Clase 15 – Distribución de funciones de vectores aleatorios

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle
Curso: Métodos Probabilísticos EYP1025-1027

1. Introducción

Dado un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ y funciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define:

$$Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

Entonces, el nuevo vector $(Y_1, \ldots, Y_n)$ también es un vector aleatorio. Nuestro objetivo es determinar la distribución conjunta de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ conociendo la de $(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Caso discreto

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es discreto, la función de masa de probabilidad de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ es:

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n):g_i(x)=y_i} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

Primero se debe determinar el soporte de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, es decir:

$$\mathcal{Y} = \{(y_1, \ldots, y_n) : y_i = g_i(x), \text{ para algún } x \in \mathcal{X}\}$$

Ejemplo

Sean $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$. Entonces:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{(x_1,x_2):x_1+x_2=y_1,\ x_1-x_2=y_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Ejemplo numérico

Dado:

x_1	x_2	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$
0	2	1/4
3	4	1/8
1	6	1/8
2	8	1/2

Se obtiene:

$y_1 = x_1 + x_2$	$y_2 = x_1 - x_2$	$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$
2	-2	1/4
7	-1	1/8
7	-5	1/8
10	-6	1/2

3. Convolución discreta

Si X_1 y X_2 son independientes:

$$P(Y = X_1 + X_2 = y) = \sum_k P(X_1 = y - k)P(X_2 = k)$$

Ejemplo: Si $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ y $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, entonces:

$$Y = X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

4. Caso continuo (transformación uno a uno)

Si $Y = g(X)$ y la transformación es biunívoca (invertible), se usa el Jacobiano J:

$$f_Y(y) = |J| f_X(h(y))$$

donde h es la inversa de g y J es el determinante de la matriz jacobiana:

$$J = \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \right|$$

Teorema para n=2

Si (X_1, X_2) tiene fdp f_{X_1,X_2} y g es biunívoca:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = |J| f_{X_1,X_2}(h_1(y), h_2(y))$$

Ejemplo

Sean $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$. Entonces:

$$x_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2}$$

$$|J| = \frac{1}{2}, \quad f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

5. Ejemplos

- $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(1)$: $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y_1}, & \text{si } |y_2| < y_1,\ y_1 > 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

- $X_1, X_2 \sim U(0, 1)$: se transforma $(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ con condiciones dadas para el soporte.
- $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$: entonces $Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$, $Y_2 = X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$.

6. Convolución continua

Si X_1 y X_2 son continuas e independientes:

$$f_Y(y) = \int f_{X_1}(y - z) f_{X_2}(z)\, dz$$

Ejemplo:

Si $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \Rightarrow Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$$

7. Extensiones

- $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p), X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$ independientes $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$
- $X_i \sim \text{Geo}(p)$ iid $\Rightarrow \sum X_i \sim \text{Bin}(n, p)$
- $X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda)$ independientes $\Rightarrow \sum X_i \sim \text{Gamma}(\sum \alpha_i, \lambda)$