Resolución Detallada de Ayudantía 10

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística

Pregunta 1

Enunciado: Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución Exponencial de parámetro λ, es decir, con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando función generadora de momentos (f.g.m.), pruebe que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

Solución

Paso 1: f.g.m. de una Exponencial

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{para } t < \lambda.$$

Paso 2: f.g.m. de una suma de variables iid

$$M_{\sum X_i}(t) = (M_X(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n.$$

Paso 3: Comparación con f.g.m. de Gama

La f.g.m. de $Y \sim \text{Gama}(n, \lambda)$ es:

$$M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n.$$

Conclusión

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, \lambda).$$

Pregunta 2

Enunciado: Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor esperado y la f.g.m. de $Z = \dfrac{X+Y}{2}$.

(b) Encuentre el valor esperado de XY.

Solución (a)

Independencia

La densidad se factoriza: $f(x,y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$, por tanto $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ independientes.

Esperanza de Z

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

f.g.m. de Z

$$M_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] = M_X\left(\frac{t}{2}\right) M_Y\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{2-t}\right)^2.$$

Solución (b)

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 1.$$

Pregunta 3

Enunciado: Sea (X_1, X_2) con función de densidad:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre las funciones de densidad marginales.

(b) ¿Son X_1 y X_2 independientes?

(c) Sea $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ y $Y_2 = X_1X_2$. Encuentre $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$.

Solución (a)

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^1 4x_1x_2\,dx_2 = 2x_1, \quad f_{X_2}(x_2) = \int_0^1 4x_1x_2\,dx_1 = 2x_2.$$

Solución (b)

$$f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \Rightarrow \text{Independientes.}$$

Solución (c)

$$\mathbb{E}[Y_1] = \frac{4}{3}, \quad \mathbb{E}[Y_2] = \frac{4}{9}, \quad \mathbb{E}[Y_1Y_2] = \mathbb{E}[X_1^2] = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{9} = -\frac{5}{54}.$$

Pregunta 4

Enunciado: Sea (X, Y) con:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{24x^2}{y^3}, & 0 < x < 1,\ y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < 1/2 \mid Y > 6)$.

(b) Encuentre las funciones de densidad marginales.

(c) Calcule ρ_{XY}.

Solución (a)

$$P(X < 1/2 \mid Y > 6) = \frac{1/72}{1/9} = \frac{1}{8}.$$

Solución (b)

$$f_X(x) = 3x^2, \quad f_Y(y) = \frac{8}{y^3}.$$

Solución (c)

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{5} \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{3}{80}.$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = \infty \Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \infty \Rightarrow \rho_{XY} \text{ no definida.}$$

Conceptos Clave y Preguntas Relacionadas

[1] ¿Cómo se calcula una función generadora de momentos paso a paso?

Se define como $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$. Se calcula integrando:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Para una Exponencial():

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

[2] ¿Por qué la suma de variables exponenciales sigue una distribución Gamma?

Porque la f.g.m. de la suma de variables independientes es el producto de sus f.g.m., y:

$$M_{\sum X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n,$$

coincide con la f.g.m. de una Gamma(n, λ), por lo tanto, tienen la misma distribución.

[3] ¿Cómo saber si dos variables aleatorias son independientes solo viendo su densidad conjunta?

Si la densidad conjunta puede factorizarse como el producto de funciones de una sola variable:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

entonces X y Y son independientes.

[4] ¿Cómo se transforma una variable aleatoria bidimensional a otra usando Jacobianos?

Dado (X, Y) y una transformación $(U, V) = g(X, Y)$, la nueva densidad se obtiene como:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|,$$

donde J es el determinante del Jacobiano inverso:

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| .$$

[5] ¿Qué implica que la correlación no esté definida?

La correlación ρ_{XY} requiere que las varianzas de X y Y sean finitas. Si alguna es infinita, ρ_{XY} no está definida, aunque puedan estar relacionadas.

[6] ¿Cómo identificar si una función es una densidad válida?

Debe cumplir:

- $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y).
- $\iint f(x, y)\, dxdy = 1$.