Departamento de Estadística PUC

Interrogación 3: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo Arellano   Ayudante: Daniel Gálvez

Pregunta 1: Sea (X, Y) es un vector aleatorio continuo con distribución uniforme sobre la región $R_{XY} = \{(x, y) : 0 < x < 1, |y| < x\}$; es decir, con función de densidad dada por

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c, & \text{si } \ (x, y) \in R_{XY}, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

donde c es una constante positiva.

(a) Determine el valor de c y las densidad marginales de X e Y.

(b) Pruebe que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. ¿Son independientes X e Y ?

(c) Calcule $\mathrm{P}(Y > 0)$ e indique la distribución de la variable aleatoria dada por

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ Y > 0. \\ 0, & \text{si } \ Y \leq 0. \end{cases}$$

(a) [**2**] Note que el recorrido conjunto corresponde a

$$0 < x < 1, \quad -x < y < x$$

se debe encontrar c tal que

$$\iint_{\mathcal{X}} f_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-x}^{x} c dy dx &= 1 \\ \int_0^1 c 2x dx &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Luego, se tiene $c = 1$. La marginal de X corresponde a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-x}^{x} 1 dy \\ &= 2x \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

Mas aun, note que $X \sim Beta(2, 1)$.

Para la marginal de Y hay que arreglar el recorrido, pues y va entre funciones, y nos interesa que y vaya en un intervalo numérico. Haciendo los procedimientos vistos en ayudantía se tiene que la nueva región es

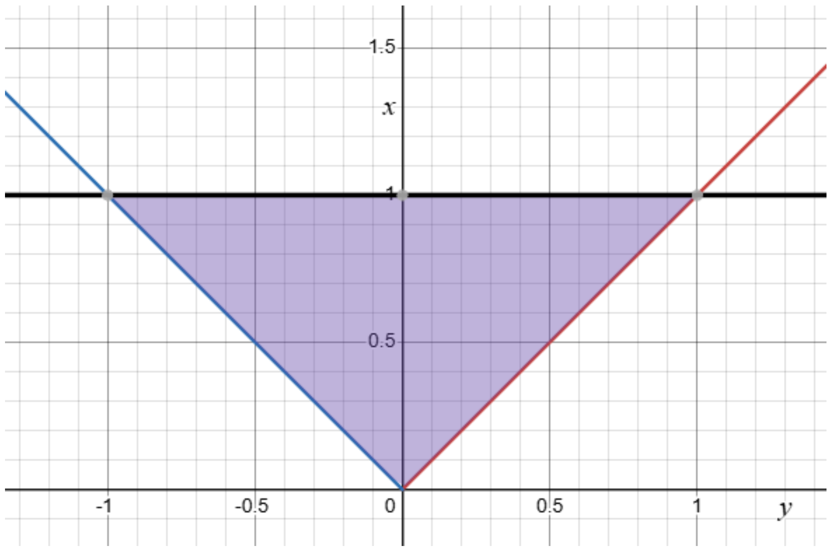

Figura 1: Recorrido conjunto

Esto se puede expresar de la siguiente forma

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < y < 0, -y < x < 1 \\ 1, & \text{si } 0 < y < 1, y < x < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Entonces, si $y \in (-1, 0)$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-y}^{1} 1dx \\ &= 1 + y \end{aligned}$$

Si $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{y}^{1} 1dx \\ &= 1 - y \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 + y, & \text{si } -1 < y < 0 \\ 1 - y, & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

- [**1**] por encontrar el valor de c

- [**0.5**] por cada marginal

(b) [**2**] Se debe calcular $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} xydydx \\ &= 0\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} ydydx \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= 0 - \mathbb{E}(X) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Claramente no son independientes, pues el producto cartesiano de los recorridos conjuntos no es el mismo al del los recorridos marginales. Además note que el producto de las marginales no es igual a la conjunta.

- [**1**] Por calcular correctamente $Cov(X,Y)$
- [**1**] Por concluir que no son independientes pero $Cov(X,Y) = 0$

(c) [**2**]

$$\begin{aligned}P(Y > 0) &= \int_0^1 \int_0^x dydx \\ &= 1/2\end{aligned}$$

Teniendo esto en consideración la variable aleatoria Z se reduce a

$$P(Z = z) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } z = 1 \\ 1/2, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Luego, $Z \sim Bern(1/2)$.

- [**1**] Por calcular $P(Y > 0)$ correctamente
- [**1**] Por mencionar que $Z \sim Bern(1/2)$

Pregunta 2: Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{si } 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Obtenga las densidades marginales de X e Y.

(b) Sean $U = \dfrac{X}{Y}$ y $V = Y$. Pruebe que U y V son independientes.

(c) Calcule $\mathrm{E}(U)$.

(a) [**2**] El recorrido conjunto es

$$0 < y < \infty, \quad 0 < x < y$$

La marginal de Y corresponde a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y e^{-y} dx \\ &= ye^{-y} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = ye^{-y}, \quad y > 0$$

Mas aun, note que $Y \sim Gamma(2,1)$. Por otro lado, la marginal de X corresponde a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^\infty e^{-y} dy \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

Mas aun, note que $X \sim Exp(1)$.

- [**1**] Por encontrar correctamente $f_X(x)$
- [**1**] Por encontrar correctamente $f_Y(y)$

(b) [**2**] Calculamos las inversas

$$\begin{aligned} V &= Y \\ Y &= V \end{aligned}$$

Reemplazamos esto en U

$$\begin{aligned} U &= X/V \\ X &= UV \end{aligned}$$

calculamos el Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v & 1 \end{vmatrix} = |v| = v$$

Ahora el recorrido. Para U se tiene

$$\begin{aligned} 0 < x < y \\ 0 < \frac{x}{y} < 1 \\ 0 < u < 1 \end{aligned}$$

Para V se tiene

$$\begin{aligned} 0 < y < \infty \\ 0 < v < \infty \end{aligned}$$

Reemplazamos todo en la conjunta de X, Y.

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= v f_{X,Y}(uv, v) \\ &= ve^{-v} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_{U,V}(u,v) = ve^{-v}, \quad 0 < u < 1, v > 0$$

Ahora note que

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= ve^{-v} \\ &= \frac{1^2 v^{2-1} e^{-1\cdot v}}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{1-0} \\ &= f_V(v) f_U(u) \\ &= Gamma(2,1) \times U(0,1) \end{aligned}$$

Luego, U, V son independientes ya que se puede factorizar de forma tal que

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$$

con $V \sim Gamma(2,1)$ y $U \sim U(0,1)$.

- [**0.5**] por el jacobiano
- [**0.5**] por el recorrido y encontrar la conjunta
- [**1**] por mostrar que U, V son independientes

(c) [**2**]

$$\mathbb{E}(U) = 1/2$$

Ya que $U \sim U(0,1)$.

- [**2**] Por calcular correctamente $\mathbb{E}(U)$

Pregunta 3: Se lanza una moneda honesta 4 veces. Sea X el número de caras en los tres primeros lanzamientos, y sea Y el número de caras que en los tres últimos lanzamientos.

(a) Indique las distribuciones marginales de X e Y.

(b) Construya una tabla con la función de probabilidad conjunta de X e Y.
¿Son independientes X e Y ? (*Hint: Escriba el espacio muestral* Ω)

(c) Indique la distribución de $Z = X - Y$ y obtenga su media y su varianza.

(a) [**2**] Se tiene

$$X \sim Bin(3, 1/2)$$
$$Y \sim Bin(3, 1/2)$$

- [**1**] por cada distribución

(b) [**2**] Utilizando el Hint se tiene que

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	1/16	1/16	0	0
$X = 1$	1/16	3/16	2/16	0
$X = 2$	0	2/16	3/16	1/16
$X = 3$	0	0	1/16	1/16.

Note que

$$P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{2}{16} \cdot \frac{2}{16} = \frac{4}{16^2}$$

Mientras que

$$P(X = 0, Y = 0) = 1/16$$

Por lo que

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$$

De modo que X, Y no son independientes.

- [**1**] por la tabla
- [**1**] por mostrar que no son independientes.

(c) [**2**] Primero encontremos el recorrido de Z.
Si $Y = 0$

$$Z = 0 - 0 = 0, \quad Z = 1 - 0 = 1, \quad Z = 2 - 0 = 2, \quad Z = 3 - 0 = 3$$

Si $Y = 1$

$$Z = 0 - 1 = -1, \quad Z = 1 - 1 = 0, \quad Z = 2 - 1 = 1, \quad Z = 3 - 1 = 2$$

Si $Y = 2$

$$Z = 0 - 2 = -2, \quad Z = 1 - 2 = -1, \quad Z = 2 - 2 = 0, \quad Z = 3 - 2 = 1$$

Si $Y = 3$

$$Z = 0 - 3 = -3, \quad Z = 1 - 3 = -2, \quad Z = 2 - 3 = -1, \quad Z = 3 - 3 = 0$$

De modo que

$$z \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Ahora buscamos la probabilidad de cada elemento.

$$P(Z = -3) = P(X = 0, Y = 3) = 0$$
$$P(Z = -2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) = 0 + 0 = 0$$
$$P(Z = -1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) = 1/16 + 2/16 + 1/16 = 4/16$$
$$P(Z = 0) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i, Y = i) = 1/16 + 3/16 + 3/16 + 1/16 = 8/16$$
$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 2) = 1/16 + 2/16 + 1/16 = 4/16$$
$$P(Z = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) = 0$$
$$P(Z = 3) = P(X = 3, Y = 0) = 0$$

De modo que

$$P(Z = z) = \begin{cases} 4/16, & z = -1 \\ 8/16, & z = 0 \\ 4/16, & z = 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Calculamos la esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= -1 \cdot P(Z = -1) + 0 \cdot P(Z = 0) + 1 \cdot P(Z = 1) \\ &= -1 \cdot \frac{4}{16} + 0 + 1 \cdot \frac{4}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= (-1)^2 \cdot P(Z = -1) + 0^2 \cdot P(Z = 0) + 1^2 \cdot P(Z = 1) \\ &= \frac{4}{16} + 0 + \frac{4}{16} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Luego,

$$Var(Z) = \frac{1}{2}$$

- [**1**] por encontrar la fmp de Z
- [**0.5**] por la esperanza y [**0.5**] por la varianza

– Santiago, 19 de junio de 2024 –