* FDA: $F_X(x) = P(X \leq x)$ (a partir de esto se def los tipos de v.a.)

* Var. aleatoria: $X: \Omega \to \mathbb{R}$; $\omega \to X(\omega)$

- X es Discreta si $F_X(x)$ es fun. Escalera de $x \in \mathbb{R}$ ⇒ fmp Dada por $P_X(x) = P(X = x)$
- X es continua si $F_X(x)$ es fun. Discreta de $x \in \mathbb{R}$ ⇒ fdp Dada por $F_X(x) = f_X(x)$

} • para ambos la v.a estará def en $\mathbb{R}$.
• Dmp
• Cdf (Hype, Func, Ec)

$$P(a \leq X \leq b) = \begin{cases} \sum_{i=a}^{b} P_X(x) & \text{Discreta} \\ \int_a^b f_X(x)\,dx & \text{Continua} \end{cases}$$

* Una función fdp o fmp de $\overset{v.a.}{X}$ debe ser {0} positiva y suma o integra 1 en todo $\mathbb{R}$

* Relación entre $f_X(x)$ y $F_X(x)$

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ y $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$

Props $F_X(x)$:

- $F_X(x) \in [0,1]$
- $F_X(x) \leq F_X(x+1)$ creciente
- $\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$ continua por la derecha
- $F_X(x^-) = P(X < x)$ def

Esperanza

$$E(h(x)) = M_X = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} h(x) P_X(x) & \text{Discretas} \\ \int_{\mathcal{X}} h(x) f_X(x)\,dx & \text{Continua} \end{cases}$$

Props:

- $E(aX) = aE(X)$
- $E(b) = b$
- Si g es convexa ($f''(x) > 0$) ⇒ $E(g(x)) \geq g(E(x))$
- Si g es concava ($f''(x) < 0$) ⇒ $E(g(x)) \leq g(E(x))$

Mediana

la med(x) es un numero que cumple:

- $F_X(\text{med}(x)) = 1/2$ y en el caso discreto $(P(X \geq m), P(X \leq m)) \geq 1/2$

Varianza

$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$

Props:

- $\text{Var}(aX) = a\,\text{Var}(X)$
- $\text{Var}(b) = 0$
- $\text{Var}(g(x)) = E(g(x)^2) - E(g(x))^2$

Momentos

- El n-esimo momento NO centrado de X = $E(X^n)$
- El n-esimo momento centrado de X = $E[(X - \mu_X)^n]$

* Asimetria (γ_X): $E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3$

* Curtosis (K_X): $E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3$

* Desigualdad de Markov: $P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E(|X|^k)}{\lambda^k}$

Funcion generadora de Momentos

$M_X(t) = E(e^{tX})$, * Caracteriza de forma unica a la distribucion

Props:

- $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X^k) \frac{t^k}{k!}$
- $E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\big|_{t=0}\right)$
- $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- $M_{aX+b}(t) = e^{bt} \cdot M_X(at)$
- $M_{\frac{X+b}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}} \cdot M_X(t/b)$

- En caso de que la funcion generadora de momentos ∄, se def la fun caracterist. como: $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$
  - $E(X^n) = \frac{1}{i^n} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(\varphi_X(t)\big|_{t=0}\right)$ prop + importante

- Def de percentil:

si x_p es el valor que toma el percentil $p \times 100\%$, ⇒ $F_X(x_p) = p$

Distribuciones Discretas.

e.o.c = en otro caso

Bernoulli:

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \end{cases}$$

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$
- $M_X(t) = (1-p) + pe^t$
- Notación: $X \sim Bin(n,p)$
- $p \in [0,1]$

- Toma valores 1 (éxito) y 0 (fracaso) con prob de éxito p y fracaso 1-p.

Binomial:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = np = \lambda$
- $Var(X) = np(1-p)$
- $M_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$
- Not.: $X \sim Bin(n,p)$
- Mide nº de éxitos en n ensayos independientes Bernoulli con prob. p
- Cuenta se pide la cant X de éxitos en un exp.

Uniforme discreta:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \overbrace{a}^{x_1}, a+1, \dots, b-1, \overbrace{b}^{x_n} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- $E(X^r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$
- $M_X(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{tx_i}$
- Not.: $X \sim Uni\{a,b\}$

- Corresponde al caso equiprobable, donde cada resultado tiene la misma prob. con $n = b-a+1$.

Binomial neg:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & x = k, k+1, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{k}{p}$
- $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- $M_X \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^k$
- Not.: $X \sim BinNeg(k,p)$

- Cuenta el nº (x) de ensayos Bernoulli necesarios para tener k éxitos

Geométrica:

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1,2,\dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/p$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
- Not.: $X \sim Geo(p)$

- Cuenta el nº de ensayos hasta obtener el 1er ensayo (↳ éxito). (se suele usar en tiempos de falla)

Poisson:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = Var(X) = \lambda$
- $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$
- Not.: $X \sim P(\lambda)$

- mide la probabilidad de ocurrencias

Hipergeométrica:

- N: Tamaño población
- n: Tamaño muestra selecc.
- k: Nº elem. o individ en la muestra con cierta caract.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{N-K}{n-x}\binom{K}{x}}{\binom{N}{n}} & x = 0,1,\dots,\min(n,k) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{nK}{N}$
- $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$
- $f_X(x) \simeq \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, para N grande en computación de k
- Not.: $X \sim Hip(N,K,n)$

- Para N elem, $k \in$ a la categoría A y $N-K \in$ a la cat. B, esta Distrib. mide la prob de obtener X ($0 \le X \le k$) elem de la cat. A en una muestra sin reemplazo de n elem. de la población original

Distribuciones Continuas

Uniforme ($X \sim U(a,b)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- Para efectos de la misma prob. si es $U[a,b]$ o $U(a,b)$

Gamma ($X \sim Gamma(\alpha,\beta)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$
- $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$
- $\alpha, \beta > 0$

Props. fun.: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

- Si $\alpha > 1 \Rightarrow X \sim$ Earlang

Normal ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$
- $Var(X) = \sigma^2 > 0$
- $M_X(t) = e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$

- Se denomina Normal Estandar cuando $\mu = 0$ y σ. En este caso $X \sim N(0,1)$ con $f_X(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}^{-1}$
- La acumulada de la Normal est. es $\phi(x)$,

Props(ϕ): $\phi(0) = 1/2$, $\phi(x)^{-1} = -\phi(1-x)^{-1}$, $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Casos part. de Gamma:

Exponencial ($X \sim Exp(\lambda)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
- $\lambda > 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Chi-cuadrado ($X \sim \chi^2(n)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(n/2)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $E(X) = n$
- $Var(X) = 2n$
- $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$
- $n \in \mathbb{N}$
- n denota los grados de libertad

*Nada Sobra:

La fda tiene las siguientes propiedades:

Considere una v.a discreta y $a, b \in \mathcal{X}$ con $a < b$. Se tiene que

- $F_X(x^-) = P(X < x)$
- $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a^-) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \le X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a)$
- $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

- $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
- $P(X \ge a) = 1 - F_X(a^-)$

Para el caso continuo simplemente se tiene

- $P(a \le x \le b) = P(a < x \le b) = P(a \le x < b) = P(a < x < b)$
- $P(X \le x) = 1 - P(X > x)$
- $P(X \ge x) = 1 - P(X < x)$

Note que las propiedades para las v.a.s discretas también aplican para las mixtas.

Derivados notables

1. $\frac{d}{dx} k = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx}(ax+k) = a$
4. $\frac{d}{dx}(u(x)+v(x)) = u'(x)+v'(x)$
5. $\frac{d}{dx}(k \cdot u(x)) = k \cdot u'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x)) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}$
8. $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$
9. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
10. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$
11. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
12. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a$

*Regla de la cadena.

- $\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$

Integrales Básicas para Memorizar

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,$$
$$\int e^x \, dx = e^x + C,$$
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

* Props:

- $\int_a^b c f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, donde c es una constante
- $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (Barrow)

Sumas potenciales

- $\sum_{x=0}^{n} r^x = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ · si $|r|<1 \Rightarrow r^{n+1} = 0$ · $n \to \infty$
- $\sum_{x=1}^{\infty} x r^x = \frac{r}{(1-r)^2}$
- $\sum_{x=1}^{\infty} x^2 r^x = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$
- $e^z = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x}{x!}$

- $\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{x=1}^{n} x^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

∀Σ

* se pueden sacar las ctts y se pueden separar mediante sumas (mismo esquema)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}$$