Departamento de estadística PUC

Ejercicios 2: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Ejercicio 1. Se lanza una moneda hasta que aparece una cara. ¿Cuál es la función de probabilidad del número de tiradas ? Calcule $P(X > x)$, $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 2. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la función de probabilidad de la suma de los números que aparecen? Calcule $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 3. Considere una va X con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$. Suponga que $p(k) = P(X = k) = (1 - a)a^k$, para $k = 0, 1, 2, ...$

1. Para qué valores de a, $p(k)$ es una función de probabilidad ?
2. Pruebe que para dos enteros positivos cualquiera s y t, $P(X > s + t | X > s) = P(X \geq t)$

Ejercicio 4. De un lote que contiene 25 artículos, de los cuales 5 son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de artículos defectuosos elegidos. Obtenga la distribución de probabilidades de X si:

1. Los artículos se escogen con sustitución.
2. Los artículos se escogen sin sustitución.
3. En cada caso calcule $E(X)$ y $Var(X)$, e indique una mediana

Ejercicio 5. Considere una va X con valores en $\{1, 2, ...\}$ y $p(k) = P(X = k) = 1/2^k$, para $k = 1, 2, ...$ Calcule $P(X \text{ sea par})$; $P(X \geq 5)$, $P(X \text{ sea divisible por } 3)$, e indique una mediana.

Ejercicio 6. Sea f una función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es f una función de densidad?

Ejercicio 7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $-1 < b < 0$.

1. Calcule $P(X > b \mid X < b/2)$.
2. Encuentre b tal que $P(X > b \mid X < b/2) = 1/9$.
3. Obtenga y grafique la función de distribución $F_X(x)$.
4. Obtenga $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.

Ejercicio 8. Sea X el tiempo de destrucción de una partícula radioactiva y suponga que su función de distribución está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Suponga que λ es tal que $P(X \geq 0{,}01) = 0{,}5$. Encuentre t de modo que $P(X \geq t) = 0{,}9$. Indique la media y la varianza de esta distribución.

Ejercicio 9. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Muestre que $E(X) = \text{Var}(X)$.

Ejercicio 10. Se lanza n veces una moneda honesta, de manera independiente. Defina X : número de sellos obtenidos.

1. Calcule $M_X(t)$
2. Calcule $Var(aX + 9)$
3. Suponga que por cada sello obtenido se tiene una ganancia de \$3. ¿Cuál es la ganancia esperada?

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Muestre que todos los momentos existen. Y calcule $E(X^k)$ para $k = 1, 2, 3, 4$ usando la función generadora de momentos.

Ejercicio 12. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/4, & -2 \leq x < -1 \\ 1/2, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{4}e^{-x^k}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calcule $P(X = 0)$
2. ¿Qué tipo de variable aleatoria es X?
3. Determine $E(X)$ y $Var(\pi X + 1)$

Hint:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

con $\Gamma(z) = (z-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Ejercicio 13. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, esto es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Calcule $\mathbb{E}(X^n)$
2. Calcule $M_X(t)$
3. Determine la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Ejercicio 14. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/4 + x/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1. ¿Qué tipo de variable aleatoria es X?
2. Calcule $\mathbb{E}(X)$
3. Calcule $M_{aX+b}(t)$

Ejercicio 15. Sea $F_X(x)$ una función de distribución continua. Demuestre que para cualquier entero$n \geq 1$, las siguientes funciones también son funciones de distribución

1. $[F_X(x)]^n$
2. $1 - [1 - F_X(x)]^n$

Ejercicio 16. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{2x}, & x < 0 \\ \dfrac{\lambda}{4} e^{-x\lambda}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Determine c tal que $f_X(x)$ sea efectivamente una densidad
2. Determine $F_X(x)$
3. Calcule $\mathbb{E}(2X + 1)$ y $Var(2X + 1)$
4. Calcule $M_{aX}(t)$

Ejercicio 17. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por la siguiente tabla.

x	-1	0	1	2
$p_X(x)$	1/8	4/8	1/8	2/8

1. Calcule $Var(X)$
2. Calcule $E(\sin(X))$
3. Encuentre $F_X(x)$
4. Calcule $P(X > 0|X < 2)$

Ejercicio 18. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{3}{x} p^x (1-p)^{3-x}, & x = 0, 1, 2, 3, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Defina la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} 1500, & x = 0 \\ 2000, & x = 1, 2 \\ 3000, & x = 3. \end{cases}$$

Calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.