Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 5

1. Supongamos que los motores de un avión fallan en vuelo con una probabilidad $1 - p$, de forma independiente. El avión vuela si al menos la mitad de sus motores funcionan.
   a) ¿Cuál será la probabilidad de vuelo si tenemos n motores?
   b) ¿Qué valores de p hacen que sea preferible volar en un avión de cuatro motores vs. uno de dos motores?
2. Demuestre que la función de densidad de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es una función de densidad de probabilidad:
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
3. Todos los años, un determinado río transborda. Suponga que el marcador de límite mínimo de agua está definido en 1 y que el marcador de límite máximo de agua Y tenga la función de distribución:
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leq y < \infty$$
   (a) Verifique si $F_Y(y)$ es una función de distribución acumulada (FDA).
   (b) Encuentre $f_Y(y)$, la función de densidad de probabilidad (FDP) de Y.
   (c) Si el marcador de límite mínimo de agua fuera redefinido para 0 y usáramos una unidad de medición que sea $\frac{1}{10}$ de la original, el marcador del límite máximo sería $Z = 10(Y - 1)$. Encuentre $F_Z(z)$.
4. La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V cuya densidad tiene la forma:
$$f(v) = av^2 \exp(-bv^2), \quad 0 < v < \infty$$
donde $b = \frac{m}{2kT}$ y k, T y m representan la constante de Boltzmann, la temperatura absoluta y la masa de la molécula, respectivamente.
   (a) Use integración por partes y el hecho de que
$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$
   para evaluar la constante a.

(b) Deduzca la distribución de la energía cinética $W = \frac{mV^2}{2}$ de una molécula.

5. Sea X con función de densidad $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2$, para $-1 < x < 1$.

   (a) Encuentre $F_X(x)$.

   (b) Encuentre una función monótona $u(x)$ tal que la variable aleatoria $Y = u(X)$ tenga una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

   (c) Encuentre la FDP de $Z = 1 - X^2$ y muestre que la integración de la FDP es igual a 1.

6. Suponga que X tiene función de probabilidad geométrica:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

   Determine la distribución de probabilidad de $Y = \frac{X}{X+1}$.
   Nota: X y Y son variables aleatorias discretas. Para especificar la distribución de probabilidad de Y, explicite su función de probabilidad.

7. Un mazo contiene n cartas numeradas del 1 al n. Una persona escoge una carta al azar y la devuelve al mazo. Luego, escoge otra carta del mazo, la devuelve, y continúa así hasta obtener una misma carta por segunda vez. Sea X el número total de extracciones hasta obtener la repetición.

   (a) Determine el soporte de X, calcule $\mathbb{P}(X > k)$, y use este resultado para obtener la distribución de X.
   Hint: Note que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$.