Resumen Clase 9 y 10
EYP1027 - Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

1. Distribuciones Continuas

Distribución Uniforme

Definición: Sea $X \sim U(a,b)$, su fdp es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Propiedades:

- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $M(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$, $t \neq 0$

Ejemplo: Si $X \sim U(-3,2)$:

$$P(X \geq 0) = \int_0^2 \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5}, \quad P(-5 \leq X \leq 0{,}5) = \frac{7}{10}$$

Distribución Normal

Definición: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su fdp es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Distribución Normal Estándar: $Z \sim N(0,1)$, con fdp:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)dx$$

Propiedades:

- $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- $M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$
- Si $Y = a + bX$, entonces $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Ejemplo: $X \sim N(1,4)$:

$$P(0 \leq X < 1) = \Phi(0) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}19146$$
$$P(X^2 > 4) = 1 - P(|X| \leq 2) = 0{,}37535$$

Distribución Gama

Definición: $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

Propiedades:

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$
- $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
- $M(t) = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$, $t < \lambda$

Casos particulares:

- $\alpha = 1 \Rightarrow X \sim \text{Exp}(\lambda)$
- $\alpha = \nu/2, \lambda = 1/2 \Rightarrow X \sim \chi^2_\nu$
- $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow X \sim \text{Erlang}(\alpha, \lambda)$

2. Distribución de una Función de una Variable Aleatoria

Caso Discreto

Si $Y = g(X)$ y X es discreta:

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x)$$

Ejemplo: Sea X con valores $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y $Y = X^2$, entonces:

$$Y = \{0, 1, 4, 9\}, \quad f_Y(1) = f_X(-1) + f_X(1)$$

Caso Continuo

Si g es monótona:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Generalización (Teorema): Si g es monótona en intervalos disjuntos A_i donde $X = \cup A_i$, entonces:

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|$$

Ejemplo: $X \sim \text{Exp}(1)$, $Y = 2X + 1 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-(y-1)/2}$

Ejemplo: $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2 \Rightarrow Y \sim \chi^2_1$

3. Aplicación de la Distribución Uniforme

Teorema: Si X tiene fda continua $F_X(x)$, entonces $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$
Generación de variables:

- Generar $y \in U(0,1)$
- Calcular $x = F_X^{-1}(y)$

Ejemplo: $X \sim \text{Exp}(1) \Rightarrow X = -\log(1-y)$