Probabilidades sobre Experimentos Finitos

FECHA: / /

Experimentos Finitos y Eventos Aleatorios.

Espacio Muestral: Ω Conjunto de todos los posibles resultados de la situación de interés

Ej: si lanzamos 1 moneda $\Omega = \{cara, sello\}$.

si lanzamos 2 monedas una despues de la otra $\Omega = \{(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)\}$

una prueba con 4 Alternativas $\Omega_{item} = \{A, B, C, D\}$ si tiene 30 preg. item

$\Omega = \{(w_1, \ldots, w_{30}) : w_i \in \Omega_{item}\}$

este conjunto tiene 4^{30} patrones posibles.

Sea $\mathcal{E}$ un experimento el e.m. asociado a $\mathcal{E}$ denotado por Ω es el conjunto que corresponde a todos los posibles resultados del experimento.

Decimos que el experimento $\mathcal{E}$ es finito si el cardinal de Ω es finito.

Evento Aleatorio: Subconjunto A del espacio muestral y para $w \in \Omega$, el conjunto $\{w\}$ se llama evento elemental.

Decimos que A ocurre si algun $w \in A$ se observa.

Combinacion de Eventos

- $A \cap B = \phi$ incompatible
- $A_1 \cap \ldots \cap A_n = B$ simultaneamente
- $A_1 \cup \ldots \cup A_n = B$ al menos uno
- A^c no ocurrencia de A
- $A = \phi$ imposible
- $A = \Omega$ debe ocurrir.
- $A_1 \subset A_2$
- $B - A$ asumimos $A \subset B$
- $A + B$ asumimos $A \cap B = \phi$.

Clase de todos los Eventos $P(\Omega)$: $P(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$, Toda combinaciones que se hacen con eventos de $P(\Omega)$ pertenecen a $P(\Omega)$

$|P(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$.

FECHA: / /

Probabilidad sobre un experimento finito.

Para cualquier $A \subset \Omega$, denotemos por $P(A)$ la probabilidad que el evento A ocurra. y sus prop. son

P_1. $P(A) \geq 0$ (no-negatividad)
P_2. $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (Aditividad)
P_3. $P(\Omega) = 1$ (normalización)

El par (Ω, P) se llama espacio de probabilidad finito.

Interpretación frecuentista de la probabilidad:

(a) Sea $\mathcal{E}$ experimento que se repite n veces y sea Ω e m.
(b) Sea A un evento que se repite m veces al repetirse $\mathcal{E}$. con $0 \leq m \leq n$
(c) $P(A) = \frac{C.F}{CP} = \frac{m}{n}$

Si $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiedades implicadas por las propiedades básicas: Sean $\{A, B, A_i : i = 1, \ldots, n\} \subset P(\Omega)$

1. $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ recordar que $P(A+B) = P(A) + P(B)$ asumimos $A \cap B = \phi$.

2. $P(B - A) = P(B) - P(A)$ asumimos $A \subset B$

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. $P(A) = \sum_{w \in A} P\{w\}$

RHEIN®

Variables Aleatorias

FECHA: / /

Una función real valorada $X(w)$ definida sobre Ω se llama variable aleatoria (v.a.) sobre (Ω, P). Se trata de una cantidad que varíe de acuerdo a los resultados del experimento $\mathcal{E}$.

Sea $X = X(w)$ una v.a. real sobre (Ω, P). La imagen $X(\Omega) = \{X(w): w \in \Omega\}$ se llama espacio muestral de la v.a. X y lo denotaremos por Ω^X

Probabilidad inducida por la v.a. X: Para cualquier conjunto $B \subset \Omega^X$ la prob que el valor X esté en B es igual a

$$P^X(B) = P[X^{-1}(B)] = P\{w \in \Omega : X(w) \in B\}$$

P^X satisface las prop. de una prob. finita.

(Ω^X, P^X) se llama espacio de probabilidad inducido por la v.a X.

Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces

$\Omega = \{(C,C), (C,S), (S,C), (S,S)\}$, $X(w_1, w_2) = X_1(w_1) + X_2(w_2) \in \{0,1,2\}$

$$X(w_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i = \text{Cara} \\ 0 & \text{si } w_i = \text{Sello} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} X^{-1}\{0\} = \{(S,S)\} \subset \Omega \\ X^{-1}\{1\} = \{(C,S), (S,C)\} \subset \Omega \\ X^{-1}\{2\} = \{(C,C)\} \subset \Omega \end{array}\right\} \quad X^{-1}\{0\} \cup X^{-1}\{1\} \cup X^{-1}\{2\} = \Omega$$

Una v.a. X definida sobre un espacio de probabilidad finito (Ω, P) induce una partición sobre el espacio muestral Ω

RHEIN®

FECHA: / /

Sea X e Y dos v.a. si ambas distintas pero inducen a una misma partición sobre Ω entonces X e Y están relacionadas por medio de una función biyectiva,

Transformación de una variable aleatoria

Sea ϕ una función real valorada definida sobre Ω^X, entonces

$$Y(\omega)=\phi(X(\omega))=(\phi\circ X)(\omega)$$

Más aún,

$$\Omega^Y=(\phi\circ X)(\Omega)=\phi(\Omega^X),\quad P^Y(C)=P[(\phi\circ X)^{-1}]=P^X[\phi^{-1}(C)]$$

Esperanza

Para una v.a X definida sobre un espacio de prob. finito (Ω, P) la media de X o valor esperado de X se define como

$$\boxed{E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) P\{w\}}$$

Si X es un vector n-dimensional $X = (x_1, \dots, x_n)'$ entonces

$$E(X) \doteq (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$$

Teorema: Sean X e Y v.a. definidas sobre (Ω, P), entonces

(i) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $E(X, \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X, A_i)$, donde $A_1, \dots, A_n$ son mutuamente disjuntos

(iii) Si $X(w) = a$ sobre A, con $a \in \mathbb{R}$, entonces $E(X, A) = P(A) \cdot a$
(En particular, si $X(w) = a$ sobre Ω, entonces $E(X) = a$)

(iv) $E(X) = \sum_{x \in \Omega^X} P^X\{x\}\, x$

(v) si $Y(w) = \phi(X(w))$ sobre Ω, entonces $E(Y) = \sum_{x \in \Omega^X} \phi(x) P^X\{x\}$

(vi) $X(w) \geq Y(w) \rightarrow E(Y), E(X, A) \geq E(Y, A)$

(vii) $X(w) \geq 0$ y $A \subset B$ entonces $E(X, A) \leq E(X, B)$

VARIANZA y Desviación Estándar.

FECHA: / /

Sea (Ω, P) un espacio de prob. finito y sean X e Y dos v.a. def. sobre dicho espacio. Se define la varianza de X como.

$$\boxed{V(X) \doteq E[(X - E(X))^2]}$$