* **FDA:** $F_X(x) = P(X \le x)$ (a partir de esto se def los tipos de v.a.)

* **Var. Aleatoria:** $X: \Omega \to \mathbb{R};\ \omega \to X(\omega)$

- X es Discreta si $F_X(x)$ es fun. Escalera de $x \Rightarrow$ fmp DaDa por $p_X(x) = P(X = x)$
- X es continua si $F_X(x)$ es fun. Discreta de $x \Rightarrow$ fdp Dada por $F_X'(x) = f_X(x)$

- para ambos la v.a estara def en $\mathcal{X}$.
- Dmp
- Cdf (type, func, Ec)

$$P(a \le X \le b) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b} p_X(x) & \text{Discreta} \\ \int_a^b f_X(x)dx & \text{Continua} \end{cases}$$

* Una función $F_X(X)$ es una fdp o fmp de X (v.a.)

$\Leftrightarrow$ La función es positiva $\{0\}$ y suma o integra 1 en todo $\mathcal{X}$

* Relación entre $f_X(x)$ y $F_X(x)$

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ y
- $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

Props $F_X(x)$:

- $F_X(x) \in [0,1]$
- $F_X(x) \le F_X(x+1)$ creciente
- $\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$ continua por la derecha
- $F_X(x^-) = P(X < x)$ def

Esperanza

$$E(h(X)) = \mu_X = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} h(x)p_X(x) & \text{Discretas} \\ \int_{\mathcal{X}} h(x)f_X(x)\,dx & \text{Continua} \end{cases}$$

Props:
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(b) = b$
- Si g es convexa $(f''(x) > 0) \Rightarrow E(g(X)) \ge g(E(X))$
- Si g es concava $(f''(x) < 0) \Rightarrow E(g(X)) \le g(E(X))$

Mediana

la med(X) es un numero que cumple:

- $F_X(\text{med}(X)) = 1/2$ y en el caso discreto $(P(X \ge m), P(X \le m)) \ge 1/2$

Varianza

$Var(X) = \sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$

Props:
- $Var(aX) = a\,Var(X)$
- $Var(b) = 0$
- $Var(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2$

Momentos

- El n-esimo momento NO centrado de $X = E(|X^n|)$
- El n-esimo momento centrado de $X = E[|(X - \mu_X)^n|]$

* Asimetria (γ_X): $E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3$
* Curtosis (K_X): $E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3$
* Desigualdad de Markov: $P(|X| \ge \lambda) \le \dfrac{E(|X|^k)}{\lambda^k}$

Funcion generadora de Momentos

$M_X(t) = E(e^{tX})$, * caracteriza de forma unica a la distribucion

Props:
- $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}$
- $E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\big|_{t=0}\right)$
- $M_{X+b}(t) = e^{bt}M_X(t)$
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- $M_{aX+b}(t) = e^{bt} \cdot M_X(at)$
- $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}} \cdot M_X(t/b)$

- En caso de que la funcion generadora de momentos $\nexists$, se Def la fun caracteristica como: $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$

- $E(X^n) = \frac{1}{i^n} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(\varphi_X(t)\big|_{t=0}\right)$ prop + importante

- Def de percentil:

si x_p es el valor que toma el percentil $p \times 100\%$, $\Rightarrow F_X(x_p) = p$

Distribuciones Discretas.

e.o.c = en otro caso

Bernoulli:

$$P_X(X) = \begin{cases} p & \text{si } X=1 \\ 1-p & \text{si } X=0 \end{cases}$$

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
- $M_X(t) = (1-p) + pe^t$
- Notación: $X \sim Bin(n,p)$
- $p \in [0,1]$

- Toma valores 1 y 0 (exito, fracaso) con prob de exito p y fracaso 1-p.

Binomial:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x} & X = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = np = \lambda$
- $Var(X) = np(1-p)$
- $M_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$
- Not.: $X \sim Bin(n,p)$
- Gente se pide la cant x de exitos en un exp.

- Mide n° de exitos en n ensayos independientes Bernouli con prob. p

Uniforme discreta:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & X = \overset{x_1}{a}, a+1, \ldots, b-1, \overset{x_n}{b} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- $E(X^r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^r$
- $M_X(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{tx_i}$
- Not.: $X \sim Unif\{a,b\}$

- Corresponde al caso equiprobable, donde cada resultado tiene la misma prob. con $n = b-a+1$.

Binomial neg:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & X = k, k+1, \ldots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{k}{p}$
- $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- $M_X \quad \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^k$
- Not.: $X \sim BinNeg(k,p)$

- Cuenta el n° (x) de ensayos Bernoulli necesarios para tener k exitos

Geometrica:

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & X = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/p$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
- Not.: $X \sim Geo(p)$

- Cuenta el n° de ensayos hasta obtener el 1er ensayo. (se suele usar en tiempos de falla)

Poisson:

$$p_X(X) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = Var(X) = \lambda$
- $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$
- Not: $X \sim P(\lambda)$

- mide la probabilidad de ocurrencias

Hipergeometrica:

- N: Tamaño población
- n: Tamaño muestra selecc.
- K: N° elem. o indiv en la muestra con cierta caract.

$$p_X(X) = \begin{cases} \frac{\binom{N-K}{n-x}\binom{K}{x}}{\binom{N}{n}} & X = 0,1,\ldots,\min(n,k) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{nK}{N}$
- $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$
- $f_X(x) \simeq \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, para N grande en comparación de k
- Not.: $X \sim Hip(N,K,X)$

- Para N elem, $K \in$ a la categoria A y $N-K \in$ a la cat. B, esta Distrib. mide la prob de obtener X $(0 \leq X \leq k)$ elem de la cat. A en una muestra sin reemplazo de n elem. de la poblacion original

Distribuciones Continuas

Uniforme $(X \sim U(a,b))$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
- Para efectos da la misma prob. si es $U[a,b]$ o $U[a,b)$

Gamma $(X \sim (Gamma(\alpha,\beta))$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$
- $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$
- $\alpha, \beta > 0$

Props. fun.:
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$

- Si $\alpha > 1 \Rightarrow X \sim$ Earlang

Normal $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$
- $Var(X) = \sigma^2 > 0$
- $M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$

- Se denomina Normal Estandar cuando $\mu = 0$ y σ
En este caso $X \sim N(0,1)$ con $f_X(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$
- La acumulada de la Normal est. es $\phi(x)$,
Props(ϕ):
  - $\phi(0) = 1/2$
  - $\phi(x)^{-1} = -\phi(1-x)^{-1}$
  - $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

casos part. de Gamma:

Exponencial $(X \sim Exp(\lambda))$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
- $\lambda > 0$

Chi-Cuadrado $(X \sim \chi^2(n))$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = n$
- $Var(X) = 2n$
- $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$

- $n \in \mathbb{N}$
- n denota los grados de libertad

*Nada Sobra:

La fda tiene las siguientes propiedades:

Considere una v.a discreta y $a, b \in \mathcal{X}$ con $a < b$. Se tiene que

- $F_X(x^-) = P(X < x)$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a)$
- $$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

- $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$

Para el caso continuo simplemente se tiene

- $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$
- $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$

Note que las propiedades para las v.a.s discretas también aplican para las mixtas.