Soluciones Ayudantía 5: Modelos Probabilísticos

ESTUDIANTE

Ejercicio 1

Sea $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ el número de motores funcionando, con fallo independiente probabilidad $1 - p$. El avión vuela si al menos $\lceil n/2 \rceil$ motores funcionan.

(a)

$$P(X \geq \lceil n/2 \rceil) = \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(b) Para comparar $n = 4$ versus $n = 2$, definimos

$$P_4 = P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}, \quad P_2 = P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2.$$

Además,

$$P_4 = 1 - \left[(1-p)^4 + 4p(1-p)^3\right].$$

Se verifica que

$$P_4 > P_2 \iff p > \frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

Ejercicio 2

Demostrar que la función

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\!\left(-\tfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

para $x \in \mathbb{R}$ es una densidad de probabilidad. Basta calcular:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx \\
&\text{con } t = \frac{x-\mu}{\sigma},\ dx = \sigma\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

La función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1 - \frac{1}{y^2}, & y \geq 1. \end{cases}$$

(a) Verificar que F_Y es no decreciente, derecha continua y cumple límites en $\pm\infty$.

(b) Derivar para $y > 1$:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{2}{y^3}, \quad y > 1.$$

(c) Sea $Z = 10(Y - 1)$. Para $z \geq 0$, tenemos $Y = 1 + z/10$, de modo que

$$F_Z(z) = F_Y(1 + z/10) = 1 - \frac{1}{(1 + z/10)^2}, \quad F_Z(z) = 0 \text{ si } z < 0.$$

Ejercicio 4

Sea V con densidad $f_V(v) = av^2 e^{-bv^2}$, $v > 0$, $b > 0$. Hallar a tal que integra uno:

$$1 = \int_0^\infty av^2 e^{-bv^2} dv = a \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}} \implies a = 4\sqrt{\frac{b^3}{\pi}}.$$

Para la energía $W = \frac{1}{2}mV^2$, con $v = \sqrt{2w/m}$, $dv = \frac{1}{2}\sqrt{2/(mw)}dw$, la densidad

$$f_W(w) = f_V(v)\big|dv/dw\big| = \frac{4\sqrt{2}\,(b^3/\pi)^{1/2}}{m^{3/2}}\, w^{1/2} e^{-2bw/m}, \quad w > 0,$$

llevando a $W \sim \text{Gamma}(3/2,\, 2b/m)$.

Ejercicio 5

Sea X con densidad $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2$, $-1 < x < 1$.

(a) Función de distribución:

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{8}(t+1)^2 dt = \frac{(x+1)^3}{8}, \quad -1 < x < 1.$$

(b) Transformación a uniforme: $U = F_X(X) = (X+1)^3/8$.

(c) Con $Z = 1 - X^2$, para $0 < z < 1$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|X| \geq \sqrt{1-z}) \\ &= 1 - \big[F_X(\sqrt{1-z}) - F_X(-\sqrt{1-z})\big], \end{aligned}$$

y derivando,

$$f_Z(z) = \frac{3}{8}\frac{2-z}{\sqrt{1-z}}, \quad 0 < z < 1.$$

Ejercicio 6

Sea $X \sim \text{Geom}(p = \frac{1}{3})$ con $P(X = k) = (1/3)(2/3)^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Defina $Y = \frac{X}{X+1}$. Luego

$$P\big(Y = \tfrac{k}{k+1}\big) = P(X = k) = (1/3)(2/3)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ejercicio 7

Mazo de n cartas, extracciones con remplazo hasta repetir una carta. Sea $X =$ número total de extracciones.

- Soporte: $\{2, 3, \dots\}$.
- Para $k \geq 1$, todas distintas en primeras k extracciones:

$$P(X > k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-(i-1)}{n} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$$

- Por resta,

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{n!}{(n-k+1)!\, n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}.$$