Soluciones Ayudantía 6: Modelos Probabilísticos

Instituto de Estadística – PUC Chile

Ejercicio 1

Sea X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|<1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

[a)]*X y $-X$ tienen la misma distribución.*
Notamos que $f_{-X}(x) = f_X(-x) = 1-|-x| = 1-|x| = f_X(x)$ para $|x|<1$. Por lo tanto la densidad es simétrica y X y $-X$ son iguales en distribución. $P(X>0)=\frac{1}{2}$.
Por simetría de la densidad sobre $[-1,1]$, la mitad de la probabilidad está en $(0,1)$, de modo que

$$P(X>0) = \frac{1}{2}.$$

$E(X)=0$.
Nuevamente por simetría $f_X(x)=f_X(-x)$ se tiene que

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\, dx = 0.$$

$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)$.
En general $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ y como $E(X)=0$, resulta

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2).$$

Para referencia, uno puede verificar

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\, dx = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 2

Sea X con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<1, \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{x-1+\lambda}\right)^3, & x\geq 1, \end{cases} \qquad (\lambda>0).$$

[a)]$P(X=1)$.
Hay una masa puntual en $x=1$ dada por

$$P(X=1) = F_X(1^+) - F_X(1^-) = \left[1-\tfrac{1}{2}(1)^3\right] - 0 = \frac{1}{2}.$$

Tipo de variable y recorrido.
X es una variable aleatoria *mixta*: tiene un átomo de masa $\frac{1}{2}$ en $x = 1$ y una parte continua en el intervalo $(1, \infty)$. Cálculo de $E(2X)$ y $E(X^2)$.
Se demuestra (por integración) que

$$E(X) = 1 + \frac{\lambda}{4}, \quad E(X^2) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Luego

$$E(2X) = 2E(X) = 2 + \frac{\lambda}{2}.$$

$\mathrm{Var}(X)$.
Utilizando la fórmula $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, resulta

$$\mathrm{Var}(X) = \left(1 + \tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{\lambda^2}{2}\right) - \left(1 + \tfrac{\lambda}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\,\lambda^2.$$

Ejercicio 3

Sea X el número de ensayos hasta el primer éxito, con probabilidad de éxito p en cada ensayo, independientes.

[a)]Distribución de X.
Sigue una distribución geométrica con parámetro p, es decir

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

$E(X)$.
Para la geométrica se conoce $E(X) = 1/p$. $E\big(2^X\big)$.
Usando la serie geométrica,

$$E(2^X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (1 - p)^{k-1} p = \frac{2p}{1 - 2(1 - p)},$$

válida siempre que $2(1-p) < 1$ (i.e. $p > 1/2$), y diverge si $p \leq 1/2$. $P\big(X = 4 \mid X > 1\big)$.
Por definición de probabilidad condicional,

$$P(X = 4 \mid X > 1) = \frac{P(X = 4)}{P(X > 1)} = \frac{(1 - p)^3 p}{1 - P(X = 1)} = \frac{(1 - p)^3 p}{1 - p} = (1 - p)^2 p.$$

Ejercicio 4

Sea $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ con densidad $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. El costo de reparación es $C = S + kT$, donde S vale s_1 con probabilidad p y s_2 con probabilidad $1 - p$, y $k > 0$.

[a)]$P(T < 2) = 1 - e^{-2\lambda}$.
$E(C)$.
Como $E(S) = ps_1 + (1 - p)s_2$ y $E(T) = 1/\lambda$, se tiene

$$E(C) = E(S) + kE(T) = ps_1 + (1 - p)s_2 + \frac{k}{\lambda}.$$

Si se reparan 10 artículos, la probabilidad de que exactamente 3 tengan tiempo < 2 h es
$$\binom{10}{3}\big(P(T<2)\big)^3\big(1-P(T<2)\big)^7 = \binom{10}{3}(1-e^{-2\lambda})^3 e^{-14\lambda}.$$
Demostración de la desigualdad
$$\int_0^\infty -\log(\lambda x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \geq -\log\Big(\int_0^\infty x\,\lambda^2 e^{-\lambda x}\,dx\Big).$$
Notamos que la función $g(x) = -\log(x)$ es convexa para $x > 0$, por lo que se aplica la desigualdad de Jensen a la variable $Y = \lambda T$ y se obtiene la forma deseada. Valor de k que minimiza $\mathrm{Var}(C)$.
Dado que S y T son independientes,
$$\mathrm{Var}(C) = \mathrm{Var}(S) + k^2\mathrm{Var}(T) = \text{constante} + k^2\frac{1}{\lambda^2}.$$
Esta expresión se minimiza tomando
$$k = 0.$$