Ayudantía 4 – Modelos Probabilísticos

Estudiante: [Tu Nombre]

Fecha: May 7, 2025

Ejercicio 1

Familias con n hijos ($n \geq 2$). Sea

- A: tener hijos de ambos sexos;
- B: tener a lo sumo una niña.

Asumimos $P(\text{niño}) = P(\text{niña}) = \frac{1}{2}$, nacimientos independientes.

a) Cálculo de probabilidades

$$P(A) = 1 - P(\text{todos varones}) - P(\text{todas niñas}) = 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 - 2^{1-n},$$
$$P(B) = P(0\,\text{niñas}) + P(1\,\text{niña}) = \binom{n}{0}2^{-n} + \binom{n}{1}2^{-n} = (n+1)2^{-n},$$
$$P(A \cap B) = P(\text{exactamente 1 niña}) = \binom{n}{1}2^{-n} = n2^{-n}.$$

b) Independencia $A \perp B$

Buscamos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$:

$n2^{-n} = (1-2^{1-n})(n+1)2^{-n} \Longrightarrow (n+1)2^{1-n} = 1 \Longrightarrow 2^{1-n} = \frac{1}{n+1} \Longrightarrow n = 1+\log_2(n+1).$

La única solución entera $n \geq 2$ es $n = 3$.

Ejercicio 2

Canasta con 6 manzanas (M), 7 peras (P) y 10 plátanos (L). Se extraen 4 frutos.

a) Sin reemplazo:

$$P(2M, 1P, 1L) = \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{10}{1}}{\binom{23}{4}}.$$

b) Sin reemplazo, definimos $X = \#M$, $Y = \#P$:

$$P(X \geq 2 \,\mathrm{o}\, Y \geq 2) = P(X \geq 2) + P(Y \geq 2) - P(X \geq 2,\, Y \geq 2),$$

donde

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= \sum_{k=2}^{4} \frac{\binom{6}{k}\binom{17}{4-k}}{\binom{23}{4}}, \\ P(Y \geq 2) &= \sum_{k=2}^{4} \frac{\binom{7}{k}\binom{16}{4-k}}{\binom{23}{4}}, \\ P(X \geq 2,\, Y \geq 2) &= \frac{\binom{6}{2}\binom{7}{2}\binom{10}{0}}{\binom{23}{4}}. \end{aligned}$$

c) Con reemplazo, $p_M = 6/23$, $p_P = 7/23$, $p_L = 10/23$:

$$\begin{aligned} P(2M, 1P, 1L) &= \frac{4!}{2!1!1!} p_M^2 p_P p_L, \\ P(X \geq 2 \,\mathrm{o}\, Y \geq 2) &= \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} p_M^k (1-p_M)^{4-k} + \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} p_P^k (1-p_P)^{4-k} - \binom{4}{2,2,0} p_M^2 p_P^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Cadena de Markov en tres estados $\{D, C, F\}$ con matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 4/7 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = (1/3, 1/3, 1/3).$$

a) $P(\text{va a C}) = \sum_x P_0(x)P(x \to C) = \frac{1}{3}(2/7 + 1/2 + 0) = 11/42.$

b) Por Bayes,

$$P_0(D|F) = \frac{(1/3)(4/7)}{(1/3)(4/7)} = 1.$$

c) Sea $Z \sim \text{Bin}(10, p_C)$ con $p_C = 11/42$, entonces

$$P(Z = 4) = \binom{10}{4}\left(\tfrac{11}{42}\right)^4\left(1 - \tfrac{11}{42}\right)^6.$$

Ejercicio 4

CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - k(1-x), & 0 \le x < k, \\ 1, & x \ge k. \end{cases}$$

a) Para CDF válida: F no decreciente y $0 \le F \le 1$. En $[0, k)$ $F'(x) = k > 0$ exige $k > 0$, y $F(k^-) = 1 - k(1-k) \le 1 \iff k \le 1$. Luego $0 < k \le 1$.

b) Asumiendo $k \ge 1/2$,

$$P(1/2 \le X \le k) = F_X(k^-) - F_X(1/2) = 1 - [1 - k(1 - 1/2)] = k/2.$$

Ejercicio 5

Sea

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j e^{-x}}{j!}, \quad x > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Observamos que $F(0^+) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Además

$$F'(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j e^{-x}\,'}{j!} = \frac{x^{k-1}e^{-x}}{(k-1)!} \ge 0,$$

por lo que F es no decreciente y continua por trozos. Es la CDF de la distribución Erlang (o gamma entera).

Ejercicio 6

Para partición $\{C_i\}$ y eventos A, A_i:

(a) $A = \bigcup_i (A \cap C_i)$ disjunta, entonces $P(A) = \sum_i P(A \cap C_i)$.

(b) Por unión finita y límite,

$$P\Big(\bigcup_i A_i\Big) \leq \sum_i P(A_i) \quad \text{(Boole)}.$$

(c) Desigualdad de Bonferroni (primer orden):

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Ejercicio 7

(a) Si $P(A_n) = 0\ \forall n$, monotonicidad de P da $P(\cup A_n) = \lim P(A_n) = 0$. Si existe m con $P(A_m) = 1$, entonces $\cup A_n \supset A_m$ implica $P(\cup A_n) = 1$.

(b) Con $A_n = \{\text{impar en primeras } n \text{ tiradas}\}$, $P(A_n) = (1/2)^n \to 0$, y como $A_{n+1} \subset A_n$, $P(\cap A_n) = \lim P(A_n) = 0$.

(c) Sea $X(\omega) = c$. Como X es composición de función constante y medible, es variable aleatoria.

Ejercicio 8

Dos dados (1 y 2) equiprobables.

a) Modelo completo: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $P(\omega) = 1/36$.

b) Modelo coincidencia: $\Omega = \{\text{igual}, \text{distinto}\}$, $P(\text{igual}) = 6/36$, $P(\text{distinto}) = 30/36$.

Sea A, B en (Ω, P):

(1) Si $P(A) = P(B) = 0$, entonces $P(A \cup B) = 0$. Si $P(A) = P(B) = 1$, entonces $P(A \cap B) = 1$.

(2) Si $A \perp B$ con $P(A) = p, P(B) = q$, entonces

$$P(\text{exacto uno}) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = p(1-q) + (1-p)q = p + q - 2pq,$$
$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - pq.$$

Ejercicio 9

Sea $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ con $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$.

(a) $P(X > s \mid X > t) = \frac{e^{-s}}{e^{-t}} = e^{-(s-t)} = P(X > s - t)$ (memoria).

(b) Costo $Y = cX + 1$, $E[Y] = cE[X] + 1 = c + 1$.

Ejercicio 10

Sea
$$H(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt,\ \lambda > 0.$$
Definimos $F(x) = 0$ si $x < 0$, y $F(x) = H(x)$ si $x \geq 0$. Claramente $F(0^-) = 0$, $F(\infty) = 1$, y $F'(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ en $[0, \infty)$, luego F es CDF.

Ejercicio 11

Tiempo de recorrido X con fdp
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-(x-120)/30}, & x > 120, \\ 0, & x \leq 120. \end{cases}$$

a) Para $t > 120$,
$$P(X < t) = \int_{120}^t \frac{1}{30} e^{-(x-120)/30} dx = 1 - e^{-(t-120)/30},$$
y $P(X < t) = 0$ si $t \leq 120$.

b) $P(X > 180) = e^{-(180-120)/30} = e^{-2}$.

c) Por memoria (exponecial):
$$P(X > 180 + 15 \mid X > 180) = e^{-15/30} = e^{-1/2}.$$