Ejercicios 1–8 (EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos)

Ejercicio 1

Enunciado. Se lanza una moneda hasta que aparece una cara. ¿Cuál es la función de probabilidad del número de tiradas? Calcule $P(X > x)$, $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Solución. Sea X el número de tiradas hasta la primera cara. Cada tirada es independiente con $P(\text{cara}) = P(\text{sello}) = \frac{1}{2}$. Entonces, para $k = 1, 2, \dots,$

$$P(X = k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{-k}.$$

Para $x = 0, 1, 2, \dots,$

$$P(X > x) = \sum_{k=x+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-x}.$$

La esperanza y varianza de la distribución geométrica (con soporte $\{1, 2, \dots\}$) son

$$E(X) = \frac{1}{p} = 2, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2.$$

Ejercicio 2

Enunciado. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la función de probabilidad de la suma de los números que aparecen? Calcule $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Solución. La suma X toma valores de 2 a 12. Hay 36 resultados equiprobables. El número de maneras de obtener k es:

$$P(X = k) = \frac{\#\{(i, j) : i + j = k\}}{36} = \begin{cases} \frac{1}{36}, & k = 2, 12, \\ \frac{2}{36}, & k = 3, 11, \\ \frac{3}{36}, & k = 4, 10, \\ \frac{4}{36}, & k = 5, 9, \\ \frac{5}{36}, & k = 6, 8, \\ \frac{6}{36}, & k = 7. \end{cases}$$

Se conoce que

$$E(X) = 7, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{35}{12}.$$

Ejercicio 3

Enunciado. Considere una va X con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Suponga que

$$p(k) = P(X = k) = (1-a)a^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

1. ¿Para qué valores de a, $p(k)$ es función de probabilidad? 2. Pruebe que para dos enteros positivos s, t,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X \geq t).$$

Solución.

1. Requerimos $p(k) \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$. Como $a^k \geq 0$, basta $1 - a \geq 0$ y

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-a)a^k = (1-a)\frac{1}{1-a} = 1.$$

Así $0 \leq a < 1$.

2.

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{\sum_{k=s+t+1}^{\infty}(1-a)a^k}{\sum_{k=s+1}^{\infty}(1-a)a^k} = \frac{a^{s+t+1}/(1-a)}{a^{s+1}/(1-a)} = a^t = \sum_{k=t}^{\infty}(1-$$

Ejercicio 4

Enunciado. De un lote con 25 artículos, de los cuales 5 son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de defectuosos elegidos. Obtenga la distribución de X si:

1. Con sustitución.
2. Sin sustitución.

En cada caso calcule $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ e indique una mediana.

Solución.

1. Con sustitución: cada artículo defectuoso con probabilidad $p = 5/25 = 0.2$. Entonces

$$X \sim \mathrm{Bin}(n = 4, p = 0.2), \quad P(X = k) = \binom{4}{k}(0.2)^k(0.8)^{4-k}.$$

Se tiene

$$E(X) = 4p = 0.8, \quad \mathrm{Var}(X) = 4p(1-p) = 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.64.$$

La mediana m satisface $P(X \leq m) \geq 0.5$ y $P(X \geq m) \geq 0.5$. Se encuentra $m = 1$.

2. Sin sustitución: $X \sim \text{Hypergeo}(N=25, K=5, n=4)$,

$$P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{20}{4-k}}{\binom{25}{4}}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

Aquí

$$E(X) = n\frac{K}{N} = 4\frac{5}{25} = 0.8, \quad \text{Var}(X) = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1} = 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot \frac{21}{24} = 0.56.$$

La mediana también es 1.

Ejercicio 5

Enunciado. Considere una va X con valores en $\{1,2,\dots\}$ y

$$p(k) = P(X=k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Calcule

- $P(X \text{ par})$, $P(X \geq 5)$, $P(X \text{ divisible por } 3)$,
- una mediana.

Solución. La serie normaliza: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$.

$$P(X \text{ par}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} = \frac{1/4}{1-1/4} = \tfrac{1}{3},$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-4} = \tfrac{1}{16},$$

$$P(X \equiv 0 \bmod 3) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-3j} = \frac{1/8}{1-1/8} = \tfrac{1}{7}.$$

La mediana m satisface $P(X \leq m) \geq 0.5$. Como $P(X=1) = 1/2$, ya se cumple, luego $m = 1$.

Ejercicio 6

Enunciado. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

¿Es f una función de densidad?

Solución. Debe ser $f(x) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Se comprueba:

$$\int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}, \quad \int_1^2 (2-x)dx = \left[2x - \tfrac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2},$$

y suma 1. Por tanto, sí es densidad.

Ejercicio 7

Enunciado. Sea X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 < x \leq 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para $-1 < b < 0$:

1. Calcule $P(X > b \mid X < b/2)$.
2. Encuentre b tal que $P(X > b \mid X < b/2) = 1/9$.
3. Obtenga y grafique la función de distribución $F_X(x)$.
4. Obtenga $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Solución.

1. $$P(X > b \mid X < b/2) = \frac{\int_b^0 3x^2dx}{\int_{-1}^{b/2} 3x^2dx} = \frac{-b^3}{(b/2)^3 + 1} = \frac{8b^3}{b^3+8}.$$

2. Resolver $8b^3/(b^3+8) = 1/9$ da
$$b = \left(\frac{8}{71}\right)^{1/3}.$$

3. La CDF es
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^3 + 1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

   (Gráfico omitido.)

4.
$$E(X) = \int_{-1}^{0} x \cdot 3x^2 dx = \big[\tfrac{3x^4}{4}\big]_{-1}^{0} = -\tfrac{3}{4},$$
$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2 \cdot 3x^2 dx = \big[\tfrac{3x^5}{5}\big]_{-1}^{0} = \tfrac{3}{5},$$
$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{3}{5} - \tfrac{9}{16} = \tfrac{3}{80}.$$

Ejercicio 8

Enunciado. Sea X el tiempo de destrucción de una partícula radiactiva con
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$
Suponga que λ es tal que $P(X \ge 0.01) = 0.5$. Encuentre t para $P(X \ge t) = 0.9$. Indique la media y varianza de X.

Solución. Para $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,
$$P(X \ge 0.01) = e^{-\lambda \cdot 0.01} = 0.5 \implies \lambda = \tfrac{\ln 2}{0.01}.$$
Buscamos t con $e^{-\lambda t} = 0.9$, luego
$$t = -\tfrac{\ln 0.9}{\lambda}.$$
La media y varianza son
$$E(X) = \tfrac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{\lambda^2}.$$

Ejercicio 9

Enunciado. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad
$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$
Muestre que $E(X) = \mathrm{Var}(X)$.

Solución. Para $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, su función generadora de momentos es
$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \exp\big(\lambda(e^t - 1)\big).$$
Entonces
$$E(X) = M_X'(0) = \lambda, \qquad E(X^2) = M_X''(0) = \lambda + \lambda^2.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda = E(X).$$

Ejercicio 10

Enunciado. Se lanza n veces una moneda honesta, de manera independiente. Defina X = número de sellos obtenidos.

1. Calcule $M_X(t)$.
2. Calcule $\operatorname{Var}(aX + 9)$.
3. Suponga que por cada sello obtenido se tiene una ganancia de \$3. ¿Cuál es la ganancia esperada?

Solución.

1. $X \sim \operatorname{Bin}(n, p = \frac{1}{2})$, luego
$$M_X(t) = \left(q + pe^t\right)^n = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^t\right)^n.$$
2. $\operatorname{Var}(aX + 9) = a^2 \operatorname{Var}(X) = a^2 \cdot np(1-p) = a^2 \frac{n}{4}$.
3. Si la ganancia es $Y = 3X$, entonces
$$E(Y) = 3E(X) = 3 \cdot \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}.$$

Ejercicio 11

Enunciado. Sea X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Muestre que todos los momentos existen y calcule $E(X^k)$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Solución. La distribución es simétrica en 0, luego los momentos impares son cero y los pares finitos:

$$E(X) = 0, \quad E(X^2) = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 2\Big[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6},$$

$$E(X^3) = 0, \quad E(X^4) = 2\int_0^1 x^4(1-x)\,dx = 2\Big[\tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^6}{6}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{15}.$$

Ejercicio 12

Enunciado. Sea X con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{4}, & -2 \le x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \le x < 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-x/k}, & x \ge 0, \end{cases}$$

para una constante $k > 0$.

1. Calcule $P(X = 0)$.
2. ¿Qué tipo de variable aleatoria es X?
3. Determine $E(X)$ y $\operatorname{Var}(\pi X + 1)$.

Solución.

1. Hay un salto en $x = 0$:

$$P(X = 0) = F_X(0) - \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = \left(1 - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

2. X es una variable mixta: masa en $-2, -1, 0$ y parte continua en $(0, \infty)$.
3. Los átomos tienen probabilidad $1/4$ cada uno, y la parte continua es exponencial con peso $1/4$:

$$E(X) = \sum_{x \in \{-2,-1,0\}} x \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\, E_{\mathrm{Exp}(k)}(X) = \frac{-3}{4} + \frac{k}{4} = \frac{k-3}{4},$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in \{-2,-1,0\}} x^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\, E_{\mathrm{Exp}(k)}(X^2) = \frac{5}{4} + \frac{2k^2}{4} = \frac{5 + 2k^2}{4},$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad \operatorname{Var}(\pi X + 1) = \pi^2 \operatorname{Var}(X).$$

Ejercicio 13

Enunciado. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. Calcule $E(X^n)$.
2. Calcule $M_X(t)$.

3. Determine la función generadora de momentos de $Y = (X - \mu)/\sigma$.

Solución.

1. En general,

$$E(X^n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^j\, j!\,(n-2j)!}\, \mu^{\,n-2j}\, \sigma^{2j}.$$

2.

$$M_X(t) = \exp\Big(\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\Big).$$

3. Para $Y = (X - \mu)/\sigma$,

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \exp\Big(\tfrac{1}{2}t^2\Big).$$

Ejercicio 14

Enunciado. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{2}{4}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{4}, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

1. ¿Qué tipo de variable aleatoria es X?

2. Calcule $E(X)$.

3. Calcule la función generadora de momentos de $aX+b$, es decir $M_{aX+b}(t)$.

Solución.

1. X es una variable mixta: contiene átomos en $x = 1, 2$ y densidad uniforme en $(0, 1)$ y $(2, 3)$.

2.

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4}\, dx + \int_2^3 x \cdot \frac{1}{4}\, dx + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

3. Con $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$ y

$$M_X(u) = \int_0^1 e^{ux} \frac{1}{4}\, dx + \int_2^3 e^{ux} \frac{1}{4}\, dx + e^u \frac{1}{4} + e^{2u} \frac{1}{4},$$

$$M_X(u) = \frac{e^u - 1}{4u} + \frac{e^{3u} - e^{2u}}{4u} + \frac{e^u + e^{2u}}{4}.$$

Luego

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} \Big[\frac{e^{at} - 1}{4at} + \frac{e^{3at} - e^{2at}}{4at} + \frac{e^{at} + e^{2at}}{4} \Big].$$

Ejercicio 15

Enunciado. Sea $F_X(x)$ función de distribución continua. Demuestre que, para $n \geq 1$:

$$1)\ [F_X(x)]^n \quad \text{y} \quad 2)\ 1 - [1 - F_X(x)]^n$$

son funciones de distribución.

Solución. Ambas son no decrecientes, con límites 0 en $x \to -\infty$ y 1 en $x \to +\infty$, y continuas por composición de funciones continuas.

Ejercicio 16

Enunciado. Sea X con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} c\, e^{2x}, & x < 0, \\ \frac{\lambda}{4} e^{-x/\lambda}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

1. Determine c tal que f_X sea densidad.
2. Obtenga $F_X(x)$.
3. Calcule $E(2X+1)$ y $\mathrm{Var}(2X+1)$.
4. Calcule $M_{aX}(t)$.

Solución.

1.

$$\int_{-\infty}^0 c\, e^{2x} dx + \int_0^\infty \frac{\lambda}{4} e^{-x/\lambda} dx = 1 \implies \frac{c}{2} + \frac{\lambda^2}{4} = 1 \implies c = 2 - \frac{\lambda^2}{2}.$$

2. Integrando cada tramo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \left(2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{e^{2x}-1}{2}, & x < 0, \\ 1 - e^{-x/\lambda}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Si $Y = 2X + 1$, entonces

$$E(Y) = 2E(X) + 1, \quad \operatorname{Var}(Y) = 4\operatorname{Var}(X),$$

con $E(X)$ y $\operatorname{Var}(X)$ calculados a partir de f_X.

4.

$$M_{aX}(t) = E(e^{t\,aX}) = \int_{-\infty}^{0} c\, e^{(2+at)x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{4} e^{-(1/\lambda - at)x} dx.$$

Ejercicio 17

Enunciado. Sea X con distribución discreta

x	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

Calcule:

1. $\operatorname{Var}(X)$.
2. $E(\sin X)$.
3. $F_X(x)$.
4. $P(X > 0 \mid X < 2)$.

Solución.

1.

$$E(X) = -\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{2 \cdot 2}{8} = \frac{3}{8}, \quad E(X^2) = \frac{7}{8}, \quad \operatorname{Var}(X) = \frac{7}{8} - \left(\tfrac{3}{8}\right)^2 = \frac{53}{64}.$$

2.

$$E(\sin X) = \sin(-1)\tfrac{1}{8} + \sin(0)\tfrac{4}{8} + \sin(1)\tfrac{1}{8} + \sin(2)\tfrac{2}{8}.$$

3. Acumulando probabilidades en cada punto.

4.

$$P(X > 0 \mid X < 2) = \frac{P(X = 1)}{P(X < 2)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 18

Enunciado. Sea $X \sim \mathrm{Bin}(3, p)$ y $Y = g(X)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} 1500, & x = 0, \\ 2000, & x = 1, 2, \\ 3000, & x = 3. \end{cases}$$

Calcule $E(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

Solución.

$$E(Y) = 1500P(X = 0) + 2000[P(X = 1) + P(X = 2)] + 3000P(X = 3),$$

$$E(Y^2) = 1500^2P(X = 0) + 2000^2[P(X = 1) + P(X = 2)] + 3000^2P(X = 3),$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2.$$