Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesora: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 4

1. Consideremos familias con n hijos, donde $n \geq 2$. Sea A el evento de que una familia tiene hijos de ambos sexos, y sea B el evento de que hay como máximo una niña en la familia. Demuestre que el único valor de n para el cual los eventos A y B son independientes es $n = 3$, asumiendo que cada niño tiene una probabilidad de $1/2$ de ser varón.

2. Suponga que se tiene una canasta con 6 manzanas, 7 peras y 10 plátanos. Si se extraen 4 frutas al azar sin reemplazo, determine:

   a) La probabilidad de extraer 2 manzanas, 1 pera y 1 plátano.

   b) La probabilidad de extraer 2 manzanas o 2 peras o ambas.

   c) **Propuesto:** ¿Cómo cambia el ejercicio si ahora las extracciones son con reemplazo?

3. Suponga que se realiza un experimento donde es de interés analizar el comportamiento de los gatos. En particular, se sitúa a cada gato participante en un laberinto, donde en una habitación está su dueño, en otra hay bolas de Catnip, y en otra hay un plato contundente de su comida favorita. El experimento consiste en dejar al gato en alguna habitación y luego dejarlo decidir a cuál habitación ir. En base a esto se evidenció que:

   - Si el gato está con su dueño, entonces tiene probabilidad de $4/7$ de ir a por su comida y de $2/7$ de ir a por el Catnip.
   - Si el gato está con el Catnip, entonces elige de manera equiprobable si ir con su dueño o quedarse con el Catnip.
   - Si el gato está en la comida, entonces con probabilidad 1 se va con su dueño.

   a) Si inicialmente el gato se sitúa de manera aleatoria y equiprobable en alguna habitación, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a por el Catnip?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el gato se haya situado inicialmente con su dueño, dado que eligió ir a por el Churu?

   c) Si se analizan 10 gatos, ¿cuál es la probabilidad de que 4 de ellos vayan a por el Catnip?

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - k(1-x) & \text{si } 0 \leq x < k \\ 1 & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

   a) Determine las restricciones que debe cumplir k para que $F(x)$ sea una función de distribución. Indique a qué tipo de distribución corresponde X.

   b) Calcule $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq k\right)$.

5. Verifique que para todo k entero positivo, la función F definida por:

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j e^{-x}}{j!}, \quad x > 0$$

   es una función de distribución acumulada de cierta variable aleatoria.

6. Demuestre que para cualquier partición $C_1, C_2, \ldots,$ y para cualquier colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots,$ se cumple que:

   (a) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$

   (b) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (Desigualdad de Boole)

   (c) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$ (Desigualdad de Bonferroni)

7. *a*) Dada una secuencia de eventos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, demuestre las siguientes propiedades:

      - Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo n, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$
      - Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para algún n, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

   b) Se lanza un dado equilibrado una infinidad de veces. Sea A_n el evento "sale un número impar en las n primeras tiradas". Pruebe que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

   Interprete dicho resultado.
   Hint: $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

   c) Pruebe que la siguiente función es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$X(\omega) = c, \quad \forall \omega \in \Omega$$

   donde c es una constante real.

8. Se lanzan simultáneamente dos dados honestos y distinguibles (1 y 2). Proponga un modelo de probabilidad en cada una de las siguientes situaciones:

   a) Se observa el resultado de ambos dados.

b) Se observa si ambos dados coinciden o no.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean A y B en $\mathcal{A}$.

(a) Pruebe que:

(a1) si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$;

(a2) si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.

(b) Si A y B son eventos independientes, con $\mathbb{P}(A) = p$ y $\mathbb{P}(B) = q$, calcule:

(b1) la probabilidad de que ocurra exactamente uno de estos eventos (o A o B);

(b2) la probabilidad de que alguno de estos eventos no ocurra.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 - p, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - p + \frac{1}{2}px, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

donde $0 < p < 1$.

(a) Calcule $\mathbb{P}(X = -1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(-1 < X \leq 0)$, $\mathbb{P}(0 < X \leq 1)$ y $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

(b) Calcule $\mathbb{E}(X)$, e indique una mediana para X.

9. Suponga que el tiempo de reparación de un artículo electrónico es una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad (fdp) dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que para todo $s > t$, $\mathbb{P}(X > s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s - t)$.

(b) Suponga que el costo de reparación de un artículo es $cX + 1$, donde la constante c es un costo por unidad de tiempo. Calcule el costo de reparación esperado de un artículo.

10. Considere la siguiente función:

$$H(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda > 0$$

Demuestre que

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ H(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

es función de distribución acumulada (cdf).

11. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido X de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a él, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)}, & x > 120 \\ 0, & x \leq 120 \end{cases}$$

a) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de t minutos, $t \in \mathbb{R}$.

b) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en más de 3 horas.

c) Un bus inicia su recorrido y tres horas después aún no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales.