

# Appunti di Matematica Discreta

Sara Righetto

22 marzo 2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Prima lezione: Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Teoria dei grafi . . . . .	4
1.2	Metodi di conteggio . . . . .	4
1.3	Relazioni di ricorrenza . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Seconda lezione: i grafi</b>	<b>6</b>
2.1	Grafi non orientati . . . . .	6
2.1.1	Terminologia . . . . .	7
2.1.2	Alcuni grafi . . . . .	8
2.2	Grafi orientati . . . . .	9
2.2.1	Terminologia . . . . .	9
2.2.2	Proprietà dei grafi orientati . . . . .	10
2.2.3	Rappresentazione di grafi mediante matrici . . . . .	10

## Sommario

La matematica discreta, è lo studio di strutture matematiche che sono fondamentalmente discrete, nel senso che non richiedono il concetto di continuità che voi vedete nei corsi di analisi.

La maggior parte degli oggetti studiati nella matematica discreta sono insiemi numerabili come i numeri interi o insiemi finiti, come gli interi da 1 a  $k$ .

Altri oggetti importanti sono i grafi, che modellano reti di connessione.

La matematica discreta è diventata famosa per le sue applicazioni in informatica. I concetti e le notazioni della matematica discreta sono utili per lo studio o la modellazione di oggetti o problemi negli algoritmi informatici e nei linguaggi di programmazione.

### *Argomenti:*

1. Teoria dei grafi
2. Metodi di conteggio
3. Relazioni di ricorrenza

# 1 Prima lezione: Introduzione

## 1.1 Teoria dei grafi

Grafo =  $G(V,E)$

**Planarità di un circuito stampato:** Nei circuiti stampati, le componenti elettroniche sono collegate da piste conduttrici stampate su una tavoletta isolante; queste piste non si possono incrociare.

PROBLEMA DEL POSTINO CINESE

Un postino deve consegnare la posta nelle seguenti strade. Può partire da A e tornare in A senza percorrere due volte la medesima strada ?

Equivalente: Disegnare la seguente figura senza sollevare la penna dal foglio (partendo e tornando in un punto arbitrario)

SPELLING CHECKER

Cercare una parola nel dizionario. Zucca: si ricorre all'uso degli alberi binari

TORNEO AD ELIMINAZIONE

16 Giocatori: Torneo ad eliminazione diretta. Anche in questo caso si usano gli alberi binari.

## 1.2 Metodi di conteggio

Contare un numero (finito) di oggetti non è sempre facile ma è un problema che si pone spesso in informatica: per esempio contare le operazioni fatte da un algoritmo per misurarne l'efficienza.

METODI DI CONTEGGIO = ENUMERAZIONE = CALCOLO COMBINATORIO

- Numero di parole con un fissato alfabeto
- Numero di sequenze binarie, numero di sottoinsiemi di  $n$  elementi
- Numero di soluzioni intere di una data equazione lineare
- Numero di targhe automobilistiche
- Probabilità discreta: Quale è la probabilità che 4 carte diano un poker? (d'assi?)

### 1.3 Relazioni di ricorrenza

Spesso è difficile calcolare direttamente una quantità (come il numero  $K_n$  di sottoinsiemi di  $n$  elementi con una data proprietà). E' più semplice trovare una relazione di ricorrenza che determina  $K_n$  in funzione di  $K_{n-1}$ .

RELAZIONI DI RICORRENZA = EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE FINITE

Problemi ricorsivi:

1. Calcolo del determinante di una matrice quadrata
2. Numeri di Fibonacci
3. Calcolo di  $n!$
4. Torre di Hanoi

**Esempio 1.1:**

$a_n = a_{n-1} * n \rightarrow$  RELAZIONE DI RICORRENZA

$a_0 = 1 \rightarrow$  CONDIZIONE INIZIALE

$a_n = n! \rightarrow$  SOLUZIONE

**Esempio 1.2:**

**Evoluzione di un capitale investito in banca:** All'anno 0 investo 1000EUR. Il mio investimento dà un interesse del 4 % annuo. Dopo  $n$  anni quanto e' il mio capitale?

$a_0 = 1000$

$a_1 = 1000 + \frac{4}{100} * 1000 = 1.04 * a_0$

$a_n = (1.04) * a_{n-1} \rightarrow$  RELAZIONE DI RICORRENZA

$a_2 = 1.04 * a_1 = (1.04)^2 * a_0$

$a_n = (1.04)^n * a_0 \rightarrow$  SOLUZIONE

**Esempio 2:**

**Calcolare il massimo di una stringa  $(x_1, .., x_n)$  di  $n$  numeri**

$a_n$  = numero di confronti necessari per calcolare il massimo di una stringa di lunghezza  $n$

$a_n = a_{n/2} + a_{n/2} + 1 \rightarrow$  RELAZIONE DI RICORRENZA

$a_2 = 1 \rightarrow$  SOLUZIONE

## 2 Seconda lezione: i grafi

### 2.1 Grafi non orientati

DEFINIZIONE: un grafo (non orientato) è una coppia  $G(V,E)$  dove:

- $V = v_1, \dots, v_n$  è un insieme finito di vertici (nodi) rappresentati da punti sul piano.
- $E$  è un insieme di archi che sono coppie *non* ordinate di vertici, detti spigoli.

Un grafo non orientato è anche detto *grafo semplice* ossia nell'insieme delle coppie non ci sono né cappi né archi(spigoli) paralleli.

*Ex:*

$$V = \{v_1, \dots, v_8\}$$

$$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), \dots\}$$

Definizioni:

- Estremi di un arco
- *Arco incidente* nei suoi estremi, cioè collega due vertici
- *Vertici adiacenti* (nonadiacenti) : sono gli estremi di un arco
- *Grado del vertice  $v$*  (si indica con  $d(v)$ ): numero di volte in cui  $v$  è estremo di un arco.  $d(v_3) = 3, d(v_8) = 0$

**Due proprietà fondamentali** Per ogni grafo  $G(V, E)$  vale la seguente relazione:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 | E | \quad (1)$$

Poichè ogni arco ha 2 estremi, contribuisce 2 alla somma dei gradi.

**Corollario:** Dato  $G(V,E)$  non orientato, alcuni gradi sono dispari altri pari. Il numero di vertici di grado dispari è sempre pari. Ossia:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_d} d(v) + \sum_{v \in V_p} d(v) \quad (2)$$

*NdA:* la sommatoria dei gradi di tutti i vertici è un multiplo di 2, poichè essa è equivalente a  $2 | E |$ . Ne consegue che se dividiamo i vertici per grado

dispari e pari entrambi i risultati delle sommatorie dovranno essere pari (Ex:  $2 + 4$  è pari ,  $5 + 2$  è dispari).

La prima sommatoria è fatta da vertici con grado dispari che possono essere per esempio,  $3, 5, \dots$

Quando vengono sommati due numeri dispari se ne ottiene uno pari, ma se invece sommiamo 3 numeri dispari avremmo un risultato dispari. (Ex:  $3 + 3$  è pari,  $3 + 3 + 3$  è dispari). Nella seconda sommatoria non ci interessa sapere quant'è la quantità di gradi che si hanno effettivamente perchè ne risulterà sempre una somma pari.

Ogni grafo semplice ha al *massimo*  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  archi dove  $n = |V|$ .

$\binom{n}{2}$  è il numero di coppie non ordinate di  $n$  elementi.

Supponendo di avere un grafo composto da  $V = n$ , il numero minimo di archi è 0, mentre quello massimo è  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Ne deriva che:

$$0 \leq |E| \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad (3)$$

Nei grafi bipartiti il numero *minimo* è 0 mentre quello massimo è dato dal prodotto fra la quantità dei vertici dei due sottoinsiemi:

$$|V_1| * |V_2| \quad (4)$$

Se vale

$$|V_1| * |V_2| = E$$

allora ho un grafo bipartito completo.

### 2.1.1 Terminologia

**Cammino o path:** corrisponde a una sequenza di vertici distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel cammino è collegata da un arco.

**Circuito o ciclo:** è un particolare cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono coincidenti.

**Lunghezza:** numero di archi.

**Pari, dispari:** parità della lunghezza, cioè se la quantità del numero di archi è pari o dispari.

**Connesso:** per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega

**Percorso:** sequenza di vertici NON NECESSARIAMENTE distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel percorso è collegata da un arco. (Cioè è una maniera di attraversare parte del grafo, possibilmente passando più di una volta per lo stesso vertice o arco). Un percorso è *chiuso* se le

estremità coincidono.

**Teorema:** Dato un percorso con estremità  $v_1, v_n$  esiste un cammino con estremità  $v_1, v_n$

**Teorema:** Un percorso chiuso di lunghezza dispari contiene un ciclo di lunghezza dispari.

Se gli unici vertici coincidenti sono le estremità allora il percorso è un ciclo dispari. Altrimenti il percorso si partiziona in due percorsi di lunghezza minore, uno pari e l'altro dispari.

### 2.1.2 Alcuni grafi

**Grafo completo:** ogni coppia di vertici è adiacente (collegati da un arco). E' denominato  $K_n$  ( $n$  è il numero di vertici)

**Bipartito:** i vertici sono partizionabili in due sottoinsiemi,  $U$  e  $W$ , e ogni arco è incidente in un vertice di  $U$  e uno di  $W$ .

**Grafo bipartito completo**  $K_{n_1, n_2}$  Grafo bipartito, le due parti della bipartizione hanno  $n_1, n_2$  vertici rispettivamente ed ogni vertice di una parte è adiacente a tutti i vertici della seconda parte.

**Foresta:** Grafo senza cicli (=aciclico)

**Albero:** Foresta connessa.

Un grafo è  $K$ -regolare se ogni nodo ha grado  $k$ . I grafi 3-regolari si chiamano GRAFI CUBICI.

### Disegnare un grafo

Un "disegno" di un grafo ne illustra le proprietà. Ma i "disegni" dello stesso grafo sono molteplici. Noi diremo che due grafi sono ISOMORFI se uno è il disegno dell'altro.

Formalmente,  $G(V, E)$  e  $G'(V', E')$  sono isomorfi se esiste una biezion  $F$ : che porta  $V$  in  $V'$  e che preserva le adiacenze. Cioè  $uv$  è un arco di  $G$  se e solo se  $f(u)f(v)$  è un arco di  $G'$ .

**Multigrafi** Finora abbiamo visto grafi SEMPLICI, perche' fra ogni coppia di vertici c'è al massimo un arco. In generale possono esserci ARCHI PARALLELI, cioè archi che hanno le stesse estremità e CAPPI: Archi con le estremità coincidenti. Tali grafi si dicono MULTIGRAFI.

*GRADO DI UN NODO:* I cappi contribuiscono 2 al grado dell'unica estremità.



**Sottografi:** Un sottografo di un grafo  $G(V, E)$  è un grafo  $G'(V', E')$  con  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .

Dato  $G(V, E)$  un suo sottografo  $G'(V', E')$  si dice **INDOTTO** da  $V'$  se  $E'$  è il sottoinsieme di archi in  $E$  con entrambe le estremità in  $V'$ . Cioè per ogni arco  $(u, v) \in E$ , se  $u \in V'$  e  $v \in V'$  allora  $(u, v) \in E'$ .

## 2.2 Grafi orientati

**DEFINIZIONE:** un grafo orientato è una coppia  $D(V, A)$ , dove:

$V = v_1, \dots, v_n$  è un insieme finito di nodi o vertici.

L'insieme  $A$  di archi è un insieme di coppie *ORDINATE* di vertici.

Un arco ha un senso di percorrenza (che si indica con una freccia), dalla testa alla coda.

Nodo iniziale e finale di uno arco = coda e testa dell'arco

- **Archi paralleli:** hanno la stessa testa e la stessa coda.
- **Cappio:** la testa e la coda coincidono.

**Grafo orientato Semplice:** non ci sono cappi e nemmeno archi paralleli.

**Multigrafo orientato:** ci sono cappi e archi paralleli.

### 2.2.1 Terminologia

**Cammino orientato:** sequenza di nodi distinti, dove ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco (nodo iniziale, nodo finale)

**Lunghezza del cammino:** numero di archi nel cammino.

Un grafo orientato è *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi  $u, v$  esiste un cammino orientato da  $u$  a  $v$  ed un cammino orientato da  $v$  a  $u$ .

**Circuito:** cammino nel quale il primo nodo coincide con l'ultimo.

**Lunghezza del circuito:** numero di archi.

**Parità del circuito:** parità della lunghezza.

### 2.2.2 Proprietà dei grafi orientati

**Semplice massimo numero di archi:** numero di coppie ORDINATE di  $n = |V|$  elementi.

**In-degree(v)** = Grado entrante di un nodo v: numero di archi entranti in v  $\Rightarrow d^{\text{in}}(v)$

**Out-degree(v)** = Grado uscente di un nodo v: numero di archi uscenti da v  $\Rightarrow d^{\text{out}}(v)$

Per ogni grafo orientato  $D(V,A)$  vale:  $|A| = \sum_{v \in V} d^{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d^{\text{out}}(v)$ .

**Teorema** In ogni grafo orientato  $D(V,A)$ , sono uguali tra loro:

- la somma dei gradi uscenti dei nodi
- la somma dei gradi entranti dei nodi
- il numero di archi del grafo

$$\sum_{v \in V} d^{\text{out}}(v) = \sum_{v \in V} d^{\text{in}}(v) = |A| \quad (5)$$

Un arco  $uv$  contribuisce 1 a  $d^{\text{out}}(u)$  e 1 a  $d^{\text{in}}(v)$

**Tornei:** Un *TORNEO* è un grafo orientato in cui per ogni coppia di vertici esiste ESATTEMENTE uno degli archi  $uv$ ,  $vu$ .

(Si chiamano tornei (tournaments) perché indicano gli esiti di un torneo e il senso di ogni arco indica l'esito dell'incontro fra i giocatori rappresentati dai suoi estremi).

### 2.2.3 Rappresentazione di grafi mediante matrici

1. MATRICE DI INCIDENZA VERTICI/ARCHI
2. MATRICE DI INCIDENZA NODI/ARCHI
3. MATRICE DI ADIACENZA VERTICI/VERTICI O NODI/NODI
4. List of edges, linked adjacency list, forward star, backward star ect..