Ejercicios 1: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Departamento de Estadística, PUC

Ejercicio 1

Sea $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Determine

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

para cada una de las siguientes secuencias:

(a) Sea $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

(b) Sea $A_n = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Solución:

(a) Para $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$:

- *Unión:*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}.$$
- *Intersección:* Un elemento $k \in \mathbb{N}$ estará en *todos* los conjuntos A_n si y solo si $k \leq n$ para todo $n \geq 1$. Dado que en A_1 solo está el 1, se tiene
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}.$$

(b) Para $A_n = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, n\}$:

- *Unión:* Observe que
$$A_1 = \{2, 3, 4, \ldots\}, \quad A_2 = \{3, 4, 5, \ldots\}, \quad \ldots$$
Dado cualquier $m \geq 2$, existe un n (por ejemplo, $n = m - 1$) tal que $m \in A_n$. En cambio, el 1 nunca pertenece a ningún A_n. Así,
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$
- *Intersección:* Sea $k \in \mathbb{N}$. Fijado k, para $n = k$ se tiene
$$k \notin A_k,$$
pues $A_k = \{k + 1, k + 2, \ldots\}$. Así ningún elemento pertenece a todos los A_n, por lo que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Ejercicio 2

Sean $A_1, A_2 \subset \Omega$ y considere la colección

$$\mathcal{C} = \{A_1, A_2\}.$$

Encuentre una σ-álgebra que contenga a $\mathcal{C}$.

Solución:
La σ-álgebra generada por $\{A_1, A_2\}$ se obtiene hallando los *átomos* asociados. Definamos:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \cap A_2, \\ E_2 &= A_1 \cap A_2^c, \\ E_3 &= A_1^c \cap A_2, \\ E_4 &= A_1^c \cap A_2^c. \end{aligned}$$

Estos conjuntos son mutuamente excluyentes y su unión es Ω. La σ-álgebra generada es la colección de todas las uniones de estos átomos:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \Big\{\emptyset,\, E_1,\, E_2,\, E_3,\, E_4,\, E_1{\cup}E_2,\, E_1{\cup}E_3,\, E_2{\cup}E_3,\, E_1{\cup}E_4,\, E_2{\cup}E_4,\, E_3{\cup}E_4,\, E_1{\cup}E_2{\cup}E_3,\, \Omega\Big\}.$$

(Esta colección, en general, contiene $2^4 = 16$ conjuntos, aunque en algunos casos algunos de ellos pueden coincidir; lo importante es que contiene a A_1 y A_2 y es mínima con esa propiedad).

Ejercicio 3

Sean A y B subconjuntos de Ω tales que $A \subset B$. Considere la colección

$$\dashv = \{\emptyset,\, A,\, B,\, A^c,\, B^c,\, B - A,\, (B - A)^c\}.$$

¿Es $\dashv$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω?

Solución:
Recordamos que para ser una σ-álgebra se debe tener:

(I) $\emptyset \in \dashv$ y $\Omega \in \dashv$.

(II) Si $E \in \dashv$, entonces $E^c \in \dashv$.

(III) $\dashv$ es cerrada bajo uniones numerables.

Observamos que:

- Aunque $\emptyset$ aparece explícitamente, ¿aparece Ω? Notamos que B y B^c están en $\dashv$ y se tiene $B \cup B^c = \Omega$. Sin embargo, a menos que Ω esté listado explícitamente, debemos comprobar si la colección es cerrada bajo la operación unión (la definición de "colección" para ser σ-álgebra exige que *todos* los elementos resultantes de las operaciones internas pertenezcan a la colección).

- Verifiquemos, por ejemplo, la unión $A^c \cup B$. En general, $A^c \cup B$ no coincide con ninguno de los elementos listados en $\dashv$.

De hecho, si tomamos un ejemplo concreto (por ejemplo, $\Omega = \{1,2,3\}$, $A = \{1\}$ y $B = \{1,2\}$), se observa que la colección

$$\dashv = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{2,3\},\ \{3\},\ \{2\},\ (B-A)^c\}$$

no es cerrada bajo la unión (por ejemplo, $\{1\} \cup \{3\} = \{1,3\}$ no pertenece a $\dashv$).
Conclusión: La colección $\dashv$ **no** es una σ-álgebra.

Ejercicio 4

Sean $\dashv_1$ y $\dashv_2$ dos σ-álgebras de subconjuntos de Ω. Demuestre que

$$\dashv_1 \cup \dashv_2$$

no necesariamente es una σ-álgebra. Considere, por ejemplo, el conjunto $\Omega = \{1,2,3\}$ y las σ-álgebras

$$\dashv_1 = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2,3\},\ \Omega\} \quad \text{y} \quad \dashv_2 = \{\emptyset,\ \{1,2\},\ \{3\},\ \Omega\}.$$

Solución:
Se tiene que:

$$\dashv_1 \cup \dashv_2 = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2,3\},\ \{1,2\},\ \{3\},\ \Omega\}.$$

Sin embargo, observe que:

$$\{1\} \cup \{3\} = \{1,3\},$$

y $\{1,3\}$ **no** pertenece a $\dashv_1 \cup \dashv_2$. Por lo tanto, la unión no es cerrada bajo uniones finitas (y mucho menos numerables) y, en consecuencia, $\dashv_1 \cup \dashv_2$ no es una σ-álgebra.

Ejercicio 5

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean A y B en $\dashv$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos A o B?

(b) Sea Q otra medida de probabilidad definida en $(\Omega, \dashv)$. ¿Es

$$R = \alpha P + (1-\alpha)Q, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

una medida de probabilidad?

Solución:

(a) El evento “exactamente uno de A o B ocurre” es el simétrico de la intersección, es decir,

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Dado que $(A \cap B^c)$ y $(A^c \cap B)$ son disjuntos, se tiene:

$$P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B).$$

(b) Sea

$$R(A) = \alpha P(A) + (1-\alpha)Q(A), \quad \forall A \in \dashv.$$

Es fácil verificar:

- $R(A) \geq 0$ para todo A.
- $R(\Omega) = \alpha P(\Omega) + (1-\alpha)Q(\Omega) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1.$
- La aditividad numerable se hereda de P y Q.

Por lo tanto, R es una medida de probabilidad.

Ejercicio 6

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean A y B en $\dashv$ tales que $A \subset B$. Pruebe que

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

(b) Si A y B son eventos independientes, muestre que A y B^c también lo son.

(c) Sean $a_1, \ldots, a_n > 0$ y $A_1, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Para todo $A \in \dashv$ defina

$$Q(A) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)}.$$

¿Es Q una medida de probabilidad?

Solución:

(a) Dado que $A \subset B$, se tiene la partición disjunta:

$$B = A \cup (B - A),$$

con lo cual,

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad \Rightarrow \quad P(B - A) = P(B) - P(A).$$

(b) Si A y B son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Notemos que

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Así A y B^c son independientes.

(c) Para cada $A \in \dashv$, se define

$$Q(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)}.$$

- *No negatividad:* Como $a_i > 0$ y P es no negativa, $Q(A) \geq 0$.
- *Normalización:* Para $A = \Omega$, se tiene:

$$Q(\Omega) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)} = 1.$$

- *Aditividad numerable:* Usando la aditividad de P y la linealidad de la suma, se comprueba que Q es *finita aditiva* (y, dado que la partición es finita, basta para concluir que Q es una medida de probabilidad).

Por lo tanto, Q es una medida de probabilidad.

Ejercicio 7

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad, con P definido por

$$P((-\infty, x]) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/2, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (x+1)/3, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule las siguientes probabilidades:

$$P((-\infty, 1/2]), \quad P((-\infty, 5]) \quad \text{y} \quad P((1/2, 8]).$$

(b) Estudie si la función

$$F_X(x) = P((-\infty, x])$$

definida arriba es una función de distribución.

Solución:

(a)
- Para $x = \frac{1}{2}$: Dado que $x = \frac{1}{2}$ pertenece al intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$, se tiene

$$P((-\infty, 1/2]) = \frac{(1/2) + 1}{3} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}.$$

- Para $x = 5$: Como $5 \geq 1$, se tiene

$$P((-\infty, 5]) = 1.$$

- Para el intervalo $(1/2, 8]$: Usando la propiedad de incrementos,

$$P((1/2, 8]) = P((-\infty, 8]) - P((-\infty, 1/2]).$$

Dado que $8 \geq 1$, $P((-\infty, 8]) = 1$, de donde

$$P((1/2, 8]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Recordemos que una función de distribución debe satisfacer:

(I) Ser creciente y acotada entre 0 y 1.

(II) Ser continua por la derecha.

(III) Satisfacer: $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

En este caso, $F_X(x)$ cumple todas estas propiedades (la función se define por tramos con las correspondientes condiciones). Por lo tanto, es una función de distribución.

Ejercicio 8

Sea $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\dashv = \mathcal{P}(\Omega)$ y sea P definida por

$$P(\{i\}) = (1 - q)q^i, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{donde } 0 < q < 1.$$

¿Es P una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \dashv)$?

Solución: Esta es la ley geométrica (con soporte en $\{0, 1, 2, \dots\}$). Se verifica que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(\{i\}) = (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i = (1 - q) \cdot \frac{1}{1 - q} = 1.$$

Además, cada $P(\{i\}) \geq 0$. Por lo tanto, P es una medida de probabilidad.

Ejercicio 9

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sea $A, B \in \dashv$. Pruebe que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(b) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia decreciente de elementos de $\dashv$. Muestre que

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Solución:

(a) Esta es la fórmula de inclusión–exclusión para dos conjuntos. La demostración se obtiene escribiendo

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

y usando que A y $B \setminus A$ son disjuntos, de donde

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(b) Sea $\{A_n\}$ decreciente (es decir, $A_{n+1} \subset A_n$). Entonces, por continuidad descendente de la medida,

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Esta propiedad es un axioma fundamental en la teoría de la medida.

Ejercicio 10

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad. Si A y B son tales que

$$P(A) = p, \quad P(B) = q, \quad P(A \cup B) = r,$$

muestre que:

(a) $P(A \cap B) = p + q - r$.

(b) $P(A \cap B^c) = r - q$.

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - r$.

(d) $P(A \cup B^c) = p - r + 1$.

Solución:

(a) Usando la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = p + q - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = p + q - r.$$

(b) Se tiene

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = p - (p + q - r) = r - q.$$

(c) Notando que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, se obtiene

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r.$$

(d) Usando la identidad

$$A \cup B^c = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup B^c,$$

o directamente por complementos y álgebra de conjuntos, se puede demostrar que

$$P(A \cup B^c) = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [q - (p + q - r)] = p - r + 1.$$

Ejercicio 11

Para ganar el campeonato, *City* debe vencer a *Town* y a *United*. Se tiene que:

- La probabilidad de que *City* le gane a *Town* es 60 %,
- La probabilidad de que *City* le gane a *United* es 70 %,
- La probabilidad de conseguir al menos una victoria es 80 %.

Determine la probabilidad de que *City* gane el campeonato y describa el espacio muestral $(\Omega, \dashv, P)$ en este caso.

Solución:
Definamos:

$$T = \{\textit{City} \text{ vence a } \textit{Town}\}, \quad U = \{\textit{City} \text{ vence a } \textit{United}\}.$$

Se tiene:

$$P(T) = 0{,}6, \quad P(U) = 0{,}7, \quad P(T \cup U) = 0{,}8.$$

Por el principio de inclusión–exclusión:

$$P(T \cap U) = P(T) + P(U) - P(T \cup U) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}8 = 0{,}5.$$

Como para ganar el campeonato se requiere ganar a ambos equipos, la probabilidad es 50 %. El espacio muestral se puede definir como:

$$\Omega = \{(t, u) : t, u \in \{0, 1\}\},$$

donde "1" indica victoria y "0" derrota, y la medida de probabilidad asigna a cada resultado la probabilidad correspondiente, de modo que

$$P((1,1)) = 0{,}5,\ P((1,0)) = 0{,}6{-}0{,}5 = 0{,}1,\ P((0,1)) = 0{,}7{-}0{,}5 = 0{,}2,\ P((0,0)) = 1{-}0{,}8 = 0{,}2.$$

Ejercicio 12

Se tienen n personas formadas en un círculo, de las cuales dos se llaman *Ana* y *Berta*. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación? Describa $(\Omega, \dashv, P)$.

Solución:
Al fijar la posición de Ana (por simetría, se puede asumir sin pérdida de generalidad) hay $n - 1$ posiciones posibles para ubicar a Berta. Los casos en que estén separadas por r personas se dan en dos posiciones (una en cada dirección) siempre que $r \leq n - 2$. Por lo tanto, la probabilidad es:

$$P = \frac{2}{n-1}.$$

El espacio muestral consiste en las $n - 1$ posiciones posibles para Berta, y se asume que todas son equiprobables.

Ejercicio 13

De entre los números $\{1, 2, \ldots, 50\}$ se escoge uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8?

Solución:
Sea

$$N_6 = \#\{\, x \leq 50 : 6 \mid x \,\}, \quad N_8 = \#\{\, x \leq 50 : 8 \mid x \,\},$$

y $N_{6\cap 8}$ los números divisibles por el m.c.m. de 6 y 8, que es 24.

- $N_6 = \left\lfloor \frac{50}{6} \right\rfloor = 8.$
- $N_8 = \left\lfloor \frac{50}{8} \right\rfloor = 6.$
- $N_{6\cap 8} = \left\lfloor \frac{50}{24} \right\rfloor = 2.$

Aplicando inclusión–exclusión, el número de casos favorables es:

$$8 + 6 - 2 = 12.$$

Así, la probabilidad es:

$$\frac{12}{50} = \frac{6}{25}.$$

Ejercicio 14

De 6 números positivos y 8 negativos se eligen 4 al azar (sin sustitución) y se multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo?

Solución:
El producto es positivo si se elige un número par de números negativos (0, 2 o 4 negativos).

- Total de formas: $\binom{14}{4}$.
- Caso 1: 0 negativos $\Rightarrow$ 4 positivos: $\binom{6}{4}$.
- Caso 2: 2 negativos y 2 positivos: $\binom{8}{2}\binom{6}{2}$.
- Caso 3: 4 negativos: $\binom{8}{4}$.

La probabilidad es:

$$P = \frac{\binom{6}{4} + \binom{8}{2}\binom{6}{2} + \binom{8}{4}}{\binom{14}{4}}.$$

Ejercicio 15

Sea $(\Omega, \dashv, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Demuestre que para dos sucesos cualesquiera A_1 y A_2, se tiene que

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

(b) Demuestre que para n sucesos cualesquiera $A_1, \ldots, A_n$, se tiene que

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Solución:

(a) Partiendo de la fórmula de inclusión–exclusión para dos conjuntos:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2),$$

pues $P(A_1 \cap A_2) \geq 0$.

(b) Se procede por inducción. Para $n = 2$ ya se ha demostrado. Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$. Sea $A_1, \ldots, A_{k+1} \in \dashv$ y observe:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\Big)$$

y aplicando la parte (a):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}).$$

Por la hipótesis de inducción,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Con lo cual:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i).$$

Esto prueba la desigualdad para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclusión

En este documento se han desarrollado 15 ejercicios de modelos probabilísticos que abarcan desde operaciones con conjuntos, propiedades de σ-álgebras y construcciones de medidas de probabilidad, hasta cálculos con distribuciones y conteos elementales. Cada ejercicio se aborda con argumentos teóricos y cálculos detallados.

¡Listo!