



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO
AYUDANTE: YOSEPH BARRERA

Modelos Probabilísticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 8

1. Para los siguientes casos determine la fdp o fmp de la transformación respectiva:

a) $f_X(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(4)-1}, \quad 0 < x < 1, \quad Y = -\ln(X)$

b) $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta), \quad Y = 1/X^a$

c) $X \sim U(0, 1), \quad Y = -\ln(X) + \theta$

d) $X \sim P(\lambda), \quad Y = e^X$

2. Sea $X \sim \text{Beta}(\lambda, 1)$. Calcule $\mathbb{E}([-\ln(X)]^{2k}), k \in \mathbb{N}$, mediante:

- Un cálculo directo.
- Transformación de la v.a X .

3. Sea X una v.a. con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{20}{211}(1+|x|/2)^4, & -1 < x < 1 \\ \frac{405}{844}e^{-405/422(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Determine la densidad de $Z = X^4$.

4. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, determine:

a) a tal que $P(X \leq a) = 0,5$

b) Calcule $P(X > \sigma \mid X > -2)$

c) Muestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > \sigma x + \mu)}{\varphi(x)/x} = 1$$

con $\varphi(x)$ la densidad de una normal estándar.

5. Si X_1, \dots, X_5 son v.a. iid con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Halle la probabilidad de que $Y = \min(X_1, \dots, X_5)$ esté en el intervalo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

6. Sean A , B y C v.a. independientes y cada una uniformemente distribuida sobre $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ tenga raíces reales?