Control 1

EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Daniel Gálvez.

Primer semestre 2024

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & y \in (x, \infty), x \in (0, \infty) \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

   (a) [**2.5**] Obtenga la marginal de Y, esto es, encontrar $f_Y(y)$
   (b) [**2.5**] Encuentre la fdp de $W = e^{-Y}$ y **reconozca** su distribución
   (c) [**1**] De un breve argumento del por qué X, Y no son independientes

Algunas distribuciones:

- Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$
con $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ entonces
$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$
- Si $X \sim Beta(a, b)$ entonces
$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, \quad 0 < x < 1$$

Algunas propiedades:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Solución

1. El recorrido conjunto corresponde a

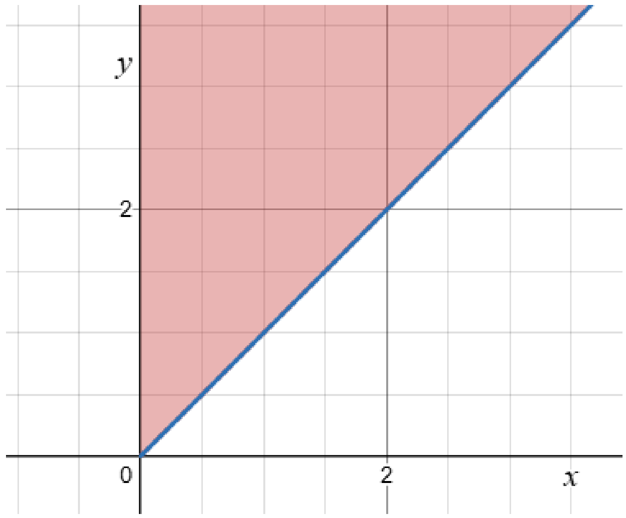

Figure 1: Recorrido conjunto 1

Es decir

$$y > x, \quad x > 0$$

Se pide la marginal de Y, como el recorrido original y va entre funciones y no en un recorrido numérico, hay que dar vuelta el intervalo. Calculamos las inversas de las funciones involucradas

$$y = x$$
$$x = y$$

de modo que el recorrido puede ser expresado como

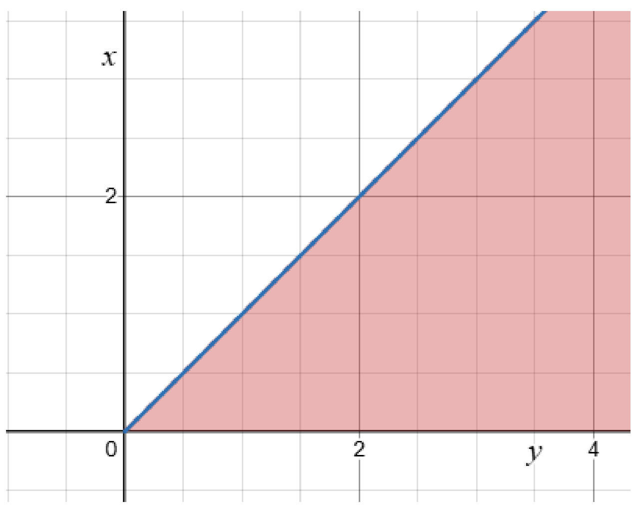

Figure 2: Recorrido conjunto 2

Lo anterior equivale a

$$0 < x < y, \quad y > 0$$

Como ahora y sí está en un intervalo numérico podemos calcular su marginal.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 2e^{-x-y} dx \\ &= 2e^{-y}(1-e^{-y}) \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = 2e^{-y}(1-e^{-y}), \quad y > 0$$

2. Nos interesa la transformación $W = e^{-Y}$. Procederemos de forma intuitiva.

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) \\ &= P(e^{-Y} \leq w) \\ &= P(Y \geq -ln(w)) \\ &= 1 - P(Y < -ln(w)) \\ &= 1 - F_Y(-ln(w)) \\ F_W(w) &= 1 - F_Y(-ln(w)), \quad \frac{d}{dw} \\ f_W(w) &= \frac{1}{w} f_Y(-ln(w)) \\ &= \frac{1}{w} 2e^{-(-ln(w))}(1 - e^{-(-ln(w))}) \\ &= \frac{2}{w} w(1-w) \\ &= 2(1-w) \end{aligned}$$

Ahora el recorrido. Se tiene que $y \in (0, \infty)$. Evaluamos los extremos en la transformación

$$Y = e^{-0} = 1$$

$$Y = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Luego, $w \in (0,1)$. Entonces se tiene que

$$f_W(w) = 2(1-w), \quad 0 < w < 1$$

Ahora, para reconocer la distribución note que

$$\begin{aligned} f_W(w) &= 2(1-w) \\ &= 2w^{1-1}(1-w)^{2-1} \\ &= \frac{w^{1-1}(1-w)^{2-1}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{w^{1-1}(1-w)^{2-1}}{\frac{1}{\Gamma(3)}} \\ &= \frac{w^{1-1}(1-w)^{2-1}}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(3)}} \\ &= \frac{w^{1-1}(1-w)^{2-1}}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(1+2)}} \\ &= \frac{w^{1-1}(1-w)^{2-1}}{B(1,2)} \end{aligned}$$

Luego,

$$W \sim Beta(1,2)$$

Nota:

$$\Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

3. Basta con ver que el producto cartesiano de la conjunta no es igual al de las marginales, además de existir una dependencia en el intervalo conjunto de las variables.