Resumen Teórico: Modelo de Probabilidad y Medida de Probabilidad

Reinaldo B. Arellano-Valle
Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

1. Modelo de Probabilidad

Definición 1.1 (Experimento Aleatorio)**.** *Un experimento se dice* aleatorio *si sus resultados no pueden determinarse de antemano. Se conoce el conjunto de todos los posibles resultados, pero no se tiene certeza de cuál ocurrirá al realizar el experimento.*

Definición 1.2 (Espacio Muestral)**.** *El* espacio muestral *es el conjunto Ω de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Cada elemento $\omega \in \Omega$ se denomina* punto muestral *o* suceso elemental*.*

Definición 1.3 (Naturaleza del Espacio Muestral)**.** *Se dice que:*

- Ω *es* discreto *si es finito o infinito contable (numerable).*
- Ω *es* continuo *si es infinito no contable.*

Esta distinción es esencial a la hora de definir la medida de probabilidad.

2. Eventos y σ-Álgebra

En la teoría probabilística, un *evento* es un subconjunto de Ω al cual se le puede asignar una probabilidad (es decir, es *medible*). Para garantizar que la asignación de probabilidad sea coherente, se trabaja sobre una familia de subconjuntos de Ω que cumple ciertas propiedades algebraicas.

Definición 2.1 (σ-Álgebra)**.** *Sea $\Omega \neq \varnothing$. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si:*

A1: $\Omega \in \mathcal{A}$.

A2: *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$ (cerrada bajo complemento).*

A3: *Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad (\textit{cerrada bajo uniones contables}).$$

Los elementos de $\mathcal{A}$ se denominan eventos*.*

Teorema 2.1 (Intersección de σ-álgebras). *Sea $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}$ una familia de σ-álgebras sobre Ω. Entonces,*

$$\bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j$$

es también una σ-álgebra sobre Ω.
Demostración (esquemática):

- ***A1)*** *Dado que $\Omega \in \mathcal{A}_j$ para todo j, se tiene $\Omega \in \bigcap_j \mathcal{A}_j$.*
- ***A2)*** *Si $A \in \bigcap_j \mathcal{A}_j$, entonces $A \in \mathcal{A}_j$ para cada j y, por la propiedad de complemento, $A^c \in \mathcal{A}_j$ para cada j; por lo tanto, $A^c \in \bigcap_j \mathcal{A}_j$.*
- ***A3)*** *Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \bigcap_j \mathcal{A}_j$, entonces para cada j tenemos $A_i \in \mathcal{A}_j$ y, usando la cerradura bajo uniones, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_j$ para todo j; en consecuencia, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_j \mathcal{A}_j$.*

Definición 2.2 (σ-Álgebra Generada). *Sea $\mathcal{A}_0$ una colección de subconjuntos de Ω. Se define la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}_0$ como*

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}\}.$$

Es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}_0$.

Definición 2.3 (σ-Álgebra de Borel). *La σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ-álgebra generada por la clase de intervalos de la forma $(-\infty, a]$, con $a \in \mathbb{R}$.*

Asimismo, para $\mathbb{R}^n$, se define la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_n$ como la generada por todos los rectángulos (o intervalos producto) de la forma

$$(a, b] = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Definición 2.4 (Espacio Medible). *Una pareja $(\Omega, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre Ω, se denomina* espacio medible *(o espacio de sucesos).*

Definición 2.5 (Eventos Mutuamente Excluyentes). *Se dice que dos eventos A y B son* mutuamente excluyentes *o* incompatibles *si*

$$A \cap B = \varnothing.$$

3. Medida de Probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ se denomina *medida de probabilidad* si satisface los siguientes axiomas:

Definición 3.1 (Medida de Probabilidad). *P es una medida de probabilidad si:*

A1: *(**No-negatividad**) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

A2: *(**Normalización**) $P(\Omega) = 1$.*

A3: *(**Aditividad contable**) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ es una familia de eventos dos a dos disjuntos, entonces*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *se denomina* modelo o espacio de probabilidad.

A partir de estos axiomas se derivan las siguientes propiedades básicas:

Teorema 3.1 (Propiedades de la Medida de Probabilidad)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad. Entonces:*

P1: $P(\varnothing) = 0$.

P2: *Si* A *y* B *son eventos tales que* $A \cap B = \varnothing$*, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

P3: *Para cualquier* $A \in \mathcal{A}$*, se tiene que*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

P4: *Si* $A \subseteq B$*, entonces*

$$P(A) \leq P(B) \quad y \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

P5: *Para cualquier* $A, B \in \mathcal{A}$*,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

P6: *(**Continuidad**) Si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *es una secuencia:*

- Creciente *(*$A_n \subseteq A_{n+1}$*):*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

- Decreciente *(*$A_n \supseteq A_{n+1}$*):*

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Demostración (Esquemática):

- ***P1)*** *Como* $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ *y aplicando la aditividad, se concluye que* $P(\varnothing) = 0$.
- ***P2)*** *Se aplica directamente el axioma de aditividad contable en el caso de dos eventos disjuntos.*
- ***P3)*** *Se nota que* $A \cup A^c = \Omega$*, luego* $P(A) + P(A^c) = 1$.
- ***P4)*** *Si* $B = A \cup (B \setminus A)$ *y estos dos son disjuntos, se deduce la propiedad.*
- ***P5)*** *Es consecuencia de aplicar la aditividad en* $A \cup B$ *y restar la doble cuenta de* $A \cap B$.
- ***P6)*** *Se demuestra utilizando particiones de la secuencia (por ejemplo, definiendo diferencias consecutivas) y la propiedad de aditividad.*

Teorema 3.2 (Modelo de Probabilidad Discreto)**.** *Sea Ω un conjunto finito o contable y sean $p_i \geq 0$ tales que*

$$\sum_i p_i = 1.$$

Si se define, para cualquier $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

entonces P es una medida de probabilidad sobre Ω. En el caso especial en que todos los p_i sean iguales (modelo equiprobable), se tiene

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

donde $N(A)$ es el número de elementos de A.

4. Conclusión

En este resumen se han presentado los conceptos básicos del modelo probabilístico: la definición de experimento aleatorio, espacio muestral (discreto y continuo), la teoría de eventos mediante σ-álgebras (incluyendo la σ-álgebra generada y la de Borel) y la definición axiomática de la medida de probabilidad junto con sus propiedades fundamentales. Estos conceptos son la base teórica para el estudio y formalización de fenómenos aleatorios en el marco de la estadística.