заметим, что для любого ребра паросочетания не больше 1 вершины лежит в $L+\cup R-$ (иначе было бы ребро R+->L-)
- Получили, что каждое ребро паросочетания приносит в $L+\cup R-$ не более 1 вершины, при этом других вершин в $L+\cup R-$ нет. Таким образом победа.