Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas / Departamento De Estadística

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
Solución I2

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudantes: Daniel Gálvez y Andrés Díaz

Segundo semestre 2024

1. [**6**] Sea X una variable aleatoria con función distribución (acumulada) dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

   a) [**2**] Calcule $P(1 < X \leq 2)$, $P(2|X-1| > 1)$ y $P(X \leq 3 | X > 2)$.
   b) [**2**] Proponga una medida de localización para la distribución de X (fundamente su respuesta).
   c) [**2**] Calcule la esperanza y la varianza de $g(X) = 1 - \frac{1}{X}$.

   a) Se tiene que X es continua, entonces

$$\begin{aligned}
P(1 < X \leq 2) &= P(X \leq 2) - P(X \leq 1) \\
&= F_X(2) - P(X < 1) \\
&= 1 - 1/2 - 0 \\
&= 1/2 \\
P(2|X-1| > 1) &= P(|X-1| > 1/2) \\
&= 1 - P(|X-1| \leq 1/2) \\
&= 1 - P(-1/2 < X - 1 \leq 1/2) \\
&= 1 - P(-1/2 + 1 < X \leq 1/2 + 1) \\
&= 1 - P(1/2 < X \leq 3/2) \\
&= 1 - [P(X \leq 3/2) - P(X < 1/2)] \\
&= 1 - [F_X(3/2) - F_X(1/2)] \\
&= 1 - \left[1 - \frac{1}{3/2} - 0\right] \\
&= \frac{2}{3} \\
P(X \leq 3 | X > 2) &= \frac{P(X \leq 3, X > 2)}{P(X > 2)} \\
&= \frac{P(2 < X \leq 3)}{1 - P(X \leq 2)} \\
&= \frac{P(X \leq 3) - P(X < 2)}{1 - F_X(2)} \\
&= \frac{1 - 1/3 - (1 - 1/2)}{1 - (1 - 1/2)} \\
&= 1/3
\end{aligned}$$

- [**2/3**] por calcular correctamente cada probabilidad *b*) La idea de esta pregunta es justamente **proponer** una medida de localización, pues la esperanza y varianza valen infinito. Primeramente note que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{x^2}$$

de modo que

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1$$

si se calcula la esperanza se tiene

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \infty$$

Entonces se puede proponer, por ejemplo, la mediana, donde se busca a tal que

$$P(X \leq a) = 0{,}5$$

utilizando la acumulada se tiene

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= 0{,}5 \\ F_X(a) &= 0{,}5 \\ 1 - 1/a &= 0{,}5 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

de modo que $med(X) = 2$. También se puede proponer, por ejemplo, la moda, donde es claro que $moda(X) = 1$.

- [**1.5**] por proponer una medida de localización valida
- [**0.5**] por determinar que la esperanza o varianza vale infinito

c) Usando la densidad y la definición de esperanza y varianza se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{\mathcal{X}} g(X) f_X(x) dx \\ \mathbb{E}\left(1 - \frac{1}{X}\right) &= \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx - \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{X}\right)^2\right] &= \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_0^1 u^2 du \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Var\left(1 - \frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- [**1**] por calcular correctamente la esperanza
- [**1**] por calcular correctamente la varianza

2. [**6**] El tiempo de espera (X) de un paciente que llega a una consulta médica es cero si el médico no está ocupado, y un tiempo aleatorio distribuido exponencialmente (con intensidad $\lambda > 0$) si el médico está ocupado. La probabilidad de que el paciente encuentre al médico desocupado u ocupado es p y $1-p$, respectivamente.

   a) [**2**] Obtenga y grafique la función distribución (acumulada) de X.

   b) [**2**] Encuentre la esperanza del tiempo de espera del paciente.

   c) [**2**] Calcule la probabilidad de que el paciente tenga que esperar más de lo esperado.

   a) Note que si definimos como Z el tiempo aleatorio que debe esperar si el medico está ocupado, entonces $Z \sim Exp(\lambda)$. Teniendo esto en mente, la variable aleatoria X se puede construir de la siguiente manera

$$X = \begin{cases} p, & X = 0 \\ 1-p, & X = Z \end{cases}$$

pues con probabilidad p no debe esperar nada, y con probabilidad $1-p$ toma algún valor aleatorio proveniente de una exponencial. Ahora, se puede ver que la variable aleatoria X es mixta, pues su recorrido es $\mathcal{X} = \{0\} \cup (0, \infty)$. Teniendo esto en mente, la acumulada de X se obtiene de la siguiente forma:

- $X = 0$

$$\begin{aligned} F_X(0) &= P(X \leq 0) \\ &= P(X < 0) + P(X = 0) \\ &= 0 + p \\ &= p \end{aligned}$$

- $X = x > 0$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X = 0) + P(X < x) \\ &= p + P(X < x | X = Z) P(X = Z) \\ &= p + (1 - e^{-\lambda x})(1-p) \end{aligned}$$

Luego, la acumulada se puede escribir como

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p + (1 - e^{-\lambda x})(1-p), & x \geq 0 \end{cases}$$

de modo que también podemos escribir la "densidad" de X como

$$\begin{cases} p, & x = 0 \\ (1-p)\lambda e^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

La figura 1 muestra la función de distribución acumulada de X para algunos valores de λ y p.

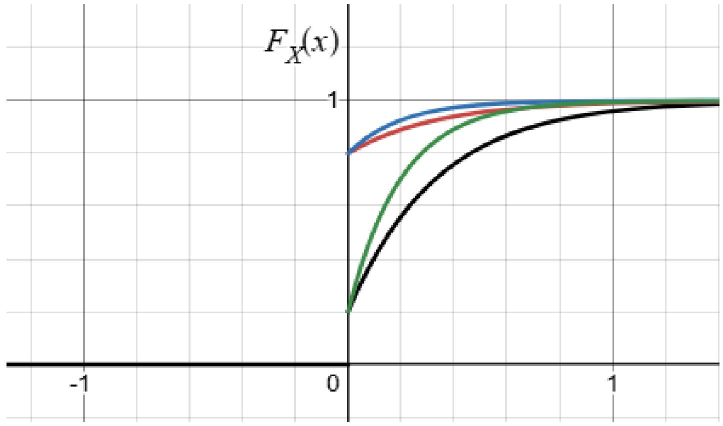

Figura 1: $F_X(x)$

Para efectos prácticos basta con hacer un dibujo en el cual se vea un "salto" en $x = 0$.

- [**0.5**] por determinar alguna forma valida de escribir la v.a X
- [**0.75**] por la fda
- [**0.75**] por el dibujo

b) Se pide $\mathbb{E}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0P(X = 0) + \int_0^\infty x \cdot (1-p)\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{(1-p)}{\lambda}\end{aligned}$$

- [**2**] por calcular correctamente la esperanza

c) Se pide $P(X > \mathbb{E}(X))$. Entonces

$$\begin{aligned}P(X > \mathbb{E}(X)) &= P(X > \mu_X) \\ &= \int_{\mu_X}^\infty (1-p)\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= (1-p)e^{-\lambda \mu_x} \\ &= (1-p)e^{-(1-p)}\end{aligned}$$

o también usando la fda se tiene

$$\begin{aligned}P(X > \mathbb{E}(X)) &= P(X > \mu_X) \\ &= 1 - F_X(\mu_X) \\ &= 1 - [p + (1 - e^{-\lambda\mu_X})(1-p)] \\ &= 1 - p - (1 - e^{-\lambda\mu_X})(1-p)] \\ &= (1-p)(1 - (1 - e^{-\lambda\mu_X})) \\ &= (1-p)e^{-(1-p)}\end{aligned}$$

- [**0.5**] por identificar correctamente la probabilidad que se pide
- [**1.5**] por calcular correctamente la probabilidad

3. [**6**] Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos (fgm) dada por:

$$M_X(t) = e^{\pi t(1+t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) [**2**] Calcule $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$ y $E\{(X-\pi)(X+\pi)\}$

b) [**2**] Obtenga la fgm de $Z = X - \pi$ y pruebe que Z y $-Z$ tienen la misma distribución.

c) [**2**] Suponga que usted gana \$2 si $X \geq \pi$, y pierde \$1 en caso contrario. ¿Cuánto espera ganar?

a) Utilizando la fgm para calcular los dos primeros momentos se tiene

$$\begin{aligned} E(X) &= \left(\frac{d}{dt} e^{\pi t(1+t)}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left((\pi + 2\pi t) e^{\pi t(1+t)}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \pi \\ E(X^2) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} e^{\pi t(1+t)}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(\pi\left(\pi e^{\pi t(1+t)}(1+2t)^2 + 2e^{\pi t(1+t)}\right)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \pi^2 + 2\pi \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E(X) &= \pi \\ Var(X) &= E(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \pi^2 + 2\pi - \pi^2 \\ &= 2\pi \\ E\{(X-\pi)(X+\pi)\} &= E(X^2 - \pi^2) \\ &= E(X^2) - \pi^2 \\ &= \pi^2 + 2\pi - \pi^2 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo es reconociendo que la fgm entregada es la de una normal, pues

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\pi t(1+t)} \\ &= e^{\pi t + \pi t^2} \\ &= e^{\pi t + \frac{2\pi \cdot t^2}{2}} \end{aligned}$$

y esta es la fgm de una normal con parámetros $\mu = \pi$ y $\sigma^2 = 2\pi$, por lo que $X \sim N(\pi, 2\pi)$, y de acá es directo que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = 2\pi$.

- [**2/3**] por calcular correctamente cada valor pedido

b) La fgm de Z se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left(e^{tZ}\right) \\ &= E\left(e^{t(X-\pi)}\right) \\ &= e^{-t\pi} E(e^{tX}) \\ &= e^{-t\pi} M_X(t) \\ &= e^{-t\pi} e^{\pi t(1+t)} \\ &= e^{\pi t^2} \end{aligned}$$

Para mostrar que Z y $-Z$ tienen la misma distribución, podemos usar la fgm, y así mostrar que las fgm's son las mismas. Entonces

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= e^{\pi t^2} \\ M_{-Z}(t) &= M_Z(-t) \\ &= e^{\pi(-t)^2} \\ &= e^{\pi t^2} \end{aligned}$$

Luego, como las fgm son iguales, se tiene que Z y $-Z$ tienen la misma distribución.

- [**1**] por determinar correctamente la fgm de Z
- [**1**] pos mostrar que Z y $-Z$ tienen la misma distribución

c) Si definimos Y : monto que se gana, donde

$$Y = \begin{cases} 2, & X \geq \pi \\ -1, & X < \pi \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2P(Y = 2) - 1P(Y = -1) \\ &= 2 \cdot P(X \geq \pi) - P(X < \pi) \\ &= 2P(X - \pi \geq 0) - P(X - \pi < 0) \\ &= 2P(Z \geq 0) - P(Z < 0) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Luego, se espera ganar \$ 1/2.

Por lo demostrado en *a*) y *b*) se concluye que la v.a $Z = X - \pi$ es simétrica en torno a π, por lo que se cumple $P(X - \pi > 0) = P(X - \pi < 0) = 1/2$.

- [**2**] pos calcular correctamente la ganancia esperada