EYP 1025-1027 Modelos Probabilísticos

Clase 13-1

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

23 de mayo de 2023

Contenido I

Esperanza de Funciones de un Vector Aleatorio

Sea $g(x_1, \ldots, x_n)$ una función real valorada definida sobre el espacio muestral o recorrido $\mathcal{X}$ de un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$. Entonces, $g(X_1, \ldots, X_n)$ es un variable aleatoria cuya esperanza (provisto que exista) puede calcularse a partir de la distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ como sigue:

Teorema 1.1

$$\mathrm{E}\{g(X_1, \ldots, X_n)\} = \begin{cases} \sum \cdots \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \text{c.c.} \end{cases}$$

(provisto que las sumatorias y las integrales converjan)

I) **Esperanza de funciones lineales** Si $X_1, \ldots, X_n$ son va's con esperanza finita, entonces

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathsf{E}(X_i) + b,$$

donde $a_1, \ldots, a_n, b$ son constantes reales.

Por ejemplo, para la media muestral $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, se tiene que,

$$\mathsf{E}(\bar{X}) = \mathsf{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i).$$

Ejemplo 1.1

1) Sean X_1 y X_2 va's independientes, donde $X_1 \sim U(0,1)$, con fdp $f_{X_1}(x) = I_{(0,1)}(x)$, y $X_2 \sim N(0,1)$, con fdp $f_{X_2}(x) = \phi(x)$ donde $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$E(X_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx = 0.$$

Así, tenemos, por ejemplo, que $\mathrm{E}(2X_1 + X_2) = 2\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 1$ y $\mathrm{E}(2X_1 - X_2 - 1) = 2\mathrm{E}(X_1) - \mathrm{E}(X_2) - 1 = 0$.

Ejemplo 1.2

2) Sean X_1, X_2, X_3 va's con fdp conjunta dada por

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & \text{si } 0 < x_1, x_2, x_3 < 1, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

Calcule la esperanza de $\bar{X} = (X_1 + X_2 + X_3)/3$.

Alternativa 1. Calcule primero la medias marginales,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{3}{4}x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)dx_3dx_2dx_1 \\ &= \frac{3}{4}\int_0^1 x_1\int_0^1\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+x_3^2)dx_3dx_2dx_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}\int_0^1 x_1 \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{3}\right) dx_2 dx_1 \\
&= \frac{3}{4}\int_0^1 x_1 \left(x_1^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) dx_1 \\
&= \frac{3}{4}\int_0^1 \left(x_1^3 + \frac{2}{3}x_1\right) dx_1 \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{16}.
\end{aligned}
$$

Por analogogía, se tiene que $\mathsf{E}(X_3) = \mathsf{E}(X_2) = \mathsf{E}(X_1) = 7/16 \Longrightarrow \mathsf{E}(\bar{X}) = 7/16$.

Tarea: i) Calcule $\mathsf{E}(X_1X_2X_3)$; ii) Calcule las fdp's marginales y estudie si X_1, X_2, X_3 son va's iid.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Alternativa 2. Aplicando el Teorema 1.1 directamente,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\bar{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1+x_2+x_3}{3} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_1) \\
&+ \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_2) \\
&+ \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_3 f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x_1 \frac{3}{4} x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_1) \\
&+ \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x_2 \frac{3}{4} x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_2) \\
&+ \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x_3 \frac{3}{4} x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 \longrightarrow \frac{1}{3}\mathsf{E}(X_3) \\
&= \frac{7}{16}.
\end{aligned}
$$

II) Fgm conjunta

Definición 1.1

La fgm de conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ se difine como,

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathrm{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}\right)$$

$$= \begin{cases} \sum \cdots \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots dx_n & \text{c.c.} \end{cases}$$

provisto que la esperanza exista para todo $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|t_k| < h_k$, algún $(h_1,\ldots,h_k) \in \mathbb{R}^n$, con $h_k > 0$ para todo $k = 1,\ldots,n$.

Propiedades

(i) $M_{X_1,\ldots,X_k}(t_1,\ldots,t_k) = M_{X_1,\ldots,X_k,X_{k+1},\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_k,0,\ldots,0)$ para todo $k = 1,\ldots,n-1$.

(ii) $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}} \Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} = \mathsf{E}(X_1^{k_1}\times\cdots\times X_n^{k_n})$.

(iii) $X_1,\ldots,X_n$ son va's independientes si, y sólo si,

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i)$$

para todo $(t_1,\ldots,t_n)$ donde las fgm's existen.

(iv) $M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i + b}(t) = e^{bt} M_{X_1,\ldots,X_n}(a_1 t,\ldots,a_n t)$.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Así, si $X_1, \ldots, X_n$ son va's independientes, entonces,

$$M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i + b}(t) = e^{bt} \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t).$$

En particular, si $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} M(t)$, entonces, para la fgm de $\sum_{i=1}^n X_i$, se tiene que,

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \{M(t)\}^n .$$

Ejemplo 1.3

1) Si $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p) \Longrightarrow M(t) = 1 - p + pe^t$. Luego,

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (1 - p + pe^t)^n \iff Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, p).$$

2) Si $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \exp(\lambda) \Longrightarrow M(t) = (1 - t/\lambda)^{-1},\ t < \lambda$. Luego,

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (1 - t/\lambda)^{-n} \iff Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Gama(n, \lambda).$$

III) **Covarianza y Correlación** Sean X e Y va's definidas en el mismo espacio de probabilidad, y sean $\mu_X = \mathsf{E}(X)$, $\mu_Y = \mathsf{E}(Y)$, $\sigma_X^2 = \mathsf{Var}(X)$ y $\sigma_Y^2 = \mathsf{Var}(Y)$. Suponga que $0 < \sigma_X^2 < \infty$ y $0 < \sigma_Y^2 < \infty$.

Definición 1.2

La convarianza entre X e Y se define como,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} \\
&= \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{R}} \sum_{y\in\mathbb{R}} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx & \text{c.c.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

La correlación entre X e Y se define como,

$$
\rho_{XY} := \mathrm{Correlación}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.
$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Propiedades

(i) $\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)$ (formula alternativa)

(ii) $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \geq 0$ (operador positivo definido)

(iii) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (simetría)

(iv) $\text{Cov}(X, c) = \text{Cov}(c, X) = 0$ para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$

(v) Si X e Y son va's independientes, entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$

(vi) $\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$ y $\text{Cov}(aX + b, X) = a\text{Var}(X)$ donde a y b son constante.

(vii) $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$.

Las propiedades (vi)+(ii) $\Longrightarrow |\rho_{XY}| \leq 1$ con igualdad ssi $Y = aX + b$ algún $a \neq 0$ y b.

Ejemplo 1.4

1) Sean $X = 3Z + 1$ e $Y = -\frac{1}{3}\,Z - 1$, donde $Z \sim N(0,1)$. Ya que, $\mathrm{E}(Z) = 0$ y $\mathrm{Var}(Z) = 1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 3\mathrm{E}(Z) + 1 = 1, \quad \mathrm{E}(Y) = -3\mathrm{E}(Z) - 1 = -1,\\
\mathrm{Var}(X) &= 3^2\mathrm{Var}(Z) = 9, \quad \mathrm{Var}(Y) = (-\frac{1}{3})^2\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{9},\\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(3Z+1, Y)\\
&= 3\mathrm{Cov}(Z,Y) \quad (\text{por (vi)})\\
&= 3\mathrm{Cov}(Z, -\frac{1}{3}\,Z - 1)\\
&= 3(-\frac{1}{3})\mathrm{Var}(Z) \quad (\text{por (vi)})\\
&= -\mathrm{Var}(Z) = -1 \implies \rho_{XY} = -1/\sqrt{9\,\frac{1}{9}} = -1.
\end{aligned}
$$

2) Si $Z \sim U(-1,1)$, entonces,

$$\mathsf{E}(Z) = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \mathsf{Var}(Z) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Luego, de acuerdo con el ejemplo anterior,

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}(X) = 1, \quad \mathsf{E}(Y) = -1, \\
\mathsf{Var}(X) = 9\mathsf{Var}(Z) = 3, \quad \mathsf{Var}(Y) = \frac{1}{9}\mathsf{Var}(Z) = \frac{1}{27}, \\
\mathsf{Cov}(X,Y) = -\mathsf{Var}(Z) = -\frac{1}{3} \implies \rho_{XY} = -1.
\end{gathered}$$

IV) **Varianza de funciones lineales** Sean $X_1, \ldots, X_n$ va's y $a_1, \ldots, a_n, b$ constantes reales. Si todas las X_i's tienen esperanza finita, vimos que,

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathsf{E}(X_i) + b. \quad (*)$$

Además, si todas las X_i tienen varianza finita, entonces,

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathsf{Var}(X_i) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i<j}} a_i a_j \mathsf{Cov}(X_i, X_j). \quad (**)$$

En particular, si las va's $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, entonces $(**)$ se reduce para,

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathsf{Var}(X_i).$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Por ejemplo, si $X_1, \ldots, X_n$ son va's iid con media μ y varianza σ^2, entonces la media y la varianza de la media muestral $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, estan dadas por,

$$\mathsf{E}(\bar{X}) = \mu \quad \text{y} \quad \mathsf{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Además, la desigualdad de Chebyshev, implica que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty,$$

es decir, la probabilidad de que $\bar{X}$ difiera de μ en una cantidad positiva (ε) arbitrariamente pequeña es despreciable para n lo suficientemente grande.

Ejemplo 1.5

a) Sean $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1) \Longrightarrow \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ y $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Luego,

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 1 + 1 + 2 \times 0 = 2.$$

Análogamente,

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 1 + 1 - 2 \times 0 = 2.$$

Además, como $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X - Y) = 0$, usando la propiedad (i) de la covarianza, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) &= \mathrm{E}\{(X + Y)(X - Y)\} - 0 \times 0 \\ &= \mathrm{E}(X^2 - Y^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) \\ &= 1 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_{X+Y, X-Y} = 0. \end{aligned}$$

b) Si $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(1) \Longrightarrow X+Y$ y $X-Y$ también tienen correlación nula. En efecto, en este caso

$$\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(Y) = \mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(Y) = 1 \quad \text{y} \quad \mathsf{Cov}(X,Y) = 0.$$

Luego,

$$\mathsf{E}(X+Y) = 2, \quad \mathsf{E}(X-Y) = 0, \quad \mathsf{Var}(X+Y) = \mathsf{Var}(X-Y) = 2$$

y

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathsf{E}\{(X+Y)(X-Y)\} - 2 \times 0 = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(Y^2) \\
&= \mathsf{Var}(X) + \mathsf{E}(X)^2 - \{\mathsf{Var}(Y) + \mathsf{E}(Y)^2\} \\
&= 2 - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \ \rho_{X+Y,X-Y} = 0.
\end{aligned}$$

c) Si $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(1,1)$ son va's independientes, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X+Y) &= 1, \quad \mathsf{E}(X-Y) = -1,\\
\mathsf{Var}(X+Y) &= \mathsf{Var}(X-Y) = 2,\\
\mathsf{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathsf{E}\{(X+Y)(X-Y)\} - \mathsf{E}(X+Y)\mathsf{E}(X-Y)\\
&= 1 - (1+1) - 1 \times (-1) = 0 \quad \Longrightarrow \; \rho_{X+Y,X-Y} = 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6

a) Sean $X, Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Pruebe que $X+Y$ y $X-Y$ son va's iid $N(0,2)$.

b) Sean $X, Y \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(1)$. Las va's $X+Y$ y $X-Y$ son independientes? Indique las distribuciones marginales de $X+Y$ y $X-Y$.

c) Sean $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(1,1)$ va's independientes. Obtenga las fgm's conjunta y marginales de $X+Y$ y $X-Y$. (Tarea!)

Solución problema a)

Sabemos que $M_X(t) = M_Y(t) = e^{t^2/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, por definición la fgm conjunta de $X + Y$ y $X - Y$ esta dada por,

$$
\begin{aligned}
M_{X+Y,X-Y}(t,s) &= \mathsf{E}\left(e^{t(X+Y)+s(X-Y)}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(e^{(t+s)X+(t-s)Y}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(e^{(t+s)X}e^{(t-s)Y}\right) \\
&= \mathsf{E}\left(e^{(t+s)X}\right)\mathsf{E}\left(e^{(t-s)Y}\right) \quad (X \text{ e } Y \text{ son independientes}) \\
&= M_X(t+s)M_Y(t-s) \\
&= e^{(t+s)^2/2}e^{(t-s)^2/2} \\
&= e^{(2t^2+2s^2)/2} \quad \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Además, las fgm's marginales son,

$$M_{X+Y}(t) = M_{X+Y,X-Y}(t,0) = e^{(2t^2)/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

y

$$M_{X-Y}(s) = M_{X+Y,X-Y}(0,s) = e^{(2s^2)/2}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Es claro que,

$$M_{X+Y}(t) = M_{X-Y}(t) = e^{(2t^2)/2}$$

$\Longrightarrow X+Y$ y $X-Y$ tienen la misma distribución $N(0,2)$.

También es claro que

$$M_{X+Y,X-Y}(t,s) = M_{X+Y}(t)M_{X-Y}(s) \quad \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow X+Y$ y $X-Y$ son va's independientes, y como ambas tienen distribución $N(0,2)$, entonces las va's $X+Y$ y $X-Y$ son iid $N(0,2)$.

Solución problema b)

En este caso, $M_X(t) = M_Y(t) = (1-t)^{-1}$ la cual esta definida para $t < 1$. Procediendo como en el caso a), la fgm conjunta de $X+Y$ y $X-Y$ es,

$$\begin{aligned} M_{X+Y,X-Y}(t,s) &= M_X(t+s)M_Y(t-s) \\ &= \{1-(t+s)\}^{-1}\{1-(t-s)\}^{-1}, \quad t+s<1,\ t-s<1 \\ &= \{(1-t)^2 - s^2\}^{-1}, \quad t<1,\ -1+t<s<1+t. \end{aligned}$$

Las fmg's marginales son:

$M_{X+Y}(t) = (1-t)^{-2}$ para $t < 1 \Longrightarrow X+Y \sim Gama(2,1)$, y

$M_{X-Y}(s) = (1-s^2)^{-1}$ para $|s| < 1 \Longrightarrow$ tiene distribución doble exponencial, con fdp $f_{X-Y}(z) = \frac{1}{2}\,e^{-|z|}$ para $z \in \mathbb{R}$.

Luego, $M_{X+Y,X-Y}(t,s) \neq M_{X+Y}(t)M_{X-Y}(s) \Longrightarrow X+Y$ y $X-Y$ no son va's independientes.