Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas / Departamento De Estadística

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
Solución I1

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudantes: Daniel Gálvez y Andrés Díaz

Segundo semestre 2024

1. **Pregunta 1:** Sean A y B dos subconjuntos de un espacio muestral Ω tales que $A \subseteq B$.

   a) Discuta si la siguiente colección es una σ-algebra de subconjuntos de Ω:

   $$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, B, B^c, A^c \cap B, A \cup B^c, \Omega\}.$$

   b) Asumiendo que $P(A) = 0{,}15$ y $P(A^c \cap B) = 0{,}05$. ¿Cuál es la probabilidad asignada al resto de los elementos de $\mathcal{A}$? ¿Son A y B eventos independientes? Discuta.

   a) Veamos si cumple las propiedades de una $\sigma-$algebra.

   - $\Omega \in \mathcal{A}$

     Se cumple, pues corresponde al ultimo elemento de $\mathcal{A}$.

   - $C \in \mathcal{A} \Rightarrow C^c \in \mathcal{A}$

     $$\begin{aligned} C = A \in \mathcal{A} &\Rightarrow C^c = A^c \in \mathcal{A} \\ C = B \in \mathcal{A} &\Rightarrow C^c = B^c \in \mathcal{A} \\ C = A^c \cap B &\Rightarrow C^c = (A^c \cap B)^c = A \cup B^c \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

     Se cumple la propiedad.

   - Si $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

     No es difícil corroborar que la propiedad se cumple, vemos p.e.: $A \cup A^c = B \cup B^c = \Omega \in \mathcal{A}$, $A \cup (A^c \cap B) = B \in \mathcal{A}$, etc

   Luego, $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$algebra de subconjuntos de Ω.

   b) Las probabilidades son

   $$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P(\Omega) &= 1 \\ P(A) &= 0{,}15 \\ P(A^c) &= 1 - P(A) = 0{,}85 \\ P(B) &= P(A) + P(A^c \cap B) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2 \\ P(B^c) &= 1 - P(B) = 0{,}8 \\ P(A^c \cap B) &= 0{,}05 \\ P(A \cup B^c) &= P((A^c \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cap B) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \end{aligned}$$

   Para ver si A, B son independientes se debe corroborar $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces

   $$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) = 0{,}15 \\ P(A)P(B) &= 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03 \end{aligned}$$

Claramente

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Luego, A, B no son independientes. De hecho, la ocurrencia de A garantiza la ocurrencia de B.

Puntaje P1 *a)***: [3]**

- [**0.9**] por verificar cada propiedad
- [**0.3**] por concluir que $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$algebra de subconjuntos de Ω

Puntaje P1 *b)***: [3]**

- [**0.3**] por cada probabilidad $P(\emptyset), P(\Omega), P(A^c), P(B), P(B^c), P(A \cup B^c)$ ([**1.8**] en total).
- [**1.2**] por concluir que A, B no son independientes

2. **Pregunta 2:** Una planta de ensamblado recibe sus reguladores de voltaje de tres diferentes proveedores según la siguiente distribución: 60 % del proveedor B_1, 30 % del proveedor B_2 , y 10 % del proveedor B_3. Del total de reguladores de voltajes que recibe la planta, la distribución de aquellos cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones es: 95 % de B_1, 80 % de B_2, y 65 % de B_3.

   a) Calcule la probabilidad de que un regulador de voltaje (recibido por la planta) tenga un rendimiento conforme a las especificaciones.
   b) Calcule la probabilidad de que un regulador de voltaje específico, cuyo rendimiento corresponde a las especificaciones, provenga del tercer proveedor.

   a) Si definimos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{Regulador de voltaje entregado por el proveedor 1} \\ B_2 &= \text{Regulador de voltaje entregado por el proveedor 2} \\ B_3 &= \text{Regulador de voltaje entregado por el proveedor 3} \\ A &= \text{El rendimiento del regulador corresponde a las especificaciones} \end{aligned}$$

   se tienen entonces por enunciado que

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0{,}6 \\ P(B_2) &= 0{,}3 \\ P(B_3) &= 0{,}1 \\ P(A|B_1) &= 0{,}95 \\ P(A|B_2) &= 0{,}8 \\ P(A|B_3) &= 0{,}65 \end{aligned}$$

   Se pide $P(A)$. Condicionando según el proveedor se tiene

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}65 \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}875 \\ &= 7/8 \\ &= 175/200 \end{aligned}$$

   b) Se pide $P(B_3|A)$. Usando Bayes se tiene

$$\begin{aligned} P(B_3|A) &= \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}65 \cdot 0{,}1}{0{,}875} \\ &= 0{,}07428 \\ &= \frac{13}{175} \end{aligned}$$

Puntaje P2 a)**: [3]**

- [**0.1**] por plantear correctamente cada probabilidad ([**0.6**] en total)
- [**0.6**] por identificar que se pide $P(A)$
- [**1.8**] por calcular correctamente $P(A)$

Puntaje P2 b)**: [3]**

- [**1**] por identificar que se pide $P(B_3|A)$
- [**2**] por calcular correctamente $P(B_3|A)$

3. **Pregunta 3:** Eliga uno y solo uno de los siguientes problemas:

   a) Dada una secuencia de eventos $\{A_n\}_{n\geq 1}$ en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, demuestre las siguientes propiedades:
      · Si $P(A_n) = 0$ para todo n, entonces $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$;
      · Si $P(A_n) = 1$ para algún n, entonces $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

   b) Se lanza un dado equilibrado una infinidad de veces. Sea A_n = sale un número impar en las n primeras tiradas. Pruebe que $P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Interprete dicho resultado.
      Hint: $A_n \supseteq A_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$

   c) Pruebe que la siguiente función es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$X(\omega) = c \ \ \forall\ \omega \in \Omega,$$

   donde c es una constante real.

   a) La primera propiedad es directa de la desigualdad de Boole:

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

   la segunda propiedad se desprende del hecho que $A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow P(A_k) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ para todo $n \geq 1$; entonces como existe n tal que $P(A_n) = 1$, se tiene que

$$P(A_k) = 1 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 1$$

   de donde se desprende el resultado.

   b) Como $A_n \downarrow A \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ y $P(A_n) = 1/2^n$, se tiene que entonces

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   por la continuidad de P. Interpretación queda libre a disposición del estudiante (debe tener sentido en el contexto del ejercicio [**1**]).

   c) Sea B un elemento cualquiera de $B = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Entonces, como $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$ para cada $\omega \in \Omega \Rightarrow X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \Omega \in \mathcal{A}$ si $c \in B$; y $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \emptyset \in \mathcal{A}$ si $c \neq B$. En ambos casos el conjunto $X^{-1}(B)$ es un elemento de $\mathcal{A}$, por lo tanto $X = c$ es variable aleatoria (degenerada en c).

Puntaje P3 a)**: [6]**

- [**3**] por demostrar la primera propiedad
- [**3**] por demostrar la segunda propiedad

Puntaje P3 b**): [6]**

- [**2.5**] por determinar $P(A_n)$
- [**2.5**] por argumentar **correctamente** que $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ debido a que $A_n \supseteq A_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$.
- [**1**] por mencionar alguna interpretación
- Si el estudiante escribe $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ sin argumento valido, solo obtiene [**1**]

Puntaje P3 c**): [6]**

- [**6**] por demostrar lo pedido

Notas:
1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
2) Ud. deberá argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
3) La prueba dura 2:15 horas.