Clase 13 - Esperanza de Funciones de un Vector Aleatorio

Resumen basado en la clase de Reinaldo B. Arellano-Valle
Departamento de Estadística, PUC

1. Esperanza de funciones de un vector aleatorio

Dado un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ y una función real $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la transformación $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria. La esperanza de $g(X_1, \ldots, X_n)$ se puede calcular directamente:

- Caso discreto:
$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)] = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

- Caso continuo:
$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

2. Aplicaciones

2.1 Funciones lineales

Si $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_i x_i + b$, entonces:
$$\mathbb{E}\left[\sum a_i X_i + b\right] = \sum a_i \mathbb{E}[X_i] + b$$

Ejemplo: Si $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$, entonces $\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum \mathbb{E}[X_i]$. Si todas tienen media μ, entonces $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$.

2.2 Función Generadora de Momentos (FGM)

Definición: La FGM conjunta es:
$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{\sum t_i X_i}\right]$$

Propiedades:

- (i) $M_{X_1,\ldots,X_k}(t_1, \ldots, t_k) = M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$
- (ii) Derivadas parciales generan momentos.
- (iii) Independencia: $M_{X_1,\ldots,X_n} = \prod M_{X_i}$.
- (iv) Transformación lineal: $M_Y(t) = e^{bt} M_{X_1,\ldots,X_n}(a_1 t, \ldots, a_n t)$

Ejemplo: Si $X_i \sim Ber(p)$ independientes, entonces $\sum X_i \sim Bin(n, p)$.
Ejemplo: Si $X_1, X_2 \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ independientes, entonces $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma^2)$.

2.3 Covarianza y correlación

Definición:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

Propiedades:

- (i) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- (ii) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
- (iii) Simetría: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- (iv) $\mathrm{Cov}(X,c) = 0$ para constante c
- (v) Independencia implica $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
- (vi) $\mathrm{Cov}(aX+b,Y) = a\mathrm{Cov}(X,Y)$
- (vii) $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$

Correlación:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \in [-1,1]$$

Teorema: Si $Y = aX+b$, entonces $\rho_{XY} = \mathrm{signo}(a)$.

2.4 Varianza de funciones lineales

$$\mathrm{Var}\left(\sum a_i X_i + b\right) = \sum a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Ejemplo: Si X_i iid con varianza σ^2, entonces:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ejemplo: Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ independientes, entonces:

$$\sum a_i X_i + b \sim N\left(\sum a_i \mu_i + b, \sum a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

3. Ejemplo final

Dada una función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = 2xy + 0{,}5$ en $[0,1]^2$, se obtiene:

- $\mu_X = \mu_Y = \frac{7}{12}$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{144}$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{11}{144}$
- $\rho_{XY} = \frac{1}{11}$ (positiva pero baja)