Appunti di Matematica Discreta

Sara Righetto

19 maggio 2018

Indice

Sommario

La matematica discreta, è lo studio di strutture matematiche che sono fondamentalmente discrete, nel senso che non richiedono il concetto di continuità che voi vedete nei corsi di analisi.

La maggior parte degli oggetti studiati nella matematica discreta sono insiemi numerabili come i numeri interi o insiemi finiti, come gli interi da 1 a k.

Altri oggetti importanti sono i grafi, che modellano reti di connessione.

La matematica discreta è diventata famosa per le sue applicazioni in informatica. I concetti e le notazioni della matematica discreta sono utili per lo studio o la modellazione di oggetti o problemi negli algoritmi informatici e nei linguaggi di programmazione.

Argomenti:

- Teoria dei grafi
- Metodi di conteggio
- Relazioni di ricorrenza

1 Prima lezione: Introduzione

1.1 Teoria dei grafi

Grafo = G(V,E)
Planarità di un circuito stampato: Nei circuiti stampati, le componenti elettroniche sono collegate da piste conduttrici stampate su una tavoletta isolante; queste piste non si possono incrociare.

Problema del postino cinese
Un postino deve consegnare la posta nelle seguenti strade. Può partire da A e tornare in A senza percorrere due volte la medesima strada ?
Equivalente: Disegnare la seguente figura senza sollevare la penna dal foglio (partendo e tornando in un punto arbitrario)

Spelling checker
Cercare una parola nel dizionario. Zucca: si ricorre all'uso degli alberi binari

Torneo ad eliminazione
16 Giocatori: Torneo ad eliminazione diretta. Anche in questo caso si usano gli alberi binari.

1.2 Metodi di conteggio

Contare un numero (finito) di oggetti non è sempre facile ma è un problema che si pone spesso in informatica: per esempio contare le operazioni fatte da un algoritmo per misurarne l'efficienza.

Metodi di conteggio = Enumerazione = Calcolo combinatorio

Esempi:

- Numero di parole con un fissato alfabeto
- Numero di sequenze binarie, numero di sottoinsiemi di n elementi
- Numero di soluzioni intere di una data equazione lineare
- Numero di targhe automobilistiche
- Probabilità discreta: Quale è la probabilità che 4 carte diano un poker? (d'assi?)

1.3 Relazioni di ricorrenza

Spesso è difficile calcolare direttamente una quantità (come il numero K_{n} di sottoinsiemi di n elementi con una data proprietà). E' più semplice trovare una relazione di ricorrenza che determina K_{n} in funzione di $K_{\mathrm{n}-1}$.

Relazioni di ricorrenza = Equazioni alle differenze finite

Problemi ricorsivi:

1. Calcolo del determinante di una matrice quadrata
2. Numeri di Fibonacci
3. Calcolo di n!
4. Torre di Hanoi

`Esempio 1.1:`
$a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}-1} * n \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_0 = 1 \rightarrow$ CONDIZIONE INIZIALE

$a_{\mathrm{n}} = n! \rightarrow$ SOLUZIONE

`Esempio 1.2:`
Evoluzione di un capitale investito in banca: All'anno 0 investo 1000EUR. Il mio investimento dà un interesse del 4 % annuo. Dopo n anni quanto e' il mio capitale?

$a_0 = 1000$
$a_1 = 1000 + \frac{4}{100} * 1000 = 1.04 * a_0$
$a_{\mathrm{n}} = (1.04) * a_{\mathrm{n}-1} \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_2 = 1.04 * a_1 = (1.04)^2 * a_0$
$a_{\mathrm{n}} = (1.04)^n * a_0 \rightarrow$ SOLUZIONE

`Esempio 2:`
Calcolare il massimo di una stringa (x_1, .. , x_n) di n numeri
a_n = numero di confronti necessari per calcolare il massimo di una stringa di lunghezza n

$a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{n}/2} + a_{\mathrm{n}/2} + 1 \rightarrow$ RELAZIONE DI RICORRENZA
$a_2 = 1 \rightarrow$ SOLUZIONE

2 Seconda lezione: Grafi orientati e non orientati

2.1 Grafi non orientati

DEFINIZIONE: un grafo (non orientato) è una coppia G(V,E) dove:

- $V = v_1, ..., v_n$ è un insieme finito di vertici (nodi) rappresentati da punti sul piano.
- E è un insieme di archi che sono coppie *non* ordinate di vertici, detti spigoli.

Un grafo non orientato è anche detto *grafo semplice* ossia nell'insieme delle coppie non ci sono né cappi né archi(spigoli) paralleli.

Ex:
$V = \{v_1, .., v_8\}$
$E = \{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_2, v_3), ..\}$

Definizioni:

- Estremi di un arco
- *Arco incidente* nei suoi estremi, cioè collega due vertici
- *Vertici adiacenti* (nonadiacenti) : sono gli estremi di un arco
- *Grado del vertice v* (si indica con $d(v)$): numero di volte in cui v è estremo di un arco. $d(v3) = 3, d(v8) = 0$

Due proprietà fondamentali Per ogni grafo G(V, E) vale la seguente relazione:

$$\sum_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} d(v) = 2 \mid E \mid \tag{1}$$

Poichè ogni arco ha 2 estremi, contribuisce due volte alla somma dei gradi.

Corollario: Dato G(V,E) non orientato, alcuni gradi sono dispari altri pari. Il numero di vertici di grado dispari è sempre pari. Ossia:

$$\sum v \in V d(v) = \sum v \in V_d d(v) + \sum v \in V_p d(v) \tag{2}$$

NdA: la sommatoria dei gradi di tutti i vertici è un multiplo di 2, poichè essa è equivalente a $2 \mid E \mid$. Ne consegue che se dividiamo i vertici per grado dispari e pari entrambi i risultati delle sommatorie dovranno essere pari (Ex: $2+4$ è pari , $5+2$ è dispari).
La prima sommatoria è fatta da vertici con grado dispari che possono essere per esempio, $3, 5, \ldots$
Quando vengono sommati due numeri dispari se ne ottiene uno pari, ma se invece sommassimo 3 numeri dispari avremmo un risultato dispari. (Ex: $3+3$ è pari, $3+3+3$ è dispari). Nella seconda sommatoria non ci interessa sapere quant'è la quantità di gradi che si hanno effettivamente perchè ne risulterà sempre una somma pari.

Ogni grafo semplice ha al *massimo* $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$ archi dove $n = \mid V \mid$.
$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ è il numero di coppie non ordinate di n elementi.
Suppondendo di avere un grafo composto da $V = n$, il numero minimo di archi è 0, mentre quello massimo è $\frac{n(n-1)}{2}$.
Ne deriva che:

$$0 \leq \mid E \mid \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

Nei grafi bipartiti il numero *minimo* è 0 mentre quello massimo è dato dal prodotto fra la quantità dei vertici dei due sottoinsiemi:

$$\mid V1 \mid * \mid V2 \mid \tag{4}$$

Se vale $\mid V1 \mid * \mid V2 \mid = E$ allora ho un grafo bipartito completo.

2.1.1 Terminologia

Cammino o path: corrisponde a una sequenza di vertici distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel cammino è collegata da un arco.
Circuito o ciclo: è un particolare cammino nel quale il primo e l'ultimo vertice sono coincidenti.
Lunghezza: numero di archi.

Pari, dispari: parità della lunghezza, cioè se la quantità del numero di archi è pari o dispari.
Connesso: per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li collega
Percorso: sequenza di vertici NON NECESSARIAMENTE distinti, dove ogni coppia di vertici consecutivi nel percorso è collegata da un arco. (Cioè è una maniera di attraversare parte del grafo, possibilmente passando più di una volta per lo stesso vertice o arco). Un percorso è *chiuso* se le estremità coincidono.

Teorema: Dato un percorso con estremità v_1, v_{n} esiste un cammino con estremità v_1, v_{n}.

Teorema: Un percorso chiuso di lunghezza dispari contiene un ciclo di lunghezza dispari.
Se gli unici vertici coincidenti sono le estremità allora il percorso è un ciclo dispari. Altrimenti il percorso si partiziona in due percorsi di lunghezza minore, uno pari e l'altro dispari.

2.1.2 Alcuni grafi

Grafo completo: ogni coppia di vertici è adiacente(collegati da un arco). E' denominato K_n (n è il numero di vertici)
Bipartito: i vertici sono partizionabili in due sottoinsiemi, U e W, e ogni arco è incidente in un vertice di U e uno di W.
Grafo bipartito completo $\mathrm{K}_{\mathrm{n1,n2}}$ Grafo bipartito, le due parti della bipartizione hanno $_{\mathrm{n1,n2}}$ vertici rispettivamente ed ogni vertice di una parte è adiacente a tutti i vertici della seconda parte.
Foresta: Grafo senza cicli (=aciclico)
Albero: Foresta connessa.
Un grafo è K-regolare se ogni nodo ha grado k. I grafi 3-regolari si chiamano GRAFI CUBICI.

Disegnare un grafo: un "disegno" di un grafo ne illustra le proprietà. Ma i "disegni" dello stesso grafo sono molteplici. Noi diremo che due grafi sono *isomorfi* se uno è il disegno dell'altro.
Formalmente, G(V,E) e G'(V', E') sono isomorfi se esiste una biezione F: che porta V in V' e che preserva le adiacenze. Cioè uv è un arco di G se e solo se f(u)f(v) è un arco di G'.
Multigrafi: finora abbiamo visto grafi semplici, perchè fra ogni coppia di vertici c'è al massimo un arco. In generale possono esserci archi paralleli, cioè archi che hanno le stesse estremità e cappi: Archi con le estremità coincidenti.

Tali grafi si dicono multigrafi.
Grado di un nodo: I cappi contribuiscono 2 al grado dell'unica estremità.
Sottografi: un sottografo di un grafo G(V,E) è un grafo G'(V', E') con V'$\subseteq$ V e E'$\subseteq$ E.
Dato G(V,E) un suo sottografo G'(V',E') si dice INDOTTO da V' se E' è il sottoinsieme di archi in E con entrambe le estremità in V'. Cioè per ogni arco (u,v) $\in$ E, se u $\in$ V' e v $\in$ V' allora (u,v) $\in$ E'.

2.2 Grafi orientati

DEFINIZIONE: un grafo orientato è una coppia D(V,A), dove:
$V = v_1, ..., v_{\text{n}}$ è un insieme finito di nodi o vertici.
L'insieme A di archi è un insieme di coppie *ordinate* di vertici.
Un arco ha un senso di percorrenza(che si indica con una freccia), dalla testa alla coda.

Nodo iniziale e finale di uno arco = coda e testa dell'arco

- **Archi paralleli:** hanno la stessa testa e la stessa coda.
- **Cappio:** la testa e la coda coincidono.

Grafo orientato Semplice: non ci sono cappi e nemmeno archi paralleli.
Multigrafo orientato: ci sono cappi e archi paralleli.

2.2.1 Terminologia

Cammino orientato: sequenza di nodi distinti, dove ogni coppia di nodi consecutivi nel cammino è collegata da un arco (nodo iniziale, nodo finale)
Lunghezza del cammino: numero di archi nel cammino.
Un grafo orientato è *fortemente connesso* se per ogni coppia di nodi u, v esiste un cammino orientato da u a v ed un cammino orientato da v a u.
Circuito: cammino nel quale il primo nodo coincide con l'ultimo.
Lunghezza del circuito: numero di archi.
Parità del circuito: parità della lunghezza.

2.2.2 Proprietà dei grafi orientati

***Semplice* massimo numero di archi**: numero di coppie ORDINATE di $n =\mid V \mid$ elementi.
In-degree(v) = Grado entrante di un nodo v: numero di archi entranti in v $\Rightarrow d^{\text{in}}(v)$

Out-degree(v) = Grado uscente di un nodo v: numero di archi uscenti da v $\Rightarrow d^{\text{out}}(v)$

Per ogni grafo orientato D(V,A) vale:

$$\mid A \mid = \sum v \in V d^{\text{in}}(v) = \sum{}_{v} \in V d^{\text{out}}(v)$$

Teorema In ogni grafo orientato D(V,A), sono uguali tra loro:

- la somma dei gradi uscenti dei nodi
- la somma dei gradi entranti dei nodi
- il numero di archi del grafo

$$\sum v \in V d^{\text{out}}(v) = \sum v \in V d^{\text{in}}(v) = \mid A \mid \tag{5}$$

Un arco uv un contribuisce 1 a $\mathrm{d}^{\text{out}}(\mathrm{v})$ e 1 a $\mathrm{d}^{\text{in}}(\mathrm{v})$

Tornei: Un *torneo* è un grafo orientato in cui per ogni coppia di vertici esiste ESATTAMENTE uno degli archi uv , uv.
(Si chiamano tornei (tournaments) perche indicano gli esiti di un torneo e il senso di ogni arco indica l'esito dell'incontro fra i giocatori rappresentati dai suoi estremi).

2.2.3 Rappresentazione di grafi mediante matrici

1. MATRICE DI INCIDENZA VERTICI/ARCHI
2. MATRICE DI INCIDENZA NODI/ARCHI
3. MATRICE DI ADIACENZA VERTICI/VERTICI O NODI/NODI
4. List of edges, linked adjacency list, forward star, backward star ect..

3 Terza lezione: Connettività

Ricordiamo: dato G(V,E) u,v sono connessi se esiste un cammino con estremità u, v.
La CONNESSIONE ha le seguenti proprietà:

- u è connesso a se stesso $\rightarrow$ *riflessività*
- u,v connessi, v,u connessi $\rightarrow$ *simmetria*
- u,t connessi, t,v, connessi, allora u,v connessi $\rightarrow$ *transitività*

Queste proprietà implicano che esiste una *partizione* di V in parti $V1, ...Vk$ dove: u,v sono connessi se appartengono alla stessa parte.
Queste parti sono le COMPONENTI CONNESSE di G.
G è *connesso* se c'è una sola parte! ($k = 1$).

Dato $S \subseteq V$ definiamo il *taglio* associato ad S come l'insieme di archi.
$\delta(S) = \{\{uv\} \in E, \mid S \cap \{u, v\} \mid = 1\}$
e diciamo che $\delta(S)$ *separa* u, v se $\mid S \cap u, v \mid = 1$

Teorema Dato G(V,E), vertici u, v appartengono alla stessa componete connessa di G se e solo se non esiste un taglio $\delta(S) = \emptyset$ Dimostriamo che: dato $\delta(S)$ che separa u, v e P cammino fra u, v allora P e $\delta(S)$ hanno almeno un arco in comune, cioè $\mid P \cap \delta(S) \mid \geq 1$
Se $\delta(S) \neq \emptyset$ per ogni taglio $\delta(S)$ che separa u, v allora esiste un cammino fra u, v.

3.1 Calcolo delle componenti connesse

Input: G(V,E), v in V
Output: Componente connessa C che contiene v

- Poni $v \in C$ e dichiara v non esaminato
- *esame vertice:* scegli $x \in C$ non esaminato. Aggiungi a C ongi vertice adiacente a x che non è in C.
- *stop* quando ogni vertice in C è esaminato.
- C è la componente connessa che contiene v.

Sia C componente connessa che contiene v calcolata dall'algoritmo. Si noti che $\delta(S) = \emptyset$
Se $C = V$ il grafo è connesso. Se C è strettamente contenuto in V, sia u in V o C allora $\delta(C)$ separa u e v.

3.2 Connettività

Ricordiamo: un grafo non orientato G(V,E) si dice *connesso* se, per ogni coppia di vertici, esiste un cammino che li collega, altrimenti si dice *disconnesso*. Le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Connettività sugli archi Arco connettività fra $u, v = K^E_{uv}(G)$
Cardinalità minima di un taglio che separa $u, v = min\{\mid \delta(S) \mid: S$ separa $u, v\}$
Ricordiamo: dato G(V,E) u,v in componenti connesse distinte se e solo se $K^E_{uv}(G) = 0$
Conseguenza: $K^E_{uv}(G)$ è il minimo numero di archi da togliere a G affinchè u,v diventino disconnessi.

Teorema Per ogni $u, vK^E_{uv}(G)$ è il massimo numero di cammini con estremità u, v che non hanno archi in comune (disgiunti sugli archi).

Ricordiamo che: G(V,E) connesso se e solo se non esiste $\delta(S)$ che separa due vertici tali che $\delta(S) = \emptyset$

Definiamo: arco connettività di G $K^E(G)$ = minimo numero di archi da togliere affinchè G sia disconnesso = cardinalità minima di un taglio che separa almeno 2 vertici.
Allora: $K^E(G) = \min K^E_{uv}(G)$

3.2.1 Connettività (sui vertici)

Dato G(V,E) grafo connesso, semplice e non completo:
Connettività (sui vertici) K(G) = minimo numero di vertici la cui rimozione trasforma G in un grafo sconnesso (= non connesso).

Vertex cutset = insieme di vertici $U \subseteq V$con le due seguenti proprietà:

- la rimozione di tutti i vertici di U trasforma G in un grafo sconnesso;
- la rimozione di alcuni dei vertici di U, ma non tutti, lascia il grafo connesso.

Quindi, se G non è completo: $K(G)$ = cardinalità del vertex cutset di G di cardinalità minima.
Un grafo completo con n vertici non ha vertex cutsets. Per convenzione, la connettività sui vertici di un grafo completo con n vertici è posta uguale a n-1.

Dato G(V,E) e i vertici u, v *non adiacenti*, $K_{\text{uv}}(G)$ cardinalità minima di un separatore S tale che u, v sono in componenti connesse distinte di G/S.
Quindi se G(V,E) è un grafo semplice non completo allora: $K(G) = \min K_{\text{uv}}(G)u, v$ non adiacenti.
Dato G(V,E) e vertici u, v non adiacenti, P un cammino con estremità u, v, S un separatore con u, v in componenti connesse distinte di G/S, allora *S contiene almeno un vertice intermedio di P*

3.2.2 Disequazioni

Teorema Sia G(V,E) grafo con almeno due vertici. Allora:

$$K(G) \leq K^E(G) \leq \delta(G)$$

dove il simbolo d(G) indica il grado del vertice di grado minimo di G: $\delta(G) = \min d(v) v \in V$
In particolare, se G è il grafo completo con n vertici, $n \geq 2$, allora $K(G) = K^E(G) = \delta(G) = n - 1$
Se $G = K_n$ allora $K(G) = n-1 \leq K(G) \leq \delta(G) = n-1$, allora $\lambda(G) = n-1$

3.3 Affidabilità di una rete

Rete di comunicazione tra soggetti: è necessario fornire percorsi alternativi di comunicazione, per fronteggiare:

- inattività di un soggetto;
- guasto di una linea;
- carico eccessivo di una linea, che superi la sua capacità.

Dato G grafo:

- per ogni coppia di nodi esistono almeno Ke(G) cammini alternativi che li collegano (tali che non ci siano due cammini che usano qualche arco in comune);

- per ogni coppia di nodi esistono almeno K(G) cammini alternativi che li collegano (tali che non ci siano due cammini che usano qualche vertice in comune).

In generale vale la seguente formula:

$$K(G) \leq Ke(G) \leq d(G) \leq 2\frac{\mid E \mid}{\mid V \mid}$$

grado medio in $G =$ media

$$\{gr(v) : v \in V\} = \frac{\sum(v \in V)gr(v)}{\mid V \mid} = \frac{2 \mid E \mid}{\mid V \mid}$$

Si dice che un grafo ha connettività ottima se vale

$$K(G) = Ke(g) = d(G) = 2\frac{\mid E \mid}{\mid V \mid}$$

Proprietà:

1. ha massima connettività sugli archi e sui vertici tra tutti i grafi con $\mid V \mid$ vertici e $\mid E \mid$ archi
2. è δ -regolare

$K^E_{uv}(G) =$ numero massimo di cammini con estremità u, v che non hanno archi in comune.
$K_{uv}(G) =$ numero massimo di cammini con estremità u, v che non hanno nodi intermedi in comune.

Dimostrazione Dimostrare che non può esistere nessun taglio del grafo di Peterson con 8 archi.
G(V,E) grafo di peterson, $\mid V \mid= 10, \mid E \mid= 15$.
Suppongo che esista un taglio $\delta(S)$ con 8 archi, quindi:

- G(V,E \ E') è sconnesso
- G(V,E \ E") è connesso $\forall E'' \subsetneq E'$

Sia $E'' \subsetneq E'$, con $\mid E'' \mid= 7$
G(V,E \ E") quindi dovrebbe essere connesso, ma questo è impossibile avendo 10 vertici e $15 - 7 = 8$ archi (il grafo minimalmente connesso con 10 vertici è un albero, e ha 9 archi).

4 Quarta lezione: Grafi bipartiti e isomorfi

4.1 Grafi bipartiti

Ricordiamo che: un grafo G(V,E) è bipartito se il suo insieme di vertici può essere partizionato in due sottoinsiemi, V_1 e V_2, in modo che ogni arco ha un estremità in $V1$ e l'altra in $V2$. Scriveremo G(V_1, V_2; E).
Massimo numero di archi in un grafo bipartito semplice: $\mid V_1 \mid * \mid V_2 \mid$

4.1.1 Condizione necessaria E sufficiente

Osservazione 1: Se G(V,E) è bipartito e G'(V',E') sottografo di G, allora G'(V',E') bipartito.
Ovvero: G'(V',E') sottografo di G(V,E), G' è nonbipartito, allora anche G è nonbipartito.
Osservazione 2: Se G(V,E) è bipartito con bipartizione V1 e V2, sia v un vertice. Posso assumere senza perdita di generalità v in V1. Allora tutti I vertici adiacenti a v DEVONO stare in V2.
Cioe' se v in V1, allora l' arco vu "forza" u in V2.
Osservazione 3: Se G(V,E) contiene un ciclo dispari come sottografo, allora G(V,E) *non* è bipartito.

Teorema: Un grafo G(V,E) è bipartito se e solo se G non contiene un ciclo di lunghezza dispari.
Per quanto detto sopra, se G contiene un ciclo dispari, G *non* è bipartito.
Dimostriamo che se G *non* contiene un ciclo dispari, allora G è bipartito.
Scegliamo v in V. Sia:

- V1 l'insieme dei nodi di G raggiungibili da v con un cammino di lunghezza pari.
- V2 l'insieme dei nodi di G raggiungibili da v con un cammino di lunghezza dispari.

N.B. Se G è bipartito allora $V1 \cap V2 = \emptyset$ e nessun arco di G ha entrambe le estremità in V1 o in V2.

4.1.2 Algoritmo per bipartizione

Input: Un grafo G(V,E)
Output: Se G è bipartito, una bipartizione R, B di G.
Per ogni componente connessa di G(V,E):

- Poni $v \in B, R = \emptyset$
- *esame vertice* $v \in B(R)$. Aggiungi a $R(B)$ ogni vertice adiacente a v non in $R \cup B$
- *stop* quando ogni vertice di $R \cup B$ è esaminato
- G(V,E) è bipartito se e solo se ogni arco e ha un estremità ub R ed una in B

4.2 Grafi isomorfi

Due grafi G(V,E) e G'(V',E') sono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca (isomorfismo) tra i vertici di V e quelli di V' tale che:
due vertici di V sono adiacenti in G se e solo se i corrispondenti vertici di V' sono adiacenti in G'.

Determinare se due grafi sono isomorfi: Per farlo bisogna cercare l'isomorfismo.
Se due grafi sono isomorfi:

- hanno lo stesso numero di *vertici*
- hanno lo stesso numero di *archi*
- hanno lo stesso numero di vertici con lo *stesso grado*

4.2.1 Condizioni necessarie

Due grafi sono isomorfi se:

- hanno lo stesso numero di *vertici*
- hanno lo stesso numero di *archi*
- hanno lo stesso numero di vertici con lo *stesso grado*
- i complementari devono essere isomorfi
- hanno gli stessi sottografi indotti.

Se le prime 3 condizioni sono verificate, costruisco il possibile isomorfismo accoppiando vertici dello stesso grado, controllando che la condizione 5 via verificata.

5 Quinta lezione: Foreste, alberi e cammini

5.1 Definizioni

Una *foresta* è un grafo senza cicli (aciclico).
Un *albero* è una foresta connessa.

Se F(V,E) è una foresta, allora $|E| = |V| - n$ (con n numero delle componenti connesse di F)
Se T(V,E) è un albero, allora $|E| = |V| - 1$.

Se T(V,E) è un albero con almeno 2 nodi, allora T contiene almeno 2 nodi di grado 1.

Teorema Sia T(V,E) un grafo connesso. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- T non ha cicli.
- Per ogni coppia di vertici distinti, x e y, esiste un unico cammino che li collega.
- Il grafo T è minimalmente connesso, cioè la rimozione di un qualsiasi arco lo disconnette, cioè ogni arco è un taglio.

Dimostrazione:
$a \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$

$a \Rightarrow c$) T connesso, senza cicli $\rightarrow$ ogni arco è un taglio. Suppongo che esista un arco u, v tale che $T \setminus uv$ sia connesso. In $T \setminus uv$ esiste un cammino P_{uv} che collega u e v.

$c \Rightarrow b$) T connesso tale che ogni arco è un taglio. $\forall x, y \in V, x \neq y$ esiste un unico P_{uv}.
Suponiamo che esistano $x, y \in V, x \neq y$ tali che ci siano 2 cammini differenti che li collegano (P'_{xy} e P''_{xy}), sia (u,v) il primo arco di P_{xy} che non appartiene a P''_{xy}
$T \setminus (uv)$ non è connesso, u e v appartengono a differenti componenti connesse.
ma in $T \setminus (uv)$ esiste un persorso u - v.

$b \Rightarrow a$) T tale che $\forall x, y \in V, x \neq y$ esiste un unico cammino. Supponiamo che C sia un circuito di T. Siano x e y $\in$ C, x $\neq$ y.
Esistono due cammini distinti che collegano x e y.

5.2 Albero di peso minimo. Algoritmo di Kruskal.

Problema: Dato G(V,E) connesso, con pesi $w(e), e \in E$
Input: G(V,E) connesso, pesi
Output: Albero di peso minimo.

- *Ordina* gli archi $1, 2, .., m$ in ordine nondecrescente di peso: $w(1) \leq w(2) \leq .. \leq w(m)$
- *Inizializzazione:* Poni $T = \emptyset$ ed $i = 1$.
- *Iterazione i:* Se l'arco i ha le estremità in componenti connesse distinte di T, allora poni $T \leftarrow T \cup \{i\}$. Altrimenti $T \leftarrow T$. Poni $i \leftarrow i + 1$ e ripeti l'iterazione.
- *Stop:* Quando $i = m$.

5.3 Esercizi

Es.1 Dimostrare che ogni grafo non orientato semplice G(V,E), senza cicli e con $|E| = |V| - 1$ è un albero.

Svolgimento:
Devo dimostrare che G(V,E) è connesso. Sia c il numero di componenti connesse di G.

$G_1(V_1, E_1)$ connesso e senza circuiti $\rightarrow$ albero; $|E_1| = |V_1| - 1$
$G_c(V_c, E_c)$connesso e senza circuiti $\rightarrow$ albero; $|E_c| = |V_c| - 1$
Sommando: $|E| = |E_1| + |E_2| + .. + |E_c| = |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + .. + |V_c| - 1 = |V| - c$

Ma: $|E| = |V| - 1$ per ipotesi $\Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ G connesso $\Rightarrow$ è un albero.

Es.2 Dimostrare che ogni grafo non orientato semplice e connesso con n vertici e $n - 1$ archi, è un albero.

Es.3 Dimostrare che data una foresta F(V,E), vale: $|E| = |V| - \gamma$, con $\gamma =$ numero di componenti connesse di F(V,E).

Es.4 **Problema:** Dato un grafo connesso con lunghezze positive sugli archi, e vertici r, v, *trovare* un cammino di lunghezza minima fra r e v. (lunghezza di un cammino $P =$ somma delle lunghezze degli archi in P, lunghezza minima fra r e $v =$ distanza fra r e v).

Uso l'algoritmo di *Dijkstra*.

Input: G(V,E) connesso, lunghezze $l(e) > 0, e \in E$, non di partenza r
Output: distanze (e cammini minimi) fra r e gli altri nodi in V.

- *Inizializzazione:* Poni d(r) = 0, d(v)= inf, $v \in V \setminus \{r\} i = 0, S_0 = \{r\}$.
- *Iterazione i:* $\forall v \in V \setminus S_i$ poni $d(v) = \min\{d(v), d(u) + l(uv)\}$.
  Sia $v \in V \setminus S_i$ il vertice per cui d(v) è minimo.
  Poni $i = i + 1, S_i = S_{\mathrm{i}-1} \cup \{v\}$.
- *Stop:* Quando $i = |V - 1|$.

6 Sesta lezione: Grafi planari

Un grafo non orientato si dice *planare* se lo si può disegnare sul piano senza intersezioni tra gli archi.
Tale disegno viene detto *rappresentazione piana* del grafo.

Come stabilire se un grafo è planare?
Problema polinomiale, anche se l'algoritmo è complicato. Ne daremo una versione semplificata, chiamata il *metodo del cerchio e delle corde*.

6.1 Minori

Contrazione di un arco u,v. Identifico u, v in un unico vertice. Arco u,v è diventato un cappio (e viene usualmente rimosso.)
G'(V',E') è minore di G(V,E) se G' è ottenuto da G tramite:

- contrazione di archi
- rimozione di archi
- rimozione di vertici isolati

Teorema: G planare, G' minore di G, allora G' planare.
Ognuna delle 3 operazioni applicata ad una rappresentazione piana di G, mantiene piana la rappresentazione.

6.2 Teorema di Kuratowski

Un grafo è planare se e solo se non contiene $K_{3,3}$ o K_5 come minore.

6.3 Disegni equivalenti per grafi planari:

Dato un grafo planare, ci sono molte sue rappresentazioni piane, tutte equivalenti.
Ogni rappresentazione piana divide il piano in *regioni* o **facce**. Indichiamo con r il numero di queste regioni. Il numero r dipende solo dal grafo, non dalla particolare rappresentazione piana disegnata.

6.3.1 Metodo del cerchio e delle corde

Dato un grafo G(V,E) non orientato:

1. trovare, se esiste, un circuito di lunghezza massima (che contenga tutti i vertici del grafo, lo chiameremo circuito Hamiltoniano)
2. disegnare questo circuito come un grande cerchio
3. scrivere l'elenco degli archi del grafo che non sono contenuti nel circuito; li chiamiamo corde e li inseriamo internamente o esternamente al cerchio, cercando di evitare gli incroci, seguendo i passi 4 e 5
4. scegliamo una corda e inseriamola, ad esempio, internamente al cerchio, togliendola dall'elenco;
5. Tutte le corde che la incrociano debbono essere inserite esternamente. Se la rappresentazione e' piana, proseguiamo. Altrimenti il grafo non e' planare.

Note:

- Attenzione all'ordine con il quale si inseriscono le corde: non possiamo fare scelte, solo la prima corda può essere posta internamente o esternamente a nostra scelta.
- Questa procedura non è sempre applicabile; in particolare, non è applicabile se il grafo non contiene un circuito hamiltoniano.

6.3.2 Esempi

6.4 Formula di Eulero

Se G è un grafo non orientato, connesso e planare, allora ogni sua rappresentazione piana ha r facce con:

$$r = e - v + 2$$

Con $v = |V|$ = numero di vertici, $e = |E|$ = numero di archi, r = numero di facce (regioni).

Dimostrazione:

6.5 Politopi convessi

Formula di Eulero per i politopi Sia P un politopo convesso nello spazio tridimensionale.
Sia v = numero dei vertici, e = numero degli archi, r = numero delle facce,

allora vale la relazione $r = e - v + 2$.
Esempio: un cubo ha $r = 6, e = 12v = 8 \Rightarrow e - v + 2 = 12 - 8 + 2 = 6 = r$
Ogni politopo si può trasformare in un grafo connesso e planare.

6.5.1 Corollari

Corollario 1: Se G(V,E) è un grafo semplice e planare, allora $e \leq 3v - 6$.
Dimostrazione:

Corollario 2: Se G(V,E) è un grafo planare semplice, connesso e bipartito, allora $e \leq 2v - 4$.
Dimostrazione:

Corollario 3: Se G(V,E) planare, semplice e G contiene un vertice di grado $<= 5$ non posso applicare la formula $e <= 3v - 6$ perchè se ogni nodo ha grado > 5 (cioè ≥ 6) la formula $\sum_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} d(v) = 2|E|$ crea contraddizione, infatti: $6v = 2|E|$ ossia $3v = e$.

6.6 Problema dei 4 colori

Problema: quanti colori sono necessari per colorare i paesi di una mappa in modo tale che paesi adiacenti abbiano colori diversi?

Mappa
$\Downarrow$
Grafo planare, ad ogni paese corrisponde un vertice.

Problema: quanti colori sono necessari per colorare i vertici di un grafo planare, in modo che vertici adiacenti abbiano colori diversi?

Congettura dei 4 colori, dimostrata da Appel e Haken (1976): tutti i grafi planari sono 4-colorabili.

7 Settima lezione: I circuiti hamiltoniani

7.1 Circuiti hamiltoniani

Dato G(V,E) grafo, un (circuito) ciclo Hamiltoniano di G è un ciclo che visita **ogni vertice** esattamente **una volta**.
Il grafo G viene detto Hamiltoniano se ha un ciclo Hamiltoniano.
Ricordiamo che abbiamo visto un algoritmo per testare la planarità di un grafo, conoscendo un ciclo Hamiltoniano.
Stabilire se un grafo è Hamiltoniano è un problema difficile (NP-completo): appartiene ad una classe di problemi per cui non esistono algoritmi semplici e veloci che risolvano qualsiasi istanza del problema.
Esistono condizioni *necessarie* (che ogni grafo deve soddisfare per essere Hamiltoniano) e *sufficienti* (che assicurano che un grafo che le soddisfi sia Hamiltoniano, ma non viceversa.) ma non esistono condizioni semplici che siano *necessarie* e *sufficienti* (contemporaneamente).

7.1.1 Condizioni necessarie

Osserviamo che: ogni condizione che è verificata da un ciclo Hamiltoniano H deve essere verificata da un grafo che contiene H.
Se G(V,E) è Hamiltoniano, allora:

- $d(v) \geq 2 \forall v \in V$
- $K(G) \geq 2$
- Più *importante*: per ogni sottoinsieme S di V, abbiamo $|S| \geq$ delle componenti connesse di $G \setminus S$.

7.1.2 Condizioni sufficienti per l'esistenza di un ciclo hamiltoniano

Teorema di Dirac Sia G(V,E) un grafo semplice, con n vertici, $n > 2$, se $d(v) \geq n/2$ per ogni vertice $v \in V$, allora il grafo G è Hamiltoniano.
La condizione di Dirac è *sufficiente* ma ***non*** *necessaria*.

7.2 Regole per costuire un ciclo Hamiltoniano

Dato G (V,E), le seguenti regole possono aiutare nella ricerca di un ciclo hamiltoniano (CH), se esiste.
Se $K(G) \leq 1$, allora G non contiene nessun CH.

1. Se un vertice ha grado 2, allora i due archi incidenti in esso devono appartenere a qualsiasi CH.

2. Un ciclo Hamiltoniano non può contenere sottocicli propri.

3. Se nella costruzione di un CH abbiamo individuato due archi incidenti nel vertice v e appartenenti al CH, allora tutti gli altri archi incidenti in v non possono appartenere a CH e possone essere rimossi per la ricerca del CH.

Ricordiamo che: dato G(V,E), un ciclo è *hamiltoniano* se contiene tutti i vertici di G.
G è *hamiltoniano* se contiene un ciclo hamiltoniano.

7.3 Percorsi euleriani

Ricordiamo che: dato G(V,E), un *percorso* è una sequenza v1, e1, v2, e2, v3, e3 ... vn, en, vn+1 (con possibile ripetizione di vertici o archi) dove $ei = vi, vi + 1$.
Il percorso è **chiuso** se $v1 = vn + 1$.
Il percorso è *euleriano* se è chiuso e contiene *esattamente una volta* tutti gli archi di G(V,E) (ma i vertici possono essere attraversati più di una volta).
G(V,E) è *euleriano* se contiene un percorso euleriano.

Teorema di Eulero G(V,E) è euleriano se e solo se G è connesso ed ogni vertice di G ha grado pari.

7.3.1 Algoritmo per trovare un percorso euleriano

Parti da un nodo arbitrario e inizia a percorrere il grafo (rimuovendo gli archi già percorsi). Percorri un arco che non appartiene ad un ciclo solo se è l'unico che puoi percorrere.

8 Esercizi svolti

Es.1 Dimostrare che, se un grafo connesso e bipartito G(V1, V2; E) ha un ciclo hamiltoniano, allora le cardinalità di V1 e di V2 devono essere uguali. Inoltre, se un grafo bipartito ha un numero dispari di vertici, allora non può avere cicli hamiltoniani.

RISPOSTA: Sia $c = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$ un circuiti Hamiltoniano in G.
$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2$
$x_3 \in V_1 \Rightarrow x_4 \in V_2$
$x_5 \in V_1 \Rightarrow x_6 \in V_2$
...
$\exists (x_1, x_n) \in E \Rightarrow x_n \in V_2 \Rightarrow n$ pari $\Rightarrow |V_1| = |V_2|$
Se $\exists c$ circuito Hamiltoniano $\Rightarrow n$ pari.

Es.2

1. Quanti diversi cicli Hamiltoniani ci sono nel grafo $K_n, n \geq 3$, il grafo completo con n vertici?
2. Dimostrare che gli archi del grafo K_n, con n primo, si possono partizionare in $\frac{1}{2}(n-1)$ hamiltoniani disgiunti sugli archi.
3. Se 11 persone cenano insieme ogni sera disponendosi attorno ad una tavola rotonda, e ogni sera ogni persona si vuole sedere tra due persone che non gli sono mai state vicino, quante cene riescono a fare?

RISPOSTA:

Es.3 Il seguente grafo è noto come grafo di Petersen.
E' un grafo con delle proprietà particolari e non è facile da studiare, pur avendo solo 10 vertici.
E' bipartito? Hamiltoniano? Planare?

RISPOSTA:
Oss: non è bipartito e non è hamiltoniano.
Non si può applicare il metodo del cerchio e delle corde perchè non c'è un ciclo hamiltoniano.
La disequazione $e \leq 3v - 6$ è soddisfatta.
Quindi possiamo solo cercare un $K_{3,3}$ (non può essere un K_5 perchè servirebbero 5 vertici non di grado 4).

Es.4 Rispondere alle seguenti domande, motivando le risposte.

1. Qual è il massimo numero di archi in un grafo non orientato semplice con 15 vertici?
2. Qual è il massimo numero di archi in un grafo orientato semplice con 15 vertici?
3. Qual è il minimo numero di vertici in un grafo non orientato semplice con 55 archi? E se ha 60 archi?

RISPOSTA:

1. $G(V,E)$ $|E| \leq \frac{|V|(|V|-1)}{2} = \frac{15*14}{2} = 105$
2. $|E| \leq |V|(|V|-1) = 15*14 = 210$
3. $G(V,E)|E| = 55$

Esiste un grafo completo K_n con 55 archi? Se si, quanto deve valere n?

RISPOSTA:
$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} = 55$
$n(n-1) = 110$
$n^2 - n - 110 = 0$
$n = \frac{1\pm\sqrt{1+440}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{441}}{2} = \frac{1\pm21}{2} = 11$
Quindi K_{11} ha 55 archi ed è il grafo con il minor numero di vertici tra quelli che hanno 55 archi.
Se $|E| = 60 \Rightarrow$ allora è necessario almeno un vertice in più $\Rightarrow |V| \geq 12$.
Esistono grafi con 12 vertici e 60 archi?
$|E(K_{12})| = \frac{12*11}{2} = 66 \Rightarrow$ quindi $|V| = 12$

Es.5 Qual è il massimo numero possibile di vertici in un grafo con 19 archi e tutti i vertici di grado maggiore o uguale a 3?

RISPOSTA:

Es.6 Se un grafo non orientato ha n vertici, tutti di grado dispari tranne uno, quanti vertici di grado dispari ci sono nel suo complementare?

RISPOSTA:

Es.7 Determinare se i seguenti grafi sono bipartiti:

Risposta:

Es.8 Rispondere alle seguenti domande, motivando le risposte.

- Qual è il massimo numero di archi in un grafo non orientato e bipartito con 15 vertici?
- Qual è il minimo numero di vertici in un grafo non orientato e bipartito, con lo stesso numero di vertici nelle due parti della bipartizione, e con 65 archi?
- Qual è il minimo numero di vertici in un grafo non orientato e bipartito, con lo stesso numero di vertici nelle due parti della bipartizione, e con 64 archi?

Risposta:

Es.9 Dimostrare che un grafo con n vertici e più di $\frac{n^2}{4}$ archi non può essere bipartito.

Risposta:

Es. 10 Stabilire se i due seguenti grafi sono isomorfi, cercando di costruire l'isomorfismo.

Risposta: sono isomorfi e l'isomorfismo è il seguente:

- $a \longleftrightarrow 3$
- $e \longleftrightarrow 5$
- $d \longleftrightarrow 4$
- $f \longleftrightarrow 2$
- $c \longleftrightarrow 1$
- $b \longleftrightarrow 6$

Es. 11 Dimostrare che tutti i grafi (semplici) con 5 vertici e con ciascun vertice di grado 2 sono isomorfi. La stessa proprietà vale anche per grafi con 6 vertici?

RISPOSTA: Tutti i grafi con 5 vertici, con ciascun vertice di grado 2, sono circuiti di lunghezza $5(C_5)$ e quindi tutti isomorfi tra loro.

Es. 12 Tracciare una rappresentazione piana dei seguenti grafi, dove ogni arco è un segmento retto (notare che "e" è uno arco qualsiasi).

RISPOSTA:

Es. 13 Quale dei seguenti grafi è planare?

RISPOSTA:

Es. 14 Stabilire quanti vertici deve avere un grafo planare connesso con 5 facce e con 10 archi.
Disegnare un grafo con queste caratteristiche.

RISPOSTA: Planare e connesso $\Rightarrow$ vale la formula di Eulero $\Rightarrow r = e - v + 2$ $\Leftrightarrow 5 = 10 - v + 2 \Leftrightarrow v = 7$

Es. 15 Stabilire se può esistere un grafo semplice non orientato con le caratteristiche indicate. In caso affermativo darne un esempio, in caso negativo spiegare perché non può esistere.

1. Esiste un grafo planare semplice con 9 vertici e 22 archi?
2. Esiste un grafo planare semplice con 9 vertici e 21 archi?
3. Esiste un grafo planare semplice e bipartito con 8 vertici e 13 archi?
4. Esiste un grafo planare semplice e bipartito con 8 vertici e 12 archi?

RISPOSTA:

1. Se esiste, allora deve valere $e \leq 3v - 6 \Leftrightarrow 22 \leq 3.9 - 6 = 21$, quindi non esiste.
2. La disequazione $e \leq 3v - 6$ questa volta da $21 < 21$ vero, ma non è sufficiente per affermare che il grafo esiste, devo trovare un esempio.

3. Se esiste allora deve valere $e \leq 2v - 4 \Leftrightarrow 13 \leq 2 * 8 - 4 = 12$ quindi non esiste.

4. La disequazione dà $12 \leq 12$, devo cercare un esempio.

Es. 16 Per quali valori di n il grafo K_n è planare? Per quali valori di r e di s il grafo completo bipartito K_r, s è planare?

Risposta: K_n è planare $\Leftrightarrow n \leq 4$.
Dato che $r = s = 3$ non è vero, e $r \geq 3, s \geq 3$ nemmeno, $r = 2$ e un s qualsiasi si: è planare per $r \leq 2$ e s qualsiasi o viceversa.

Es. 17 Considerare il grafo non orientato G(V,E) qui sotto disegnato e rispondere alle seguenti domande.

1. Il grafo G è bipartito?
2. Calcolare il grado minimo, il grado massimo e il grado medio dei vertici
3. Percorrendo i vertici del grafo in ordine alfabetico, trovate un circuito Hamiltoniano; usatelo per stabilire se il grafo G è planare. Se la risposta è affermativa, disegnate il grafo in modo piano; se invece la risposta è negativa, fornite $K_{3,3}$ o K_5 come minore
4. Determinare K(G) e Ke(G)

Risposta:

Es. 18 È possibile disegnare un grafo planare semplice con 4 vertici e 4 facce? Se possibile disegnarlo.

Risposta:

Es. 19 È possibile disegnare un grafo planare semplice con 5 vertici e 6 facce? Se possibile disegnarlo.

Risposta:

Es. 20 È possibile disegnare un grafo planare semplice con 11 vertici in cui ogni vertice abbia grado maggiore o uguale a 5?

Risposta:

9 Ottava lezione: Calcolo combinatorio

Ricordiamo dalla prima lezione: **contare** un numero (finito) di oggetti non è sempre facile ma è un problema che si pone spesso in informatica: per esempio contare le operazioni fatte da un algoritmo per misurarne l'efficenza.
Vediamo *due principi fondamentali* nei metodi di conteggio.

9.1 Principio di addizione

Esempio 1: In una scuola vengono offerti due corsi opzionali, uno di scacchi e uno di violino. Il corso di scacchi viene frequentato da 30 studenti, quello di violino da 40. Quanti studenti hanno scelto corsi opzionali?

Principio di addizione: Abbiamo m insiemi con le seguenti proprietà:

- Il primo insieme contiene r_1 oggetti differenti
- Il secondo insieme contiene r_2 oggetti differenti
- L' m-esimo insieme contiene r_m oggetti differenti

Gli insiemi sono disgiunti a due a due.
Allora il numero di modi per selezionare un oggetto da uno degli insiemi è:

$$r_1 + r_2 + \dots r_k$$

9.2 Principio di moltiplicazione

Esempio 2: Lanciamo due dadi, uno verde e uno rosso, e leggiamo l'esito di questa procedura (ad esempio, un esito può essere "6 sul verde, 3 sul rosso").

1. Quanti differenti esiti si possono avere?
2. Quanti differenti esiti si possono avere che non siano doppie (stesso valore sui due dadi)?

Principio di moltiplicazione: Abbiamo una procedura formata da m fasi successive ordinate, con le seguenti proprietà:

- la prima fase ha r_1 esiti differenti
- la seconda fase ha r_2 esiti differenti
- la m-esima fase ha r_m esiti differenti

Il numero degli esiti di ogni fase è indipendente dalle scelte delle fasi precedenti, gli esiti complessivi della procedura sono tutti distinti.
Allora il numero dei differenti esiti della procedura è:

$$r_1 \times r_2 \times \ldots r_m$$

Esempio 3 In uno scaffale della biblioteca ci sono 11 libri in inglese (distinti), 7 in francese (distinti) e 4 in russo (distinti). In quanti modi possiamo scegliere due libri (coppia non ordinata) che non siano della stessa lingua?

Esempio 4 Abbiamo a disposizione le lettere a, b, c, d, e, f per formare sequenze di lunghezza 3. Quante ne possiamo formare con le seguenti regole?

- Le ripetizioni sono permesse.
- Le ripetizioni sono vietate.
- Le ripetizioni sono vietate; ci deve essere la lettera "e".
- Le ripetizioni sono permesse; ci deve essere la lettera "e".

9.3 Permutazioni e combinazioni semplici

Dati n oggetti distinti: $n \in N$
Permutazione: disposizione *ordinata* di questi n oggetti.
R-permutazione: disposizione *ordinata* di questi n oggetti usando r degli n oggetti.
R-combinazioni: sottoinsieme o selezione *non ordinata* di r degli n oggetti.

9.4 Esempi

Es. 1 Partecipiamo ad una gara di corsa, siamo in 100 tutti ugualmente bravi, arriviamo tutti al traguardo.
Quante sono le possibili classifiche in cui io sono terza?

Es. 2 Quanti sono gli anagrammi della parola DETTATO, cioè quante sono le disposizioni delle sue lettere?
E in quanti di questi anagrammi le tre "T" sono consecutive?

Es. 3 Quante sequenze binarie di lunghezza 8 ci sono con sei elementi uguali a "1" e due elementi uguali a "0"?

Es. 4 Abbiamo a disposizione 7 donne e 4 uomini, tra loro dobbiamo scegliere un comitato di k persone. In quanti modi lo possiamo formare sotto le seguenti regole?

- Il comitato è formato da 3 donne e 2 uomini.
- Il comitato può avere qualsiasi numero di aderenti, ma il numero delle donne deve essere uguale al numero degli uomini.
- Il comitato è formato da 4 persone e una di loro deve essere il signor Rossi.
- Il comitato è formato da 4 persone, e almeno due sono donne.
- Il comitato è formato da 4 persone, 2 donne e 2 uomini, e il signor e la signora Rossi non possono appartenerci insieme.

Es. 2-bis Quanti sono gli anagrammi della parola DETTATO, cioè quante sono le disposizioni delle sue lettere?
Quanti anagrammi hanno la lettera "D" che precede la lettera "E"?
E quanti anagrammi hanno la lettera "D" che precede la lettera "E" e le tre "T" in posizioni consecutive?

10 Decima lezione:

Coefficenti binomiali:

10.1 Triangolo di Pascal/Tartaglia

10.2 Identità binomiali

10.3 Esercizi

Es. 1 Dimostrare che la seguente identità binomiale vale per ogni n naturale, usando l'interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali. Verificarla anche tramite l'espansione algebrica dei coefficienti binomiali.

Es. 2 Dimostrare la seguente identità binomiale usando l'interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali, dove m, n ed r sono numeri naturali, con $0 \leq r \leq \min(m, n)$

Es. 3 Risolvere la seguente equazione binomiale per n naturale, trovando tutte le sue soluzioni.

Es. 4 Dimostrate con metodi di conteggio oppure identità già viste le seguenti identità binomiali:

Es. 5 Dimostrare la seguente identità binomiale, per n e k naturali con $0 \leq k \leq n$.

Es. 6 Valutare le seguenti espressioni per n naturale (n diverso da zero per la prima):

11 Undicesima lezione: Disposizioni con ripetizione

11.1 Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizioni sono tutti i possibili ordinamenti di oggetti alcuni dei quali indistinguibili.
Esempio: Quante sono le disposizioni delle lettere della parola BANANA?

Teorema Abbiamo n oggetti, di cui

- r_1 del tipo 1 (identici)
- r_2 del tipo 2 (identici)
- ...
- r_m del tipo m (identici)

con $r_1 + r_2 + ... + r_m = n$.
Il numero delle disposizioni di questi n oggetti è:

11.2 Selezioni con ripetizione

Esempio: In quanti modi possiamo selezionare 6 caffè tra le varietà: liscio, macchiato, lungo?

Teorema Il numero di selezioni con ripetizione di r oggetti scelti tra n varietà è: = numero di soluzioni intere della equazione

Esempio x_1 =numero di caffè lisci x_2 =numero di caffè macchiati x_3 =numero di caffè lunghi Le selezioni di 6 caffè tra 3 varietà sono tante quante le soluzioni intere della equazione

Esempio Quante sequenze di lunghezza 10 si possono formare scegliendo gli elementi tra quattro "A", quattro "B", quattro "C", quattro "D", se ogni lettera deve apparire almeno due volte?

Esempio In una pasticceria, ci sono 5 varietà di dolci. In quanti modi possiamo scegliere 12 dolci tra queste 5 varietà, se vogliamo prendere almeno un dolce per varietà?

11.3 Distribuzioni di oggetti distinti

r oggetti distinti, n scatole distinte: Quanti sono i modi di porre questi r oggetti nelle scatole, se una scatola puo' contenere piu' di un oggetto? distribuzioni di r oggetti distinti in n scatole distinte stringhe di lunghezza r i cui elementi sono scelti in 1, ... ,n con ripetizione :

distribuzioni di r oggetti distinti in n scatole distinte, sapendo che nella scatola i devono entrare r_i oggetti $(i = 1, ..., n)$ con $r_1 + r_2 + ... + r_n = r$ disposizioni di r oggetti, di cui r_1 del tipo 1, ... ,

11.4 Distribuzioni di oggetti identici

r oggetti identici, n scatole distinte distribuzioni di r oggetti identici in n scatole diverse selezioni con ripetizione di r oggetti scelti tra n varietà

Esempio

1. Il numero di modi di distribuire r palline identiche in n scatole distinte. Il numero di modi di distribuire r palline identiche in n scatole distinte, con almeno una pallina per scatola $(r >= n)$

2. Il numero di modi di distribuire r palline identiche in n scatole distinte, con almeno r_1 palline nella prima scatola, almeno r_2 nella seconda, ... , almeno r_n nella n-esima

Esempio Vado al mercato con 5 euro da spendere. Un cestino di fragole costa 1.5 euro, una banana o una mela o una arancia costano 50 cent. In quanti modi posso spendere i miei soldi, supponendo di volerli spendere tutti?

11.5 Esercizi

Es.1 Quante diverse sequenze di lunghezza cinque si possono formare usando le lettere A, B, C, D con ripetizione, con la condizione che le sequenze non contengano la parola BAD (ad esempio, la sequenza ABADD è esclusa)?

Es.2 In quanti modi una persona può invitare un sottoinsieme di almeno 3 dei suoi 10 amici a cena?

Es.3 Quante sequenze di cinque caratteri (scelti tra le 26 lettere dell'alfabeto, anche ripetute) contengono esattamente una A ed esattamente due B?

Es.4

1. Quante sequenze di dieci lettere si possono formare usando 5 differenti vocali e 5 differenti consonanti (scelte tra le 21 consonanti)?
2. Tra queste, quante sono quelle che non hanno coppie consecutive di consonanti e non hanno coppie consecutive di vocali?

Es.5

1. Quanti diversi triangoli si possono formare congiungendo terne di vertici di un ottagono (regolare)?
2. Quanti diversi triangoli si possono formare se si vieta di utilizzare terne che contengano due vertici adiacenti nell'ottagono?
3. Quanti diversi triangoli si possono formare che abbiano due lati coincidenti con lati dell'ottagono?
4. Quanti diversi triangoli si possono formare che abbiano un solo lato coincidente con lati dell'ottagono?

Es.6

1. Quanti numeri di sette cifre si possono formare con le cifre 3, 5 e 7?
2. Di questi numeri, quanti hanno tre cifre uguali a 3, due uguali a 5 e due uguali a 7?

12 Dodicesima lezione: Esercizi

12.1 Esercizi

Es. 7 Nove persone entrano in un bar per acquistare un panino per ciascuno. Tre ordinano sempre il panino con il tonno, due sempre quello con le uova, e due sempre quello con il prosciutto. Le rimanenti due persone ordinano ciascuna uno qualsiasi dei tre tipi di panino ordinati dagli altri. Quante diverse selezioni non ordinate di panini sono possibili?

Es. 8 Ordinando le cifre 1, 2, 2, 4, 4, 6, 6 a caso, scriviamo un numero di sette cifre.

1. Quanti diversi numeri maggiori di 3000000 (tre milioni) possiamo scrivere?

2. Quanti numeri dispari maggiori di tre milioni possiamo scrivere?

Es. 9 In quanti modi differenti si possono disporre le lettere della parola REPETITION in cui la prima E compare prima della prima T?

Es. 10 In quanti modi si possono distribuire 36 caramelle identiche a quattro bambini:

1. senza restrizioni

2. in modo che ogni bambino riceva 9 caramelle

3. in modo che ogni bambino riceva almeno una caramella

Es. 11 In quanti modi si possono distribuire 7 identiche mele, 6 identiche arance e 7 identiche pere fra tre persone diverse:

1. senza restrizioni

2. in modo che ogni persona riceva almeno una pera

Es. 12 Dire quante sono le soluzioni intere della equazione con le condizioni:

Es. 13 Dire in quanti modi si possono distribuire k palline in n scatole distinte (k<n) con al massimo una pallina per scatola se:

1. le palline sono distinte
2. le palline sono identiche

Es. 14 In quanti modi si possono suddividere tra due scatole 4 palline rosse identiche, 5 palline blu identiche e 7 palline nere identiche, se:

1. non ci sono restrizioni
2. si vuole che nessuna scatola resti vuota

13 Tredicesima lezione: Relazioni di ricorrenza

Data una procedura con n oggetti, si vuole contare il numero di modi di eseguirla.
a_n = numero di modi di eseguire la procedura con n oggetti ($n \geq 0$)
$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$: successione di numeri da determinare

13.1 Relazioni di ricorrenza

formula ricorsiva che esprime a_n in funzione dei precedenti termini della successione:
Soluzione di una relazione di ricorrenza formula esplicita per a_n , che dipende solo da n.

13.2 Esempi

13.3 Dividi e conquista

13.4 Relazioni lineari omogenee

13.5 Relazioni non omogenee

14 Quattordicesima lezione: Relazioni dividi e conquista

14.1 Esempi ed esercizi

15 Quindicesima lezione: Esercizi

Es.1 Trovare una relazione di ricorrenza per valutare il numero di coppie di conigli dopo n mesi se:

- inizialmente vi è solo una coppia di conigli appena nati
- ogni mese, ogni coppia di conigli che ha più di un mese genera una nuova coppia di conigli
- nessun coniglio muore

Es.2

- Trovare una relazione di ricorrenza per il numero di sequenze quaternarie (cioè ad elementi in 0, 1, 2, 3) di lunghezza n
- con almeno un 1, con il primo 1 che precede il primo 0 (se la sequenza contiene almeno uno 0)

Es.3 Trovare la relazione di ricorrenza per il numero delle sequenze ternarie (0 1 2) che non contengono la sequenza "012"

Es.4 Quante sono le scacchiere contenute in una scacchiera n x n?

Argomenti svolti:

Prima parte del corso:

Grafi non orientati: Nozioni di base: percorsi, cammini, cicli, gradi, sottografi, sottografi indotti. Famiglie di grafi.
Grafi orientati: Nozioni di base: percorsi, cammini, cicli, gradi. Tornei
Grafi bipartiti, parita' di cicli. Isomorfismo fra grafi. Algoritmi.
Arcoconnettivita', Arcoconnettivita' fra 2 nodi, tagli .
Connettivita', coconnettivita' fra 2 nodi, separatori . Relazioni fra connettivita' ed arcoconnettivita'.
Alberi di peso minimo. Algoritmo di Kruskal.
Cammini minimi. Algoritmo di Dijkstra.
Planarita: Rappresentazioni piane, facce, perimetri. Formula di Eulero.
Minori. K33 e K5 non planari. Teorema di Kuratowski.

Seconda parte del corso

Cicli hamiltoniani, percorsi euleriani.
Capitolo 5: Metodi di Conteggio
5.1 Principio di addizione e moltiplicazione
5.2 Permutazioni, r-permutazioni, r-combinazioni (selezioni non ordinate)
5.3 Stringhe da alfabeto finito (=permutazioni di parole). Selezioni di n oggetti da k tipi (=ordini)
5.5 Identita' binomiali.
Capitolo 7: Relazioni di ricorrenza
7.1 Modelli di relazioni di ricorrenza
7.2 Soluzioni di equazioni di ricorrenza "divide and conquer"
7.3 Soluzioni di relazioni di ricorrenza lineari omogenee
7.4 Soluzioni di relazioni di ricorrenza lineari non omogenee