Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Instituto de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Yoseph Barrera

Modelos Probabilisticos
Ayudantías
2025

Ayudantía 10

1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) $\text{Exp}(\lambda)$, es decir, con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando función generadora de momentos (f.g.m.), pruebe que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0,\, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Encuentre el valor esperado y la f.g.m. de $Z = \frac{X+Y}{2}$.
   (b) Encuentre el valor esperado de XY.

3. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con función de densidad dada por:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1,\, 0 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Encuentre las funciones de densidad marginales de X_1 y de X_2.
   (b) ¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes?
   (c) Sea $Y_1 = X_1/X_2$ y $Y_2 = X_1X_2$. Encuentre la covarianza entre Y_1 y Y_2.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24x^2/y^3, & 0 < x < 1,\, y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Calcule $P(X < 1/2 \mid Y > 6)$.
   (b) Encuentre las funciones de densidad marginales de X e Y.
   (c) Calcule $\rho_{XY} = \text{Correlación}(X, Y)$.