Appunti di Matematica Discreta

Sara Righetto

13 aprile 2018

Indice

Sommario

La matematica discreta, è lo studio di strutture matematiche che sono fondamentalmente discrete, nel senso che non richiedono il concetto di continuità che voi vedete nei corsi di analisi.

La maggior parte degli oggetti studiati nella matematica discreta sono insiemi numerabili come i numeri interi o insiemi finiti, come gli interi da 1 a k.

Altri oggetti importanti sono i grafi, che modellano reti di connessione.

La matematica discreta è diventata famosa per le sue applicazioni in informatica. I concetti e le notazioni della matematica discreta sono utili per lo studio o la modellazione di oggetti o problemi negli algoritmi informatici e nei linguaggi di programmazione.

Argomenti:

1. Teoria dei grafi

2. Metodi di conteggio

3. Relazioni di ricorrenza

1 Prima lezione: Introduzione

1.1 Teoria dei grafi

Grafo = G(V,E)
Planarità di un circuito stampato: Nei circuiti stampati, le componenti elettroniche sono collegate da piste conduttrici stampate su una tavoletta isolante; queste piste non si possono incrociare.

PROBLEMA DEL POSTINO CINESE
Un postino deve consegnare la posta nelle seguenti strade. Può partire da A e tornare in A senza percorrere due volte la medesima strada ?
Equivalente: Disegnare la seguente figura senza sollevare la penna dal foglio (partendo e tornando in un punto arbitrario)

SPELLING CHECKER
Cercare una parola nel dizionario. Zucca: si ricorre all'uso degli alberi binari

TORNEO AD ELIMINAZIONE
16 Giocatori: Torneo ad eliminazione diretta. Anche in questo caso si usano gli alberi binari.

1.2 Metodi di conteggio

Contare un numero (finito) di oggetti non è sempre facile ma è un problema che si pone spesso in informatica: per esempio contare le operazioni fatte da un algoritmo per misurarne l'efficienza.

METODI DI CONTEGGIO = ENUMERAZIONE = CALCOLO COMBINATORIO

Esempi:

- Numero di parole con un fissato alfabeto
- Numero di sequenze binarie, numero di sottoinsiemi di n elementi
- Numero di soluzioni intere di una data equazione lineare
- Numero di targhe automobilistiche
- Probabilità discreta: Quale è la probabilità che 4 carte diano un poker? (d'assi?)

1.3 Relazioni di ricorrenza

Spesso è difficile calcolare direttamente una quantità (come il numero K_{n} di sottoinsiemi di n elementi con una data proprietà). E' più semplice trovare una relazione di ricorrenza che determina K_{n} in funzione di $K_{\mathrm{n}-1}$.

RELAZIONI DI RICORRENZA = EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE

Problemi ricorsivi:

1. Calcolo del determinante di una matrice quadrata
2. Numeri di Fibonacci
3. Calcolo di n!
4. Torre di Hanoi

`Esempio 1.1:`
$a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}-1} * n \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_0 = 1 \rightarrow$ CONDIZIONE INIZIALE

$a_{\mathrm{n}} = n! \rightarrow$ SOLUZIONE

`Esempio 1.2:`
Evoluzione di un capitale investito in banca: All'anno 0 investo 1000EUR. Il mio investimento dà un interesse del 4 % annuo. Dopo n anni quanto e' il mio capitale?

$a_0 = 1000$
$a_1 = 1000 + \frac{4}{100} * 1000 = 1.04 * a_0$
$a_{\mathrm{n}} = (1.04) * a_{\mathrm{n}-1} \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_2 = 1.04 * a_1 = (1.04)^2 * a_0$
$a_{\mathrm{n}} = (1.04)^n * a_0 \rightarrow$ SOLUZIONE

`Esempio 2:`
Calcolare il massimo di una stringa (x_1, .. , x_n) di n numeri
a_n = numero di confronti necessari per calcolare il massimo di una stringa di lunghezza n

$a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}/2} + a_{\mathrm{n}/2} + 1 \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_2 = 1 \rightarrow$ SOLUZIONE

2 Seconda lezione: Grafi orientati e non orientati

2.1 Grafi non orientati

DEFINIZIONE: un grafo (non orientato) è una coppia G(V,E) dove:

- $V = v_1, ..., v_n$ è un insieme finito di vertici (nodi) rappresentati da punti sul piano.
- E è un insieme di archi che sono coppie *non* ordinate di vertici, detti spigoli.

Un grafo non orientato è anche detto *grafo semplice* ossia nell'insieme delle coppie non ci sono né cappi né archi(spigoli) paralleli.

Ex:
$V = \{v_1, .., v_8\}$
$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), ..\}$

Definizioni:

- Estremi di un arco
- *Arco incidente* nei suoi estremi, cioè collega due vertici
- *Vertici adiacenti* (nonadiacenti) : sono gli estremi di un arco
- *Grado del vertice v* (si indica con $d(v)$): numero di volte in cui v è estremo di un arco. $d(v3) = 3, d(v8) = 0$

Due proprietà fondamentali Per ogni grafo G(V, E) vale la seguente relazione:

$$\sum_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} d(v) = 2 \mid E \mid \tag{1}$$

Poichè ogni arco ha 2 estremi, contribuisce due volte alla somma dei gradi.

Corollario: Dato G(V,E) non orientato, alcuni gradi sono dispari altri pari. Il numero di vertici di grado dispari è sempre pari. Ossia:

$$\sum v \in V d(v) = \sum v \in V_d d(v) + \sum v \in V_p d(v) \tag{2}$$

NdA: la sommatoria dei gradi di tutti i vertici è un multiplo di 2, poichè essa è equivalente a $2 \mid E \mid$. Ne consegue che se dividiamo i vertici per grado dispari e pari entrambi i risultati delle sommatorie dovranno essere pari (Ex: $2 + 4$ è pari , $5 + 2$ è dispari).
La prima sommatoria è fatta da vertici con grado dispari che possono essere per esempio, $3, 5, \ldots$
Quando vengono sommati due numeri dispari se ne ottiene uno pari, ma se invece sommassimo 3 numeri dispari avremmo un risultato dispari. (Ex: $3+3$ è pari, $3+3+3$ è dispari). Nella seconda sommatoria non ci interessa sapere quant'è la quantità di gradi che si hanno effettivamente perchè ne risulterà sempre una somma pari.

Ogni grafo semplice ha al *massimo* $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$ archi dove $n = \mid V \mid$.
$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ è il numero di coppie non ordinate di n elementi.
Suppondendo di avere un grafo composto da $V = n$, il numero minimo di archi è 0, mentre quello massimo è $\frac{n(n-1)}{2}$.
Ne deriva che:

$$0 \leq \mid E \mid \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

Nei grafi bipartiti il numero *minimo* è 0 mentre quello massimo è dato dal prodotto fra la quantità dei vertici dei due sottoinsiemi:

$$\mid V1 \mid * \mid V2 \mid \tag{4}$$

Se vale $\mid V1 \mid * \mid V2 \mid = E$ allora ho un grafo bipartito completo.

2.1.1 Terminologia

Cammino o path: corrisponde a una sequenza di vertici distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel cammino è collegata da un arco.
Circuito o ciclo: è un particolare cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono coincidenti.
Lunghezza: numero di archi.

Pari, dispari: parità della lunghezza, cioè se la quantità del numero di archi è pari o dispari.
Connesso: per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega
Percorso: sequenza di vertici NON NECESSARIAMENTE distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel percorso è collegata da un arco. (Cioè è una maniera di attraversare parte del grafo, possibilmente passando più di una volta per lo stesso vertice o arco). Un percorso è *chiuso* se le estremità coincidono.

Teorema: Dato un percorso con estremità v_1, v_{n} esiste un cammino con estremità v_1, v_{n}

Teorema: Un percorso chiuso di lunghezza dispari contiene un ciclo di lunghezza dispari.
Se gli unici vertici coincidenti sono le estremità allora il percorso è un ciclo dispari. Altrimenti il percorso si partiziona in due percorsi di lunghezza minore, uno pari e l'altro dispari.

2.1.2 Alcuni grafi

Grafo completo: ogni coppia di vertici è adiacente(collegati da un arco). E' denominato K_n (n è il numero di vertici)
Bipartito: i vertici sono partizionabili in due sottoinsiemi, U e W, e ogni arco è incidente in un vertice di U e uno di W.
Grafo bipartito completo $\mathrm{K}_{\mathrm{n1},\mathrm{n2}}$ Grafo bipartito, le due parti della bipartizione hanno $_{\mathrm{n1},\mathrm{n2}}$ vertici rispettivamente ed ogni vertice di una parte è adiacente a tutti i vertici della seconda parte.
Foresta: Grafo senza cicli (=aciclico)
Albero: Foresta connessa.
Un grafo è K-regolare se ogni nodo ha grado k. I grafi 3-regolari si chiamano GRAFI CUBICI.

Disegnare un grafo Un "disegno" di un grafo ne illustra le proprietà. Ma i "disegni" dello stesso grafo sono molteplici. Noi diremo che due grafi sono *isomorfi* se uno è il disegno dell'altro.
Formalmente, G(V,E) e G'(V', E') sono isomorfi se esiste una biezione F: che porta V in V' e che preserva le adiacenze. Cioè uv è un arco di G se e solo se f(u)f(v) è un arco di G'.
Multigrafi Finora abbiamo visto grafi SEMPLICI, perche' fra ogni coppia di vertici c'è al massimo un arco. In generale possono esserci ARCHI PARALLELI, cioè archi che hanno le stesse estremità e CAPPI: Archi con le

estremità coincidenti. Tali grafi si dicono MULTIGRAFI.
GRADO DI UN NODO: I cappi contribuiscono 2 al grado dell'unica estremità.
Sottografi: Un sottografo di un grafo G(V,E) è un grafo G'(V', E') con V'$\subseteq$ V e E'$\subseteq$ E.
Dato G(V,E) un suo sottografo G'(V',E') si dice INDOTTO da V' se E' è il sottoinsieme di archi in E con entrambe le estremità in V'. Cioè per ogni arco (u,v) $\in$ E, se u $\in$ V' e v $\in$ V' allora (u,v) $\in$ E'.

2.2 Grafi orientati

DEFINIZIONE: un grafo orientato è una coppia D(V,A), dove:
$V = v_1, ..., v_{\mathrm{n}}$ è un insieme finito di nodi o vertici.
L'insieme A di archi è un insieme di coppie *ORDINATE* di vertici.
Un arco ha un senso di percorrenza(che si indica con una freccia), dalla testa alla coda.

Nodo iniziale e finale di uno arco = coda e testa dell'arco

- **Archi paralleli:** hanno la stessa testa e la stessa coda.
- **Cappio:** la testa e la coda coincidono.

Grafo orientato Semplice: non ci sono cappi e nemmeno archi paralleli.
Multigrafo orientato: ci sono cappi e archi paralleli.

2.2.1 Terminologia

Cammino orientato: sequenza di nodi distinti, dove ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco (nodo iniziale, nodo finale)
Lunghezza del cammino: numero di archi nel cammino.
Un grafo orientato è *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi u, v esiste un cammino orientato da u a v ed un cammino orientato da v a u.
Circuito: cammino nel quale il primo nodo coincide con l'ultimo.
Lunghezza del circuito: numero di archi.
Parità del circuito: parità della lunghezza.

2.2.2 Proprietà dei grafi orientati

***Semplice* massimo numero di archi**: numero di coppie ORDINATE di $n =\mid V \mid$ elementi.
In-degree(v) = Grado entrante di un nodo v: numero di archi entranti in

v $\Rightarrow d^{\text{in}}(v)$
Out-degree(v) = Grado uscente di un nodo v: numero di archi uscenti da v $\Rightarrow d^{\text{out}}(v)$

Per ogni grafo orientato D(V,A) vale:

$$\mid A \mid = \sum v \in V d^{\text{in}}(v) = \sum_{v} \in V d^{\text{out}}(v)$$

Teorema In ogni grafo orientato D(V,A), sono uguali tra loro:

- la somma dei gradi uscenti dei nodi
- la somma dei gradi entranti dei nodi
- il numero di archi del grafo

$$\sum v \in V d^{\text{out}}(v) = \sum v \in V d^{\text{in}}(v) = \mid A \mid \tag{5}$$

Un arco uv un contribuisce 1 a $\mathrm{d}^{\text{out}}(\mathrm{v})$ e 1 a $\mathrm{d}^{\text{in}}(\mathrm{v})$

Tornei: Un *TORNEO* è un grafo orientato in cui per ogni coppia di vertici esiste ESATTEMENTE uno degli archi uv , uv.
(Si chiamano tornei (tournaments) perche indicano gli esiti di un torneo e il senso di ogni arco indica l'esito dell'incontro fra i giocatori rappresentati dai suoi estremi).

2.2.3 Rappresentazione di grafi mediante matrici

1. Matrice di incidenza vertici/archi
2. Matrice di incidenza nodi/archi
3. Matrice di adiacenza vertici/vertici o nodi/nodi
4. List of edges, linked adjacency list, forward star, backward star ect..

3 Terza lezione: Connettività

Ricordiamo: dato G(V,E) u,v sono connessi se esiste un cammino con estremità u, v.
La CONNESSIONE ha le seguenti proprietà:

- u è connesso a se stesso $\rightarrow$ *riflessività*
- u,v connessi, v,u connessi $\rightarrow$ *simmetria*
- u,t connessi, t,v, connessi, allora u,v connessi $\rightarrow$ *transitività*

Queste proprietà implicano che esiste una *partizione* di V in parti $V1, ...Vk$ dove: u,v sono connessi se appartengono alla stessa parte.
Queste parti sono le COMPONENTI CONNESSE di G.
G è *connesso* se c'è una sola parte! ($k = 1$).

Dato $S \subseteq V$ definiamo il *taglio* associato ad S come l'insieme di archi.
$\delta(S) = \{\{uv\} \in E, \mid S \cap \{u, v\} \mid = 1\}$
e diciamo che $\delta(S)$ *separa* u, v se $\mid S \cap u, v \mid = 1$

Teorema Dato G(V,E), vertici u, v appartengono alla stessa componete connessa di G se e solo se non esiste un taglio $\delta(S) = \emptyset$ Dimostriamo che: dato $\delta(S)$ che separa u, v e P cammino fra u, v allora P e $\delta(S)$ hanno almeno un arco in comune, cioè $\mid P \cap \delta(S) \mid \geq 1$
Se $\delta(S) \neq \emptyset$ per ogni taglio $\delta(S)$ che separa u, v allora esiste un cammino fra u, v.

3.1 Calcolo delle componenti connesse

Input: G(V,E), v in V
Output: Componente connessa C che contiene v

- Poni $v \in C$ e dichiara v non esaminato
- *esame vertice:* scegli $x \in C$ non esaminato. Aggiungi a C ongi vertice adiacente a x che non è in C.
- *stop* quando ogni vertice in C è esaminato.
- C è la componente connessa che contiene v.

Sia C componente connessa che contiene v calcolata dall'algoritmo. Si noti che $\delta(S) = \emptyset$
Se $C = V$ il grafo è connesso. Se C è strettamente contenuto in V, sia u in V o C allora $\delta(C)$ separa u e v.

3.2 Connettività

Ricordiamo: un grafo non orientato G(V,E) si dice *connesso* se, per ogni coppia di vertici, esiste un cammino che li collega, altrimenti si dice *disconnesso*. Le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Connettività sugli archi Arco connettività fra $u, v = K^E_{uv}(G)$
Cardinalità minima di un taglio che separa $u, v = min\{|\ \delta(S)\ |: S$ separa $u, v\}$
Ricordiamo: dato G(V,E) u,v in componenti connesse distinte se e solo se $K^E_{uv}(G) = 0$
Conseguenza: $K^E_{uv}(G)$ è il minimo numero di archi da togliere a G affinchè u,v diventino disconnessi.

Teorema Per ogni $u, vK^E_{uv}(G)$ è il massimo numero di cammini con estremità u, v che non hanno archi in comune (disgiunti sugli archi).

Ricordiamo che: G(V,E) connesso se e solo se non esiste $\delta(S)$ che separa due vertici tali che $\delta(S) = \emptyset$

Definiamo: arco connettività di G $K^E(G)$ = minimo numero di archi da togliere affinchè G sia disconnesso = cardinalità minima di un taglio che separa almeno 2 vertici.
Allora: $K^E(G) = \min K^E_{uv}(G)$

3.2.1 Connettività (sui vertici)

Dato G(V,E) grafo connesso, semplice e non completo:
Connettività (sui vertici) K(G) = minimo numero di vertici la cui rimozione trasforma G in un grafo sconnesso (= non connesso).

Vertex cutset = insieme di vertici $U \subseteq V$con le due seguenti proprietà:

- la rimozione di tutti i vertici di U trasforma G in un grafo sconnesso;
- la rimozione di alcuni dei vertici di U, ma non tutti, lascia il grafo connesso.

Quindi, se G non è completo: $K(G)$ = cardinalità del vertex cutset di G di cardinalità minima.
Un grafo completo con n vertici non ha vertex cutsets. Per convenzione, la connettività sui vertici di un grafo completo con n vertici è posta uguale a n-1.

Dato G(V,E) e i vertici u, v *non adiacenti*, $K_{\mathrm{uv}}(G)$ cardinalità minima di un separatore S tale che u, v sono in componenti connesse distinte di G/S.
Quindi se G(V,E) è un grafo semplice non completo allora: $K(G) = \min K_{\mathrm{uv}}(G) u, v$ non adiacenti.
Dato G(V,E) e vertici u, v non adiacenti, P un cammino con estremità u, v, S un separatore con u, v in componenti connesse distinte di G/S, allora *S contiene almeno un vertice intermedio di P*

3.2.2 Disequazioni

Teorema Sia G(V,E) grafo con almeno due vertici. Allora:

$$K(G) \leq K^E(G) \leq \delta(G)$$

dove il simbolo d(G) indica il grado del vertice di grado minimo di G: $\delta(G) = \min d(v) v \in V$
In particolare, se G è il grafo completo con n vertici, $n \geq 2$, allora $K(G) = K^E(G) = \delta(G) = n - 1$
Se $G = K_n$ allora $K(G) = n-1 \leq K(G) \leq \delta(G) = n-1$, allora $\lambda(G) = n-1$

3.3 Affidabilità di una rete

Rete di comunicazione tra soggetti: è necessario fornire percorsi alternativi di comunicazione, per fronteggiare:

- inattività di un soggetto;
- guasto di una linea;
- carico eccessivo di una linea, che superi la sua capacità.

Dato G grafo:

- per ogni coppia di nodi esistono almeno Ke(G) cammini alternativi che li collegano (tali che non ci siano due cammini che usano qualche arco in comune);

- per ogni coppia di nodi esistono almeno K(G) cammini alternativi che li collegano (tali che non ci siano due cammini che usano qualche vertice in comune).

In generale vale la seguente formula:

$$K(G) \leq Ke(G) \leq d(G) \leq 2\frac{\mid E \mid}{\mid V \mid}$$

grado medio in $G =$ media

$$\{gr(v) : v \in V\} = \frac{\sum(v \in V)gr(v)}{\mid V \mid} = \frac{2 \mid E \mid}{\mid V \mid}$$

Si dice che un grafo ha connettività ottima se vale

$$K(G) = Ke(g) = d(G) = 2\frac{\mid E \mid}{\mid V \mid}$$

Proprietà:

1. ha massima connettività sugli archi e sui vertici tra tutti i grafi con $\mid V \mid$ vertici e $\mid E \mid$ archi
2. è δ -regolare

$K^E_{uv}(G) =$ numero massimo di cammini con estremità u, v che non hanno archi in comune.
$K_{uv}(G) =$ numero massimo di cammini con estremità u, v che non hanno nodi intermedi in comune.

Dimostrazione Dimostrare che non può esistere nessun taglio del grafo di Peterson con 8 archi.
G(V,E) grafo di peterson, $\mid V \mid= 10, \mid E \mid= 15$.
Suppongo che esista un taglio $\delta(S)$ con 8 archi, quindi:

- G(V,E \ E') è sconnesso
- G(V,E \ E") è connesso $\forall E'' \subsetneq E'$

Sia $E'' \subsetneq E'$, con $\mid E'' \mid= 7$
G(V,E \ E") quindi dovrebbe essere connesso, ma questo è impossibile avendo 10 vertici e $15 - 7 = 8$ archi (il grafo minimalmente connesso con 10 vertici è un albero, e ha 9 archi).

4 Quarta lezione: Grafi bipartiti e isomorfi

4.1 Grafi bipartiti

Ricordiamo che: un grafo G(V,E) è bipartito se il suo insieme di vertici può essere partizionato in due sottoinsiemi, V_1 e V_2, in modo che ogni arco ha un estremità in $V1$ e l'altra in $V2$. Scriveremo G(V_1, V_2; E).
Massimo numero di archi in un grafo bipartito semplice: $\mid V_1 \mid * \mid V_2 \mid$

4.1.1 Condizione necessaria E sufficiente

Osservazione 1: Se G(V,E) è bipartito e G'(V',E') sottografo di G, allora G'(V',E') bipartito.
Ovvero: G'(V',E') sottografo di G(V,E), G' è nonbipartito, allora anche G è nonbipartito.
Osservazione 2: Se G(V,E) è bipartito con bipartizione V1 e V2, sia v un vertice. Posso assumere senza perdita di generalità v in V1. Allora tutti I vertici adiacenti a v DEVONO stare in V2.
Cioe' se v in V1, allora l' arco vu "forza" u in V2.
Osservazione 3: Se G(V,E) contiene un ciclo dispari come sottografo, allora G(V,E) *non* è bipartito.

Teorema: Un grafo G(V,E) è bipartito se e solo se G non contiene un ciclo di lunghezza dispari.
Per quanto detto sopra, se G contiene un ciclo dispari, G *non* è bipartito.
Dimostriamo che se G *non* contiene un ciclo dispari, allora G è bipartito.
Scegliamo v in V. Sia:

- V1 l'insieme dei nodi di G raggiungibili da v con un cammino di lunghezza pari.
- V2 l'insieme dei nodi di G raggiungibili da v con un cammino di lunghezza dispari.

N.B. Se G è bipartito allora $V1 \cap V2 = \emptyset$ e nessun arco di G ha entrambe le estremità in V1 o in V2.

4.1.2 Algoritmo per bipartizione

Input: Un grafo G(V,E)
Output: Se G è bipartito, una bipartizione R, B di G.
Per ogni componente connessa di G(V,E):

- Poni $v \in B, R = \emptyset$
- *esame vertice* $v \in B(R)$. Aggiungi a $R(B)$ ogni vertice adiacente a v non in $R \cup B$
- *stop* quando ogni vertice di $R \cup B$ è esaminato
- G(V,E) è bipartito se e solo se ogni arco e ha un estremità ub R ed una in B

4.2 Grafi isomorfi

Due grafi G(V,E) e G'(V',E') sono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca (isomorfismo) tra i vertici di V e quelli di V' tale che:
due vertici di V sono adiacenti in G se e solo se i corrispondenti vertici di V' sono adiacenti in G'.

Determinare se due grafi sono isomorfi: Per farlo bisogna cercare l'isomorfismo.
Se due grafi sono isomorfi:

- hanno lo stesso numero di *vertici*
- hanno lo stesso numero di *archi*
- hanno lo stesso numero di vertici con lo *stesso grado*

4.2.1 Condizioni necessarie

Due grafi sono isomorfi se:

- hanno lo stesso numero di *vertici*
- hanno lo stesso numero di *archi*
- hanno lo stesso numero di vertici con lo *stesso grado*
- i complementari devono essere isomorfi
- hanno gli stessi sottografi indotti.

Se le prime 3 condizioni sono verificate, costruisco il possibile isomorfismo accoppiando vertici dello stesso grado, controllando che la condizione 5 via verificata.

5 Quinta lezione: Foreste, alberi e cammini

5.1 Definizioni

Una *foresta* è un grafo senza cicli (aciclico).
Un *albero* è una foresta connessa.

Se F(V,E) è una foresta, allora $\mid E \mid = \mid V \mid - n$ (con n numero delle componenti connesse di F)
Se T(V,E) è un albero, allora $\mid E \mid = \mid V \mid - 1$.

Se T(V,E) è un albero con almeno 2 nodi, allora T contiene almeno 2 nodi di grado 1.

Teorema Sia T(V,E) un grafo connesso. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T non ha cicli.
- Per ogni coppia di vertici distinti, x e y, esiste un unico cammino che li collega.
- Il grafo T è minimalmente connesso, cioè la rimozione di un qualsiasi arco lo disconnette, cioè ogni arco e' un taglio.

DImostrazione:
$a \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$

$a \Rightarrow c$) T connesso, senza cicli $\rightarrow$ ogni arco è un taglio. Suppongo che esista un arco u, v tale che $T \setminus uv$ sia connesso. In $T \setminus uv$ esiste un cammino P_{uv} che collega u e v.
$c \Rightarrow b$) T connesso tale che ogni arco è un taglio. $\forall x, y \in V, x \neq y$ esiste un unico P_{uv}.
Suponiamo che esistano $x, y \in V, x \neq y$ tali che ci siano 2 cammini differenti che li collegano (P'_{xy} e P''_{xy}), sia (u,v) il primo arco di P_{xy} che non appartiene a P''_{xy}
$T \setminus (uv)$ non è connesso, u e v appartengono a differenti componenti connesse.
ma in $T \setminus (uv)$ esiste un persorso u - v.
$b \Rightarrow a$) T tale che $\forall x, y \in V, x \neq y$ esiste un unico cammino. Supponiamo che C sia un circuito di T. Siano x e y $\in$ C, x $\neq$ y.
Esistono due cammini distinti che collegano x e y.

5.2 Albero di peso minimo. Algoritmo di Kruskal.

Problema: Dato G(V,E) connesso, con pesi $w(e), e \in E$
input: G(V,E) connesso, pesi
output: Albero di peso minimo.

- *Ordina* gli archi $1, 2, .., m$ in ordine nondecrescente di peso: $w(1) \leq w(2) \leq .. \leq w(m)$
- *Inizializzazione:* Poni $T = \emptyset$ ed $i = 1$.
- *Iterazione i:* Se l'arco i ha le estremità in componenti connesse distinte di T, allora poni $T \leftarrow T \cup \{i\}$. Altrimenti $T \leftarrow T$. Poni $i \leftarrow i + 1$ e ripeti l'iterazione.
- *Stop:* Quando $i = m$.

5.3 Esercizi

5.3.1 Es.1

Dimostrare che ogni grafo non orientato semplice G(V,E), senza cicli e con $|E| = |V| - 1$ è un albero.
Svolgimento:
Devo dimostrare che G(V,E) è connesso. Sia c il numero di componenti connesse di G.
$G_1(V_1, E_1)$ connesso e senza circuiti $\rightarrow$ albero; $|E_1| = |V_1| - 1$
$G_c(V_c, E_c)$connesso e senza circuiti $\rightarrow$ albero; $|E_c| = |V_c| - 1$
Sommando: $|E| = |E_1|+|E_2|+..+|E_c| = |V_1|-1+|V_2|-1+..+|V_c|-1 = |V|-c$
Ma: $|E| = |V| - 1$ per ipotesi $\Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ G connesso $\Rightarrow$ è un albero.

5.3.2 Es.2

Dimostrare che ogni grafo non orientato semplice e connesso con n vertici e $n - 1$ archi, è un albero.

5.3.3 Es.3

Dimostrare che data una foresta F(V,E), vale: $\mid E \mid=\mid V \mid -\gamma$, con $\gamma =$ numero di componenti connesse di F(V,E).

5.3.4 Es.4

Problema: Dato un grafo connesso con lunghezze positive sugli archi, e vertici r, v, *trovare* un cammino di lunghezza minima fra r e v. (lunghezza di un cammino $P =$ somma delle lunghezze degli archi in P, lunghezza minima fra r e $v =$ distanza fra r e v).
Uso l'algoritmo di *Dijkstra*.
Input: G(V,E) connesso, lunghezze $l(e) > 0, e \in E$, non di partenza r
output: distanze (e cammini minimi) fra r e gli altri nodi in V.
Inizzializzazione: Poni d(r) = 0, d(v)= inf, $v \in V \setminus \{r\} i = 0, S_0 = \{r\}$.
Iterazione i: $\forall v \in V \setminus S_i$ poni $d(v) = \min\{d(v), d(u) + l(uv)\}$.
Sia $v \in V \setminus S_i$ il vertice per cui d(v) è minimo.
Poni $i = i + 1, S_i = S_{\mathrm{i}-1} \cup \{v\}$.
Stop: Quando $i = |V - 1|$.

6 Sesta lezione: Grafi planari

Un grafo non orientato si dice *planare* se lo si può disegnare sul piano senza intersezioni tra gli archi.
Tale disegno viene detto *rappresentazione piana* del grafo.

Come stabilire se un grafo è planare?
Problema polinomiale, anche se l'algoritmo è complicato. Ne daremo una versione semplificata, chiamata il metodo del cerchio e delle corde.

6.1 Minori

Contrazione di un arco u,v. Identifico u, v in un unico vertice. Arco u,v è diventato un cappio (e viene usualmente rimosso.)
G'(V',E') è minore di G(V,E) se G' è ottenuto da G tramite:

- contrazione di archi
- rimozione di archi
- rimozione di vertici isolati

Teorema: G planare, G' minore di G, allora G' planare.
Ognuna delle 3 operazioni applicata ad una rappresentazione piana di G, mantiene piana la rappresentazione.

6.2 Teorema di Kuratowski

Un grafo è planare se e solo se non contiene $K_{3,3}$ o K_5 come minore.

6.3 Disegni equivalenti per grafi planari:

Dato un grafo planare, ci sono molte sue rappresentazioni piane, tutte equivalenti.
Ogni rappresentazione piana divide il piano in regioni o facce. Indichiamo con r il numero di queste regioni. Il numero r dipende solo dal grafo, non dalla particolare rappresentazione piana disegnata.

6.3.1 Metodo del cerchio e delle corde

Dato un grafo G(V,E) non orientato:

1. trovare, se esiste, un circuito di lunghezza massima (che contenga tutti i vertici del grafo, lo chiameremo circuito Hamiltoniano)

2. disegnare questo circuito come un grande cerchio

3. scrivere l'elenco degli archi del grafo che non sono contenuti nel circuito; li chiamiamo corde e li inseriamo internamente o esternamente al cerchio, cercando di evitare gli incroci, seguendo i passi 4 e 5

4. scegliamo una corda e inseriamola, ad esempio, internamente al cerchio, togliendola dall'elenco;

5. Tutte le corde che la incrociano debbono essere inserite esternamente. Se la rappresentazione e' piana, proseguiamo. Altrimenti il grafo non e' planare.

Note:

- Attenzione all'ordine con il quale si inseriscono le corde: non possiamo fare scelte, solo la prima corda può essere posta internamente o esternamente a nostra scelta.

- Questa procedura non è sempre applicabile; in particolare, non è applicabile se il grafo non contiene un circuito hamiltoniano.

6.3.2 Esempi

6.4 Formula di Eulero

6.5 Politopi convessi

6.5.1 Corollari

6.6 Problema dei 4 colori

6.6.1 Esercizi