Resolución Ayudantía 7 - Ejercicio 1

Ejercicio 1. Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con densidad $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$, y sea $Y = e^{aX}$ con $a > 0$.

a) Calcule $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{aX}]$

Se tiene:

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = \int_0^\infty e^{ax} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{(a-\lambda)x}\, dx$$

Esta integral converge si $a < \lambda$, y se calcula como:

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-a)x}\, dx = \lambda \cdot \left[\frac{1}{\lambda - a}\right] = \frac{\lambda}{\lambda - a}, \quad \text{para } a < \lambda$$

b) Use la desigualdad de Jensen para obtener una cota inferior para $\mathbb{E}[Y]$

La función $g(x) = e^{ax}$ es convexa, por lo tanto, por la desigualdad de Jensen:

$$\mathbb{E}[e^{aX}] \geq e^{a\mathbb{E}[X]}$$

Como $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, entonces:

$$\mathbb{E}[e^{aX}] \geq e^{a/\lambda}$$

c) ¿Cuándo se da la igualdad en Jensen?

La igualdad en Jensen se cumple si y sólo si X es constante casi seguramente. Dado que X tiene una distribución exponencial (no degenerada), la desigualdad es estricta:

$$\mathbb{E}[e^{aX}] > e^{a/\lambda}$$

d) Si $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d. $\sim$ Exp(λ), ¿cuál es una cota inferior para:

$$\mathbb{E}\left[e^{a \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}\right]?$$

Aplicamos Jensen nuevamente. Sea $Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces:

$$\mathbb{E}\left[e^{aZ}\right] \geq e^{a\mathbb{E}[Z]} = e^{a\cdot\mathbb{E}[X]} = e^{a/\lambda}$$

Resumen de resultados

- $\boxed{\mathbb{E}[e^{aX}] = \dfrac{\lambda}{\lambda - a}}$ para $a < \lambda$
- $\boxed{\mathbb{E}[e^{aX}] \geq e^{a/\lambda}}$
- Igualdad en Jensen sólo si X es constante.
- Para promedio de variables i.i.d. exponenciales: $\boxed{\mathbb{E}[e^{a\bar{X}}] \geq e^{a/\lambda}}$

Ejercicio 2. Sea $X \sim \mathcal{N}(1,4)$, es decir, con media 1 y varianza 4.
a) Demuestre que $\mathbb{P}(-1 < X < 3) = 2\Phi(1) - 1$.
Como $X \sim \mathcal{N}(1,4)$, la variable tipificada es:

$$Z = \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(-1 < X < 3) = \mathbb{P}\left(\frac{-1-1}{2} < Z < \frac{3-1}{2}\right) = \mathbb{P}(-1 < Z < 1)$$

Y esto equivale a:

$$\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1$$

b) Sea $Y = \frac{1}{2}(X-1)$. Pruebe que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Como $X \sim \mathcal{N}(1,4)$:

- Media de Y: $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X] - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$
- Varianza de Y: $\mathrm{Var}(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

Entonces, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Ejercicio 3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con f.d.p. conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}, \quad x > 0, y > 0$$

a) Encuentre las marginales de X e Y.

$$f_X(x) = \int_0^\infty 4xye^{-(x^2+y^2)}\,dy = 4xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}\,dy = 2xe^{-x^2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} 4xye^{-(x^2+y^2)}\,dx = 4ye^{-y^2}\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = 2ye^{-y^2}$$

b) ¿Son X e Y independientes?
Como $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$:

$$4xye^{-(x^2+y^2)} = (2xe^{-x^2})(2ye^{-y^2})$$

Entonces, **sí**, X e Y son independientes.

Ejercicio 4. Sea X con función de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcule las siguientes probabilidades:

- $\mathbb{P}(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(2|X-1| > 1) \Rightarrow \mathbb{P}(|X-1| > 0.5) = \mathbb{P}(X > 1.5) = 1 - F(1.5) = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{P}(X \leq 3 \mid X > 2) = \frac{F(3)-F(2)}{1-F(2)} = \frac{1-\frac{1}{3}-(1-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

b) Proponga una medida de localización.
Una medida natural es la **mediana**, definida como m tal que $F_X(m) = 0.5$:

$$1 - \frac{1}{m} = 0.5 \Rightarrow m = 2$$

c) Sea $g(X) = 1 - \frac{1}{X}$. Calcule su esperanza y varianza.
Densidad: $f(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_1^{\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[g^2(X)] = \int_1^{\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Var}(g(X)) = \mathbb{E}[g^2(X)] - (\mathbb{E}[g(X)])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Resumen:

- $\mathbb{P}(1 < X \leq 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(2|X1| > 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X \leq 3|X > 2) = \frac{1}{2}$
- Mediana de $X = 2$
- Esperanza de $g(X) = \frac{1}{2}, \quad$ Varianza de $g(X) = \frac{1}{12}$

Ejercicio 5. El tiempo de espera X de un paciente que llega a una consulta médica es:

- $X = 0$ si el médico está desocupado (con probabilidad p).
- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si el médico está ocupado (con probabilidad $1 - p$).

a) Obtenga y grafique la función de distribución acumulada (FDA) de X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p, & x = 0 \\ p + (1-p)(1 - e^{-\lambda x}), & x > 0 \end{cases}$$

b) Encuentre la esperanza del tiempo de espera del paciente.
Como $X = 0$ con probabilidad p y $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con probabilidad $1 - p$:

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot p + (1-p) \cdot \mathbb{E}[\text{Exp}(\lambda)] = (1-p) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{\lambda}}$$

c) Calcule la probabilidad de que el paciente tenga que esperar más de lo esperado, es decir: $\mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X])$
Solo se considera la parte exponencial, ya que con probabilidad p el valor es 0:

$$\mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) = (1-p) \cdot \mathbb{P}(\text{Exp}(\lambda) > \mathbb{E}[X]) = (1-p) \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1-p}{\lambda}} = (1-p) \cdot e^{p-1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) = (1-p)e^{p-1}}$$

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos:

$$M_X(t) = e^{\pi t(1+t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Calcule $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}(X)$ y $\mathbb{E}[(X - \pi)(X + \pi)]$.
Primera derivada:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\pi t(1+t)}\right) = \pi(1 + 2t)e^{\pi t(1+t)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \pi$$

Segunda derivada:

$$M_X''(t) = [\pi(1+2t)]^2 e^{\pi t(1+t)} + 2\pi e^{\pi t(1+t)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \pi^2 + 2\pi$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \pi^2 + 2\pi - \pi^2 = 2\pi$$

$$\mathbb{E}[(X-\pi)(X+\pi)] = \mathbb{E}[X^2] - \pi^2 = \pi^2 + 2\pi - \pi^2 = 2\pi$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \pi, \quad \mathrm{Var}(X) = 2\pi, \quad \mathbb{E}[(X-\pi)(X+\pi)] = 2\pi}$$

b) Sea $Z = X - \pi$. Obtenga $M_Z(t)$ y muestre que Z y $-Z$ tienen la misma distribución.

$$M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{t(X-\pi)}] = e^{-\pi t} M_X(t) = e^{-\pi t} e^{\pi t(1+t)} = e^{\pi t^2}$$

$$M_{-Z}(t) = \mathbb{E}[e^{-t(X-\pi)}] = e^{\pi t^2} = M_Z(t)$$

Entonces:

$$\boxed{Z \sim -Z} \quad \text{(distribuciones simétricas respecto al 0)}$$

c) Si se gana \$2 cuando $X \geq \pi$ y se pierde \$1 en caso contrario, ¿cuánto se espera ganar?
Como $Z = X - \pi \sim -Z$ (simétrica):

$$\mathbb{P}(X \geq \pi) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 0.5$$

$$\mathbb{E}[\text{ganancia}] = 2 \cdot 0.5 + (-1) \cdot 0.5 = 0.5$$

$$\boxed{\text{Ganancia esperada} = \$0.5}$$

Ejercicio 7.

a) Sean $X \sim \text{Poisson}(\lambda_x)$ y $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_y)$ independientes. ¿Es cierto que $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_x + \lambda_y)$?

Sí. La suma de dos variables Poisson independientes es también Poisson, con parámetro igual a la suma:

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_x + \lambda_y)$$

b) Sean $X \sim \text{Exp}(\lambda_x)$ y $Y \sim \text{Exp}(\lambda_y)$ independientes. ¿Es cierto que $X + Y \sim \text{Exp}(\lambda_x + \lambda_y)$?

No. La suma de dos variables exponenciales independientes **no** sigue una distribución exponencial, salvo que ambas tengan el mismo parámetro (caso especial Erlang/Gamma con $k = 2$):

$$X + Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda) \quad \text{si } X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Resumen:

- **a)** Verdadero.
- **b)** Falso.

Ejercicio 8. Sea X una variable aleatoria con densidad:

$$f_X(x) = e^{-\theta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0$$

a) Determine el valor de la constante θ para que $f_X(x)$ sea una densidad válida.
La función debe integrar a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\theta x}dx = \frac{2}{\theta} \Rightarrow f_X(x) = \frac{\theta}{2}e^{-\theta|x|}$$

b) Encuentre la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\theta x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\theta x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 9. Sea X con distribución de Pareto:

$$f_X(x) = \theta \cdot \frac{x_0^\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > x_0$$

a) Calcule la media y la varianza.
Media:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x_0}^{\infty} x \cdot \theta \cdot \frac{x_0^\theta}{x^{\theta+1}}dx = \theta x_0^\theta \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^\theta}dx = \frac{\theta x_0}{\theta - 1}, \quad \text{para } \theta > 1$$

Varianza:

$$\mathbb{E}[X^2] = \theta x_0^\theta \int_{x_0}^{\infty} x^{1-(\theta+1)}dx = \frac{\theta x_0^2}{\theta - 2}, \quad \text{para } \theta > 2$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{\theta x_0}{\theta - 1}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}}$$

b) Determine la densidad de $Z = \ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$.
Hacemos el cambio: $X = x_0 e^Z \Rightarrow f_Z(z) = f_X(x_0 e^z) \cdot \frac{dX}{dz} = f_X(x_0 e^z) \cdot x_0 e^z$

$$f_Z(z) = \theta \cdot \frac{x_0^\theta}{(x_0 e^z)^{\theta+1}} \cdot x_0 e^z = \theta e^{-\theta z}, \quad z > 0$$

Entonces:

$$\boxed{Z \sim \text{Exponencial}(\theta)}$$

Ejercicio 10. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t)$ definida para $|t| < h$.

a) Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t), \quad \text{para } t \in (0, h)$$

b) Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t), \quad \text{para } t \in (-h, 0)$$

Demostración: Se trata de la **desigualdad de Chernoff**, la cual se basa en aplicar Markov a e^{tX}:

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-at} M_X(t)$$

Análogamente para $X \leq a$, se aplica la misma lógica con $t < 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t), \quad \mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)}$$