

Resumen Clase 6: Modelos Probabilísticos

Profesor Reinaldo B. Arellano-Valle

1 Tipos de Variables Aleatorias

- **Discretas:** Valores contables.

$$f_X(x) = P(X = x), \quad \sum_x f_X(x) = 1.$$

- **Continuas:** Valores no contables.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, \quad f_X(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

- **Mixtas:** Combinan partes discreta y continua.

2 Medidas de Localización y Dispersión

2.1 Esperanza (Media)

$$E(X) = \begin{cases} \sum x f_X(x), & \text{discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & \text{continua.} \end{cases}$$

Alternativa general:

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx.$$

Propiedades:

$$E(aX + b) = a E(X) + b,$$

$$X \geq Y \implies E(X) \geq E(Y),$$

$$a \leq X \leq b \implies a \leq E(X) \leq b,$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x) \quad \text{o} \quad \int g(x) f_X(x) dx.$$

2.2 Mediana

Un valor m tal que

$$P(X \leq m) \geq 0.5 \quad \text{y} \quad P(X \geq m) \geq 0.5.$$

Siempre existe, pero puede no ser único.

2.3 Varianza

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

donde $\mu = E(X)$. La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Propiedades:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X), \quad \text{Var}(X) \geq 0, \quad \text{Var}(X) = 0 \iff X \equiv c.$$

3 Ejemplos Clave

- *Distribución de urna (discreta)*: ley hipergeométrica.
- *Distribución con $f_X(x) = 2x$ en $[0, 1]$* : $E(X) = 2/3$.
- *Mixta*: parte discreta en $x = \frac{1}{2}$ y continua en $[0, \frac{1}{2})$.
- *Cauchy*: $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Media no existe; mediana 0.
- *Juego exponencial de ganancias*: $P(X = 2^k) = 2^{-k}$, $E(X) = \infty$.