Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Interrogación 1
2025

Pregunta 1

En dos lanzamientos independientes de una moneda justa, considere los siguientes eventos:

- A: cara en el primer lanzamiento,
- B: cara en el segundo lanzamiento,
- C: el mismo resultado en ambos lanzamientos.

(a) ¿Son A, B y C eventos independientes? ¿Son dichos eventos dos a dos independientes?
Solución: Sean:

$$A = \{\text{“cara en el primer lanzamiento”}\}, \quad B = \{\text{“cara en el segundo lanzamiento”}\},$$
$$C = \{\text{“mismo resultado en ambos lanzamientos (HH o TT)”}\}.$$

Dado que la moneda es justa e independiente en cada lanzamiento, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\text{HH}, \text{ HT}, \text{ TH}, \text{ TT}\},$$

con probabilidad 1/4 para cada resultado.

- **Probabilidades individuales:**
$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}.$$
- **Independencia dos a dos:**
Para que dos eventos X e Y sean independientes se necesita $P(X \cap Y) = P(X)\,P(Y)$.
$$P(A \cap B) = P(\{\text{HH}\}) = \tfrac{1}{4}, \quad P(A)\,P(B) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$
Son iguales, por lo que A y B son independientes. De manera análoga,
$$P(A \cap C) = P(\{\text{HH}\}) = \tfrac{1}{4}, \quad P(A)\,P(C) = \tfrac{1}{4},$$
y
$$P(B \cap C) = P(\{\text{HH}\}) = \tfrac{1}{4}, \quad P(B)\,P(C) = \tfrac{1}{4}.$$
Así, A, B y C *sí* son independientes de a pares.

- **No independencia triple:**
  Para que A, B y C sean independientes en forma conjunta, se requiere

  $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

  Sin embargo,

  $$A \cap B \cap C = \{\mathrm{HH}\},$$

  con $P(\{\mathrm{HH}\}) = \frac{1}{4}$, mientras

  $$P(A)\,P(B)\,P(C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}.$$

  Como $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$, no hay independencia mutua de los tres.

Puntaje:

- 0,75 puntos por ver la independencia entre A y B.
- 0,75 puntos por ver la independencia entre A y C.
- 0,75 puntos por ver la independencia entre B y C.
- 0,75 puntos por ver la independencia entre A, B y C.

(b) ¿Son los eventos A y B condicionalmente independientes dado C?
Solución:
Dos eventos A y B son independientes condicionalmente a C si

$$P(A \cap B \mid C) \;=\; P(A \mid C)\;P(B \mid C).$$

Aquí, C sucede si los resultados son HH o TT (cada uno con probabilidad 1/4, total 1/2).

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}, \quad P(B \mid C) = \tfrac{1}{2}.$$

Entonces

$$P(A \mid C)\,P(B \mid C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

Por otra parte,

$$P(A \cap B \mid C) = \frac{P(\{\mathrm{HH}\})}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.$$

No coincide con $\frac{1}{4}$. Por tanto, *no* hay independencia condicional de A y B dado C.
Puntaje:

- 1,0 punto por plantear correctamente la expresión:

  $$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C).$$

- 0,5 puntos por calcular cada una de las probabilidades: $P(A \mid C)$, $P(B \mid C)$ y $P(A \cap B \mid C)$.
- 0,5 puntos por concluir correctamente.

Pregunta 2

Suponga, ahora, que se dispone de dos monedas: una de ellas es justa y la otra es sesgada cuya probabilidad de cara es 3/4. Se escoge una de ellas al azar y luego se lanza tres veces.

(a) Si sale cara en los tres lanzamientos, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda escogida sea la justa?
Solución:
Sea F = "moneda justa", S = "moneda sesgada" y E = "tres caras en tres lanzamientos". Por el teorema de Bayes:

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \mid F)\, P(F)}{P(E)}.$$

$$P(E \mid F) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}, \qquad P(E \mid S) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \tfrac{27}{64}.$$

$$P(E) = P(E \mid F)\, P(F) + P(E \mid S)\, P(S) = \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{27}{64} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16} + \tfrac{27}{128} = \tfrac{35}{128}.$$

Entonces,

$$P(F \mid E) = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{35}{128}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{35}{128}} = \tfrac{8}{35}.$$

Puntaje:

- $1,0$ punto por nombrar correctamente los eventos.
- $1,0$ punto por usar el teorema de Bayes de manera correcta.
- $1,0$ punto por calcular correctamente la probabilidad.
  Nota: se puede dejar el resultado expresado; no es necesario llegar al valor exacto.

(b) Si la moneda seleccionada se lanza una cuarta vez, ¿cuál es la probabilidad de que nuevamente salga cara?
Solución:
Sea G = "cuarto lanzamiento da cara". Entonces,

$$P(G \mid E) = P(G \mid E, F)\, P(F \mid E) + P(G \mid E, S)\, P(S \mid E).$$

Dado que si sabemos cuál moneda es, cada lanzamiento es independiente de los anteriores,

$$P(G \mid E, F) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(G \mid E, S) = \tfrac{3}{4}.$$

$$P(F \mid E) = \tfrac{8}{35}, \quad P(S \mid E) = \tfrac{27}{35}.$$

Así,

$$P(G \mid E) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{35} + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{27}{35} = \tfrac{8}{70} + \tfrac{81}{140} = \tfrac{16}{140} + \tfrac{81}{140} = \tfrac{97}{140}.$$

Puntajes:

- $2,0$ puntos por plantear correctamente lo pedido.
- $1,0$ punto por calcular correctamente lo pedido.
  Nota: se puede dejar el resultado expresado; no es necesario llegar al valor exacto.

Pregunta 3

Sea $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ y $P(A) = \text{área}(A)$ para todo subconjunto A (medible) de Ω.

(a) Haga un gráfico de los siguientes eventos y calcule sus respectivas probabilidades:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : x \leq \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \Omega : x > \frac{1}{2},\ x - \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\},$$

$$B = \left\{(x, y) \in \Omega : |y - x| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Solución:

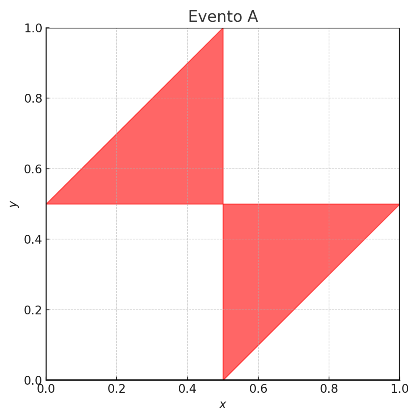

Figura 1: Región correspondiente al evento A en el espacio $\Omega = [0, 1]^2$

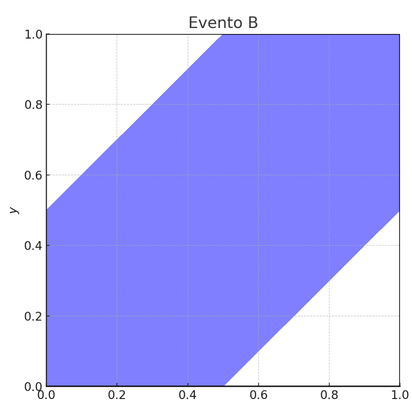

Figura 2: Región correspondiente al evento B en el espacio $\Omega = [0, 1]^2$

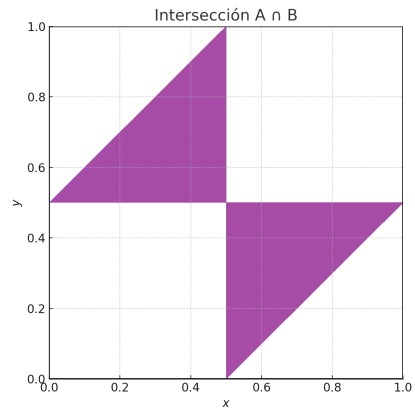

Figura 3: Región correspondiente a la intersección $A \cap B$ en el espacio $\Omega = [0,1]^2$

- **Área de A.**
  Se compone de dos zonas:
  Zona 1: $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \le y \le x + \frac{1}{2}$.
  Para cada x, la longitud en y es $(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = x$. El área es

$$\int_0^{1/2} x\,dx = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \tfrac{1}{8}.$$

  Zona 2: $\frac{1}{2} < x \le 1$, $x - \frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.
  Longitud en $y = \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 - x$. El área es

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)\,dx = \left[x - \tfrac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

  Por tanto,

$$P(A) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

- **Área de B.**
  B es la franja $\{(x,y) : x - \frac{1}{2} \le y \le x + \frac{1}{2}\}$ dentro del cuadrado $[0,1]^2$. El área resulta

$$P(B) = 1 - (\text{área de los 2 triángulos excluidos}),$$

  o mediante integración directa. Cada triángulo fuera de la banda tiene área $1/8$, así que

$$P(B) = 1 - 2 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4}.$$

Puntaje:

- $1,0$ punto por el gráfico de A.
- $1,0$ punto por el gráfico de B.
- $1,0$ punto por la probabilidad de A.
- $1,0$ punto por la probabilidad de B.

(b) Calcule la probabilidad de que sólo B ocurra y la probabilidad de que B ocurra sabiendo que A no ocurrió.
Solución: El suceso "sólo B" es $B \cap A^c$. Como $A \subset B$, se cumple $A \cap B = A$. Entonces

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Además,

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \tfrac{2}{3}.$$

Puntaje:

- $1,0$ punto por calcular $P(B \cap A^c)$.
- $1,0$ punto por calcular $P(B \mid A^c)$.

Pregunta 4

(a) Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$. ¿Es $X(\omega) = 1 + \omega$ una variable aleatoria con respecto de A? Si no lo es, defina alguna función que sí sea una variable aleatoria.
Solución: Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$A = \{\varnothing,\ \Omega,\ \{1\},\ \{2, 3, 4\}\}.$$

Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es *variable aleatoria respecto de* A si, para cada conjunto Borel $B \subset \mathbb{R}$, la preimagen $X^{-1}(B)$ está en A. Se propone $X(\omega) = 1 + \omega$. Entonces

$$X(1) = 2, \quad X(2) = 3, \quad X(3) = 4, \quad X(4) = 5.$$

Por ejemplo, $\{X = 3\} = \{2\}$, que *no* está en A. Por tanto, $X(\omega) = \omega + 1$ no es medible respecto de A.

1. Como alternativa, para que sí sea medible, se puede definir

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1, \\ 1, & \omega \in \{2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Es claro que preimágenes como $\{Y = 0\} = \{1\} \in A$ y $\{Y = 1\} = \{2, 3, 4\} \in A$. Cualquier otro subconjunto de valores produce una preimagen que es o bien $\varnothing$, o Ω, etc. que también están en A. De ese modo, Y sí es una variable aleatoria con respecto a A.
Puntaje:

- $1,0$ punto por justificar por qué no es una variable aleatoria (V.A.).
- $1,0$ punto por proponer una V.A. válida.
- $1,0$ punto por justificar por qué la V.A. propuesta es válida.

(b) Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, dos funciones de distribución. Para $p \in (0,1)$, considere la mezcla de F_1 y F_2 dada por $F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que F es una función de distribución válida.

Solución: Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ funciones de distribución (FD) y $p \in (0,1)$. Definamos

$$F(x) \;=\; p\,F_1(x) \;+\; (1-p)\,F_2(x).$$

Para ver que F es también una FD, verificamos sus propiedades:

a) **No decreciente:** Como F_1, F_2 son FD, cada una es no decreciente. Entonces $p\,F_1 + (1-p)\,F_2$ también lo es (la suma de funciones no decrecientes, multiplicadas por constantes positivas, conserva la no-decreciencia).

b) **Límites en $\pm\infty$:**

$$\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} F_2(x) = 0 \implies \lim_{x\to-\infty} F(x) = p\cdot 0 + (1-p)\cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} F_2(x) = 1 \implies \lim_{x\to+\infty} F(x) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 1 = 1.$$

c) **Continuidad a derecha (cad).** Cada F_i lo es, y la combinación convexa $p\,F_1 + (1-p)\,F_2$ se mantiene continua por la derecha.

Con esto, F verifica las cuatro propiedades de una función de distribución real. Por lo tanto, $F(x)$ *es* una FD válida.

Puntajes:

- $1,0$ punto por probar que la función es no decreciente.
- $1,0$ punto por probar los límites.
- $1,0$ punto por probar la continuidad por la derecha.

Indicaciones:

- Por error de arrastre, asignar la mitad del puntaje correspondiente.