Soluciones Ayudantía 1 - Modelos Probabilísticos

Facultad de Matemáticas, PUCC

2025

Ejercicio 1

[a)]Demostrar que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

1. *Proof.* Observamos que

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A \cap \Omega = A.$$

Aquí usamos la distributividad de la intersección sobre la unión y que $B \cup B^c = \Omega$. □

2. Demostrar que

$$A^c - B^c = B - A.$$

Proof. Por definiciones,

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B \cap A^c = B - A.$$

□

3. Demostrar que

$$A \cap B^c = A - (A \cap B).$$

Proof. Usando que $X - Y = X \cap Y^c$, tenemos

$$A-(A\cap B) = A\cap(A\cap B)^c = A\cap(A^c\cup B^c) = (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c) = A\cap B^c.$$

□

Ejercicio 2

Sea Ω el espacio de resultados de n lanzamientos de un dado, y

$$A_i = \{\text{sale 2 en el lanzamiento } i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Describa los eventos:

[a)]$B =$ "En ninguno de los n lanzamientos sale 2"

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

$C =$ "En al menos un lanzamiento sale 2"

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

$D =$ "En exactamente un lanzamiento sale 2"

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(A_i \cap \bigcap_{j \neq i} A_j^c \Big).$$

$E =$ "En a lo más un lanzamiento sale 2"

$$E = B \cup D = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \Big(A_i \cap \bigcap_{j \neq i} A_j^c \Big).$$

Ejercicio 3

Sea $\Omega = \{a, b, c\}$ y consideremos

$$F = \{\Omega, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}, \qquad G = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}.$$

[a)]F no es σ-álgebra, pues $\{a\} \in F$ pero su complementario $\{b, c\} \notin F$. G sí es σ-álgebra: está cerrado bajo complementos y uniones finitas. $F \cup G$ no es σ-álgebra: p.ej. $\{a\} \in F \subset F \cup G$ y $\{c\} \in G \subset F \cup G$, pero $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin F \cup G$. $F \cap G = \{\Omega, \emptyset\}$, que es la σ-álgebra trivial, por lo que sí lo es.

Ejercicio 4

Sean F_1, F_2, F_3 tres σ-álgebras en Ω tales que $F_3 \subseteq F_2 \subseteq F_1$.

[a)]$F_1 \cup F_2 = F_1$, que es σ-álgebra. $F_3 \cap (F_1 - F_2)$ no es σ-álgebra en general, pues puede no contener a Ω o no cerrarse por complementos. $F_1 \cap (F_2 \cup F_3) = F_1 \cap F_2 = F_2$, que es σ-álgebra.

Ejercicio 5

Sea $A_1, \ldots, A_k$ eventos en Ω y definamos

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, \ i = 2, \ldots, k.$$

[a)]Demostrar que

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i.$$

1. *Proof.* Por construcción, cada $B_i \subseteq A_i$, y los B_i son disjuntos. Toda realización en $\cup_i A_i$ pertenece al primer A_m en que aparece, luego pertenece a B_m. Así, ambos lados coinciden. $\square$

2. Se sigue que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y por construcción $B_i \subseteq A_i$.

Ejercicio 6

Sea P medida de probabilidad con $P(A) = 1/3$ y $P(B^c) = 1/4$ (entonces $P(B) = 3/4$). ¿Pueden A y B ser disjuntos?

Proof. Si fuesen disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 3/4 = 13/12 > 1$, lo cual contradice la axioma de probabilidad. Por tanto, no pueden ser disjuntos. $\square$