Soluciones Ayudantía 3 – Modelos Probabilísticos

Instituto de Estadística, PUCC

2025

Ejercicio 1

Cada réplica es independiente y la probabilidad de éxito (suceso A) es $p = 0.2$. La variable X que cuenta el ensayo en que aparece la primera ocurrencia de A sigue una distribución geométrica, de modo que

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Para $k = 4$,

$$P(X = 4) = (1 - 0.2)^3(0.2) = 0.8^3 \times 0.2 = 0.1024.$$

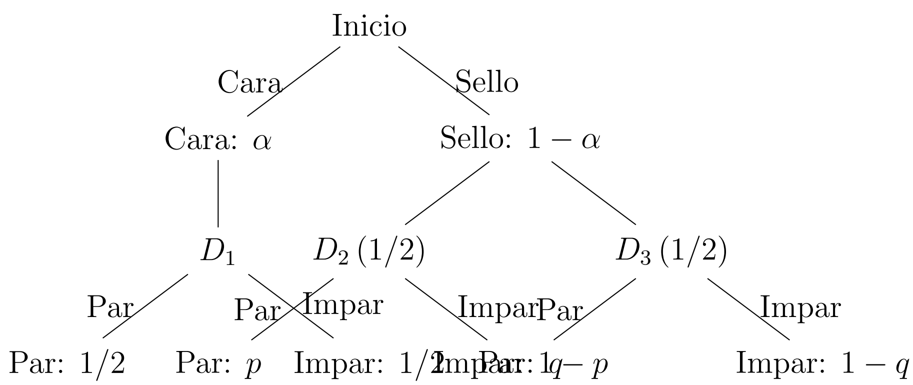
Ejercicio 2

Se tienen tres dados: D_1 justo, D_2 con $P(\text{par}) = p > 1/2$, y D_3 con $P(\text{par}) = q < 1/2$. Primero se lanza una moneda con $P(\text{cara}) = \alpha$, y:

- Si sale cara, se elige D_1.
- Si sale sello, se elige D_2 o D_3 con probabilidad $1/2$ cada uno.

Luego, el dado elegido se lanza dos veces.

Diagrama de árbol



(a) Probabilidad de par en el primer lanzamiento

Sea E el evento *par en el lanzamiento 1*. Por la ley de la probabilidad total:

$$P(E) = \alpha \cdot \tfrac{1}{2} + (1-\alpha)\Big(\tfrac{1}{2}\,p + \tfrac{1}{2}\,q\Big) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}(p+q).$$

(b) Probabilidad de haber seleccionado D_1 dado dos pares

Queremos $P(D_1 \mid E_2)$, donde E_2 es obtener par en ambos lanzamientos. Primero,

$$P(D_1 \cap E_2) = \alpha \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{\alpha}{4}.$$

Además,

$$P(E_2) = \alpha \times \frac{1}{4} + (1-\alpha)\Big(\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}q^2\Big) = \frac{\alpha}{4} + \frac{1-\alpha}{2}(p^2+q^2).$$

Por lo tanto,

$$P(D_1 \mid E_2) = \frac{P(D_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\dfrac{\alpha}{4}}{\dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{1-\alpha}{2}(p^2+q^2)}.$$

Ejercicio 3

El sistema C tiene dos partes: A (con componentes A_1, A_2, A_3) y B (con B_1, B_2). Cada parte funciona si *todas* sus componentes funcionan; el sistema completo funciona si A o B funciona.

(a) $P(A$ **funciona**$)$

Los A_i son independientes con $P(A_i) = 0.90$. Luego,

$$P(A) = 0.9^3 = 0.729.$$

(b) $P(B$ **funciona**$)$

Se usa la partición según si A funciona:

$$P(B) = P(A)\,P(B \mid A) + (1 - P(A))\,P(B \mid A^c).$$

Dado A, los B_j son independientes con $P(B_j \mid A) = 0.95$, y si A^c, $P(B_j \mid A^c) = 0.80$. Así,

$$P(B \mid A) = 0.95^2 = 0.9025, \quad P(B \mid A^c) = 0.80^2 = 0.64.$$

Entonces,

$$P(B) = 0.729 \times 0.9025 + 0.271 \times 0.64 \approx 0.83144.$$

(c) $P(C$ **funciona**$)$

C falla solo si A y B fallan simultáneamente, es decir,

$$P(C) = 1 - P(A^c \cap B^c).$$

Como B condicionalmente independiente dada A,

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \times P(B^c \mid A^c) = (1-0.729)(1-0.64) = 0.271 \times 0.36 = 0.09756.$$

Por ende,

$$P(C) = 1 - 0.09756 = 0.90244.$$

Ejercicio 4

Sea $\Omega = \mathbb{R}^+$ y
$$\mathcal{A} = \{\emptyset,\ (0,\infty),\ (0,1/4),\ [1/4,\infty)\}.$$
La función
$$P(A) = \frac{2}{\pi}\int_A \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
es una medida de probabilidad en $\mathcal{A}$.

(a) $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra

Verificamos:

- $\emptyset,\ \Omega \in \mathcal{A}$.
- Cierre bajo complementos: $(0,1/4)^c = [1/4,\infty)$ y viceversa, $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$.
- Cierre bajo uniones: p.ej. $(0,1/4) \cup [1/4,\infty) = \Omega$, y cualquier unión de los cuatro está en $\mathcal{A}$.

(b) P es medida de probabilidad

- $P(A) \geq 0$ por ser integral de función no negativa.
- $P(\Omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}[\arctan(x)]_0^\infty = 1$.
- Aditividad finita: se verifica fácilmente dado el pequeño número de conjuntos.

(c) Sobre A_1, A_2

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, (0,\infty), [1/2,\infty)\}$: no es σ-álgebra porque $[1/2,\infty)^c = (0,1/2)$ no pertenece.
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, (0,\infty)\}$: es la σ-álgebra trivial en Ω.