# Resumen Clase 12 - Vectores Aleatorios

EYP1027 - Modelos Probabilísticos

## 1. Distribuciones conjuntas

Un vector aleatorio $(X_1, \dots, X_n)$ es una función $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que todas sus coordenadas son variables aleatorias.

La distribución conjunta se define como:

$$P_{X_1,\dots,X_n}(B) = P\{(X_1, \dots, X_n) \in B\}, \quad \forall B \subset \mathbb{R}^n,$$
$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Dependiendo del caso:

- Discreto: $P_{X_1,\dots,X_n}(B) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$
- Continuo: $P_{X_1,\dots,X_n}(B) = \int_{(x_1,\dots,x_n)\in B} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1$

## 2. Distribuciones marginales

La distribución marginal de un subvector $(X_1, \dots, X_k)$ se obtiene evaluando:

$$F_{X_1,\dots,X_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty)$$

Para densidades:

- Discreto: se suman las variables restantes.
- Continuo: se integran las variables restantes.

## 3. Independencia de variables aleatorias

Variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ son independientes ssi:

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

O equivalentemente:

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

Notas:

- Si $X_1, \dots, X_n$ son independientes, sus subvectores también lo son.
- Si son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), se denota $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f$.

# 4. Caso bivariado

Sean $X$ e $Y$ variables aleatorias:

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- $f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$ (discreto) o $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy$ (continuo)

Independencia:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{y} \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{ssi } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

# 5. Ejemplos

## Ejemplo discreto (Indicadores)

$X = I_A$, $Y = I_B$ con $A$, $B$ eventos. La tabla de probabilidades es:

| $XnY$ | 0 | 1 | $P(X = x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $P(A^cB^c)$ | $P(A^cB)$ | $1 - P(A)$ |
| 1 | $P(AB^c)$ | $P(AB)$ | $P(A)$ |
| $P(Y = y)$ | $1 - P(B)$ | $P(B)$ | 1 |

Si $A$ y $B$ son independientes, entonces $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

## Ejemplo continuo

Sea $F_{X,Y}(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$ si $x, y > 0$. Entonces,

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x}e^{-y}, \quad f_X(x) = e^{-x}, \quad f_Y(y) = e^{-y} \Rightarrow X, Y \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$$

## Otro ejemplo continuo

$$f(x,y) = c(|x| + |y|), \quad \text{si } |x| + |y| \leq 1 \quad \text{y 0 eoc.}$$

- $c = 3/4$ para que sea fdp
- $P(x, y \geq 0, x + y \leq 1) = 1/4$
- Calcular las marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$