Resumen Clase 13-1
Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle
Departamento de Estadística, UC

23 de mayo de 2023

1. Esperanza de funciones de un vector aleatorio

Sea $g(X_1, \ldots, X_n)$ una función real definida sobre el recorrido de un vector aleatorio. Entonces, la esperanza de esta función, si existe, se puede calcular mediante:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \ldots, X_n)] = \begin{cases} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)} g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) & \text{(caso discreto)} \\ \int \cdots \int g(x_1, \ldots, x_n) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \text{(caso continuo)} \end{cases}$$

Aplicación: esperanza de funciones lineales

Para constantes reales $a_1, \ldots, a_n$ y b, se cumple:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + b$$

Ejemplo: media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

2. Ejemplos prácticos

Ejemplo 1.1

Si $X_1 \sim U(0,1)$ y $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ son independientes:

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(X_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(2X_1 + X_2) = 1, \quad \mathbb{E}(2X_1 - X_2 - 1) = 0$$

Ejemplo 1.2

Dada la densidad conjunta:

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & \text{si } 0 < x_i < 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se calcula la esperanza de $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$. Con simetría:

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = \frac{7}{16} \Rightarrow \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{7}{16}$$

3. Función generadora de momentos (fgm)

Definición:

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[e^{\sum t_i X_i}\right]$$

Propiedades importantes

- Si $X_1,\ldots,X_n$ son independientes:

$$M_{\sum a_i X_i + b}(t) = e^{bt} \prod M_{X_i}(a_i t)$$

- Si $X_i \sim \text{Ber}(p) \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Bin}(n,p)$
- Si $X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Gama}(n,\lambda)$

4. Covarianza y correlación

Definición de covarianza:

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Correlación:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Propiedades

- $\text{Cov}(X,X) = \text{Var}(X) \geq 0$
- $\text{Cov}(X,c) = 0$
- Independencia implica covarianza cero
- $|\rho_{XY}| \leq 1$

Ejemplo

Si $X = 3Z+1$ y $Y = -\frac{1}{3}Z - 1$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $\rho_{XY} = -1$

5. Varianza de combinaciones lineales

Si X_i son v.a. con varianza finita:

$$\mathrm{Var}\left(\sum a_i X_i + b\right) = \sum a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si X_i son independientes:

$$\mathrm{Var}\left(\sum a_i X_i + b\right) = \sum a_i^2 \mathrm{Var}(X_i)$$

Media muestral

Si $X_1, \ldots, X_n$ iid con μ, σ^2:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu, \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

6. Ejemplos de independencia y fgm conjuntas

Caso normal

Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X+Y$ y $X-Y$ son independientes $\Rightarrow$ iid $\mathcal{N}(0,2)$

Caso exponencial

Si $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, entonces:

- $X + Y \sim \mathrm{Gama}(2,1)$
- $X - Y \sim$ Doble Exponencial $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$
- No son independientes