Departamento de Estadística PUC

Examen: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo Arellano   Ayudantes: Daniel Gálvez y Andrés Díaz

Pregunta 1: Sea (X, Y) un vector aleatorio con funció n de probabilidad dada por

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{36}, & \text{si } x = 1,2,3;\ y = 1,2,3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?
(b) Calcule $\mathrm{P}(X - Y > 0)$ y $\mathrm{E}(X - Y)$.
(c) Obtenga la función de probabilidad condicional de Y dado $X = x$ para $x = 1, 2, 3$.

(a) Si calculamos las marginales se tiene

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} \frac{x+y}{36} = \frac{3x+6}{36} = \frac{x+2}{12}, \quad x = 1,2,3$$
$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{36} = \frac{3y+6}{36} = \frac{y+2}{12}, \quad y = 1,2,3$$

claramente

$$\frac{x+y}{36} \neq \frac{x+2}{12} \cdot \frac{y+2}{12}$$
$$p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x) p_Y(y)$$

Luego, X, Y no son independientes.

- [2] por concluir que no son independientes

b)

$$\begin{aligned} P(X - Y > 0) &= P(X = 3, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 2) \\ &= \frac{3+1}{36} + \frac{2+1}{36} + \frac{3+2}{36} \\ &= \frac{12}{36} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X - Y) &= E(X) - E(Y) \\ &= \sum_{x=1}^{3} x \frac{x+2}{12} - \sum_{y=1}^{3} y \frac{y+2}{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- [1] por calcular correctamente $P(X-Y>0)$
- [1] por calcular correctamente $E(X-Y)$

c)

$$\begin{aligned} p_{Y|X=x}(y) &= \frac{p_{X,Y}(x.y)}{p_X(x)} \\ &= \frac{\frac{x+y}{36}}{\frac{x+2}{12}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{x+y}{x+2} \end{aligned}$$

Reemplazando $X=1,2,3$ se obtiene lo siguiente

$$p_{Y|X=1}(y) = \frac{1}{3}\frac{1+y}{3}, \quad y=1,2,3$$

$$p_{Y|X=2}(y) = \frac{1}{3}\frac{2+y}{4}, \quad y=1,2,3$$

$$p_{Y|X=3}(y) = \frac{1}{3}\frac{3+y}{5}, \quad y=1,2,3$$

- [0,5] por determinar la forma general $p_{Y|X=x}(y)$
- [0,5] por determinar cada distribución condicional

Pregunta 2: Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias iid con función distribución (marginal) dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x<0, \\ \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0\le x<\theta, \\ 1, & \text{si } x\ge\theta, \end{cases}$$

donde $\theta>0$.
(a) Sea $Y=2\bar{X}$, donde $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ es la media muestral. Calcule $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.
(b) Calcule la función densidad de $X_{(n)}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.
(c) Calcule $\mathrm{E}(X_{(n)})$ y $\mathrm{Var}(X_{(n)})$

a)

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(2\overline{X}) \\
&= 2E(\overline{X}) \\
&= 2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{2}{n}E\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) \\
&= 2E(X_1) \\
&= 2\int_0^{\theta} \frac{x}{\theta} dx \\
&= \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(2\overline{X}) \\
&= 2^2 Var(\overline{X}) \\
&= 2^2 Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{2^2}{n^2} Var\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) \\
&= \frac{4}{n^2} n Var(X_1) \\
&= \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} \\
&= \frac{\theta^2}{3n}
\end{aligned}$$

- [1] por calcular correctamente la esperanza
- [1] por calcular correctamente la varianza

b) Utilizando lo visto en clases y Ayudantía se tiene

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= F(x)^n \\
&= (x/\theta)^n \\
f_{X_{(n)}}(x) &= n(x/\theta)^{n-1} 1/\theta
\end{aligned}$$

Luego,

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}, \quad 0 < x < \theta$$

- [2] por determinar correctamente la densidad c)

$$\begin{aligned}E(X_{(n)}) &= \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx \\ &= \frac{\theta n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X_{(n)}) &= E(X_{(n)}^2) - E(X_{(n)})^2 \\ &= \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx - E(X_{(n)})^2 \\ &= \frac{\theta^2 n}{n+2} - \frac{\theta^2 n^2}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

- [1] por calcular correctamente la esperanza
- [1] por calcular correctamente la varianza

Pregunta 3: Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y|X = x \sim N(x, 1)$ y $X \sim N(0, 1)$.
(a) Indique la función densidad conjunta de X e Y. ¿Pueden X e Y ser independientes?
(b) Calcule E(Y), Var(Y) y Cov(X, Y).
(c) Sean $U = X$ y $V = X - Y$. ¿Son U y V variables aleatorias independientes?

a)

$$\begin{aligned}f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x) f_{Y|X=x}(y) \\ f_{X,Y}(x,y) &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(y-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < x, y < \infty\end{aligned}$$

Claramente no son independientes, pues no se puede factorizar de forma tal que $f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_X(x)$.

- [1] por determinar la conjunta
- [1] por determinar que X, Y no son independientes

b) Utilizando esperanza y varianza iterada se tiene

$$\begin{aligned}E(Y) &= E[E(Y|X)] \\ &= E[X] \\ &= E(X) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= Var[E(Y|X)] + E[Var(Y|X)] \\
&= Var[X] + E(1) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E[E(XY|X)] - 0 \cdot 0 \\
& E[XE(Y|X)] \\
&= E[X \cdot X] \\
&= E(X^2) \\
&= Var(X) + E(X)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- [2/3] por calcular correctamente $E(Y)$
- [2/3] por calcular correctamente $Var(Y)$
- [2/3] por calcular correctamente $Cov(X,Y)$

c) Podemos mostrar que la conjunta se pude factorizarse de forma tal que sean independientes. Las inversas son

$$
\begin{aligned}
X &= U \\
Y &= U - V
\end{aligned}
$$

el jacobiano es

$$|J| = 1$$

el recorrido conjunto es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(u, u-v) \\
&= \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-((u-v)-u)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
f_{U,V}(u,v) &= N(0,1) \times N(0,1)
\end{aligned}
$$

Luego, U, V son independientes, y ademas

$$U, V \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

- [2] por concluir que U, V son independientes.

Fórmulas: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longleftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\},\ x \in \mathbb{R}.$

Indicaciones: 1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje. 2) Todos los cÃ¡lculos deben estar apropiadamente justificados. 3) La prueba dura 2:15 horas.

– Santiago, 5 de Diciembre de 2024 –