Ejercicios 1: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Ejercicio 1: Sea $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. Encuentre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ Para cada una de las siguientes secuencias:
(a) $A_n = \{1, 2, ..., n\}$, $n = 1, 2 \ldots$.
(b) $A_n = \mathbb{N} - \{1, 2, ..., n\}$, $n = 1, 2 \ldots$.

Ejercicio 2: Sean $A_1, A_2 \subseteq \Omega$ y $\mathrm{C} = \{A_1, A_2\}$. Encuentre una $\sigma-$álgebra que contenga a C.

Ejercicio 3: Sean A y B subconjuntos de Ω tales que $A \subseteq B$. Considere la colección de conjuntos $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, B - A, (B - A)^c\}$. ¿Es $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Ω ?

Ejercicio 4: Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos σ-álgebras de subconjuntos de Ω. Demuestre que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ no necesariamente es un $\sigma-$álgebra. Considere, por ejemplo, el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las σ-álgebras $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

Ejercicio 5: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.
(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$. Cuál es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos A o B ?
(b) Sea Q otra medida de probabilidad definida en $(\Omega, \mathcal{A})$. Es $\alpha P + (1-\alpha)Q$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, una medida de probabilidad ?

Ejercicio 6: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.
(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$ tales que $A \subseteq B$. Pruebe que $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
(b) Si A y B son eventos independientes, muestre que A y B^c también lo son.
(c) Sean $a_1, ..., a_n$ números positivos y $A_1, ..., A_n$ una partición de Ω. Para todo A en $\mathcal{A}$ sea

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i) / \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i).$$

¿Es $Q(A)$, $A \in \mathcal{A}$, una medida de probabilidad ?

Ejercicio 7: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, con P definida como;

$$P((-\infty, x]) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x^2/2, & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ (x+1)/3, & \text{si } 1/2 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) bCalcule las siguientes probabilidades; $P((-\infty, 1/2])$, $P((-\infty, 5])$ y $P((1/2, 8])$.
(b) Estudie si la función $F_X(x) = P((-\infty, x])$ definida arriba es una función distribución.

Ejercicio 8: Sea $\Omega = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, $\mathcal{A}$=$\mathcal{P}(\Omega)$ y P definida como;

$$P(\{i\}) = (1-q)q^i, \text{ para } i = 0, 1, 2, ...; \ 0 < q < 1.$$

Es P una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$?

Ejercicio 9: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.
(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$, pruebe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(b) Sea $\{A_n; n = 1, 2, ...\}$ una secuencia decreciente de elementos de $\mathcal{A}$, muestre que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Ejercicio 10: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si A y B son tales que $P(A) = p$, $P(B) = q$ y $P(A \cup B) = r$. Muestre que;
(a) $P(A \cap B) = p + q - r$.
(b) $P(A \cap B^c) = r - q$.
(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - r$.
(d) $P(A \cup B^c) = p - r + 1$.

Ejercicio 11: Para ganar el campeonato, el City debe vencer al Town y al United. Tienen un 60 % de posibilidades de ganarle a Town, un 70 % de posibilidades de ganarle al United, y un 80 % de posibilidades de al menos una victoria. Cuál es el posibilidad de que el City gane el campeonato ? Describa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en este caso.

Ejercicio 12: Se tienen n personas formadas en un círculo, dos de las cuales se llaman Ana y Berta. Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación ? Describa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ejercicio 13: De entre los números $\{1, 2, ..., 50\}$ se escoge uno al azar. Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea devisible por 6 o por 8 ?

Ejercicio 14: De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen 4 al azar (sin sustitución) y se multiplican. Cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo ?

Ejercicio 15: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.
(a) Demuestre que para dos sucesos cualquiera, A_1 y A_2, se tiene que $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.
(b) Demuestre que para n sucesos cualquiera, $A_1, A_2, ..., A_n$, se tiene que $P(A_1 \cup A_2 .... \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Ver además: Los ejercicios 1.1 al 1.45 del libro Casella/Berger (2002, Ch.1, Section 1.7), y los ejercicios del libro de Blanco/ Arunachalam/Dharmaraja (2012, Ch.1).