Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Resumen Clase 16 - Profesor R. Arellano-Valle

1. Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Supongamos un vector aleatorio continuo $(X_1, \ldots, X_n)$ y una transformación $(Y_1, \ldots, Y_n) = (g_1(X), \ldots, g_n(X))$ tal que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ también sea continuo.

Si $f_X(x)$ es la fdp conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$, buscamos la fdp de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ denotada $f_Y(y)$.

El soporte de X es:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : f_X(x) > 0\}$$

El recorrido de Y es:

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : y = g(x) \text{ para algún } x \in X\}$$

1.1 Caso biunívoco (bijección)

Suponga que $g : X \to Y$ es una biyección. Entonces existe la inversa $h = g^{-1}$.

Si todas las derivadas parciales de h existen y son continuas, y el Jacobiano J de la transformación inversa no es cero, se tiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} |J| \cdot f_X(h(y)), & y \in Y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde el Jacobiano es:

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right|$$

1.2 Caso $n = 2$

Para dos variables:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} |J| \cdot f_{X_1,X_2}(h_1(y), h_2(y)), & (y_1, y_2) \in Y \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

1.3 Ejemplo

Transformación:

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

Inversa:

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

1.4 Convolución continua

Si $Y = X_1 + X_2$ y son independientes:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - z) f_{X_2}(z)\, dz$$

Ejemplo: Si $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ entonces $Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$ con:

$$f_Y(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y > 0$$

1.5 Caso no biunívoco

Cuando g no es biyección, se puede particionar el dominio en regiones B_i donde sí lo es. La fdp es:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} |J_i| f_X(h_i(y))$$

Ejemplo: $Y_1 = X_1/X_2$, $Y_2 = |X_2|$ con $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ independientes.

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)} \quad \Rightarrow \text{Distribución de Cauchy}$$

2. Ejemplos importantes

- Si $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$, entonces:

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \sim N(0, 1/2), \quad Y_2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \sim \chi^2_1$$

- $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim \chi^2_\nu$ independientes:

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/\nu}} \sim t_\nu$$

- $X_1 \sim \chi^2_r, X_2 \sim \chi^2_s$ independientes:

$$Y = \frac{X_1/r}{X_2/s} \sim F_{r,s}$$

- $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \lambda), X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \lambda)$:

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$$

3. Transformación de variables independientes

Teorema: Si X_i independientes y $Y_i = g_i(X_i)$, entonces Y_i también son independientes.
Ejemplo:

- $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow X_i^2 \sim \chi^2_1$
- $I_{(0,\infty)}(X_i) \sim \text{Ber}(1/2)$
- $\Phi(X_i) \sim U(0,1)$