Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas / Departamento De Estadística

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
Pauta I2

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Daniel Gálvez.

Primer semestre 2024

1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 - p\,e^{-x}\,, & \text{si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

donde $0 < p \leq 1$.

Calcular:

(a) Una mediana para X.
(b) La media de X.
(c) La varianza de X.

a) Note que X es una v.a mixta, pues

$$\begin{aligned} P(X=0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= 1 - p - 0 \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

por lo que tiene parte discreta en $X = 0$, y parte continua en $x > 0$. La fda se visualiza en la figura 1 para algunos valores de p.

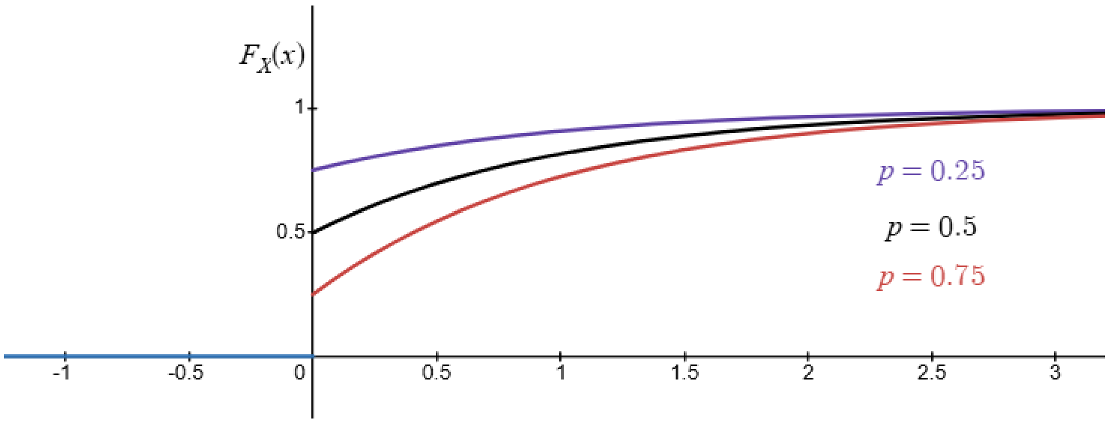

Figura 1: $F_X(x)$ del ejercicio 1 para $p = 0.25{,}0.5{,}0.75$

teniendo esto en consideración, se puede analizar el problema de encontrar una mediana para X poniéndose en casos. Si $p < 0.5$ entonces se busca

$$P(X=0) + \int_0^m pe^{-x}dx = 0{,}5$$

resolviendo para m se encuentra

$$m = ln(2p)$$

Por otro lado, si p =0.5 entonces $m = 0$ es la mediana. En el caso de $p > 0.5$ se tiene que $m = 0$ es la mediana. En resumen

$$m = \begin{cases} ln(2p), & 1/2 < p \leq 1 \\ 0, & 0 < p \leq 1/2 \end{cases}$$

- [**0.5**] por encontrar $P(X = 0)$ y mencionar que X es mixta
- [**1.5**] por encontrar correctamente una mediana para X

b) Como se tiene que $\mathcal{X} = \{0\} \cup (0, \infty)$ con

$$\begin{cases} 1 - p, & \text{si } x = 0 \\ pe^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

hay que separar la esperanza en parte continua y parte discreta. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + \int_0^\infty xpe^{-x}dx \\ &= p\int_0^\infty xe^{-x}dx \\ &= p\int_0^\infty x^{2-1}e^{-x}dx \\ &= p\Gamma(2) \\ &= p \end{aligned}$$

- [**2**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(X)$

c) Para la varianza es similar, pues

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \tag{1}$$

Se debe calcular $\mathbb{E}(X^2)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \cdot P(X = 0) + \int_0^\infty x^2pe^{-x}dx \\ &= p\int_0^\infty x^2e^{-x}dx \\ &= p\int_0^\infty x^{3-1}e^{-x}dx \\ &= p\Gamma(3) \\ &= 2p \end{aligned}$$

Reemplazamos todo en (1), teniendo que

$$Var(X) = 2p - p^2$$

- [**1**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(X^2)$
- [**1**] por calcular y concluir correctamente el valor de $Var(X)$

Nota: si el estudiante no identifica que X es mixta, pero calcula correctamente la esperanza y varianza obtiene [**1**] por $\mathbb{E}(X)$ y [**1**] por $Var(X)$.

2. Suponga que al lanzar una moneda al aire, la probabilidad de obtener cara es $p \in (0,1)$. Sea X el número de caras en n lanzamientos.

   (a) Indique la distribución de X y obtenga su función generadora de momentos.

   (b) Si usted gana $X(X-1)$ pesos al obtener X caras, ¿cuál es su ganancia esperada?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de no ganar nada? y ¿cuál es la probabilidad de ganar al menos 2 pesos?

a) Se tiene

$$X \sim Bin(n,p)$$

con

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n$$

Luego, por lo visto en clases

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

- [**1**] por encontrar como distribuye X
- [**1**] por encontrar la función generadora de momentos

b) Se pide $\mathbb{E}(X(X-1))$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)) &= \mathbb{E}(X^2 - X) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \end{aligned} \tag{2}$$

Como se tiene la función generadora de momentos podemos calcular lo anterior de forma sencilla.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \left(\frac{d}{dt} M_X(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(n(1-p+pe^t)^{n-1} pe^t\right)\Big|_{t=0} \\ &= np \\ \mathbb{E}(X^2) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \left(npe^t(1-p+pe^t)^{n-2}(npe^t - p + 1)\right)\Big|_{t=0} \\ &= np + np^2(n-1) \end{aligned}$$

Se reemplaza todo en (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)) &= np + np^2(n-1) - np \\ &= np^2(n-1) \end{aligned}$$

- [**0.5**] por determinar que se pide $\mathbb{E}(X(X-1))$
- [**0.5**] por encontrar $\mathbb{E}(X)$
- [**0.5**] por encontrar $\mathbb{E}(X^2)$
- [**0.5**] por concluir y encontrar correctamente el valor de $\mathbb{E}(X(X-1))$

c) La probabilidad de no ganar nada corresponde a $P(X(X-1) = 0)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(X(X-1) = 0) &= P(X = 0 \text{ o } X = 1) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

- [**0.25**] por determinar que se pide $P(X(X-1) = 0)$
- [**0.75**] por calcular correctamente $P(X(X-1) = 0)$

La probabilidad de ganar al menos 2 pesos corresponde a $P(X(X-1) \geq 2)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(X(X-1) \geq 2) &= 1 - P(X(X-1) < 2) \\ &= 1 - P(X = 0 \text{ o } X = 1) \\ &= 1 - [(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}] \\ &= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

- [**0.25**] por determinar que se pide $P(X(X-1) \geq 2)$
- [**0.75**] por calcular correctamente $P(X(X-1) \geq 2)$

3. La demanda diaria por cierto producto es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4\,, & \text{si} \quad 0 < x \leq 2, \\ (6-x)/16\,, & \text{si} \quad 2 < x \leq 6, \\ 0\,, & \text{si} \quad x \leq 0 \text{ o } x > 6. \end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$g(X) = \begin{cases} -3\,, & \text{si} \quad X \leq 1, \\ 2\,, & \text{si} \quad 1 < X \leq 2, \\ 4\,, & \text{si} \quad 2 < X \leq 4, \\ 6\,, & \text{si} \quad 4 < X \leq 6. \end{cases}$$

Calcular:

(a) La esperanza de la demanda diaria.

(b) La función de probabilidad de los beneficios diarios.

(c) La esperanza de los beneficios diarios.

a) Se pide $\mathbb{E}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^2 x\frac{1}{4}dx + \int_2^6 x\frac{6-x}{16}dx \\ &= \frac{13}{6} \end{aligned}$$

- [**2**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(X)$

b) Definamos $Y = g(X)$. Note que

$$\mathcal{Y} = \{-3, 2, 4, 6\}$$

buscamos la probabilidad de cada punto.

$$\begin{aligned} P(Y = -3) = P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4} \\ P(Y = 2) = P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4} \\ P(Y = 4) = P(2 < X \leq 4) &= \int_2^4 \frac{6-x}{16}dx = \frac{3}{8} \\ P(Y = 6) = P(4 < X \leq 6) &= \int_4^6 \frac{6-x}{16}dx = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Luego, la función de probabilidad de los beneficios diarios es

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{si } y = -3, 2 \\ \dfrac{3}{8}, & \text{si } y = 4 \\ \dfrac{1}{8}, & \text{si } y = 6 \end{cases}$$

- [**0.4**] por encontrar correctamente cada probabilidad (**1.6** en total)
- [**0.4**] por concluir la función de probabilidad de los beneficios diarios

c) Se pide $\mathbb{E}(Y)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= -3P(Y = -3) + 2P(Y = 2) + 4P(Y = 4) + 6P(Y = 6) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- [**2**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(Y)$

Notas:
1) Recuerde que $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$*, donde* α, $\lambda > 0$ *y* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *si* $n = 1, 2, \ldots$.
2) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
3) Ud. deberá argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
4) La prueba dura 2:00 horas.