Resumen de la Clase 8: Momentos y Distribuciones

Akira

1. Funciones Generadoras

1.1 Función Generadora de Momentos (MGF)

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} f_X(x), & X \text{ discreta}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & X \text{ continua}, \end{cases}$$

Se usa para obtener momentos:

$$E[X^k] = M_X^{(k)}(0).$$

Linealidad: si $Y = aX + b$, entonces

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

1.2 Función Generadora de Probabilidad (PGF)

Para X discreta con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$:

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)\, t^x, \quad |t| < 1.$$

Derivadas en $t = 1$ dan momentos factoriales $E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$.

1.3 Función Característica (FC)

Siempre existe:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + i\, E[\sin(tX)].$$

Caracteriza la distribución sin condición de existencia.

2. Distribuciones Discretas

Distribución	**Soporte**	**PMF**	$E[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	[illegible]
Uniforme discreta	$\{x_1, \dots, x_N\}$	$1/N$	$\frac{1}{N}\sum x_i$	$\frac{1}{N}\sum x_i^2 - (E[X])^2$	[illegible]
Binomial $\mathrm{Bin}(n, p)$	$0, 1, \dots, n$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	[illegible]
Hipergeométrica $\mathrm{Hip}(n, K, N)$	$0, \dots, \min(n, K)$	$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{K}{N}$	$npq\frac{N-n}{N-1}$	[illegible]
Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$	$0, 1, 2, \dots$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	[illegible]
Negativa $\mathrm{BN}(r, p)$	$r, r+1, \dots$	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	r/p	$r(1-p)/p^2$	[illegible]
Geométrica $\mathrm{Geo}(p)$	$1, 2, \dots$	$p(1-p)^{x-1}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	[illegible]

3. Distribuciones Continuas

Distribución	**Soporte**	**PDF**	$E[X]$	$\mathrm{Var}(X)$	$M_X(t)$
Uniforme $U(a,b)$	(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$
Normal $N(\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}$
Gamma $\Gamma(\alpha,\lambda)$	$(0,\infty)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$	α/λ	α/λ^2	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$
Exp(λ)		–	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-1}$
χ^2_ν		–	ν	2ν	$(1-2t)^{-\nu/2}$
Erlang (k,λ)		–	k/λ	k/λ^2	$(1-\frac{t}{\lambda})^{-k}$

4. Conexiones y Propiedades

- Límite Binomial $\to$ Poisson: $n\to\infty$, $p\to 0$, $np\to\lambda$.
- Propiedad *sin memoria* en Geo(p): $P(X>s\mid X>t)=P(X>s-t)$.
- Transformación de variables: $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$.
- Relacionar Gamma con Exp y χ^2 (casos $\alpha=1,\alpha=\nu/2,\lambda=1/2$).