LaTeX Error: Invalid UTF-8 byte "9FSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.The document does not appear to be in UTF-8 encoding.Try adding as the first line of the fileor specify an encoding such as [latin1]inputencin the document preamble.Alternatively, save the file in UTF-8 using your editor or another tool1747

tcb@cnt@remark.17 LaTeX Error: Invalid UTF-8 byte "95See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.The document does not appear to be in UTF-8 encoding.Try adding as the first line of the fileor specify an encoding such as [latin1]inputencin the document preamble.Alternatively, save the file in UTF-8 using your editor or another tool1849

tcb@cnt@remark.18

Глава VII. Ряды.

1. Признак Коши с $\overline{\lim}$. Примеры.

Теорема 1 Признак Коши Пусть $a_n \geqslant 0$. Тогда:

1) Если $\exists q < 1$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant N$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2) Пусть $q_* := \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:
   - Если $q_* < 1$, ряд сходится
   - Если $q_* > 1$, ряд расходится (причём $a_n \not\to 0$)

Доказательство

1) Для $n \geqslant N$ имеем $a_n \leqslant q^n$. Ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} q^n$ сходится (геометрическая прогрессия с $q < 1$). По признаку сравнения $\sum a_n$ сходится.
2) - Пусть $q_* < 1$. Возьмём $q = \frac{q_*+1}{2} < 1$. По определению верхнего предела:
   $$\exists N \ \forall n \geqslant N : \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sup_{k \geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < q$$
   Сходимость следует из пункта 1.
   - Пусть $q_* > 1$. Тогда $\exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q_* > 1$, значит начиная с некоторого k имеем $a_{n_k} > 1$, поэтому $a_n \not\to 0$.

$\square$

Замечание 1 Случай $q_* = 1$ При $q_* = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} \to 1$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, при этом:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{n^{1/n}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/n}} \to 1$$

2. Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 2 Признак Даламбера Пусть $a_n \geqslant 0$ и $d_* := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует. Тогда:

- Если $d_* < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
- Если $d_* > 1$, то ряд расходится

Замечание 2 Пограничный случай При $d_* = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться (аналогично признаку Коши).

Доказательство

- Пусть $d_* < 1$. Возьмём $d := \frac{d_*+1}{2} < 1$. Тогда $\exists N$ такое, что для всех $n \geqslant N$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < d \Rightarrow a_{n+1} < da_n$$

  Начиная с некоторого n получаем $a_n < a_N d^{n-N}$. Сравнивая с геометрической прогрессией $\frac{a_N}{d_N} \sum d^n$, получаем сходимость.

- Пусть $d_* > 1$. Возьмём $d := \frac{d_*+1}{2} > 1$. Тогда $\exists N$ такое, что для всех $n \geqslant N$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

  Следовательно, a_n не стремится к нулю, и ряд расходится.

$\square$

Пример 1 Рассмотрим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ при $x > 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$$

Ряд сходится по признаку Даламбера.
По признаку Коши:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} \sim \frac{x}{n/e} \to 0 < 1$$

что также показывает сходимость.

Теорема 3 Связь признаков Коши и Даламбера Пусть $a_n > 0$. Если существует предел $d_* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d_*$$

Доказательство Применим теорему Штольца к $\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_n}{n}$:

$$\lim \frac{\ln a_n}{n} = \lim \left(\ln a_{n+1} - \ln a_n\right) = \lim \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln d_*$$

Следовательно, $\lim \sqrt[n]{a_n} = e^{\ln d_*} = d_*$. □

3. Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак. Сходимость и расходимость рядов $\sum \frac{1}{n^p}$.

Теорема 4 Связь сумм и интегралов Пусть $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ неотрицательна и монотонна. Тогда:

$$\left| \int_m^n f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k) \right| \leqslant \max\{f(m), f(n)\}$$

Доказательство Для монотонно убывающей функции:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_m^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$$

$$f(m) = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \sum_{k=m+1}^{n} f(x) \geqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)dx \geqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) - \sum_{k=m}^{n-1} f(k) = f(n)$$

(Геометрически: площадь ступенчатых фигур отличается от интеграла не более чем на крайние значения) □

Теорема 5 Интегральный признак сходимости Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ неотрицательна и монотонно убывает. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ сходится } \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ сходится}$$

Доказательство Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ и $F(y) = \int_1^y f(x)dx$. Из предыдущей теоремы:

$$|F(n) - S_n| \leqslant f(1)$$

Следовательно, $F(n)$ ограничены $\iff$ S_n ограничены. □

Пример 2

- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$:
  - Сходится при $p > 1$ (интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится)
  - Расходится при $p \leqslant 1$
- Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится, так как:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x\Big|_2^\infty = +\infty$$

Следствие 1 Признаки сравнения

- Если $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{C}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится
- Если $a_n \sim \frac{C}{n^p}$, то ряд сходится $\iff p > 1$

4. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

Теорема 6 Преобразование Абеля Для последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ справедливо:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Доказательство

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k =$$

$$= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

□

Теорема 7 Признак Дирихле Пусть:

i) Частичные суммы $\sum_{k=1}^n a_k$ ограничены

ii) b_n монотонна

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ сходится.

Доказательство Используя преобразование Абеля:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

- $A_n b_n \to 0$ (так как A_n ограничены, $b_n \to 0$)
- Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ сходится абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \to M|b_1|$$

□

Теорема 8 Признак Абеля Пусть:

i) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

ii) b_n монотонна

iii) b_n ограничена

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство Пусть $b = \lim b_n$, $b'_n = b_n - b$. Тогда:

- $\sum a_n$ сходится $\Rightarrow$ A_n ограничены
- b'_n монотонна и $b'_n \to 0$
- По признаку Дирихле $\sum a_n b'_n$ сходится
- Тогда $\sum a_n b_n = b \sum a_n + \sum a_n b'_n$ сходится

□

5. Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка).

Определение 1 Знакочередующийся ряд Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, где $b_n \geq 0$, называется *знакочередующимся*.

Теорема 9 Признак Лейбница Пусть $b_n \geq 0$ и монотонно убывает. Тогда:

- $\sum (-1)^n b_n$ сходится $\iff$ $b_n \to 0$
- При этом $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$, где S - сумма ряда

Доказательство

- $S_{2n+2} = S_{2n} + b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq S_{2n}$ (возрастает)
- $S_{2n+1} = S_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ (убывает)
- Вложенные отрезки $[S_{2n}, S_{2n+1}]$ стягиваются к S

$\square$

Пример 3 Ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =) = \ln 2$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n =$$
$$= \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1) \to \ln 2$$

Перестановка членов:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \to \frac{\ln 2}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) = \frac{\ln 2}{2}$$

Пример 4 Обобщенный ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \begin{cases} \text{сходится при } p > 0 \\ \text{расходится при } p \leq 0 \end{cases}$$

6. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.

Определение 2 Перестановка ряда Пусть $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 10 Свойства перестановок рядов

i) Если $a_n \geqslant 0$, то для любой перестановки ϕ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ii) Если ряд сходится абсолютно, то для любой перестановки ϕ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Доказательство

i) Для частичных сумм:

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} \leqslant S_{\max\{\phi(1),\dots,\phi(n)\}} \leqslant S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Аналогично $S \leqslant \liminf S'_n$, следовательно $\lim S'_n = S$.

ii) Разложим на положительную и отрицательную части:

$$(a_n)_+ = \max(a_n, 0), \quad (a_n)_- = \max(-a_n, 0)$$

- $0 \leqslant (a_n)_\pm \leqslant |a_n| \Rightarrow$ ряды $\sum (a_n)_+$ и $\sum (a_n)_-$ сходятся
- По пункту (i) их перестановки сходятся к тем же суммам
- Тогда:

$$\sum a_{\phi(n)} = \sum (a_{\phi(n)})_+ - \sum (a_{\phi(n)})_- = \sum (a_n)_+ - \sum (a_n)_- = \sum a_n$$

$\square$

Замечание 3 Условная сходимость Если ряд сходится условно, то:

$$\sum (a_n)_+ = +\infty \quad \text{и} \quad \sum (a_n)_- = +\infty$$

Доказательство Предположим $\sum (a_n)_+ < \infty$. Тогда:

$$\sum (a_n)_- = \sum (a_n)_+ - \sum a_n < \infty$$

Следовательно, $\sum |a_n| = \sum (a_n)_+ + \sum (a_n)_- < \infty$ - противоречие с условной сходимостью. $\square$

7. Теорема Римана о перестановке ряда.

Теорема 11 Теорема Римана о перестановке Пусть ряд $\sum a_n$ сходится условно. Тогда:

i) Для любого $s \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка σ такая, что $\sum a_{\sigma(n)} = s$

ii) Существует перестановка, для которой ряд не имеет суммы

Доказательство Разобьём последовательность на положительные и отрицательные члены:

- b_n - положительные члены (a_n^+), c_n - модули отрицательных (a_n^-)
- $\sum b_n = +\infty$, $\sum c_n = +\infty$ (иначе ряд сходился бы абсолютно)
- $b_n \to 0$, $c_n \to 0$ (так как $a_n \to 0$)

Случай $s \in \mathbb{R}$:

1. Берём $b_1 + b_2 + \dots$ пока не превысим s
2. Затем добавляем $-c_1 - c_2 - \dots$ пока не станет меньше s
3. Повторяем процесс

Оценка остатка:

$$|S_{2k-1} - s| \leq b_{n_k} \to 0, \quad |S_{2k} - s| \leq c_{m_k} \to 0$$

Случай $s = +\infty$:

- Берём b-члены до суммы > 1, затем один c-член
- Затем b-члены до суммы > 2, и т.д.

Случай без суммы:

- Чередуем блоки b-членов до > 1 и c-членов до < -1

$\square$

8. Теорема Коши о произведении рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость уловия абсолютной сходимости.

Определение 3 Произведение рядов Для рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ их *произведением* называется ряд $\sum c_n$, где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

Теорема 12 Теорема Коши Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то:

- Их произведение абсолютно сходится
- Сумма произведения равна $(\sum a_n)(\sum b_n)$

Доказательство

- $\sum_{i,j} |a_i b_j| \leq (\sum |a_i|)(\sum |b_j|) < \infty \Rightarrow$ двойной ряд абсолютно сходится
- Сумма не зависит от порядка суммирования

- Рассмотрим квадратные частичные суммы:

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \to AB$$

□

Теорема 13 Теорема Мертенса Если $\sum a_n = A$ сходится абсолютно, $\sum b_n = B$ сходится, то их произведение сходится к AB.

Замечание 4 Контрпример Для условно сходящихся рядов теорема неверна. Пример:

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad |c_n| \geq 1$$

Ряд $\sum c_n$ расходится.

9. Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

Лемма 1 О средних Пусть $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$ - конечные пределы. Тогда:

$$\frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} \to xy$$

Доказательство **Случай 1:** $y = 0$
Пусть $|x_n| \leq M$, $|y_n| \leq M$. Для $\varepsilon > 0$ найдём N такое, что $|y_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Тогда:

$$\left| \frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} \right| \leq \frac{(n - N + 1)\varepsilon M + (N - 1)M^2}{n} < \varepsilon M + \varepsilon$$

Случай 2: $y_n \equiv y$

$$\frac{x_1 y + \cdots + x_n y}{n} = y \cdot \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to xy$$

Общий случай:
Представим $y_n = y + y_n'$, где $y_n' \to 0$. Применяя первые два случая:

$$\frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} = y \cdot \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_1 y_n' + \cdots + x_n y_1'}{n} \to xy + 0$$

□

Теорема 14 Теорема Абеля Если $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ и $\sum c_n = C$, где $c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$, то $AB = C$.

Доказательство Обозначим частичные суммы:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

По лемме:

$$\frac{A_1 B_n + \dots + A_n B_1}{n} \to AB$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{A_1 B_n + \dots + A_n B_1}{n} = \frac{nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n}{n} = \frac{C_1 + \dots + C_n}{n} \to C$$

□

10. Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

Определение 4 Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называется *бесконечным произведением*, $P_n = x_1 \cdots x_n$ - частичные произведения. Если $\exists \lim P_n = P \neq 0$, то произведение сходится к P.

Пример 5 Примеры бесконечных произведений

i) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

ii) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$

$$P_n = \frac{(2n+1)((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2} \to \frac{2}{\pi}$$

Теорема 15 Свойства бесконечных произведений

i) Конечное число начальных множителей не влияет на сходимость

ii) Если $\prod x_n$ сходится, то $\lim x_n = 1$

iii) У сходящегося произведения все сомножители с некоторого места положительны

iv) Для $x_n > 0$: $\prod x_n$ сходится $\iff$ сходится $\sum \ln x_n$, при этом $P = e^L$, где L - сумма ряда

Доказательство

2. $x_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$

4. $\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln x_k \to L \Rightarrow P_n \to e^L$

$\square$

11. Произведение $\prod \frac{p_n}{p_n - 1}$ и ряд $\sum \frac{1}{p_n}$.

Теорема 16 О расходимости произведения Для последовательности простых чисел p_n:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{p_k - 1} = +\infty$$

Более того, выполняется оценка:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_k - 1} \geq H_n \quad \text{(n-ое гармоническое число)}$$

Доказательство Рассмотрим оценку снизу:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - 1/p_k} > \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = H_n \to \infty$$

$\square$

Теорема 17 О расходимости ряда обратных простых Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ расходится. Более того:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \geq \ln \ln n - 1$$

Доказательство Используя предыдущую теорему:

$$\sum_{k=1}^{n} -\ln(1 - 1/p_k) \geq \ln H_n \geq \ln \ln n$$

С другой стороны:

$$-\ln(1 - 1/p_k) \leq \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \geq \sum_{k=1}^{n} -\ln(1 - 1/p_k) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^2} \geq \ln \ln n - 1$$

$\square$

12. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

Определение 5 Сходимость последовательностей функций Пусть $f, f_n : E \to \mathbb{R}$:

- $f_n \to f$ *поточечно* на E, если $\forall x \in E \lim f_n(x) = f(x)$
- $f_n \rightrightarrows f$ *равномерно* на E, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Пример 6 Различие типов сходимости $f_n(x) = x^n$ на $E = (0, 1)$:

- $f_n \to 0$ поточечно
- $f_n \not\rightrightarrows 0$, так как $\sup |f_n(x)| = 1 \nrightarrow 0$

Теорема 18 Критерий равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

Доказательство

$\Rightarrow$: Из определения $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : \sup |f_n - f| \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$: Если $\sup |f_n - f| \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n - f| < \varepsilon$

$\square$

Следствие 2 Следствия

i) Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \to 0$, то $f_n \rightrightarrows f$

ii) Если $\exists x_n \in E : |f_n(x_n) - f(x_n)| \nrightarrow 0$, то сходимость неравномерна

Определение 6 Равномерная ограниченность Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно ограниченной*, если $\exists M\ \forall n\ \forall x \in E : |f_n(x)| \leq M$

Теорема 19 Об ограниченной последовательности Если f_n равномерно ограничены и $g_n \rightrightarrows 0$, то $f_n g_n \rightrightarrows 0$

Доказательство

$$\sup |f_n g_n| \leq M \sup |g_n| \to 0$$

$\square$

13. Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 20 Критерий Коши для равномерной сходимости Для последовательности функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

i) f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство **(i) ⇒ (ii):** Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на E. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Для $n, m \geq N$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

(ii) ⇒ (i):

- Для каждого $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаментальна и имеет предел $f(x) = \lim f_n(x)$
- Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ получаем:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall x \in E$$

  что означает $f_n \rightrightarrows f$ на E

□

14. Пространство $\ell^\infty(E)$ и его полнота.

Определение 7 Пространство ограниченных функций

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ ограничена}\}$$

с нормой $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$

Определение 8 Пространство непрерывных функций Для компакта K:

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}\} \subset \ell^\infty(K)$$

с нормой $\|f\|_{C(K)} := \max_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_\infty$

Теорема 21 Полнота $\ell^\infty(E)$ Пространство $\ell^\infty(E)$ является полным пространством.

Доказательство Пусть f_n - фундаментальная последовательность в $\ell^\infty(E)$:

- По критерию Коши (теорема 20) $\exists f : E \to \mathbb{R}$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$
- Ограниченность f:

$$\exists N \ \forall n \geq N \ \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < 1$$

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + 1 \leq \|f_N\|_\infty + 1 < \infty$$

- Сходимость по норме: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

□

15. Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса-Зайделя. Пространство $C(K)$ и его полнота.

Теорема 22 О непрерывности предела Пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, причем:

- f_n непрерывны в точке a
- $f_n \rightrightarrows f$ на E

Тогда f непрерывна в точке a.

Доказательство Для $\varepsilon > 0$ выберем:

- N такое, что $\forall n \geq N \ \forall x \in E$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$
- $\delta > 0$ такое, что $|x - a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$

Тогда для $|x - a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon$$

□

Теорема 23 Стокса-Зайделя Если $f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E, то $f \in C(E)$.

Следствие 3 Полнота $C(K)$ $C(K)$ - замкнутое подпространство $\ell^\infty(K)$, а значит полное пространство.

Доказательство

- $C(K) \subset \ell^\infty(K)$ - замкнуто по теореме Стокса-Зайделя
- $\ell^\infty(K)$ полно (теорема 14)
- Замкнутое подпространство полного пространства полно

□

Замечание 5 Пример Поточечная сходимость не сохраняет непрерывность:

$$f_n(x) = x^n \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

16. Поточечная и равномерная сходимость рядов. Критерий Коши. Остаток ряда. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Определение 9 Сходимость рядов Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $u_k : E \to \mathbb{R}$:

- *Поточечная сходимость*: $\forall x \in E$ числовой ряд сходится
- *Равномерная сходимость*: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \rightrightarrows S(x)$
- *Остаток*: $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$

Теорема 24 Критерий равномерной сходимости $\sum u_k(x)$ сходится равномерно $\iff$ $r_n \rightrightarrows 0$

Доказательство $S_n \rightrightarrows S$ на E, т.е. $S_n - S \rightrightarrows 0$. $\square$

Теорема 25 Необходимое условие Если $\sum u_k(x)$ сходится равномерно, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство $u_n = S_n - S_{n-1} \rightrightarrows S - S = 0$ $\square$

Теорема 26 Критерий Коши $\sum u_k(x)$ равномерно сходится $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \geq N\ \forall x \in E : \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Ряд равномерно сходится на $E \iff$ п-ть S_n равномерно сходится на $E \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \geq N\ \forall x \in E : |\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)| = |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ $\square$

Пример 7 Контрпример Пусть $u_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \in [1/(n+1), 1/n) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

- При $x_n = 1/(n+1)$: $\sum u_n(x_n) = \sum 1/n$ расходится
- Но $\sum u_n(x)$ равномерно сходится ($0 \leq r_n(x) \leq 1/n$)

17. Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствия. Примеры.

Теорема 27 Признак сравнения Пусть $|u_n(x)| \le \delta_n(x)$ для всех $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$. Если $\sum \delta_n(x)$ сходится равномерно на E, то $\sum u_n(x)$ также сходится равномерно на E.

Доказательство По критерию Коши для $\sum \delta_n(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > m \ge N\ \forall x \in E : \sum_{k=m+1}^{n} \delta_k(x) < \varepsilon$$

Тогда:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} \delta_k(x) < \varepsilon$$

Следовательно, $\sum u_k(x)$ удовлетворяет критерию Коши. $\square$

Следствие 4 Признак Вейерштрасса Если $|u_n(x)| \le a_n$ для всех $x \in E$ и $\sum a_n$ сходится, то $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на E.

Пример 8 Ряд $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится.

Замечание 6 Различие типов сходимости

- Абсолютная $\not\Rightarrow$ равномерная (пример: $\sum x^n$ на $(0, 1)$)
- Равномерная $\not\Rightarrow$ абсолютная (пример: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$)
- Возможна равномерная и абсолютная сходимость, но $\sum |u_n(x)|$ сходится неравномерно

Определение 10 Равномерная ограниченность Последовательность $f_n : E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что $|f_n(x)| \le M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

18. Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся последовательностей. Признаки Дирихле и Лейбница.

Теорема 28 Об умножении последовательностей Если g_n равномерно ограничена на E и $f_n \rightrightarrows 0$ на E, то $f_n g_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство Пусть $|g_n(x)| \le M$. Тогда:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) g_n(x)| \le M \sup_{x\in E} |f_n(x)| \to 0$$

$\square$

Теорема 29 Признак Дирихле Пусть:

i) $|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \le K$ для всех $x \in E$ и $n \in \mathbb{N}$

ii) $b_n \rightrightarrows 0$ на E

iii) Для каждого $x \in E$ последовательность $b_n(x)$ монотонна по n

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство Используем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

где $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Оба слагаемых равномерно сходятся:

- $A_n(x) b_n(x) \rightrightarrows 0$ (равномерно ограниченное на стремящееся к 0)
- $\sum |b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ сходится равномерно, так как:

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$$

$\square$

Теорема 30 Признак Лейбница Пусть:

i) $b_n(x) \ge 0$ и монотонно убывает по n для каждого $x \in E$

ii) $b_n \rightrightarrows 0$ на E

Тогда $\sum (-1)^n b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство Следует из признака Дирихле при $a_n(x) = (-1)^n$. $\square$

19. Признак Абеля. Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не равномерно абсолютно.

Теорема 31 Признак Абеля Пусть для функциональных последовательностей:

i) $\sum a_k(x)$ равномерно сходится на E

ii) $b_n(x)$ равномерно ограничены ($|b_n(x)| \leq M$)

iii) Для каждого $x \in E$ последовательность $b_n(x)$ монотонна по n

Тогда ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Доказательство

- $\alpha_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows 0$. $\alpha_n = A - A_n$, где $A(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_k + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = (A - \alpha_n)b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(A - \alpha_n)(b_k - b_{k+1}) =$$

$$= Ab_n - \alpha_n b_n + A\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(b_k - b_{k+1}) =$$

$$= Ab_1 - \alpha_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(b_k - b_{k+1})$$

- $\alpha_n b_n \rightrightarrows 0$, т.к. равномерно ограниченная на равномерно стремящуюся к 0.

- $$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k(x)||b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leqslant \varepsilon |\sum b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leqslant \varepsilon M$$

□

Пример 9 Разные типы сходимости Ряд $\sum(-1)^n \frac{x^n}{n}$ на $[0,1]$:

- Сходится равномерно (по признаку Лейбница)
- Сходится абсолютно при $x \in [0,1)$
- Не сходится равномерно абсолютно, так как $\sum \frac{x^n}{n}$ расходится равномерно на $[0,1]$

20. Признак Дини.

Теорема 32 Признак Дини Пусть:

- K - компактное пространство
- $u_n \in C(K)$, $u_n \geq 0$
- $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \in C(K)$

Тогда $\sum u_k(x)$ сходится равномерно на K.

Доказательство Рассмотрим остатки $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$:

- $r_n \geq 0$ и монотонно убывают по n для каждого x
- Предположим противное: $\exists \varepsilon > 0$ и $x_{n_k} \to x_0$ такие, что $r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$
- Из непрерывности: $r_m(x_0) \geq \varepsilon$ для всех m, что противоречит сходимости ряда в точке x_0

$\square$

21. Теоремы о перестановке пределов и перестановке предела и суммы.

Теорема 33 О перестановке пределов Пусть:

- $f_n, f : E \to \mathbb{R}$
- a - предельная точка E
- $f_n \rightrightarrows f$ на E
- $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n \in \mathbb{R}$ существует

Тогда:

i) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существуют и равны

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Доказательство

- По критерию Коши для равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

- Переходя к пределу при $x \to a$: $|b_n - b_m| \leq \varepsilon$ b_n фундаментальна
- Для $f(x)$:

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема 34 О перестановке предела и суммы Пусть:

- $u_n : E \to \mathbb{R}$
- a - предельная точка E
- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

- $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n \in \mathbb{R}$ существует

Тогда:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} u_n(x)$$

Доказательство Применяем предыдущую теорему к частичным суммам $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. $\square$

22. Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

Теорема 35 Об интегрировании Пусть $f_n \in C[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда:

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

Доказательство Оценим разность:

$$\left|\int_c^x f_n(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right| \le (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \to 0$$

$\square$

Следствие 5 Для рядов Если $u_n \in C[a,b]$ и $\sum u_n$ равномерно сходится, то:

$$\int_c^x \sum u_n(t)dt = \sum \int_c^x u_n(t)dt$$

Доказательство

$$\int_c^x S_n(x) = \int_c^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_c^x u_k(t)dt \rightrightarrows \int_c^x S(x) = \int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$\square$

Пример 10 Необходимость равномерности Рассмотрим $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0,1]$:

- $f_n \to 0$ поточечно
- $\int_0^1 f_n(x)dx \to \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim f_n(x)dx$
- Сходимость неравномерна: $f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \not\to 0$

23. Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

Теорема 36 О дифференцировании Пусть:

- $f_n \in C^1[a,b]$
- $f_n(c) \to A \in \mathbb{R}$ в некоторой точке $c \in [a,b]$
- $f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$

Тогда:

i) $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, где $f(x) = A + \int_c^x g(t)dt$

ii) $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$

Доказательство

$$\int_c^x g(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) = f(x) - A$$

$$\Rightarrow f(x) = A + \int_c^x g(t)dt \Rightarrow f \in C^1[a,b], f'(x) = g(x)$$

(по теореме Барроу).

$$\int_c^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt, f_n(c) \rightrightarrows A$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt + f_n(c) \rightrightarrows \int_c^x g(t)dt + A = f(x)$$

□

Следствие 6 Для рядов Если:

- $u_n \in C^1[a,b]$
- $\sum u_n'$ равномерно сходится
- $\sum u_n(c)$ сходится

Тогда $\sum u_n$ равномерно сходится к C^1-функции и:

$$\left(\sum u_n\right)' = \sum u_n'$$

Доказательство

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \in C^1[a,b], f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f, f' = g : (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

□

Пример 11 Ряд $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$:

- Равномерно сходится по Вейерштрассу
- Но $\sum \frac{\cos nx}{n}$ расходится
- Равномерной сходимости $\sum u_n$ недостаточно

24. Степенные ряды. Теорема о сходимости ряда при меньших аргументах. Радиус и круг сходимости. Формула Коши–Адамара. Примеры.

Определение 11 Степенной ряд Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 37 О сходимости Если ряд сходится при $z = z_1$, то абсолютно сходится при $|z| < |z_1|$. Если расходится при $z = z_1$, то расходится при $|z| > |z_1|$.

Доказательство $\sum a_n z_0^n$ сходится $\Rightarrow a_n z_0^n \to 0$, значит $a_n z_0^n$ ограничены, тогда:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \leqslant M|z/z_0|^n$$

Последний ряд - геометрический, потому сходится, тогда изначальный сходится по признаку сравнения. □

Определение 12 Радиус сходимости $R := \sup\{|z| : \sum a_n z^n$ сходится$\}$. Круг $\{z : |z| < R\}$ - круг сходимости.

Теорема 38 Формула Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Доказательство Применяем признак Коши:

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|\, \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ряд сходится при $|z| < 1/\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$. □

Пример 12 Примеры

i) $\sum \frac{z^n}{n!}$: $R = \infty$

ii) $\sum n! z^n$: $R = 0$

iii) $\sum \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$ (сходится на границе)

iv) $\sum z^n$: $R = 1$ (расходится при $|z| = 1$)

25. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 39 О равномерной сходимости Пусть R - радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ и $0 < r < R$. Тогда ряд равномерно сходится в круге $\{|z| \leq r\}$.

Доказательство Используем признак Вейерштрасса:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \quad \text{и} \quad \sum |a_n| r^n \text{ сходится}$$

□

Следствие 7 Непрерывность суммы Сумма степенного ряда $f(z) = \sum a_n z^n$ непрерывна в круге сходимости $\{|z| < R\}$.

Доказательство $|z_0| < R$ - произвольная точка. Возьмём $r : |z_0| < r < R$, тогда ряд равномерно сходится в круге $|z| < r$, сумма ряда в этом круге непрерывна а значит и f непрерывна в z_0. □

Теорема 40 Абеля (о граничной точке) Если ряд $\sum a_n R^n$ сходится, то:

- Ряд равномерно сходится на $[0, R]$
- $\lim\limits_{x \to R-} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n$

Доказательство Применяем признак Абеля:

$$\sum a_n x^n = \sum (a_n R^n) \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

где $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает и равномерно ограничено.

Из равномерной сходимости следует непрерывность $f(x) := \sum a_n x^n$ на $[0, R]$ $\Rightarrow$ $\sum a_n R^n = f(R) = \lim\limits_{x \to R-} f(x) = \lim\limits_{x \to R-} \sum a_n x^n$ □

26. Почленное интегрирование суммы степенного ряда (с леммой).

Лемма 2 О верхних пределах Пусть $x_n \to A > 0$ и $\overline{\lim}\, y_n = B$. Тогда:

$$\overline{\lim}\, x_n y_n = AB$$

Доказательство Рассмотрим подпоследовательности:

$$x_{n_k} y_{n_k} \to C \Rightarrow y_{n_k} \to C/A \le B \Rightarrow C \le AB$$

$$y_{n_j} \to B \Rightarrow x_{n_j} y_{n_j} \to AB \Rightarrow AB \le C$$

□

Следствие 8 О радиусах сходимости Ряды $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ и $\sum \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство Так как $\sqrt[n]{n} \to 1$ и $\sqrt[n]{1/(n+1)} \to 1$, то по формуле Коши-Адамара радиусы совпадают. □

Теорема 41 О почленном интегрировании Пусть $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$ с радиусом сходимости R. Тогда для $|x - x_0| < R$:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

и этот ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно, поэтому интегрирование почленно законно. □

27. Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

Определение 13 Комплексная дифференцируемость Функция $f : E \to \mathbb{C}$, где $E \subset \mathbb{C}$, называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 \in \mathrm{Int} E$, если существует $k \in \mathbb{C}$ такое, что:

$$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0) \quad \text{при} \quad z \to z_0$$

Замечание 7 Свойства

i) $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ - производная $f'(z_0)$

ii) Существование производной эквивалентно дифференцируемости

Теорема 42 Дифференцирование степенного ряда Пусть R - радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Тогда:

- f бесконечно дифференцируема в круге $|z - z_0| < R$
- Производные вычисляются по формуле:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Доказательство Для $m = 1$ (далее по индукции):

$$\begin{aligned} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w-z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}) \\ \lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \end{aligned}$$

Оценка $|a_n(\cdots)| \le |a_n|nr^{n-1}$ доказывает равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. □

28. Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 43 Единственность разложения Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z - z_0| < R$, то:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Доказательство Дифференцируя m раз и подставляя $z = z_0$:

$$f^{(m)}(z_0) = m!a_m \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

□

Определение 14 Ряд Тейлора Для бесконечно дифференцируемой f в z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке z_0.

Определение 15 Аналитическая функция Функция f называется *аналитической* в z_0, если существует окрестность, где f совпадает со своим рядом Тейлора.

Пример 13 Неаналитическая функция Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

имеет:

- $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}$, P_n - многочлен.

$$f^{(n+1)}(x) = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} - 3nP_n(x)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} + P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} \cdot 2/x^3 =$$

$$= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}(x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x) + 2P_n(x))$$

- $$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-9} = \lim_{y\to 0} P_n(1/y)y^{3n+1}e^{-y^2} = 0$$

- Следовательно, все коэффициенты в нуле равны нулю и у него нулевая сумма, $f(x) \neq \sum$ Тейлора при $x \neq 0$.

Замечание 8 Класс аналитических функций строго уже класса бесконечно дифференцируемых функций.

29. Определение e^z, $\sin z$, $\cos z$. Ряд Тейлора для $\ln(1+x)$.

Определение 16 Экспонента и тригонометрические функции Для комплексных $z \in \mathbb{C}$ определяем:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Замечание 9 Формула Эйлера Справедливо тождество:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Теорема 44 Ряд Тейлора для логарифма Для $x \in (-1, 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Доказательство Интегрируем геометрический ряд:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

□

30. Ряды Тейлора для $\arctan x$, $(1+x)^p$ и $\arcsin x$.

Теорема 45 Ряд для арктангенса Для $x \in (-1, 1)$:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Доказательство Аналогично логарифму:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

Теорема 46 Биномиальный ряд Для $x \in (-1, 1)$ и $p \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n$$

Доказательство Используем формулу Тейлора с остаточным членом:

$$(1+x)^p = T_n(x) + R_n(x), \text{ доказать: } T_n(x) \to (1+x)^p, R_n(x) \to 0$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} p(p-1)\dots(p-n) dt = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

где $T_n(x)$ - частичная сумма, а остаток оценивается как:

$$|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}| = \frac{\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{p-n-2}(p-n-1)dt}{(n+1)\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt} =$$

$$= \frac{|p-n-1|}{n+1}\frac{|\int_0^x (x-t)^{n+1}(1+t)^{p-n-2}dt|}{|\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}dt|} = \frac{|p-n-1|}{n+1}\frac{\int_0^x |x-t|^{n+1}(1+t)^{p-n-2}dt}{\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{p-n-1}dt} =$$

$$= \frac{|p-n-1|}{n+1}\frac{\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{p-n-1}\frac{|x-t|}{1+t}dt}{\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{p-n-1}dt} \leqslant \frac{|p-n-1|}{n+1}|x| \to |x|$$

□

Теорема 47 Ряд для арксинуса Для $x \in (-1, 1)$:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

Доказательство Получается интегрированием ряда для $(1-t^2)^{-1/2}$:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} t^{2n} dt$$

□

Глава VIII. Функции нескольких переменных.

1. Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент. Примеры дифференцируемых отображений. Дифференцируемость координатных функций.

Определение 17 Дифференцируемость функций нескольких переменных
Функция $f : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \operatorname{int} E$.
f - *дифференцируема* в точке a, если существует $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ линейный оператор такой, что:

$$f(a+h) = f(a) + Th + o(||h||)$$

при $h \to 0$.
Дифференциалом f в a называется T из определения и обозначается $d_a f$.

Замечание 10 Единственность дифференциала Если такое T существует, то оно определно однозначно.

Доказательство Зафиксируем $h \neq 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(th) + o(||th||)}{t} = \lim_{t\to 0} (Th + o(1)) = Th$$

□

Определение 18 Матрица Якоби функции f в точке a - матрица оператора T, обозначается $f'(a)$.

Теорема 48 Непрерывность дифференцируемой функции. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a.

Доказательство

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}(f(a) + Th + o(||h||)) = f(a) + T(0) + 0 = f(a)$$

$\square$

Определение 19 Важный частный случай $n = 1$: $f : E \to \mathbb{R}$. Тода f дифференцируема $\iff$ найдётся $v \in \mathbb{R}^m$, такой что:

$$f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + o(||h||)$$

при $h \to 0$. Этот вектор v - *градиент* функции f в точке a, обозначается $\boldsymbol{\nabla} f(a)$ $\nabla f(a)$.

Пример 14 Дифференцируемые отображения

1. Постоянное отображение f дифференцируемо во всех точках, $T = 0$.
2. Линейное отображение $f(a+h) = f(a) + f(h)$, матрица Якоби $T = f$ - матрица самого отображения.

Определение 20 Координатная функция $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}$, $f_1, \dots, f_m : E \to \mathbb{R}$.

Теорема 49 Дифференцируемость координатных функций f дифференцируемо в $a \iff f_j$ дифференцируемо в a $\quad \forall j = 1, \dots, m$.

Доказательство

- "$\Rightarrow$" $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)||h||$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Запишем это покоординатно:
$$f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h)||h||$$
где T_j, α_j - j-е координаты T и α. Надо понять, что $\alpha_j(h) \to 0$ при $h \to 0$:
$$|\alpha_j(h)| = \sqrt{a_j^2(h)} \leqslant \sqrt{\sum \alpha_j^2(h)} = ||\alpha(h)|| \to 0$$
- "$\Leftarrow$" $f_j(a+h) = f_j(a) + T_j h + \alpha_j(h)||h||$, $\alpha(h) \to 0$, собираем из них:
$$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)||h||$$

$$||\alpha(h)|| = \sqrt{\sum a_j^2(h)} \leqslant \sum |a_j(h)| \to 0$$

□

Следствие 9 Элементы матрицы Якоби - градиенты координатных функций: $f'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$

32. Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента. Частные производные. Элементы матрицы Якоби.

Определение 21 Производная по направлению $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} E$, $||h|| = 1$, $h \in \mathbb{R}^m$.

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Замечание 11 $g(t) := f(a + th)$, Тогда $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = g'(0)$.

Теорема 50 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} E$, f дифференцируема в точке a, $||h|| = 1$. Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Следствие 10 Экстремальное свойство градиента. $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} E$, f дифф. в a, $\nabla f(a) \neq 0$. Тогда $\forall h \in R^m$, $||h|| = 1$:

$$|\frac{\partial d}{\partial h}(a)| \leqslant ||\nabla f(a)||$$

и равенство достигается $\iff h = \pm \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.

Доказательство Используем наревенство Коши-Буняковского:

$$|\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle \leqslant ||h|| ||\nabla f(a)|| = ||\nabla f(a)||$$

□

Определение 22 Частная производная. $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 на k-й позиции. Тогда:

$$f'_{x_k}, \partial_k f, \frac{\partial f}{\partial x_k}, \mathcal{D}_k f = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$$

Пример 15 $f(x,y) = x^y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = x^y \ln x$$

Следствие 11

1. $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \langle \nabla f(a), e_k \rangle \text{ т.е. } \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

2. $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} E$, f дифф. в a. Тогда:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

33. Линейность дифференциала. Дифференциал композиции.

Теорема 51 Линейность дифференцируемости.

- $f, g : E \to \mathbb{R}^n$.
- $a \in \operatorname{int} E$.
- f, g дифф в a.

Тогда $f+g$ и λf дифф. в a и:

$$d_a(f+g) = d_a f + d_a \quad \{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\}$$

$$d_a(\lambda f) = \lambda d_a f \quad \{(\lambda f(a))' = \lambda f'(a)\}$$

Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

$$g(a+h) = d_a g(h) + o(||h||)$$

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(||h||)$$

правда из линейности дифференциала. □

Теорема 52 Дифференцируемость композиции.

- $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : E \to \mathbb{R}^l$.
- $f(D) \subset E$.
- $a \in \operatorname{int} D$, $f(a) \in \operatorname{int} E$.

- f дифф. в a, g дифф. в $f(a)$.

Тогда $g \cdot f$ дифф. в a и:

$$d_a(g \cdot f) = d_{f(a)}g \cdot d_a f \quad \{(g \cdot f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\}$$

Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \quad \alpha(h) \to 0 \quad b := f(a)$$
$$g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| \quad \beta(k) \to 0$$

Возьмём $k = d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \to 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(a+h) =& b+k \\ g(f(a+h)) =& g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| \\ =& g(f(a)) + d_a g(d_a f(h)) + ||d||d_b f(\alpha(h)) + \beta(k)||k|| \end{aligned}$$

$$d_b f(\alpha(h)) \to d_b f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad ||h||d_b f(\alpha(h)) = o(||h||)$$
$$||k|| = ||d_a f(h) + \alpha(h)||h|||| \leqslant$$
$$||d_a f(h)|| + ||h||||\alpha(h)|| \leqslant ||d_a f||||h|| + ||\alpha(h)||||h|| \quad \Rightarrow \quad \beta(k)||k|| = o(||k)$$

$\square$

34. Две теоремы о дифференцируемости произведения функций.

Теорема 53 Дифференцируемость произведения I.

- $E \subset \mathbb{R}^n$.
- $f : E \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$.
- $a \in \operatorname{int} E$.
- f и λ дифференцируемы в a.

Тогда λf дифференцируема в a и:

$$d_a(\lambda f)(h) = d_a\lambda(h)f(h) + \lambda(a)d_a f(h)$$

Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \quad \alpha(h) \to 0$$
$$\lambda(a+h) = \lambda(a) + d_a\lambda(h) + \beta(h)||h|| \quad \beta(h) \to 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda(a+h)f(a+h) = \\ =& \lambda(a)f(a) + \lambda(a)d_a f(h) + \lambda(h)\alpha(h)||h|| + \\ +& d_a\lambda(h)f(a) + d_a\lambda(h)d_a f(h) + d_a\lambda(h)\alpha(h)||h|| + \\ +& \beta(h)||h||f(a) + \beta(h)||h||d_a f(h) + \beta(h)\alpha(h)||h||^2 \end{aligned}$$

$$\beta(h)||h||f(a)+\lambda(a)\alpha(h)||h||+\alpha(h)\beta(h)||h||^2=o(||h||)$$
$$d_a\lambda(h)\alpha(h)||h||\to 0 \quad \beta(h)||h||d_af(h)\to 0$$
$$||d_a\lambda(h)\cdot d_af(h)||=|d_a\lambda(h)|\cdot||d_af(h)||\leqslant||d_a\lambda||\cdot||h||\cdot||d_af||\cdot||h||=o(||h||)$$

□

Теорема 54 Дифференцируемость произведения II.

- $E\subset\mathbb{R}^n$, $f,g:E\to\mathbb{R}^m$
- $a\in\operatorname{int}E$.
- f и g дифференцируемы в a.

Тогда $\langle f,g\rangle$ дифф. в a и:

$$d_a\langle f,g\rangle(h)=\langle d_af(h),g(a)\rangle+\langle f(a),d_ag(h)\rangle$$

Доказательство

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^m f_kg_k \quad f_kg_k \text{ дифф. в } a \text{ и } d_a(f_kg_k)(h)=d_af_k(h)g_k(a)+f_k(a)d_ag_k(h)$$

и просуммируем. □

35. Связь частных производных и дифференцируемости. Пример.

Теорема 55 Существование производной.

- $f:E\to\mathbb{R}$.
- $a\in\operatorname{int}E$.
- Все частные производные f существуют в окрестности a и непрерывны в точке a.

Тогда f дифференцируема в a.

Доказательство Надо доказать, что $f(a+h)=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+o(||h||)$. $R(h):=f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$, нужно $R(h)=o(||h||)$ при $h\to 0$. Заведём: $b_k:=\begin{pmatrix}a_1+h_1\\a_2+h_2\\\dots\\a_k+h_k\\a_{k+1}\\\dots\end{pmatrix}$, $F_k(t):=f(b_{k-1}+th_ke_k)$. $F_k(0)=f(b_{k-1})$, $F_k(1)=f(b_k)$. $b_n=a+h$, $b_0=a$, $f(a+h)-f(a)=F_n(1)-F_1(0)=\sum_{k=1}^n(F_k(1)-F_k(0))=\sum_{k=1}^nF_k'(\theta_k)$: пользуемся теоремой Лагранжа, $\theta_k\in(0,1)$, $c_k:=b_{k-1}+\theta_kh_ke_k$.

$$F_k(t) = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + th_k, a_{k+1}, \dots) \Rightarrow F_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(b_{k-1} + th_k e_k) h_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k'(\theta_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$|R(h)| = |\sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)) h_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} ((\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a))^2} \cdot \sqrt{\sum h_k^2} = \sqrt{\dots} \cdot ||h||$$

Нужно, чтобы сумма стремилась к нулю:

$$c_k \to a, \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ непр в } a \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} ((\frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a))^2 \to 0$$

$\square$

Замечание 12

1. $f(a + h_1 e_1) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + o(h_1)$, то есть можем отказаться от одной непрерывности.

2. Дифференцируемость в точке не даёт даже существования частных производных в окрестности:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 : x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q} \\ 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = O(x^2 + y^2) = f(0, 0) + 0 + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

То есть f дифференцируема в нуле, но непрерывности нет ни в какой точке, и нет частных производных нигде кроме нуля.

36. Непрерывная дифференцируемость. Определение и эквивалентная характеристика. Свойства непрерывно дифференцируемых отображений.

Определение 23 Непрерывная дифференцируемость f непр. дифф. в a, если f дифф. в окрестности a и $||d_x f - d_a f|| \to 0$ при $x \to a$.

Теорема 56 О непрерывной дифференцируемости

- $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$
- $a \in \operatorname{int} E$.

Тогда: f непр. дифф. в $a \iff f$ дифф. в окрестности a и все частные производные всех координат непрерывны в точке a.

Доказательство

- "$\Leftarrow$"
$$||d_x f - d_a f||^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a))^2 \to 0$$
- "$\Rightarrow$"
$$|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)| \leqslant ||d_x f(e_k) - d_a f(e_k)|| = ||(d_x f - d_a f)(e_k)|| \leqslant ||d_x f - d_a f|| \cdot ||e_k||$$

$\square$

Теорема 57 Непрерывная дифференцируемость сохраняется при линейной комбинации, скалярного произведения, композиции.

37. Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$.

Определение 24 Частные производные высших порядков.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} := \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i} \quad f''_{x_j x_i} = (f'_{x_j})'_{x_i}$$

Если существует $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$, то можно рассматривать $\dfrac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}$

Всего частных производных порядка r будет r^r.

Пример 16 $f(x,y) = x^y$, $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$.

$$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} \quad f''_{yy} = x^y \ln^2 x$$
$$f''_{xy} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \quad f''_{yx} = (x^y \ln x)' = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} = f''_{xy}$$

Теорема 58

- $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathbb{R}^2$.
- $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} E$.
- Частные производные f'_x, f'_y и f''_{xy} существуют в окрестности (x_0, y_0)
- f''_{xy} непр. в (x_0, y_0).

Тогда существует f''_{yx} и $f''_{xy} = f''_{yx}$

Доказательство

$$\phi(s) := f(s, y_0 + k) - f(s, y_0) \quad \psi(t) := f'_x(x_0 + \theta h_1, t)$$

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \cdot \phi'(x_0 + \theta h) = h(f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)) =$$
$$= h(\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)) = hk\psi'(y_0 + \theta' k) = hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta' k) \to f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Тогда:

$$\left|\frac{1}{k} \cdot \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} - f''_{xy}(x_0, y_0)\right| < \varepsilon \quad \text{при } h, k \to 0$$
$$\frac{\phi(x_0)}{k} = \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \to f'_y(x_0, y_0)$$
$$\frac{\phi(x_0 + h)}{k} = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \to$$

Тогда:

$$\left|\frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} - f''_{xy}(x_0, y_0)\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} \to f''_{xy}(x_0, y_0)$$

□

38. Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций. Пример, показывающий необходимость непрерывности производных.

Пример 17 Несовпадение при порядке дифференцирования.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \text{ при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \end{cases}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y - xy^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$
$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h^5}{h^4} = -1$$
$$f''_{yx}(0, 0) = 1 \neq f''_{yx}(0, 0)$$

Определение 25 r-гладкие функции $f : D \to \mathbb{R}$, D - открытое, тогда f r раз дифференцируемая (r-гладкая), если все её частные производные до r-го порядка включительно существуют и непрерывны. Обозначается $C^r(D)$.

Теорема 59

- D - открытое $\subset \mathbb{R}^n$
- $f : D \to \mathbb{R}$.
- $f \in C^r(D)$
- $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_r)$.

Тогда

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}$$

Доказательство Любая перестановка может быть получена последовательным выполнением транспозиций, так что достаточно доказать только для транспозиций: $(j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, j_k, j_{k+2}, \dots j_r)$.

$$g(x) := \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{j_{k+2} \dots \partial j_r}}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k+1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}} \Longrightarrow \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}}} (\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k+1}}}) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k-1}}} (\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_{k+1}} \partial x_{j_k}})$$

□

39. Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

Определение 26 Мультииндексы

- $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - неотрицательные целые числа.
- $k! = k_1! k_2! \dots k_n!$. $h^k = h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}$.
- *Высота мультииндекса* $|k| := k_1 + \dots + k_n$.
- Производная по мультииндексу:

$$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}$$

- *Полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент* - количество способов покрасить $|k|$ предметов в n цветов так, чтобы k_1 было 1-го цвета, k_2 2-го и т.д. (обобщение биномиального коэффициента):

$$\binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{|k|!}{k_1! \dots k_n!} = \frac{|k|!}{k!}$$

Лемма 3 О производной композиции гладкой и линейной функций

- $f \in C^r(D) : D \to \mathbb{R}$
- $D \subset R^n$ - открыто.
- $[x, x+h] \subset D$.
- $F(t) := f(x+th) \quad F : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Тогда $F \in C^r[0,1]$ и:

$$F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x+th) \cdot h^k$$

Доказательство

$$g : D \to \mathbb{R} \quad g \in C^1(D) \quad G(t) := g(x+th)$$

$$G'(t) = g'(x+th)(x+th)'_t = \begin{pmatrix} g'_{x_1}(x+th) & \dots & g'_{x_n}(x+th) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} g'_{x_j}(x+th) h_j$$

Тогда:

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_l=1}^{n} \sum_{i_{l-1}=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \dots \partial x_{i_1}}(x+th) h_{i_l} \dots h_{i_1} = (*)$$

$$k := (\#\{i : i_j = 1\}, \dots, \#\{i : i_j = n\})$$

$$(*) = \sum_{|k|=l} f^{(k)}(x+th) h^k \binom{l}{k_1, \dots, k_n} = \sum_{|k|=l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x+th) h^k$$

□

40. Многомерные формулы Тейлора с остатками в форме Лагранжа и Пеано.

Теорема 60 Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

- $D \in \mathbb{R}^n$ - открытое.
- $f \in C^{r+1}(D)$.
- $f : D \to \mathbb{R}$.
- $[a, x] \subset D$

Тогда существует $\theta \in (0, 1)$, $h := x - a$, т.ч.

$$f(x) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} h^k$$

Доказательство

$$F(t) := f(a + th) \quad \text{по ллемме} \quad F \in C^{r+1}[0, 1]$$

Тогда ф. Тейлора с остатком в форме лагранжа:

$$F(1) = \sum_{i=1}^{r} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} \cdot 1^i + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} = \quad \theta \in (0, 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} \sum_{|k|=i} \frac{i!}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k!} f^{(k)}(a + \theta h) h^k =$$

$$= \sum_{|k| \leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} h^k$$

□

Определение 27 Многочлен Тейлора.

$$\sum_{|k|=l} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Теорема 61 Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$D \in \mathbb{R}^n$ - открытое.

$f \in C^r(D)$.

$f : D \to \mathbb{R}$.

$a \in D$. Тогда при $x \to a$, $h := x - a$:

$$f(x) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(||x - a||^r)$$

Доказательство

$$f(x) = \sum_{|k|\leqslant r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}h^k =$$

$$= \sum_{|k|\leqslant r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!}h^k \text{ нужно } = o(||h||^r)$$

$$r = |k| \quad \frac{|h^k|}{||h||^r} = \frac{|h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n}|}{||h||^{k_1+\dots+k_n}} \leqslant 1$$

Тогда из непрерывности $f^{(k)}$:

$$\frac{f^{(k)}(a+\theta h) - f^{(k)}(a)}{k!} \to 0 \text{ при } h \to 0$$

□

41. Теорема Банаха о сжатии. Следствие.

Определение 28 Сжатие.

- $\lambda \in (0, 1)$.
- (X, ρ) - метрическое пространство.
- $f : X \to X$.
- $\forall x \in X : \rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$.

Тогда f - сжатие.

Замечание 13 Непрерывность сжатия. $\delta = \varepsilon$ подойдёт.

Теорема 62 Банаха о сжатии.

- (X, ρ) - полное метрическое пространство.
- $f : X \to X$ - сжатие с коэфф. $\lambda \in (0, 1)$.

Тогда $\exists! x : f(x) = x$.

Доказательство Возьмём произвольное $x_0 \in X$ и положим $x_{n+1} = f(x_n)$. покажем, что она фундаментальна:

$$\rho(x_{n+k}, x_n) = \rho(f(x_{n+k-1}), f(x_{n-1})) \leqslant \lambda\rho(x_{n+k-1}, x_{n-1}) \leqslant \dots \leqslant \lambda^n \rho(x_k, x_0)$$

Неравенство треугольника:

$$\rho(x_k, x_0) \leqslant \rho(x_k, x_{k-1}) + \dots + \rho(x_1, x_0) \leqslant \rho(x_1, x_0)(1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-1}) < \frac{\rho(x_0, x_1)}{1 - \lambda}$$

$$\lambda^n\rho(x_k, x_0) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0, x_1)$$

То есть x_n - фундаментальная последовательность $\Rightarrow \exists \lim x_n = x_*$, $f(x_n) \to f(x_*)$, $x_{n+1} \to x_*$, тогда по непрерывности $f(x_*) = x_*$.
Проверяем единственность: пусть $f(x) = x$, $f(y) = y$. тогда:

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

□

Замечание 14 $\rho(x_n, x_*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(x_0, x_1)$

Следствие 12

- X - полное метрическое пространство.
- $f, g : X \to X$ - сжатия с коэфф. $\lambda \in (0, 1)$.
- $x = f(x)$, $y = f(y)$.

Тогда:

$$\rho(x, y) \leqslant \frac{\rho(f(x), g(x))}{1-\lambda}$$

Доказательство

$$\rho(x, y) = \rho(f(x), g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \lambda\rho(x, y)$$

□

42. Оценки на нормы обратного отображения и разности значений отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым.

Теорема 63

- A - линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- $||Ax|| \geqslant m||x||$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $m > 0$.

Тогда A обратим и $||A^{-1}|| \leqslant 1/m$.

Доказательство Для обратимости нужно $\ker A = \{0\}$. Пусть $Ax = 0 \Rightarrow 0 = ||Ax|| \geqslant m||x|| \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A$ - обратим и:

$$||A^{-1}y|| = ||A^{-1}(Ax)|| = ||x|| \leqslant \frac{1}{m}||Ax|| = \frac{1}{m}||y||$$

$$||A^{-1}|| = \sup_{|x|=1} ||A^{-1}x|| \leqslant 1/m$$

□

Теорема 64

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в $B_r(a)$.
- $||d_x f|| \leqslant c \ \forall x \in B_r(a)$.

Тогда $||f(x) - f(y)|| \leqslant c||x - y||$.

Доказательство

$$\phi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x)\rangle \quad \phi : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ - дифференцируема}$$

$$||f(y)-f(x)||^2 = \phi(1)-\phi(0) = \phi'(\theta) = \langle f'(x+\theta(y-x))(y-x), f(y)-f(x)\rangle \leqslant (*) \quad \theta \in (0, 1)$$

$$||f'(x + \theta(y - x))(y - x)|| = ||d_{x+\theta(y-x)} f(y - x)|| \leqslant ||d_{x+\theta(y-x)} f|| \cdot ||y - x|| \leqslant c||y - x||$$

$$(*) \leqslant ||f'(x + \theta(y - x))(y - x)|| \cdot ||f(y) - f(x)|| \leqslant c||y - x|| \cdot ||f(y) - f(x)||$$

□

Теорема 65 Об обратимости оператора, близкого к обратимому

- $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - обратимый.
- $||B - A|| < 1/||A^{-1}||$.

Тогда B обратим и

$$||B^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1/||A^{-1}|| - ||B - A||} \qquad ||B^{-1} - A^{-1}|| \leqslant \frac{||A^{-1}|| \cdot ||B - A||}{1/||A^{-1}|| - ||B - A||}$$

Доказательство

$$||x|| = ||A^{-1}(Ax)|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||Ax||$$

$$||Bx|| = ||Ax + (B - A)x|| \geqslant ||Ax|| - ||(B - A)x|| \geqslant \frac{||x||}{||A^{-1}||} - ||B - A|| \cdot ||x|| =$$

$$= ||x||(\frac{1}{||A^{-1}||} - ||B - A||) =: m > 0$$

$$\Rightarrow B \text{ обратим и } ||B^{-1}|| \leqslant 1/m$$

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1} \leqslant ||B^{-1}|| \cdot ||A - B|| \cdot ||A^{-1}|| \leqslant \frac{||B - A|| \cdot ||A^{-1}||}{m}$$

□

43. Теорема об обратной функции (существование и непрерывность обратного отображения).

Теорема 66 Об обратной функции

- $f : D \to \mathbb{R}^n$.
- $D \subset \mathbb{R}^n$ - открытое.
- f непр. дифф. в окрестности $x_0 \in D$.
- $y_0 = f(x_0)$.
- Матрица $A := f'(x_0)$ обратима.

Тогда существуют окрестности U точки x_0 и V точки y_0, т.ч. $f : U \to V$ обратима и $f^{-1} : V \to U$ непрерывна.

Доказательство

$$G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$$

Из непрерывной дифференцируемости:

$$||A - f'(x)|| = ||f'(x_0) - f'(x)|| \to 0 \text{ при } x \to x_0$$

Тогда можем подобрать такое r, что:

$$||A^{-1}|| \cdot ||A - f'(x)|| \leqslant 1/2 \quad \forall x \in \overline{B_r}(x_0)$$

$$G_y'(x) = E + A^{-1}(-f'(x)) = A^{-1}(A - f'(x)) \Rightarrow ||G_y'(x)|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||A - f'(x)|| \leqslant \frac{1}{2}$$

Тогда:

$$||G_y(x) - G_y(\tilde{x})|| \leqslant \frac{1}{2}||x - \tilde{x}||$$

Хотим подобрать такое $R > 0$, чтоб $\forall y \in B_R(y_0) : G_y(\overline{B_r}(x_0)) \subset \overline{B_r}(x_0)$, тогда G_y будет сжатием на $\overline{B_r}(x_0)$.

$$||G_y(x) - x_0|| \leqslant ||G_y(x_0) - x_0|| + ||G_y(x) - G_y(x_0)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||A^{-1}(y - y_0)|| + \frac{1}{2}||x - x_0|| \leqslant R||A^{-1}|| + \frac{r}{2} \leqslant r$$

Тогда у отображения $G_y : \overline{B_r}(x_0) \to \overline{B_r}(x_0)$ есть неподвижная точка $x \in \overline{B_r}(x_0)$.

$$x = G_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \Rightarrow A^{-1}(y - f(x)) = 0 \Rightarrow y = f(x)$$

То есть:

$$\forall y \in B_R(y_0) \quad \exists! x \in \overline{B_r}(x_0) \ : \ y = f(x)$$

Берём $V = B_R(y_0)$ - окрестность y_0, $U = f^{-1}(V) \cap B_r(x_0)$ - открытое (прообраз открытого множества). Строчкой выше написано, почему f - биекция.
Хотим непрерывности f^{-1}. Пусть $f(x) = y$ и $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Тогда $x = G_y(x)$, $\tilde{x} = G_{\tilde{y}}(\tilde{x})$.

$$||f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})|| = ||x - \tilde{x}|| \leqslant$$

по следствию из Банаха:

$$\leqslant 2||G_y(x) - G_{\tilde{y}}(x)|| = 2||A^{-1}(y - f(x)) - A^{-1}(\tilde{y} - f(x))|| = 2||A^{-1}(y - \tilde{y}|| \leqslant 2||A^{-1}|| \cdot ||y - \tilde{y}||$$

□

44. Дифференцируемость и непрерывная дифференцируемость обратного отображения. Образ области при невырожденном отображении.

Теорема 67 О дифференцируемости обратного отображения.

- $f : U \to V$ - непр. дифф.
- $f'(x)$ - обратима $\forall x \in U$.
- $g : V \to U$ - обратная к f, непрерывна.

Тогда g непрерывно дифференцируема, $f'(x)$ обратима $\forall x \in U$.

Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \alpha(h)||h|| \quad k := f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)||h||$$

$$f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) = a+h-a = h = A^{-1}(Ah) = A^{-1}(K-\alpha(h)||h||) = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)||h||)$$

g - непр, $\Rightarrow$ если $k \to 0$, то $h \to 0$.

$$||k|| = ||Ah + \alpha(h)||h||\,|| \geqslant \frac{||h||}{||A^{-1}||} - ||\alpha(h)|| \cdot ||h|| \geqslant ||h||(\frac{1}{||A^{-1}||} - ||\alpha(h)||) \geqslant C||h||$$

$$A^{-1}(\alpha(h))|| \cdot ||h|| \leqslant \frac{||k||}{C}||A^{-1}|| \cdot ||\alpha(h)|| = o(||k||)$$

То есть g дифференцируема в a и $g'(a) = (f'(a))^{-1}$.

$$||g'(y) - g'(b)|| \leqslant \frac{||f'(a) - f'(a)|| \cdot ||(f'(a))^{-1}||}{1/||(f'(a))^{-1}|| - ||f'(x) - f'(a)||}$$

$$||A^{-1}|| \cdot ||f'(x) - A|| \leqslant 1/2 \Rightarrow f' \text{ обратима}$$

$\square$

Следствие 13

- $f : D \to \mathbb{R}^n$.
- $D \in \mathbb{R}^n$ - открытое.
- f непр. дифф. в D.
- $f'(x)$ обратима $\forall x \in D$.

Тогда $\forall G \in D$ $f(G)$ - открытое.

Доказательство Пусть $b \in f(G)$, тогда $\exists a : f(a) = b$. Применим теорему для точки a и получим U - ок-ть a и V - ок-ть b, такие, что $f|_U : U \to V$ - биекция. Тогда $f(G) \supset f(U) = V$ - окрестность b, то есть b - внутренняя точка $f(G)$. $\square$

45. Теорема о неявной функции.

Теорема 68

- $A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ - линейный оператор.
- $A(h,0) = 0 \Rightarrow h = 0$.

Тогда $\forall y \in \mathbb{R}^m$ уравнение $A(x,y) = 0$ имеет единственное решение.

Доказательство $h \to A(h,0)$ - обратимо, знаем с линала.
$0 = A(x,y) = A(x,0) + A(0,y) \Rightarrow A(x,0) = -A(0,y)$ имеет единственное решение $(x,y) = (x,0) + (0,y)$. $\square$

Теорема 69 Теорема о неявной функции.

- $D \in \mathbb{R}^{n+m}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ - непр.дифф.
- $(a,b) \in D$ - открытое.
- $f(a,b) = 0$.
- $A = f'(a,b)$: $A(h,0) = 0 \Rightarrow h = 0$.

Тогда существует окрестность W точки b и единственная функция $g : W \to \mathbb{R}^n$, такая что $g(b) = a$ и $f(g(y),y) = 0\ \forall y \in W$, причём g непрерывно дифференцируема.

Доказательство

$$F : D \to \mathbb{R}^{n+m} \quad F(x,y) = (f(x,y),y) \text{ непрерывно дифференцируема.}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Все коэффициенты непрерывны и завсият от (x,y) значит F непрерывно дифференцируема.

$$0 = f'(a,b)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x h + f'_y k \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ f'_x h + f'_y k = 0 \end{cases} \Rightarrow f'_x h = 0 \Rightarrow h = 0$$

Значит $F'(a,b)$ обратима $\Rightarrow$ для F применима теорема об обратной функции, значит существуют окрестности U и V точек (a,b) и $(f(a,b),b) = (0,b)$ и $G : V \to U$ обратная к F.
$F(G(z,w)) = (z,w)$, пусть $G(z,w) = (\phi(z,w),\psi(z,w)) \Rightarrow F(G(z,w)) = (f(G(z,w)),\psi(z,w))$.
Возьмём w, т.ч. $\{0\} \times w \subset V$. $g(w) := \phi(0,w)$ непр.дифф. и $g(b) = \phi(0,b) = a$ и $f(g(w),w) = f(G(0,w)) = 0$. $\square$

46. Задача Коши для дифференциального уравнения. Теорема Пикара.

Определение 29 Задача Коши для дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} y'_x = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Замечание 15 Если f - непр, то: y - решение задачи Коши $\iff$ y - решение уравнения:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Теорема 70 Теорема Пикара

- $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathbb{R}^2$.
- f непр.
- $|f(x, y) - f(x, \tilde{y}) \leqslant M|y - \tilde{y}|\ \forall x, y, \tilde{y}$.

Тогда $\exists \delta > 0$ и $\exists! y : [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ - дифф., является решением задачи Коши.

Замечание 16

$$\begin{cases} y' = -y^2(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Решение: $y(x) = 1/x$.

Доказательство Будем решать уравнение $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. $\overline{B_r}(x_0, y_0) \subset D \Rightarrow f$ ограничена на $\overline{B_r}(x_0, y_0)$, $f \leqslant K$.
ВЫбираем δ так, чтобы:

1. $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \times [y_0 - k\delta; y_0 + k\delta] \subset \overline{B_r}(x_0, y_0)$.
2. $M\delta < 1$.

Рассмотрим множество функций $C_* := \{\phi \in C[x_0 - \delta; x_0 + \delta] : |\phi(x_0) - y_0| \leqslant k\delta\}$ - полное пространство (замкнутое подпространство полного пространства).

$$T(\phi) = \psi \quad \psi(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt$$

$$\phi \in C_* \Rightarrow \psi \in C_*(?)$$

Непрерывность точно есть, нужно проверить второе условие: $|\psi(y_0) - y_0| \leqslant K\delta$:

$$|\int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt| \leqslant (x - x_0) \max f \leqslant \delta K$$

Проверим, что T - сжатие:

$$||T(\phi) - T(\tilde{\phi})|| = \max_{[x_0 \pm \delta]} |T(\phi(x)) - T(\tilde{\phi}(x))| = \max_{[x_0 \pm \delta]} |\int_{x_0}^{x} (f(t, \phi(t)) - f(t, \tilde{\phi}(t)))dt \leqslant$$

$$leqslant \max \int_{x_0}^{x} |(f(t, \phi(t)) - f(t, \tilde{\phi}(t))|dt \leqslant \max_x \int_{x_0}^{x} M||\phi - \tilde{\phi}||dt \leqslant \delta M||\phi - \tilde{\phi}||$$

Тогда по теореме Банаха о сжатии существует единственное решеуие задачи Коши.
$\square$

47. Локальные экстремумы. Определение и необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

Определение 30 Экстремумы функций нескольких переменных $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E$.
a - точка строгого локального минимума, если $\exists U$ - окрестность такая, что $f(a) < f(x) \forall x \in U \cap E \setminus \{a\}$, нестрогий минимум - не прокалываем окрестность, строгий максимум - $>$ вместо $<$, нестрогий максимум - упр.

Теорема 71 Необходимое условие экстремума $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{int} E$, a - точка экстремума. Тогда если существует производная по направлению, то она равна нулю, а если f дифф. в a, то все производные нули.

Доказательство Пусть a - точка максимума. Возьмём $a \in U$ - окрестность, содержащуюся в E. $\forall x \in U \ f(x) \leqslant f(a)$. $g(t) := f(a + th)$, тогда $g(0) \geqslant g(t)$ при малых t, тогда 0 - локальный максимум g, значит $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial h}(0) = 0$. $\square$

Определение 31 Стационарная точка. сли $\nabla f(a) = 0$, то a - стационарная точка.

Замечание 17 усть f дважды дифф. в a, a - стационарная точка.

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(||h||^n)$$

48. Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

Определение 32 Квадратичная форма

$$Q(h) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j = \langle Ah, h \rangle$$

A - матрица квадратичной формы, она симметрична. *Положительно определенная* - $Q(h) \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$. *Строго положительно определенная* - $Q(h) > 0 \quad \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Аналогично для отрицательно определённых.

Лемма 4 Q - строго положительно определнная квадратичная форма, тогда $\exists c > 0$, т.ч. $Q(h) \geqslant c||h||^2 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство $S := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$, S - компакт, Q - непр. Возьмём c - наименьшее значение Q на сфере, это значение в какой-то точке, значит оно строго положительно по условию. $Q(h) = \langle Ah, h\rangle = ||h||^2 \langle \frac{Ah}{||h||}, \frac{h}{||h||}\rangle = Q(h/||h||) \cdot ||h||^2$, $||h/||h|| \,|| = 1$, значит $\geqslant c||h||^2$. □

Теорема 72 Достаточное условие экстремума. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathbb{R}^m$, f дважды непрерывно дифференцируема, a - стационарная точка, $Q(h) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$. Тогда если Q положительно определена, то a - точка строгого локального минимума, если отрицательно - строгого локального максимума. Если a - точка нестрогого локального максимума, то Q нестрого отрицательно определена, если нестрогого локального минимума - Q нестрого положительно определена.

Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}Q(h) + o(||h||^2)$$

1. По лемме $Q(h) \geqslant c||h||^2$, отсюда $f(a+h) - f(a) \geqslant c||h||^2 + o(||h||^2) = ||h||(c + o(1)) \geqslant 0$. 4. Возьмём h - единичный вектор, a - нестрогий локальный минимум, значит $f(a+th) - f(a) > 0$ при малых t, $f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2}Q(th) + o(t^2) = t^2(\frac{Q(h)}{2} + o(1)) \geqslant 0$
□

49. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Пример 18 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 36xy$, $f'_x(x,y) = 4x^3 - 36y$, $f'_y = 4y^3 - 36x$, $x^3 = 9y$, $y^3 = 9x$, $x = 0$ или $x = 3$ или $x = 3$. Стац точки: $(0,0)$, $(3,3)$, $(-3,-3)$.
$f''_x = 12x^2$, $f''_y = 12y^2$, $f''_{xy} = -36$,

$$Q = \begin{pmatrix} 12x^2 & -36 \\ -36 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

В $(0,0)$ критерий Сильвестра: матрица положительно определена тогда и только тогда, когда определители вида левый верхний угол матрицы строго положительны. В нашем случае определитель отрицательный, значит нет знакоопределённости.
В $(3,3)$, определитель положителен, есть положительная определённость, значит точка строгого минимума.
В $(-3,-3)$ ничего не поменяется.

Определение 33 Условные экстремумы $f : D \to \mathbb{R}$, D - открытое, $\Phi : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $\Phi(a) = 0$, a - точка строгого локального минимума при условии $\Phi = 0$, если $\exists U$ - окрестность a, т.ч. $f(a) < f(x)$ для всех x в проколотой окрестности чтобы $\Phi(x) = 0$.

Теорема 73 Метод неопределенных множителей Лагранжа $f : D \to \mathbb{R}$ - дифференцируема, $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ непр.дифф, тогда если a - точка условного экстремума, то $\nabla f(a), \nabla\Phi_1(a), \ldots, \nabla\Phi_n(a)$ - линейно зависимы.

Замечание 18 сли градиенты Φ линейно зависимы, то всё очевидно и бесполезно. Если же они линейно независимы, то $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(a)$ - эти λ и есть неопределенные множители Лагранжа.

Доказательство $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, точка $a = (b, c)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$. $\nabla\Phi_i(a)$ - строки матрицы $\Phi'(a)$. Значит, ранг $\Phi'(a)$ равен m - он же и размер самого большого ненулевого минора (НУО - последнего). Тогда по теореме о неявной функции, существует W - окрестность точки b, $g : W \to \mathbb{R}^m$, такая что $\Phi(x, g(x)) = 0$, g непрерывно дифференцируема. $h(x) = (f(x), g(x))$, $h(b) = f(b, g(b)) = f(a)$ $\square$