Ayudantía 2 - Modelos Probabilísticos

Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Estadística

2025

Ejercicio 1

Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales no negativos tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1.$$

Definimos

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Probamos que P es medida de probabilidad:

a) *No negatividad*: $P(A) \geq 0$ pues cada $\alpha_n \geq 0$ y $P_n(A) \geq 0$.

b) *Norma*:

$$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1.$$

c) *σ-aditividad*: Para eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \end{aligned}$$

donde intercambiamos sumas (la doble serie converge por no negatividad).

Ejercicio 2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

a) Para $A, B \in \mathcal{A}$, la fórmula de inclusión-exclusión da:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

b) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión *decreciente* de eventos (es decir, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$), entonces por continuidad de la medida desde arriba:

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Ejercicio 3

Se lanza un dado dos veces.

a) Modelo de probabilidad:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P((i,j)) = \frac{1}{36}.$$

b) Probabilidad de que la suma sea 8: Hay los siguientes pares: $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$, es decir 5 resultados, luego

$$P(\text{suma} = 8) = \frac{5}{36}.$$

c) Definimos:

- Primidades: primos en un dado: $\{2,3,5\}$.
- Pares: $\{2,4,6\}$.
- A="la suma es 8 y salen uno o dos primos".
- B="la suma es 8 y salen dos pares".

De los 5 casos de suma 8:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{4}{36} && \text{((2,6),(6,2):1 primo; (3,5),(5,3):2 primos)} \\ P(B) &= \frac{3}{36} && \text{((2,6),(4,4),(6,2):dos pares)} \\ P(A\cup B) &= \frac{5}{36} && \text{(es todo el evento suma=8).} \end{aligned}$$

Ejercicio 4

En una canasta hay 7 manzanas (3 verdes y 4 rojas). Se extraen 5 manzanas. Sea A=.$^{\text{ex}}$traer exactamente 2 rojas".

a) **Con reemplazo:** cada extracción es R con $p = 4/7$ e V con $1 - p = 3/7$. Entonces

$$P(A) = \binom{5}{2}\left(\tfrac{4}{7}\right)^2\left(\tfrac{3}{7}\right)^3.$$

b) **Sin reemplazo:** usamos hipergeométrica:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{6\cdot 1}{21} = \frac{2}{7}.$$

Ejercicio 5

Se elige un número de 4 dígitos al azar (el primero no puede ser 0). Se pide:

$$d_1 > d_2 > d_3 > d_4.$$

Total de números posibles: $9 \times 10^3 = 9000$.

Para que los dígitos sean estrictamente decrecientes y distintos, basta escoger *cualquier* conjunto de 4 dígitos de $\{0, 1, \ldots, 9\}$ y ordenarlos de mayor a menor. Hay

$$\binom{10}{4} = 210$$

tales secuencias, y en todas el primer dígito será ≥ 1 automáticamente. Luego:

$$P = \frac{210}{9000} = \frac{7}{300}.$$

Ejercicio 6

Un hombre tiene 5 monedas: 2 doble *cara*, 1 doble *cruz*, y 2 normales (justas). Cierra los ojos, elige una al azar y la lanza.

a) Probabilidad de obtener *cara*:

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

b) Si observa que salió cara, la probabilidad de que la otra cara también sea cara (es decir que sea doble cara) es

$$P(\text{doble cara}|C) = \frac{\frac{2}{5} \cdot 1}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 7

La fábrica A produce el 65 % de los chips con tasa de defectuosos 6 %, y B el 35 % con tasa 5 %.

a) Tasa global de defectuosos:

$$P(D) = 0{,}65 \cdot 0{,}06 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 = 0{,}039 + 0{,}0175 = 0{,}0565.$$

b) Probabilidad de que un chip defectuoso provenga de A (teorema de Bayes):

$$P(A|D) = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}06}{0{,}0565} \approx 0{,}6903.$$