Resumen Clase 11: Vectores Aleatorios

Curso Modelos Probabilísticos
Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

1. Vectores Aleatorios

Un **vector aleatorio** es una función del espacio muestral Ω en R^n:

$$(X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to R^n,$$

donde cada X_i es una variable aleatoria. Permiten estudiar múltiples características numéricas de un mismo experimento aleatorio.

Ejemplo

En n lanzamientos de una moneda, sea:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo lanzamiento da cara,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio con recorrido $\{0, 1\}^n$.

2. Distribución Conjunta

Para un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$, su **distribución conjunta** está dada por:

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = P\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}^n.$$

La **función de distribución conjunta acumulada** se define como:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n).$$

Propiedades (caso bivariado)

- (F1a) $\lim_{x,y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$
- (F1b) $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$
- (F2) No decreciente en cada argumento
- (F3) Continua por la derecha
- (F4) Para $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$:

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \ge 0$$

Ejemplos

Ejemplo válido:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x,y \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Satisface F1–F4.

Ejemplo inválido:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \geq 0 \text{ y } x+y \geq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

No cumple F4, ya que da probabilidad negativa.

3. Vectores Aleatorios Discretos y Continuos

Definición 2.1: Discreto

$(X_1, \ldots, X_n)$ es **discreto** si su recorrido es contable. Su distribución conjunta está dada por la función de masa de probabilidad (fmp):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

Cumple:

- $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$
- $\sum f(x_1, \ldots, x_n) = 1$
- $P(B) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} f(x_1, \ldots, x_n)$

Ejemplo 2.1

Sea X = número de caras en los primeros dos lanzamientos y Y en los dos últimos de tres lanzamientos. El recorrido es:

$$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Ejemplo: $f(1,1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Definición 2.2: Continuo

$(X_1, \ldots, X_n)$ es **absolutamente continuo** si existe una función f tal que:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\, du_n \cdots du_1$$

Cumple:

- $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$
- $\int_{R^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$
- $P(B) = \int_B f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

Ejemplo 2.2

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

i) $P(1/2 < X \leq 3/4,\ 0 < Y \leq 1/3) = \int_0^{1/3} \int_{1/2}^{3/4} 6xy^2 dxdy$

ii) $P(1/2 < X \leq 3/4) = \int_{1/2}^{3/4} \int_0^1 6xy^2 dydx$

iii) $P(X + Y \geq 1) = \int_0^1 \int_{1-y}^1 6xy^2 dxdy$

Nota: En vectores continuos, incluir o no los extremos en una probabilidad como $P(a \leq X \leq b)$ no cambia su valor.