Departamento de Estadística PUC

Interrogación 3: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo Arellano   Ayudantes: Andrés Díaz y Daniel Gálvez

Pregunta 1: Sean X e Y variables aleatorias con media 0, varianza 1 y correlación ρ ($|\rho| \leq 1$). Calcule:

a) $Var(X+Y)$ y $Var(X-Y)$

b) $Cov(X, X-Y)$ y $Cov(X+Y, X-Y)$

c) $E\{(XZ-YZ)^2\}$, donde Z es independiente de (X,Y) y tal que $E(Z^2)=1$

a)

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \\
&= 1 + 1 + 2Cor(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)} \\
&= 1 + 1 + 2\rho\sqrt{1 \cdot 1} \\
&= 2 + 2\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X-Y) &= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) \\
&= 1 + 1 - 2Cor(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)} \\
&= 1 + 1 - 2\rho\sqrt{1 \cdot 1} \\
&= 2 - 2\rho
\end{aligned}$$

Esto pues

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \Rightarrow Cov(X,Y) = Cor(X,Y)\sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

b)

$$\begin{aligned}
Cov(X, X-Y) &= Cov(X,X) + Cov(X,-Y) \\
&= Var(X) - Cov(X,Y) \\
&= 1 - \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X+Y, X-Y) &= Cov(X, X-Y) + Cov(Y, X-Y) \\
&= Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) \\
&= Var(X) - Var(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
E\{(XZ-YZ)^2\} &= E\{X^2Z^2 - 2XYZ^2 + Y^2Z^2\} \\
&= E(X^2)E(Z^2) - 2E(XY)E(Z^2) + E(Y^2)E(Z^2) \\
&= E(X^2)E(Z^2) - 2[Cov(X,Y) + E(X)E(Y)]E(Z^2) + E(Y^2)E(Z^2) \\
&= 1\cdot 1 - 2[\rho + 0]\cdot 1 + 1\cdot 1 \\
&= 2(1-\rho)
\end{aligned}$$

Pregunta 1 - Puntaje

a) [**2**]

- [**1**] por calcular correctamente $Var(X+Y)$
- [**1**] por calcular correctamente $Var(X-Y)$

b) [**2**]

- [**1**] por calcular correctamente $Cov(X, X-Y)$
- [**1**] por calcular correctamente $Cov(X+Y, X-Y)$

c) [**2**]

- [**2**] por calcular correctamente $E\{(XZ-YZ)^2\}$

Se descuenta [**0.5**] en caso de no haber llegado correctamente al resultado con un desarrollo coherente. En cualquier otro caso [**0**]. (Esto es valido para cada cantidad solicitada)

Pregunta 2: Sean X e Y variables aleatorias con función distribución conjunta dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-y})(1-e^{-x}), & x>0, y>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

b) Calcule $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$ y $P(X > 1 | Y > 1)$.

c) Obtenga la fgm de $Z = 2(X+Y)$ e indique su distribución.

a) Note que

$$F_{X,Y}(x.y) = F_X(x)F_Y(y)$$

donde $F_X(x)$ corresponde a la fda de una exponencial de parámetro 1, y lo mismo para $F_Y(y)$. Luego, X, Y si son independientes, ademas

$$X, Y \overset{iid}{\sim} Exp(1)$$

Otra forma es derivar la fda conjunta, de modo que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{-x}e^{-y}$$

y claramente

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las densidades de exponenciales de parámetro 1.

Otra forma es integrando la conjunta

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy = e^{-x}$$

y se tiene

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0 \quad ; \quad f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0$$

de modo que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

b) Como son independientes se tiene

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= P(0 < X \leq 1)P(0 < Y \leq 1) \\ &= F_X(1)F_Y(1) \\ &= (1 - e^{-1})^2 \end{aligned}$$

lo mismo para la condicional

$$\begin{aligned} P(X > 1 | Y > 1) &= \frac{P(X > 1, Y > 1)}{P(Y > 1)} \\ &= \frac{P(X > 1)P(Y > 1)}{P(Y > 1)} \\ &= P(X > 1) \\ &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - F_X(1) \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\
&= E\left(e^{t(2\{X+Y\})}\right) \\
&= E(e^{2tX+2tY}) \\
&= E(e^{2tX})E(e^{2tY}) \\
&= M_X(2t)M_Y(2t) \\
&= \left(\frac{1}{1-2t}\right)\left(\frac{1}{1-2t}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^2
\end{aligned}$$

Y esta ultima es la fgm de una Gamma, en particular

$$Z \sim Gamma(2, 1/2)$$

o equivalentemente $Z \sim \chi^2_{(4)}$.

Pregunta 2 - Puntaje

a) [**2**]

- [**2**] por determinar que X, Y son independientes utilizando algún argumento valido

No hay puntaje parcial.

b) [**2**]

- [**1**] por calcular correctamente $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$
- [**1**] por calcular correctamente $P(X > 1|Y > 1)$

No hay puntaje parcial.

c) [**2**]

- [**1**] por calcular determinar correctamente la fgm de Z
- [**1**] por determinar la distribución de Z

Se descuenta [**0.5**] en ambos casos si es que hubo algún error de arrastre en la fgm.

Pregunta 3: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias con fgm conjunta dada por

$$M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3) = \left(p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3e^{t_3}\right)^n, \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p_i \geq 0$ para $i = 1,2,3$, con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

a) Indique las fgm's marginales de X_1, X_2 y X_3 con sus respectivas distribuciones.

b) Obtenga la fgm conjunta de X_1 y X_2, y determine la distribución de $X_1 + X_2$.

c) Pruebe que $\text{cov}(X_1, X_2) = -np_1p_2$ (Pista: Use (b).)

a)

$$\begin{aligned}
M_{X_1}(t_1) &= M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,0,0) \\
&= (p_1e^{t_1} + p_2 + p_3)^n \\
&= (p_1e^{t_1} + (1-p_1))^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{X_2}(t_2) &= M_{X_1,X_2,X_3}(0,t_2,0) \\
&= (p_2e^{t_2} + p_1 + p_3)^n \\
&= (p_2e^{t_2} + (1-p_2))^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{X_1}(t_1) &= M_{X_1,X_2,X_3}(0,0,t_3) \\
&= (p_3e^{t_3} + p_1 + p_2)^n \\
&= (p_3e^{t_3} + (1-p_3))^n
\end{aligned}$$

De acá se tiene

$$\begin{aligned}
X_1 &\sim Bin(n,p_1) \\
X_2 &\sim Bin(n,p_2) \\
X_3 &\sim Bin(n,p_3)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,0) \\
&= (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3)^n \\
&= (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + (1-p_1-p_2))^n
\end{aligned}$$

Defina $Y = X_1 + X_2$, entonces

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1+tX_2}\right) \\
&= M_{X_1,X_2}(t,t) \\
&= (p_1e^t + p_2e^t + (1-p_1-p_2))^n \\
&= ((p_1+p_2)e^t + (1-p_1-p_2))^n
\end{aligned}$$

Luego, $Y = X_1 + X_2 \sim Bin(n, p_1+p_2)$

c) Usando propiedades de la fgm se tiene

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \frac{\partial M_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1=t_2=0} \\
&= (n-1)np_1p_2e^{t_1+t_2}\left(p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+p_3\right)^{n-2}\Big|_{t_1=t_2=0} \\
&= (n-1)np_1p_2(p_1+p_2+p_3)^{n-2} \\
&= (n-1)np_1p_2
\end{aligned}$$

Como X_1, X_2 son binomiales, se tiene que

$$E(X_i) = np_i$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
&= n(n-1)p_1p_2 - np_1np_2 \\
&= -np_1p_2
\end{aligned}$$

Pregunta 3 - Puntaje

a) [**2**]

- [**1**] por determinar las fgm's de cada v.a
- [**1**] por determinar la distribución de cada v.a

No hay puntaje parcial.

b) [**2**]

- [**1**] por determinar la fgm conjunta
- [**1**] por determinar la distribución de la suma

No hay puntaje parcial.

c) [**2**]

- [**1**] por calcular correctamente $E(X_1X_2)$
- [**1**] por demostrar correctamente lo pedido

Se descuenta [**0.5**] si es que hubo algún error de arrastre en algún calculo.

– Santiago, 19 de junio de 2024 –