Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas / Departamento De Estadística

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
EXAMEN

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Daniel Gálvez.

Primer semestre 2024

1. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim$ Bernoulli(x) y $X \sim$ Uniforme$(0, 1)$.

   a) Calcule $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$; use las propiedades de la esperanza condicional.
   b) Calcule $\mathrm{E}(XY)$ y $\mathrm{Cov}(X, Y)$; use las propiedades de la esperanza condicional.
   c) ¿Qué distribución tiene Y?

   a) Usando esperanza iterada se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}(X) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

   Usando la formula vista en clases, para la varianza se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \mathbb{E}[X(1-X)] + Var(X) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) + Var(X) \\
&= \mathbb{E}(X) - (Var(X) + \mathbb{E}(X)^2) + Var(X) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

   - [**1**] por usar propiedades de esperanza condicional y calcular correctamente $\mathbb{E}(Y)$
   - [**1**] por usar propiedades de varianza condicional y calcular correctamente $Var(Y)$

   b) Usando propiedades se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(XY|X)] \\
&= \mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}[X \cdot X] \\
&= \mathbb{E}(X^2) \\
&= Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{2^2} \\
&= 1/3
\end{aligned}
$$

La covarianza es directa ya que se tiene todo calculado.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 1/3 - 1/2 \cdot 1/2 \\ &= 1/12 \end{aligned}$$

- [**1**] por usar propiedades de esperanza condicional y calcular correctamente $\mathbb{E}(XY)$
- [**1**] por calcular correctamente $Cov(X,Y)$

c) Condicionando en X se tiene

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \int_0^1 f_{Y|X=x}(y) f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 x^y (1-x)^{1-y} \cdot 1 dx \\ &= \int_0^1 x^{(y+1)-1} (1-x)^{(1-y+1)-1} dx \\ &= B(y+1, 2-y) \\ &= \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(2-y)}{\Gamma(y+1+2-y)} \\ P(Y=y) &= \frac{y!(1-y)!}{2!}, \quad y = 0,1 \end{aligned}$$

Reemplazando en los casos $y = 0,1$ se obtiene que

$$P(Y=y) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } y = 0 \\ 1/2, & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

Luego, $Y \sim Bernoulli(1/2)$.

- [**1**] por encontrar una expresión para $P(Y=y)$
- [**1**] por reconocer la distribución de Y

2. Sean X e Y variables aleatorias independientes y tales que $X \sim N(0, \rho^2)$ y $Y \sim N(0, 1-\rho^2)$, donde $-1 < \rho < 1$.

   a) Indique las distribuciones marginales de $X+Y$ y $X-Y$. Argumente bien su respuesta.
   b) Calcule la covarianza entre $X+Y$ y $X-Y$. ¿Son dichas variables independientes? Argumente bien su respuesta.
   c) ¿Son $X+Y$ y $(X-Y)^2$ variables independientes? Argumente bien su respuesta.

   a) Como X, Y son variables aleatorias normales e independientes, la suma también es normal, de modo que se tiene

$$X+Y \sim N(0,1), \quad X-Y \sim N(0,1)$$

Otra manera es usando función generadora de momentos.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t) M_Y(t) \\ &= e^{\frac{t^2\rho^2}{2}} e^{\frac{t^2(1-\rho^2)}{2}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una normal estándar.

$$\begin{aligned} M_{X-Y}(t) &= M_X(t) M_Y(-t) \\ &= e^{\frac{t^2\rho^2}{2}} e^{\frac{(-t)^2(1-\rho^2)}{2}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Esta ultima nuevamente es la fgm de una normal estándar.

- [**1**] por encontrar la distribución de $X + Y$
- [**1**] por encontrar la distribución de $X - Y$

b) Utilizando propiedades de la covarianza se tiene

$$
\begin{aligned}
Cov(X+Y, X-Y) &= Cov(X, X-Y) + Cov(Y, X-Y) \\
&= Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) \\
&= Var(X) - Var(Y) \\
&= \rho^2 - 1 + \rho^2 \\
&= 2\rho^2 - 1
\end{aligned}
$$

Luego, si $\rho = \pm 1/\sqrt{2}$ entonces son independientes, ya que si trabajamos en el caso normal, covarianza 0 implica independencia, en cualquier otro caso $X+Y, X-Y$, no son independientes.

- [**1**] por calcular correctamente la covarianza
- [**1**] por concluir correctamente

c) Considerando el caso anterior, si $\rho = \pm 1/\sqrt{2}$ entonces se tiene que

$$X + Y \perp\!\!\!\perp X - Y$$

de modo que cualquier función de ellas son independientes, es decir,

$$h(X+Y) \perp\!\!\!\perp g(X-Y)$$

pudiendo afirmar así que $X + Y$ es independiente de $(X - Y)^2$. En cualquier otro caso no son independientes y basta con analizar la transformación respectiva.

- [**2**] por entregar un argumento valido

3. Sea $Y = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \text{Uniforme}(0, \theta),\ \theta > 0$.

   a) Calcule $f_Y(y)$.

   b) Calcule $\text{E}(Y^k)$ para $k = 1, 2$.

   c) Calcule $\text{Var}(Y)$.

a) Usando lo visto en clases y ayudantías se tiene

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta} \\
&= \frac{n}{\theta^n}y^{n-1}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$f_Y(y) = \frac{n}{\theta^n}y^{n-1}, \quad 0 < y < \theta$$

- [**2**] por encontrar correctamente $f_Y(y)$

b) Esto es directo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^k) &= \int_0^\theta y^k \frac{n}{\theta^n} y^{n-1} dy \\
&= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+k-1} dy \\
&= \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+k}}{n+k}
\end{aligned}
$$

Reemplazando con $k = 1, 2$ se tiene

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$
$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+2}}{n+2}$$

- [**1**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(Y)$
- [**1**] por calcular correctamente $\mathbb{E}(Y^2)$

c) Usando la definición se varianza se tiene

$$Var(Y) = \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+2}}{n+2} - \left(\frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \right)^2$$

- [**2**] por calcular correctamente $Var(Y)$

Formulas:

1. $Z \sim \text{Uniforme}(a, b),\ (-\infty < a < b < \infty) \Longleftrightarrow f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < z < b, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \text{E}(Z) = (a + b)/2$ y $\text{Var}(Z) = (b - a)^2/12$.
2. $Z \sim \text{Binomial}(n, p),\ (n = 1, 2, \ldots,\ 0 < p < 1; \text{Bernoulli}(p) = \text{Binomial}(1, p))$
   $\Longleftrightarrow \text{P}(Z = z) = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z}, & \text{si } z = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
   $\Longrightarrow \text{E}(Z) = np$ y $\text{Var}(Z) = np(1 - p)$.
3. $Z \sim N(\mu, \sigma^2),\ (\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0) \Longleftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\ z \in \mathbb{R}$
   $\Longleftrightarrow M_Z(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},\ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{E}(Z) = \mu$ y $\text{Var}(Z) = \sigma^2$.

Notas:
1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
2) Ud. deberá argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
3) La prueba dura 2:15 horas.