

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS / DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos

I1

**Profesor:** Reinaldo Arellano.

**Ayudante:** Daniel Gálvez.

**Primer semestre 2024**

**1. Tema 1:**

- a) Sean  $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$  y  $\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , donde  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega \neq \emptyset$  tales que  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ . **Se pide:** ¿Son  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $\Omega$ ? Explique.
- b) Sean  $A$  y  $B$  dos eventos definidos en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tales que  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$  y  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ . **Se pide:** 1) ¿Son  $A$  y  $B$  eventos independientes? 2) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos  $A$  o  $B$ ?

**2. Tema 2:**

- a) Se lanza un dado equilibrado en forma independiente una infinidad de veces. Sea  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  una secuencia de eventos, donde  $A_n = \text{sale un número par en cada uno de los } n \text{ primeros lanzamientos}$ . **Se pide:** 1) Calcule la probabilidad de  $A_n$ ; 2) Pruebe que  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ .
- b) Tres adolescentes quieren entrar a una discoteca para mayores edad. En la entrada, se les pide que presenten sus identificaciones; después de que el portero las revisa y les niega la entrada, devuelve las identificaciones al azar. **Se pide:** Encuentre la probabilidad de que ninguno de los adolescentes reciba su propia identificación.

**3. Tema 3:**

- a) Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible, donde  $\Omega = \{-1, 0, 1\}$  y  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{-1, 1\}, \Omega\}$ . Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la función identidad  $X(\omega) = \omega$ . **Se pide:** ¿Es  $X$  una variable aleatoria? Explique.
- b) Sea  $X$  una variable aleatoria con función distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

**Se pide:** 1) Grafique  $F_X$ ; 2) Calcule  $P(X = -1)$ ,  $P(X = 0)$ ,  $P(-1 < X \leq 0)$ ,  $P(-1 \leq X < 0)$  y  $P(X \geq 0)$ .

*Notas:*

- 1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
- 2) Ud. deberá argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
- 3) La prueba dura 2:15 horas.