Resumen Modelos 7

Akira Alcaide

May 2025

Momentos y Funciones Generadoras

Momentos

- Los momentos son una clase especial de esperanzas de una variable aleatoria.
- **Momentos no centrados:** $E(X^k)$ para k entero positivo.
- **Momentos centrados:** $E((X - \mu_X)^k)$, donde μ_X es la media de X.
- La varianza (σ_X^2) es el segundo momento centrado.

Índices de Asimetría y Curtosis

- **Asimetría (γ_X):** $E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^3$.
- **Curtosis (κ_X):** $E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^4$.

Propiedades de los Momentos

- Desigualdad de Markov: $P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E(|X|^k)}{\lambda^k}$.

Función Generadora de Momentos (FGM)

- La FGM de X, $M_X(t) = E(e^{tX})$, genera los momentos de X.
- El k-ésimo momento de X es la k-ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en $t = 0$.

Teoremas Importantes

- **Teorema 1.1:** Aproximaciones para $E(Y)$ y $Var(Y)$ usando derivadas de funciones.
- **Teorema 1.3:** Relación entre momentos y derivadas de la FGM.

- **Teorema 1.4:** La FGM caracteriza la distribución de una variable aleatoria si existe.
- **Teorema 1.5:** FGM de $aX + b$ es $e^{bt}M_X(at)$.

Aplicaciones y Ejemplos

- **Calcular Momentos y Varianza:**
  - **Momentos no centrados:** Se calculan utilizando la fórmula $E(X^k)$, lo cual implica integrar o sumar x^k multiplicado por la función de densidad de probabilidad (fdp) $f_X(x)$.
  - Para variables aleatorias discretas: $E(X^k) = \sum_{x \in X} x^k f_X(x)$.
  - Para variables aleatorias continuas: $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\, dx$.
  - **Varianza:** Es el segundo momento centrado, calculado como $\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2)$. Se utiliza para medir la dispersión de los valores de X alrededor de su media.
- **Uso de la Función Generadora de Momentos (FGM):**
  - La FGM es una herramienta poderosa para caracterizar distribuciones de probabilidad. Se define como $M_X(t) = E(e^{tX})$.
  - **Generación de Momentos:** La FGM permite obtener los momentos de una variable aleatoria derivando la función respecto a t y evaluando en $t = 0$. Por ejemplo, el primer momento (la media) es $M'_X(0)$, y el segundo momento es $M''_X(0)$.
  - **Caracterización de Distribuciones:** Cada distribución tiene una FGM única (si existe), lo que significa que dos variables aleatorias con la misma FGM tienen la misma distribución. Esto es útil para identificar y trabajar con distribuciones complejas.
  - **Resolución de Problemas Complejos:** La FGM facilita el cálculo de momentos en situaciones donde la integración directa es complicada. Por ejemplo, en distribuciones como la normal, la FGM simplifica el proceso de encontrar momentos de alto orden.
- **Ejemplos Prácticos:**
  - **Distribución Normal:** La FGM de una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0, 1)$ es $M_X(t) = e^{t^2/2}$. Esto se utiliza para demostrar que la media es 0 y la varianza es 1.
  - **Distribuciones Simétricas:** En distribuciones simétricas, como la normal estándar, todos los momentos impares son cero debido a la simetría alrededor de la media.