PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

# Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

# Solución I1

1. (a) [**3**] Teniendo en cuenta que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, se tiene

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2$$

Luego, como $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ son $\sigma-$álgebra por enunciado, se concluye que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\sigma-$álgebras de subconjuntos de $\Omega$.
[**1.5**] Por encontrar $\mathcal{F}$ y concluir correctamente.
[**1.5**] Por encontrar $\mathcal{G}$ y concluir correctamente.

(b) [**3**]

i. [**1.5**] Se debe corroborar $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Luego, se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Concluyendo así que $A$,$B$ son eventos independientes.
[**1.5**] Por demostrar y concluir correctamente.

ii. [**1.5**] Se pide $P([A \cap B^c] \cup [A^c \cap B])$. Entonces

$$\begin{aligned} P([A \cap B^c] \cup [A^c \cap B]) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B), \quad \text{disjuntos} \\ &= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B), \quad \text{independientes} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[**1.5**] Por plantear correctamente la probabilidad y llegar al resultado correcto.

2. (a) [**3**]

i. [**1.5**] Defina

$$E_i = \text{sale par en la } i - \text{esima tirada}$$

entonces

$$P(E_i) = \frac{\{2,4,6\}}{\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

teniendo así

$$A_n = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$$

Se pide $P(A_n)$, entonces

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \\ &= P(E_1)P(E_2) \cap \cdots \cap P(E_n), \quad \text{independientes} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(E_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

[**1.5**] Por calcular correctamente la probabilidad.

ii. [**1.5**] Note que para $n \geq 1$ se cumple que

$$A_{n+1} \subseteq A_n$$

Entonces se tiene $A_n \downarrow A$, por lo que es una secuencia decreciente, entonces se cumple

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Aplicando resultados vistos en clase y ayudantía se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \\ P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[**1.5**] Por demostrar correctamente lo pedido. Si el estudiante solo escribe

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

sin argumento valido, obtiene [**0.5**].

(b) [**3**] Sea

$$\begin{aligned} A_n &= \text{Ninguno de los adolescentes tiene su propia CI} \\ B_i &= \text{El } i\text{−esimo adolescente recibe su propio CI}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Se pide $P(A) = P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c) \\ &= 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\ &= 1 - [P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1 \cap B_2) - P(B_2 \cap B_3) - P(B_1 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)] \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} P(B_i) &= \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3 \\ P(B_i \cap B_j) &= P(B_i)P(B_j|B_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad i \neq j \\ P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2 \cap B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Reemplazando todo en $P(A)$ se tiene

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

[**0.6**] Por obtener una expresión valida para $P(A)$
[**0.6**] Por calcular $P(B_i)$
[**0.6**] Por calcular $P(B_i \cap B_j)$
[**0.6**] Por calcular $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$
[**0.6**] Por resultado final

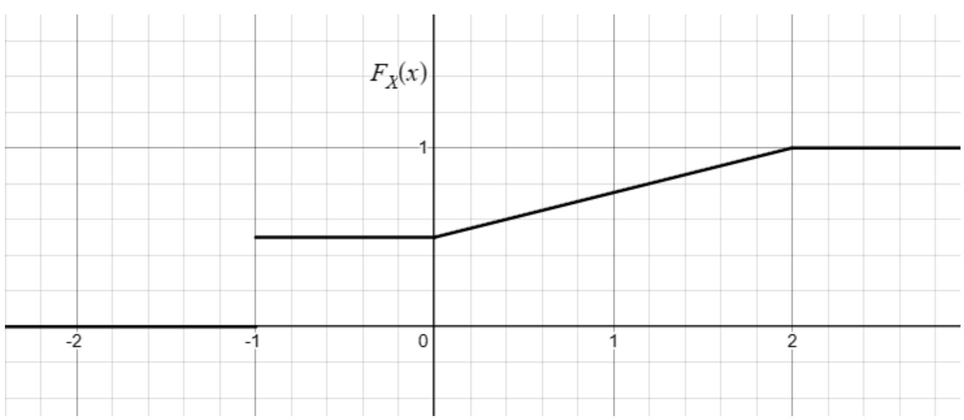
3. (a) [**3**] Se debe corroborar que la imagen inversa exista en $\mathcal{A}$. Para esto basta con notar que

$$X^{-1}(\{-1\}) = \{-1\} \notin \mathcal{A}$$

Luego, se concluye que $X$ no es una variable aleatoria.
[**3**] Por concluir que no es una variable aleatoria.

(b) [**3**]

i. [**1.5**]



[**1.5**] Por el dibujo.

ii. [**1.5**]

- $P(X=-1)=1/2$
- $P(X=0)=0$
- $P(-1<X\leq 0)=F_X(0)-F_X(-1)=\frac{1}{2}+\frac{0}{4}-\frac{1}{2}=0$
- $P(-1\leq X<0)=F_X(0)-F_X(-1)-P(X=0)+P(X=-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- $P(X\geq 0)=1-P(X<0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

[**0.3**] Por cada probabilidad.