Distribución uniforme discreta

Definición 2.1

Una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta sobre $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_N\}$, donde N es un entero positivo, si su fmp está dada por,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{si } x \in \mathcal{X}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Notación: $X \sim UD(\{x_1, ..., x_N\})$.

Teorema 2.1

Si $X \sim UD(\{x_1, ..., x_N\})$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X^r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^r, \ k = 1, 2, \dots$

ii) $M_X(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{tx_i}$.

Definición 2.2

Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros n y p, si su fmp está dada por,

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } x = 0, 1, \cdots, n, \\ 0. & \text{eoc.} \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $0 < p < 1$. Si $n = 1$, la distribución binomial es denominada una distribución Bernoulli con parámetro p

Definición 2.3

Suponga que elegimos al azar y sin reemplazo n objetos desde un grupo de N, de los cuales sólo K poseen una característica de interés, digamos A. Luego, $N(\Omega) = \binom{N}{n}$. Sea X =número de objetos con la característica A de los n elegidos. Entonces la fmp de X está dada por,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = 0, 1, ..., \min\{n, K\}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

En este caso se dice que X tiene una Distribución Hipergeométrica.

Definición 2.4

Poisson Distribution Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si su fmp está dada por,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, \cdots, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Definición 2.5

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial negativa (o de Pascal) con parámetros r y p si su fmp esta dada por,

$$p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r}, & \text{si } x = r, r+1, \dots \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Para $r = 1$, se dice que la variable aleatoria tiene una distribución geométrica con parámetro p, y su fmp está dada por,

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & \text{si } x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Distribución uniforme

Definición 2.6

La distribución uniforme continua se define extendiendo la masa uniformemente en un intervalo (a, b). Su fdp está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a, b) \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Definición 2.7

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución normal con parámetros μ (un número real) y σ (un real positivo), si su fdp está dada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.8

Distribución normal estándar Si $Z \sim N(0, 1)$ se dice que Z tiene una distribución normal estándar. Su fdp está dada por,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}, \ z \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.9

Se dice que la variable aleatoria X tiene una distribución gama con los parámetros $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$ si su fdp está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda x)^{r-1}\exp(-\lambda x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, es decir, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$, con $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, \dots$.

Corolario 2.1

Si $\mathcal{X} = \{1, 2, ..., N\}$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{N+1}{2}$

ii) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{N^2-1}{12}$

iii) $M_X(t) = \dfrac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} e^{xt}$.

Teorema 2.2

Sea $X \sim Bin(n, p)$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = np$

ii) $\mathrm{Var}(X) = npq$,

iii) $M(t) = (pe^t + q)^n$, donde $q = 1 - p$.

Teorema 2.3

Sean $X \sim Hip(n, K, N)$, $p = \frac{K}{N}$ y $q = 1 - p$. Entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = np$

ii) $\mathrm{Var}(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

iii) $p(x) \simeq \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$, para N grande.

Teorema 2.4

Sea $X \sim P(\lambda)$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = \lambda$

ii) $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

iii) $M(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

Teorema 2.6

Sea $X \sim BN(r,p)$, entonces,

i) $E(X) = r/p$

ii) $\mathrm{Var}(X) = r(1-p)/p^2$

iii) $M(t) = \left\{\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right\}^r$.

Corolario 2.2

Si $X \sim Geo(p)$, entonces,

i) $E(X) = 1/p$

ii) $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$

iii) $M(t) = \left\{\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right\}$.

Teorema 2.7

Si $X \sim U(a, b)$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$

ii) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

iii) $M(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0.$

Teorema 2.8

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces,

i) $E(X) = \mu$

ii) $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

iii) $M(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

Teorema 2.9

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces,

i) $Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

ii) $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

Teorema 2.10

Si $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$, entonces,

i) $\mathrm{E}(X) = \alpha/\lambda$

ii) $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\lambda^2$

iii) $M(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}$, si $t < \lambda$.

TRUCOS BUENARDOS

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Binomio de Newton

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Sum. de Euler

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Derivada de una potencia

Teorema 1.1

Una función $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es la fmp (o la fdp) de una variable aleatoria X si y sólo si:

a) $f_X(x) \geq 0$ para todo x ($f_X(x) > 0$ si $x \in \mathcal{X}$), y

b) $\sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) = 1$ (fmp); o $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (fdp).

Además, para cualquier conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$P_X(B) = P(X \in B) = \begin{cases} \sum_{x \in B} f_X(x), & \text{en el caso discreto,} \\ \int_B f_X(x)dx, & \text{en el caso continuo.} \end{cases}$$

ii) Se dice que la variable aleatoria X tiene (o sigue) una **distribución** (absolutamente) **continua**, o que X es una **variable aleatoria** (absolutamente) **continua**, si existe una función no negativa $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, llamada **función de densidad de probabilidad (fdp)**, tal que $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En este caso, el recorrido $\mathcal{X}$ de X es un conjunto no contable de números reales; $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0$ para todo x; y $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$ en todos aquellos puntos x donde $F_X(x)$ es diferenciable.

Definición 2.1

La **esperanza (o valor esperado o media)** de la variable aleatoria X, se define como

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} x f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua ,} \end{cases}$$

provisto que la suma o la integral existan. Si la suma o la integral divergen, o no estan definidas, se dice que $E(X)$ no existe.

Teorema 2.1

Sean a, b y c constantes, y sean X e Y variables aleatorias cuyas esperanza existen. Entonces,

E1) Si $X(\omega) = c$ (constante) para todo ω, es decir, la variable aleatoria X es degenera en c ($P(X = c) = 1$), entonces $E(X) = c$

E2) Si $X(\omega) \geq 0$ para todo ω, es decir, la variable aleatoria X es no negativa, entonces $E(X) \geq 0$.
Además, de la formula general de esperanza dada en $(*)$, sigue que,

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx = \int_0^{\infty} P(X > x)dx.$$

En particular, si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$ (enteros no negativos), entonces

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x). \quad (**)$$

E3) Si $X(\omega) \geq Y(\omega)$ para todo ω, entonces $E(X) \geq E(Y)$

E4) Si $a \leq X(\omega) \leq b$ para todo ω, entonces $a \leq E(X) \leq b$.

E5) $E(aX + b) = a\,E(X) + b$ (linealidad del operador $E(\cdot)$).

E6) (Aditividad) Sean X es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y sean $g_1(x), g_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, funciones tales que las variables aleatorias $g_1(X)$ y $g_2(X)$ tienen esperanza finita. Entonces,

$$E\{a\, g_1(X) + b\, g_2(X) + c\} = a\, E\{g_1(X)\} + b\, E\{g_1(X)\} + c,$$

donde a, b, c son constantes reales.

E7) (Desigualdad de Jensen) Sea X una variable aleatoria con esperanza finita, y g una función de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:
i) Si g es convexa, entonces $E\{g(X)\} \geq g(E(X))$.
ii) Si g es cóncava, entonces $E\{g(X)\} \leq g(E(X))$.

Definición 2.3

Sea X una variable aleatoria y sea $\mu_X = E(X)$. La varianza de X se define como, $\mathrm{Var}(X) = E\{(X - \mu_X)^2\}$, es decir,

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu_X)^2 f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta .} \end{cases}$$

La raíz cuadrada positiva de $\mathrm{Var}(X)$ es la desviación estándar de X.

Teorema 2.2

Sea X una variable aleatoria cuya varianza existe, y sean a, b, c constantes reales. Entonces,

V1) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ y $\mathrm{Var}(X) = 0$ si y sólo si $X \equiv c$

V2) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

V3) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Recordemos que si X es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y g es una función con dominio y recorrido en los reales, entonces $g(X)$ también es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y su esperanza puede ser calculada como,

$$E\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua ,} \end{cases}$$

siempre que exista la $\sum$ o la $\int$. Como fue dicho antes, si $E(|g(X)|) = \infty$, decimos que $E\{g(X)\}$ no existe.

Definición 1.1

Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y asuma que existen las sumatorias o integrales requeridas para cada entero positivo k:

i) El k-ésimo momento no centrado de X, se define como,

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} x^k f_X(x) & \text{si } X \text{es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx & \text{si } X \text{es continua.} \end{cases}$$

$k = 1 \Longrightarrow E(X) = \mu_X$ es la media de X.

ii) El k-ésimo momento centrado de X, se define como,

$$E\{(X - \mu_X)^k\} = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu_X)^k f_X(x) & \text{si } X \text{es discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^k f_X(x)dx & \text{si } X \text{es continua.} \end{cases}$$

$k = 2 \Longrightarrow E\{(X - \mu_X)^2\} = \sigma_X^2$ es la varianza de X.

Definición 1.3

Función generadora de momentos: Sea X una variable aleatoria con fda F_X. La función generadora de momento (fgm) de X (o F_X), denotada por $M_X(t)$, se define como,

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

siempre que exista la esperanza para t en alguna vecindad de 0. Es decir, existe $h > 0$ tal que, para todo t en $(-h,\ h)$, $E(e^{tX})$ exista.

Si la esperanza no existe en una vecindad de 0, decimos que la fgm de X no existe.

Teorema 1.3

Si X tiene fgm $M_X(t)$, entonces,

$$E(X^k) = M_X^{(k)}(0),$$

donde,

$$M_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\,|_{t=0}$$

Es decir, el k-ésimo momento de X es igual a la k-ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en $t = 0$.

Teorema 1.4

Sean $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ dos fda cuyos momentos existen.

i) Si X e Y tienen soporte acotado, entonces $F_X(u) = F_Y(u)$ para todo u si y sólo si $E(X^r) = E(Y^r)$ para todo $r = 0, 1, 2, \ldots$.

ii) Si la fgm existe y $M_X(t) = M_Y(t)$ para todo t en alguna vecindad de 0, entonces $F_X(u) = F_Y(u)$ para todo u.

Teorema 1.5

Para constantes cualquiera a y b, la fgm de la variable aleatoria $aX + b$ está dada por,

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Ejemplo 1.1

Sea X una variable aleatoria con fdp (triangular) dada por,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Como se dijo antes, ya que $\mathcal{X} = (-1, 1)$, entonces $E(X^k)$ existe para todo $k = 1, 2, \ldots$. Luego, $M_X(t)$ existe para todo t, y esta dada por

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-1}^{1} e^{xt}(1 - |x|)dx \\ &= \int_{-1}^{0} e^{xt}(1 + x)dx + \int_{-0}^{1} e^{xt}(1 - x)dx \\ &= \frac{1}{t^2}\left(e^t + e^{-t} - 2\right), \quad \text{(que no estaría definida en } t = 0) \end{aligned}$$

Más precisamente, al escribir $y = g(x)$, la función $g(x)$ establece un mapeo del recorrido, $\mathcal{X}$, de la variable aleatoria X, a un subconjunto $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{R}$, el cual define el recorrido de la variable aleatoria $Y = g(X)$. Es decir,

$$g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}.$$

Asociado con g, se tiene un mapeo inverso, denotado por g^{-1}, que es un mapeo de subconjuntos de $\mathcal{Y}$ a subconjuntos de $\mathcal{X}$, y está definido por,

$$g^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) \in B\}, \tag{2.1}$$

para cada subconjunto B de $\mathcal{Y}$.

Si la variable aleatoria X es discreta, es decir, su recorrido, $\mathcal{X}$, es un subconjunto contable (finito o infinito) de $\mathbb{R}$, entonces, el recorrido la variable aleatoria transformada $Y = g(X)$, es decir,

$$\mathcal{Y} = \{y : y = g(x), x \in \mathcal{X}\},$$

es también un subconjunto contable (finito on infinito) de $\mathbb{R}$; es decir, Y es también una variable aleatoria discreta. Luego, para determinar su distribución de probabilidad, es suficiente encontrar su fmp.

Más precisamente, si X es una variable aleatoria discreta, entonces $Y = g(X)$ es también una variable aleatoria discreta, con fmp dada por,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(Y = y) \\ &= P(g(X) = y) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \\ &= P(\{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}) \\ &= \sum_{\{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}} P(X = x) \\ &= \begin{cases} \sum_{\{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}} f_X(x), & \text{si } y \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

O sea, para encontrar la fmp de Y, basta con identificar el conjunto $g^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}$, para cada $y \in \mathcal{Y}$, y luego sumar las probabilidades correspondientes.

Ejemplo 2.1

Sea X una variable aleatoria discreta con fmp dada por,

x	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Sea $Y = X^2$. Aquí, $y = g(x) = x^2$, $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, y la variable aleatoria discreta Y toma valores en $\mathcal{Y} = \{0, 1, 4, 9\}$. Luego, la fmp de Y es,

y	0	1	4	9
$f_Y(y)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Por ejemplo, $P_Y(Y = 1) = P_X(X = -1) + P_X(X = 1) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$.

Suponga, ahora, que tanto X como $Y = g(X)$ son variables aleatorias continuas. En muchos casos, es posible encontrar expresiones simples para la fda de Y en términos de la fda o la fdp de X y la función g. De hecho, la fda de $Y = g(X)$ esta dada por,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\}) \\ &= \int_{\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\}} f_X(x)dx. \end{aligned}$$

Aunque en algunos casos resulta difícil identificar la región,

$$g^{-1}((-\infty, y]) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\},$$

y resolver la integral de $f_X(x)$ bajo esa región, este método es muy útil para encontrar la fdp de la variable aleatoria Y.

En particular, si g es monótona en $\mathcal{X}$, entonces,

$$\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\} = \{x \in \mathcal{X} : x \leq g^{-1}(y)\}, \quad \text{si } g \text{ es creciente,}$$

$$\{x \in \mathcal{X} : g(x) \leq y\} = \{x \in \mathcal{X} : x \geq g^{-1}(y)\}, \quad \text{si } g \text{ es decreciente.}$$

Es decir, para cada $y \in \mathcal{Y}$, la fda de $Y = g(X)$ queda definida como,

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)), & \text{si } g \text{ es creciente,} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)), & \text{si } g \text{ es decreciente.} \end{cases}$$

Como Y también es una variable aleatoria continua, entonces, derivando esta última expresión mediante la regla de la cadena, su fdp esta dada por,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y), & \text{si } g \text{ es creciente,} \\ -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y), & \text{si } g \text{ es decreciente.} \end{cases}$$

Esto prueba el siguiente resultado, al notar que $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ es positiva si g es creciente y negativa si g es decreciente.

Teorema 2.1

Sean X e $Y = g(X)$ variables aleatorias continuas, tales que X tiene fdp $f_X(x)$ y g una función monótona. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ definidos como en (2.3). Suponga que $f_X(x)$ es continua sobre $\mathcal{X}$ y que $g^{-1}(y)$ tiene una derivada continua sobre $\mathcal{Y}$. Entonces, la fdp de Y está dada por,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left|\dfrac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|, & \text{para } y \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Teorema 2.2

Sean X e $Y = g(X)$ variables aleatorias continuas, donde X tiene una fdp $f_X(x)$ con recorrido $\mathcal{X}$ definido como en (2.3). Suponga que existe una partición, $A_0, A_1, \ldots, A_k$, de $\mathcal{X}$ tal que $P(X \in A_0) = 0$ y $f_X(x)$ es continua sobre cada A_i. Además, suponga que existen funciones $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, definidas sobre $A_1, \ldots, A_k$, respectivamente, tales que:

i) $g(x) = g_i(x)$, para $x \in A_i$;

ii) $g_i(x)$ es monótona sobre A_i;

iii) el conjunto $\mathcal{Y} = \{y : y = g_i(x)$ para algún $x \in A_i\}$ es el mismo para cada $i = 1, \ldots, k$; y

iv) $g_i^{-1}(y)$ tiene una derivada continua sobre $\mathcal{Y}$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

Entonces,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right) \left|\dfrac{d}{dy} g_i^{-1}(y)\right|, & \text{para } y \in \mathcal{Y} \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Note que $\mathcal{X}$ puede ser dividido en conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ tales que $g(x)$ es monótona sobre cada A_i. El conjunto A_0 puede ignorarse, ya que $P(X \in A_0) = 0$. Es importante tener en cuenta que cada $g_i(x)$ es una transformación uno-a-uno desde A_i sobre $\mathcal{Y}$.

Teorema 2.3

Sea X una variable aleatoria con fda $F_X(x)$ continua, y defina la variable aleatoria Y como $Y = F_X(X)$. Entonces, $Y \sim U(0, 1)$, es decir, Y tiene una distribución uniforme sobre $(0,\ 1)$, de modo que $P(Y \leq y) = y$ para $0 < y < 1$.