Ejercicios sobre Modelos Probabilísticos

Departamento de Estadística PUC

Ejercicio 1

Sea un trabajador que elabora n artículos y sea A_i el evento "el i-ésimo artículo es defectuoso", para $i = 1, \ldots, n$. Se pide describir los siguientes eventos:

(a) **B = "Al menos un artículo es defectuoso"**:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

(b) **C = "Ninguno de los n artículos es defectuoso"**:

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c.$$

(c) **D = "Exactamente un artículo es defectuoso"**:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j^c \right).$$

(d) **E = "A lo más un artículo es defectuoso"**:

$$E = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j^c \right) \right).$$

Ejercicio 2

En una universidad el 35 % de los estudiantes toma inglés, el 7 % toma alemán y el 2 % toma ambos idiomas.

(a) El porcentaje de estudiantes que toma **inglés pero no alemán** se obtiene restando de los que toman inglés aquellos que toman ambos:

$$35\,\% - 2\,\% = 33\,\%.$$

(b) El porcentaje de estudiantes que **no toma ni inglés ni alemán** corresponde al complemento de la unión de ambos:

$$100\,\% - \Big[35\,\% + 7\,\% - 2\,\%\Big] = 100\,\% - 40\,\% = 60\,\%.$$

Ejercicio 3

Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Se piden 4 σ-álgebras anidadas

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_4.$$

Una posible solución es:

- $\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$.
- $\mathcal{A}_2 = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}$, generada por la partición $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$.
- $\mathcal{A}_3 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$, generada por la partición $\{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}$ (nótese que $\{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}$).
- $\mathcal{A}_4 = \mathcal{P}(\Omega)$, la potencia de Ω.

Ejercicio 4

Sea $\Omega \neq \varnothing$, $B \subset \Omega$ y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre Ω. Definamos la traza de $\mathcal{A}$ sobre B por

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}.$$

Demostración:

- *No vacuidad:* Dado que $\Omega \in \mathcal{A}$, se tiene $B = \Omega \cap B \in \mathcal{A}_B$, y además $\varnothing \in \mathcal{A}$ implica $\varnothing \cap B = \varnothing \in \mathcal{A}_B$.
- *Cerradura ante complementos:* Sea $C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$, con $A \in \mathcal{A}$. Entonces,

  $$(A \cap B)^c \cap B = B \setminus (A \cap B) = B \cap A^c,$$

  y dado que $A^c \in \mathcal{A}$, se tiene $B \cap A^c \in \mathcal{A}_B$.
- *Cerradura ante uniones numerables:* Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ y considere los conjuntos $C_n = A_n \cap B \in \mathcal{A}_B$. Entonces,

  $$\bigcup_{n\geq 1} C_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \cap B,$$

  y como $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\bigcup_{n\geq 1} C_n \in \mathcal{A}_B$.

Con esto se concluye que $\mathcal{A}_B$ es una σ-álgebra sobre B.

Ejercicio 5

Se tienen dos tubos defectuosos mezclados con dos tubos buenos (total de 4 tubos). Se prueban los tubos uno por uno hasta encontrar los defectuosos. Sea el experimento el orden aleatorio de los tubos, y se desea encontrar la probabilidad de que el **último tubo defectuoso** se encuentre en:

(a) *La segunda prueba:* Para que el último defectuoso aparezca en la posición 2, ambos defectuosos deben estar en las dos primeras posiciones. El número de formas es 1 (única forma: defectuosos en posición 1 y 2). Como el total de formas de ubicar 2 defectuosos en 4 posiciones es $\binom{4}{2} = 6$, se tiene:

$$P = \frac{1}{6}.$$

(b) *La tercera prueba:* El último defectuoso está en la posición 3, y el otro debe estar en alguna de las posiciones 1 o 2. Hay $\binom{2}{1} = 2$ formas, luego:

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(c) *La cuarta prueba:* El último defectuoso se halla en la posición 4, y el otro en una de las primeras 3 posiciones. Se tienen $\binom{3}{1} = 3$ formas, por lo que:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(d) *Comentario:* Se observa que la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso aumenta conforme se realizan más pruebas.

Ejercicio 6

Se lanza una moneda hasta obtener cara por primera vez. Sea N la tirada en la que aparece la primera cara. Se pide hallar la probabilidad condicionada de que la primera cara aparezca en la N-ésima tirada, sabiendo que, al menos, ha salido cara una vez en las primeras $M+N$ tiradas.

Definiciones:

$$A = \{\text{primera cara en la tirada } N\} = \{T^{N-1}H\}, \quad P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

$$B = \{\text{al menos una cara en las primeras } M+N \text{ tiradas}\} = \left\{\text{no } (T)^{M+N}\right\},$$

con

$$P(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{M+N}.$$

Por lo tanto, la probabilidad condicionada es:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{M+N}}.$$

Ejercicio 7

Una persona lanza repetidamente dos dados y gana si obtiene una suma igual a 8 antes de obtener un 7. Sea p la probabilidad de ganar.

En un lanzamiento:

$$P(\text{suma } 8) = \frac{5}{36}, \quad P(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Si no sale ni 7 ni 8, se repite el experimento. Utilizando análisis de primer paso:

$$p = P(8) + \Big(1 - P(8) - P(7)\Big)p,$$

es decir,

$$p = \frac{5}{36} + \left(1 - \frac{5}{36} - \frac{6}{36}\right)p = \frac{5}{36} + \frac{25}{36}p.$$

Resolviendo:

$$p - \frac{25}{36}p = \frac{5}{36} \quad \Longrightarrow \quad \frac{11}{36}p = \frac{5}{36} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{5}{11}.$$

Ejercicio 8

Para el diagnóstico de cáncer se ha realizado una prueba con los siguientes datos:

- El 98 % de los pacientes con cáncer reaccionan positivamente: $P(+ \mid C) = 0{,}98$.
- El 4 % de los pacientes sin cáncer reaccionan positivamente: $P(+ \mid C^c) = 0{,}04$.
- La prevalencia del cáncer es del 3 %: $P(C) = 0{,}03$.

Se desea calcular la probabilidad de que un paciente tenga cáncer, dado que reacciona positivamente:

$$P(C \mid +) = \frac{P(+ \mid C)P(C)}{P(+ \mid C)P(C) + P(+ \mid C^c)P(C^c)}.$$

Sustituyendo:

$$P(C \mid +) = \frac{0{,}98 \times 0{,}03}{0{,}98 \times 0{,}03 + 0{,}04 \times 0{,}97} \approx \frac{0{,}0294}{0{,}0294 + 0{,}0388} \approx \frac{0{,}0294}{0{,}0682} \approx 0{,}43.$$

Es decir, aproximadamente un 43 %.

Ejercicio 9

Sean A y B dos sucesos con

$$P(A) = 0{,}4 \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = 0{,}7,$$

y sea $P(B) = p$.

(a) *Mutuamente excluyentes:* Si A y B son disjuntos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \Longrightarrow \quad 0{,}7 = 0{,}4 + p \quad \Longrightarrow \quad p = 0{,}3.$$

(b) *Independientes:* Para que A y B sean independientes se requiere que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}4p.$$

Además, por la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + p - 0{,}4p.$$

Igualando a 0.7:

$$0{,}4 + p - 0{,}4p = 0{,}7 \quad \Longrightarrow \quad p - 0{,}4p = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}6p = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad p = 0{,}5.$$

Ejercicio 10

Sea

$$\Omega = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\}$$

con probabilidad equiprobable y sean los sucesos:

$$A_1 = \{(1,0,0),\ (1,1,1)\}, \quad A_2 = \{(0,1,0),\ (1,1,1)\}, \quad A_3 = \{(0,0,1),\ (1,1,1)\}.$$

Se tiene:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Para la independencia por pares, por ejemplo:

$$A_1 \cap A_2 = \{(1,1,1)\} \quad \Longrightarrow \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Se verifica de igual forma para los otros pares.

Sin embargo, para la independencia mutua se requiere que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Pero

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(1,1,1)\} \quad \Longrightarrow \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto, los eventos son independientes por pares, pero no mutuamente independientes.

Ejercicio 11

En cada realización de un experimento, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0,2, y los ensayos son independientes. Se repite el experimento hasta que ocurra A. La probabilidad de que sea necesaria una cuarta repetición (es decir, que A no ocurra en las primeras tres repeticiones) es:

$$P(\text{4ta repetición necesaria}) = P(A^c)^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512.$$

Ejercicio 12

Sea que:

- Un cuarto de la población está vacunada: $P(V) = 0{,}25$, de modo que $P(V^c) = 0{,}75$.
- Durante la epidemia se observa que de cada 5 enfermos, sólo 1 fue vacunado, es decir, entre los enfermos, la proporción de vacunados es 0,2. Utilizando la fórmula de Bayes:
$$P(V \mid E) = \frac{P(E \mid V)P(V)}{P(E)} = 0{,}2.$$
- Se sabe que de cada 12 vacunadas, sólo 1 está enferma: $P(E \mid V) = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$.

Primero, calculemos $P(E)$:

$$P(E) = P(E \mid V)P(V) + P(E \mid V^c)P(V^c).$$

Además, usando Bayes:

$$P(V \mid E) = \frac{P(E \mid V)P(V)}{P(E)} \quad \Longrightarrow \quad P(E) = \frac{P(E \mid V)P(V)}{P(V \mid E)} = \frac{0{,}0833 \times 0{,}25}{0{,}2} \approx 0{,}1042.$$

Entonces, se tiene:

$$0{,}1042 = 0{,}0833 \times 0{,}25 + P(E \mid V^c) \times 0{,}75.$$

Calculando:

$$0{,}0833 \times 0{,}25 = 0{,}0208 \quad \Longrightarrow \quad P(E \mid V^c) = \frac{0{,}1042 - 0{,}0208}{0{,}75} \approx \frac{0{,}0834}{0{,}75} \approx 0{,}1111.$$

Es decir, la probabilidad de que una persona no vacunada esté enferma es aproximadamente 11.11 %.

Ejercicio 13

Se lanza un dado dos veces. Definamos la variable aleatoria

$$Z = \left| X_1 - X_2 \right|,$$

donde X_1 y X_2 son los resultados de cada lanzamiento.

(a) **Espacio de probabilidad:** Sea

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

la σ-álgebra es el conjunto potencia $\mathcal{P}(\Omega)$ y la probabilidad se define como:

$$P\{(i,j)\} = \frac{1}{36}, \quad \forall (i,j) \in \Omega.$$

(b) **Variable aleatoria:** La función $Z : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ está definida por

$$Z(i, j) = |i - j|,$$

y es medible, por lo que es una variable aleatoria.

(c) **Función de distribución:** Se obtiene la función de masa de probabilidad (fmp) para Z:

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\
P(Z = 1) &= \frac{10}{36}, \\
P(Z = 2) &= \frac{8}{36}, \\
P(Z = 3) &= \frac{6}{36}, \\
P(Z = 4) &= \frac{4}{36}, \\
P(Z = 5) &= \frac{2}{36}.
\end{aligned}$$

La función de distribución acumulada (FDA) se define, para $z \in \mathbb{R}$, por

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \sum_{k \leq z} P(Z = k).$$

Es decir, de forma pieza por pieza:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{10}{36}, & 1 \leq z < 2, \\ \frac{1}{6} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36}, & 2 \leq z < 3, \\ \frac{1}{6} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36}, & 3 \leq z < 4, \\ \frac{1}{6} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36}, & 4 \leq z < 5, \\ 1, & z \geq 5. \end{cases}$$

(d) **Probabilidad de que $Z = 0$:** Se tiene:

$$P(Z = 0) = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 14

Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y sea F_X su función de distribución. Se pruebe que, para $x \in \mathbb{R}$:

(a) $F_X(x^-) = P(X < x)$, donde

$$F_X(x^-) = \lim_{y\to x,\, y<x} F_X(y).$$

Demostración: Por la monotonía y la continuidad por la derecha de F_X, se tiene que

$$P(X < x) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \le x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = F_X(x^-).$$

(b) $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a^-)$. **Demostración:** Se escribe

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-),$$

utilizando lo demostrado en (a).

Ejercicio 15

Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) **¿Es $aX + b$ una variable aleatoria?** Sí. Dado que la función lineal $x \mapsto a\,x + b$ es continua, la composición con X es medible; por lo tanto, $aX + b$ es una variable aleatoria.

(b) **¿Es X^2 una variable aleatoria?** También sí, ya que la función $x \mapsto x^2$ es continua y, al igual que en el apartado anterior, la composición con X preserva la medibilidad.