Ayudantía 9 - Soluciones

Pregunta 1

Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k \cdot \max\{x,y\}, & 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante k

La integral de la densidad sobre todo su dominio debe ser 1:

$$\int_0^1 \int_0^1 k \cdot \max\{x,y\} \, dx \, dy = 1$$

Dividimos la integral en dos regiones según $\max\{x,y\}$:
- Cuando $x > y$, $\max\{x,y\} = x$ - Cuando $y \geq x$, $\max\{x,y\} = y$

$$\int_0^1 \int_0^y k \cdot y \, dx \, dy + \int_0^1 \int_y^1 k \cdot x \, dx \, dy = 1$$

Calculamos:

$$\int_0^1 ky \cdot y \, dy + \int_0^1 k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1} dy = k \left[\int_0^1 y^2 \, dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \right]$$

$$= k \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \right] = k \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2k}{3}$$

Igualamos a 1:

$$\frac{2k}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

b) Calcule $P(Y > \sqrt{2}X)$

Calculamos:

$$P(Y > \sqrt{2}X) = \iint_{y > \sqrt{2}x} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy$$

Dado que $0 < x < 1$ y $y > \sqrt{2}x$, el límite superior de x es $1/\sqrt{2}$ para que $y \leq 1$.

$$P = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}x}^1 \frac{3}{2} \cdot \max\{x,y\} \, dy \, dx$$

En esta región, $y > x \;\; \max\{x,y\} = y$:

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}x}^1 \frac{3}{2} y \, dy \, dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{2}x}^1 dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{4}(1 - 2x^2) \, dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

c) Marginal de Y y su distribución

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y \frac{3}{2}y\,dx + \int_y^1 \frac{3}{2}x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 = \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}(1-y^2) = \frac{3}{4}(1+y^2)$$

Reconocemos que no es una distribución estándar, pero sí válida en $[0,1]$.

d) Marginal de X

Por simetría en la función $f(x,y)$ (es simétrica en x, y):

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{3}{4}(1+x^2)$$

e) ¿Son X y Y independientes?

No. Para que lo fueran, se debe cumplir:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Pero:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2} \cdot \max\{x,y\} \neq \left(\frac{3}{4}(1+x^2)\right)\left(\frac{3}{4}(1+y^2)\right)$$

f) Densidad de $Z = \sin(-\ln(X))$

Sea $Z = g(X) = \sin(-\ln(X))$, con $X \in (0,1)$. Esta función es biyectiva de $(0,1)$ en $(0,1)$.

Aplicamos cambio de variable con inversa $x = e^{-\arcsin(z)}$, y derivada:

$$f_Z(z) = f_X(e^{-\arcsin(z)})\left|\frac{d}{dz}e^{-\arcsin(z)}\right| = f_X(e^{-\arcsin(z)}) \cdot \frac{e^{-\arcsin(z)}}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{3}{4}\left(1 + e^{-2\arcsin(z)}\right) \cdot \frac{e^{-\arcsin(z)}}{\sqrt{1-z^2}}, \quad 0 < z < 1$$

Pregunta 2

Sean X y Y variables aleatorias independientes.

a) Mostrar que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Dado que X y Y son independientes, su densidad conjunta (discreta o continua) se puede escribir como:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(XY) = \iint xy \cdot f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy = \left(\int xf_X(x)dx\right) \cdot \left(\int yf_Y(y)dy\right) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

b) Mostrar que $h(X)$ y $g(Y)$ también son independientes

Sea h y g funciones medibles. Entonces, como X y Y son independientes:

$$P(h(X) \leq a, g(Y) \leq b) = P(h(X) \leq a) \cdot P(g(Y) \leq b)$$

Esto se debe a que la independencia se conserva bajo transformaciones funcionales (measurable functions). Por lo tanto:

$$h(X) \perp g(Y)$$

—

Pregunta 3

Dada la siguiente tabla de distribución conjunta de (X, Y):

$X \backslash Y$	0	1	3
1	0.1	0.2	0.1
2	0.15	0.25	0.2

a) Calcule $P(Y > X)$

Analizamos las celdas donde $Y > X$:

- $X = 1$, $Y = 3$: $P = 0.1$ - $X = 1$, $Y = 1$: no cuenta (igual) - $X = 2$, $Y = 3$: $P = 0.2$

$$P(Y > X) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

b) Calcule $\mathbb{E}(\cos(XY))$

$$\mathbb{E}(\cos(XY)) = \sum_{x,y} \cos(xy) \cdot P(X = x, Y = y)$$

$$= \cos(0) \cdot 0.1 + \cos(1) \cdot 0.2 + \cos(3) \cdot 0.1 + \cos(0) \cdot 0.15 + \cos(2) \cdot 0.25 + \cos(6) \cdot 0.2$$

$$\approx 1 \cdot 0.1 + 0.5403 \cdot 0.2 + (-0.9899) \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.15 + (-0.4161) \cdot 0.25 + 0.9602 \cdot 0.2$$

$$\approx 0.1 + 0.1081 - 0.099 + 0.15 - 0.1040 + 0.1920 = 0.3471$$

c) Determine la marginal de X

Sumamos por filas:

$$P(X = 1) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4 \quad , \quad P(X = 2) = 0.15 + 0.25 + 0.2 = 0.6$$

d) ¿Son X y Y independientes?

Calculamos marginales de Y:

$$P(Y = 0) = 0.1 + 0.15 = 0.25, \quad P(Y = 1) = 0.2 + 0.25 = 0.45, \quad P(Y = 3) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

Verificamos si $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$ (sí) Probamos con otra:

$$P(X = 2, Y = 3) = 0.2, \quad P(X = 2) \cdot P(Y = 3) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 \neq 0.2$$

Entonces, **no son independientes**.

Pregunta 4

Sea la función de probabilidad conjunta dada por:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{e^2 \cdot y! \cdot (x-y)!}, \quad x \in \{0,1,\dots\},\ y \in \{0,1,\dots,x\}$$

¿Cómo distribuyen X e Y?

Observamos que para cada par (x,y) válido, $x \geq y \geq 0$, se cumple:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{y!(x-y)!}$$

Esto sugiere que:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{y!(x-y)!}, \quad x \geq y$$

Cambiamos de variable: sea $Z = X - Y \quad X = Y + Z$

$$P(Y = y, Z = z) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{y!z!}$$

Es decir, (Y, Z) tiene distribución de **dos Poisson(1)** independientes:

$$Y \sim \text{Poisson}(1), \quad Z \sim \text{Poisson}(1), \quad \text{independientes}$$

Entonces:

$$X = Y + Z \Rightarrow X \sim \text{Poisson}(2)$$

Y en resumen:

- $X \sim \text{Poisson}(2)$
- $Y \sim \text{Poisson}(1)$
- $X - Y \sim \text{Poisson}(1)$
- Y y $X - Y$ independientes

—

Pregunta 5

Sean $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y $Y \sim \text{Geom}(p)$ independientes.

Calcular $P(Y > X)$

$$P(Y > X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(Y > x) \cdot P(X = x)$$

Sabemos que:

$$P(Y > x) = (1-p)^x, \quad P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Entonces:

$$P(Y > X) = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}$$

Respuesta final:

$$P(Y > X) = e^{-p\lambda}$$