



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO
AYUDANTE: YOSEPH BARRERA

Modelos Probabilísticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 6

1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Indique si alguna de las siguientes afirmaciones es verdadera. Justifique sus respuestas.

- a) X y $-X$ tienen la misma distribución.
- b) $P(X > 0) = 1/2$.
- c) $\mathbb{E}(X) = 0$.
- d) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada (FDA) dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{x-1+\lambda} \right)^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$.

- a) Calcule $P(X = 1)$
- b) ¿Qué tipo de variable aleatoria es X ? Determine su recorrido.
- c) Calcule $\mathbb{E}(2X)$ y $\mathbb{E}(X^2)$
- d) Determine $\text{Var}(X)$

3. Sea X la variable aleatoria que mide el número de ensayos hasta obtener el primer éxito.

- a) ¿Qué distribución sigue X ?
- b) Calcule $\mathbb{E}(X)$
- c) Calcule $\mathbb{E}\left(\frac{2}{X}\right)$

- d) Determine la probabilidad de tener que realizar 4 ensayos para obtener el primer éxito, dado que el primer éxito ocurre después del primer ensayo.
4. El tiempo de reparación (en horas) T de un artículo se puede modelar a través de la siguiente función de densidad:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

con $\lambda > 0$. El costo de reparación de un artículo es $C = S + kT$, donde la constante k es un costo por unidad de tiempo y la variable aleatoria S toma valores s_1 y s_2 con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente.

- a) Calcule la probabilidad de que el tiempo de reparación de algún artículo sea menor a dos horas.
- b) Calcule el costo esperado de reparación.
- c) Si se analizan los tiempos de reparación de 10 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que 3 de ellos tengan un tiempo de reparación menor a dos horas?
- d) Muestre que

$$\int_0^\infty -\log(\lambda x) \lambda e^{-\lambda x} dx \geq -\log \left(\int_0^\infty x \lambda^2 e^{-\lambda x} dx \right)$$

- e) Determine el valor de k tal que minimice la varianza del costo de reparación.