Resumen Teórico - Clase 4
Métodos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle
Departamento de Estadística, PUC

# 1. Probabilidad Geométrica

La probabilidad geométrica se aplica cuando el espacio muestral es una región continua sobre la cual se dispone de una medida geométrica (como longitud, área o volumen). En este contexto se asume que la distribución es uniforme.

**Definición 1.1** (Probabilidad Geométrica). *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $m(\cdot)$ una medida geométrica definida en $\mathcal{A}$. Se define la probabilidad geométrica de un evento $A \in \mathcal{A}$ como*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

# 2. Probabilidad Condicional

Cuando se dispone de información adicional que afecta al espacio muestral, se requiere actualizar las probabilidades. La probabilidad condicional es la medida de la ocurrencia de un evento A bajo la condición de que se ha verificado otro evento B.

**Definición 2.1** (Probabilidad Condicional). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Se define la probabilidad condicional de $A$ dado $B$ como*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Teorema 2.1** (Medida de Probabilidad Condicional). *Sea $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Entonces la función $P(\cdot|B)$ definida por la ecuación anterior es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$ centrada en $B$; en particular,*

$$P(B|B) = 1.$$

**Demostración Esquemática:** Se verifica que:

**A1**: $\forall\, A \in \mathcal{A},\; P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0.$

**A2**: $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

**A3**: Para una secuencia de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots,$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| B\Big) = \frac{P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\Big)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

**Teorema 2.2** (Regla Multiplicativa).

(i) *Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $P(A|B) = 0$.*

(ii) *Si $C$ es otro evento con $P(B \cap C) > 0$,*

$$P(A \cap C|B) = P(A|B \cap C)P(C|B).$$

(iii) *Para eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$,*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

# 3. Teorema de Probabilidad Total y Regla de Bayes

Para situaciones en que el espacio muestral se descompone en una partición, es útil expresar la probabilidad de un evento en función de sus probabilidades condicionadas respecto a los elementos de la partición.

**Teorema 3.1** (Teorema de la Probabilidad Total)**.** *Sea* $\{B_i\}_{i\in I}$ *una partición (finita o contable) de* $\Omega$ *con* $P(B_i) > 0$ *para todo* $i$*. Entonces, para cualquier* $A \in \mathcal{A}$*,*

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A|B_i)P(B_i).$$

**Corolario 3.1** (Regla de Bayes)**.** *Bajo las condiciones anteriores, si* $P(A) > 0$ *se tiene que, para cualquier* $i$*,*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j\in I} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

**Demostración Esquemática del Corolario:** A partir de la definición de probabilidad condicional,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)},$$

y aplicando el teorema de la probabilidad total para $P(A)$ se llega al resultado.

# 4. Independencia de Eventos

La independencia entre eventos refleja que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad del otro.

**Definición 4.1** (Eventos Independientes)**.** *Dos eventos* $A$ *y* $B$ *se dicen* independientes *si y solo si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

*Si la igualdad no se cumple, se dice que son dependientes.*

Se puede demostrar que la condición de independencia implica también la independencia de los complementos. Es decir, se tiene la siguiente equivalencia:

**Teorema 4.1.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* $A$ *y* $B$ *son independientes.*

*(ii)* $A$ *y* $B^c$ *son independientes.*

*(iii)* $A^c$ *y* $B$ *son independientes.*

*(iv)* $A^c$ *y* $B^c$ *son independientes.*

**Esbozo de Demostración:** Por ejemplo, para demostrar que (i) implica (ii), se observa que

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Las demás implicaciones se obtienen de manera análoga.

**Definición 4.2** (Independencia Mutua)**.** *Una familia de eventos* $\{A_i\}_{i\in I}$ *se dice que es* mutuamente independiente *si, para cualquier subconjunto finito* $J \subset I$ *(con* $J \neq \varnothing$*),*

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

**Definición 4.3** (Independencia de a Pares)**.** *Una familia de eventos* $\{A_i\}_{i\in I}$ *se dice que es* independiente de a pares *si*

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \textit{para todo } i \neq j.$$

Es importante notar que la independencia de a pares no implica la independencia mutua de la familia.

# Referencias


- Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.
- Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference. Second Edition.* Duxbury, California.