Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 7

1. Considere una variable aleatoria X que sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Sea $Y = e^{aX}$ con $a > 0$.

   a) Calcule $\mathbb{E}[Y]$.

   b) Use la desigualdad de Jensen para obtener una cota inferior para $\mathbb{E}[Y]$, es decir, muestre que:

$$\mathbb{E}[Y] \geq e^{a\mathbb{E}[X]}$$

   c) ¿En qué condiciones se da la igualdad en la desigualdad anterior?

   d) Si $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d. con la misma distribución que X, ¿cuál es una cota inferior para $\mathbb{E}\left[e^{a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}\right]$ usando Jensen?

2. Sea X una variable aleatoria normal con media 1 y varianza 4, es decir $X \sim N(1, 4)$.

   a) Demuestre que

$$P(-1 < X < 3) = 2\Phi(1) - 1,$$

   donde $\Phi(z)$ es la f.d.a. de $Z \sim N(0, 1)$.

   b) Sea $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, la función generadora de momentos (f.g.m.) de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Si $X \sim N(1, 4)$, pruebe que

$$Y = \frac{1}{2}(X - 1) \sim N(0, 1).$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con f.d.p. conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre las f.d.p. marginales de X e Y.

   b) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución (acumulada) dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Calcule $P(1 < X \leq 2)$, $P(2|X-1| > 1)$ y $P(X \leq 3 \mid X > 2)$.
   b) Proponga una medida de localización para la distribución de X (fundamente su respuesta).
   c) Calcule la esperanza y la varianza de $g(X) = 1 - \frac{1}{X}$.

5. El tiempo de espera X de un paciente que llega a una consulta médica es cero si el médico no está ocupado, y un tiempo aleatorio distribuido exponencialmente (con intensidad $\lambda > 0$) si el médico está ocupado. La probabilidad de que el paciente encuentre al médico desocupado u ocupado es p y $1-p$, respectivamente.

   a) Obtenga y grafique la función de distribución (acumulada) de X.
   b) Encuentre la esperanza del tiempo de espera del paciente.
   c) Calcule la probabilidad de que el paciente tenga que esperar más de lo esperado.

6. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos (fgm) dada por:

$$M_X(t) = e^{\pi t(1+t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ y $\mathbb{E}\{(X-\pi)(X+\pi)\}$.
   b) Obtenga la fgm de $Z = X - \pi$ y pruebe que Z y $-Z$ tienen la misma distribución.
   c) Suponga que usted gana \$2 si $X \geq \pi$, y pierde \$1 en caso contrario. ¿Cuánto espera ganar?

7. (a) Sean $X \sim \text{Poisson}(\lambda_x)$ y $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_y)$ independientes. ¿Es cierto que $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_x + \lambda_y)$?
   (b) Sean $X \sim \text{Exp}(\lambda_x)$ y $Y \sim \text{Exp}(\lambda_y)$ independientes. ¿Es cierto que $X + Y \sim \text{Exp}(\lambda_x + \lambda_y)$?

8. Sea X una variable aleatoria que representa la utilidad en millones de pesos debido a la garantía de cierto componente electrónico. Se sabe que la función de densidad de probabilidad de X está dada por

$$f_X(x) = e^{-\theta|x|}, \quad x \in \mathbb{R},\ \theta > 0.$$

   (a) Determine el valor de la constante θ.
   (b) Encuentre la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

9. Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución Pareto si su función densidad es de la forma

$$f(x) = \theta x_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > x_0,\ \theta > 0.$$

   (a) Halle la media y la varianza de la distribución.
   (b) Determine la función densidad de $Z = \ln(X/x_0)$.

10. Sea X una variable aleatoria con $M_X(t)$ definida en $|t| < h$. Pruebe que:

   (a) $P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (0, h)$.
   (b) $P(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (-h, 0)$.