

Control 2

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo Arellano.

Ayudante: Daniel Gálvez.

Primer semestre 2024

1. [3] Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Defina $W = \omega X - (1 - \omega)Y$. Calcule $\mathbb{E}(W)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(\omega X - (1 - \omega)Y) \\ &= \mathbb{E}(\omega X) - \mathbb{E}((1 - \omega)Y) \\ &= \omega \mathbb{E}(X) - (1 - \omega) \mathbb{E}(Y) \\ &= \omega \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dy dx - (1 - \omega) \int_0^1 \int_0^1 y(x + y) dy dx \\ &= \omega \frac{7}{12} - (1 - \omega) \frac{7}{12} \\ &= \frac{7}{12} (\omega - (1 - \omega)) \\ &= \frac{7}{12} (2\omega - 1) \end{aligned}$$

2. [3] Sea $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Encuentre como distribuye $Z = X + Y$.

Obtiene puntaje extra si generaliza el caso para $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda)$.

Podemos usar función generadora de momentos.

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{X+Y}(t) \\ &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{2\alpha} \end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una Gamma con parámetros β y 2α . Luego,

$$Z \sim \text{Gamma}(2\alpha, \beta)$$