2 Variables aleatorias

2.1 Definiciones

Informalmente una variable aleatoria corresponde a una función numérica (real valorada) X definida sobre el espacio muestral Ω:

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \tag{20}$$
$$\omega \to X(\omega) \tag{21}$$

Dado esto, las variables aleatorias trabajan con números ($\in \mathbb{R}$), por lo cual cualquier elemento de Ω debe ser representado como tal, por ejemplo si lanzamos una moneda 3 veces tenemos

$$\Omega = \{(s,s,s),(s,s,c),(s,c,s),(c,s,s),(s,c,c),(c,s,c),(c,c,s),(c,c,c)\}$$

y supongamos que nos interesa el numero de caras, entonces acá se tiene

ω	(s, s, s)	(s, s, c)	(s, c, s)	(c, s, s)	(s, c, c)	(c, s, c)	(c, c, s)	(c, c, c)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Note que es importante distinguir que letras mayúsculas X, Y, Z representan variables aleatorias, y letras minúsculas representan valores particulares.

La función de distribución acumulada (fda) (o acumulativa) o fda de una variable aleatoria X, denotada por $F_X(x)$, se define por

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \le x)$$

a partir de esto se puede definir los tipos de variables aleatorias. Una variable aleatoria X es discreta si $F_X(x)$ es una función escalera de x. Una variable aleatoria X es continua si $F_X(x)$ es una función continua de x. Y una v.a mixta es una mezcla de ambos casos.

En resumen existen tres tipos de variables aleatorias:

- Discretas
- Continuas
- Mixtas

Para una variable aleatoria discreta X, la función de masa de probabilidad (fmp) está dada por

$$p_X(x) = P_X(X = x) = P(X = x)$$

Para una variable aleatoria continua X, la función de densidad de probabilidad (fdp) está dada por

$$f_X(x) = f(x)$$

Note que podemos usar la fmp para calcular probabilidades directamente, por ejemplo, la probabilidad de que la v.a tome el valor 1, se calcula como $p_X(1) = P(X = 1)$, pero note que para el caso continuo, estos eventos deben reemplazarse por intervalos. A continuación se presentan dos ejemplos

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{1-x}p & x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Note que a partir de esto, en el caso discreto la gráfica de p_X será con puntitos, y su fda será con escalones, mientras que para el caso continuo, tanto como $f_X(x)$ y $F_X(x)$ son funciones.

El soporte de una v.a se denota generalmente por $\mathcal{X}$, es decir, en donde está definida la v.a. En los casos anteriores se tiene $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, ...\}$ y $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$ respectivamente.

En general si queremos calcular $P(a \leq X \leq b)$, para el caso continuo se deben ocupar integrales, mientras que en el caso discreto se deben ocupar sumas. Lo mencionado se calcula como

$$\text{Discreto: } P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p_X(x)$$

$$\text{Continuo: } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

A continuación se presentan algunas imágenes de los tipos de variables aleatorias.

- Caso continuo

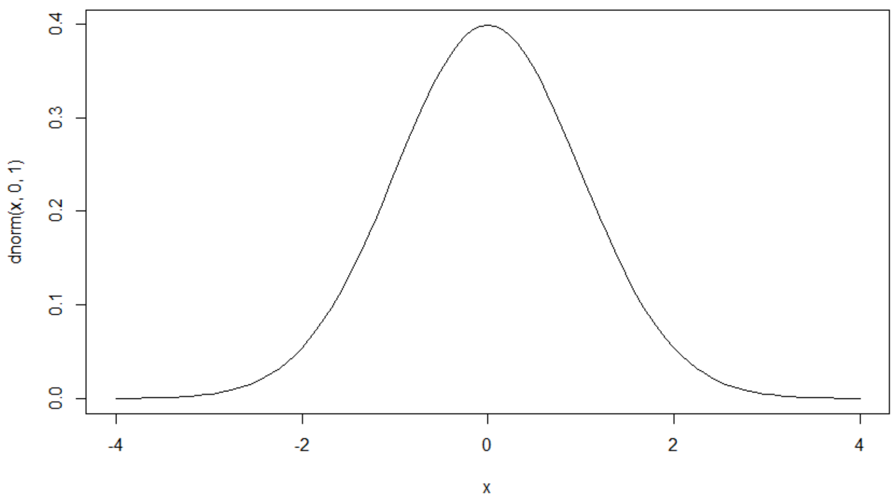

Figure 3: $f_X(x)$

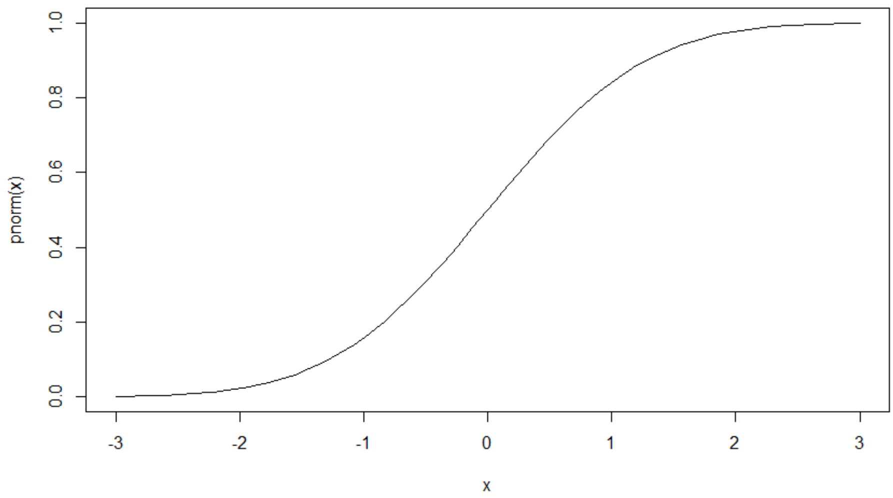

Figure 4: $F_X(x)$

2.2 Propiedades

Sea X una v.a continua con función de densidad $f_X(x)$ y recorrido $\mathcal{X}$.

Una función $f_X(x)$ es una fdp (o fmp) de una variable aleatoria X si y solo si,

- $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$
- Para el caso continuo: $\int_{\mathcal{X}} f_X(x)dx = 1.$

  Para el caso discreto: $\sum_{\mathcal{X}} p_X(x) = 1$

esto nos dice que la función debe ser positiva y debe sumar o integrar 1 en todo su recorrido.

Sea $F_X(x)$ la fda de una v.a X, esta debe cumplir que

- $0 \leq F_X(x) \leq 1,$ positiva y acotada
- $F_X(x) \leq F_X(x+1),$ creciente
- $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x),$ continua por la derecha
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Se tiene la siguiente relación entre $f_X(x)$ y $F_X(x)$:

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
- $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

La fda tiene las siguientes propiedades:

Considere una v.a discreta y $a, b \in \mathcal{X}$ con $a < b$. Se tiene que

- $F_X(x^-) = P(X < x)$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a)$
- $$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) \tag{22}$$
- $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$

Para el caso continuo simplemente se tiene

- $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$
- $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$

Note que las propiedades para las v.a.s discretas también aplican para las mixtas.

La esperanza (o valor esperado o media) de la variable aleatoria X, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} x p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} x f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

Note que si la suma o la integral divergen, o no están definidas, se dice que $\mathbb{E}(X)$ no existe. El operador $\mathbb{E}(\cdot)$ tiene las siguientes propiedades

- $\mathbb{E}(b) = b$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b,$ linealidad
-
$$\mathbb{E}(h(X)) = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} h(x) p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} h(x) f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

En base a la esperanza, surge la desigualdad de Jensen. Sea X una variable aleatoria con esperanza finita, y g una función de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:

- Si g es convexa, entonces $\mathbb{E}\{g(X)\} \geq g(\mathbb{E}(X))$.
- Si g es cóncava, entonces $\mathbb{E}\{g(X)\} \leq g(\mathbb{E}(X))$.

Recuerde que una función $f(x)$ es

$$\begin{cases} \text{Convexa si} & f``(x) > 0 \\ \text{Cóncava si} & f``(x) < 0 \end{cases}$$

La mediana de una variable aleatoria X es algún número $m = med(X)$ tal que

$$F_X(m) = 1/2 \tag{23}$$

En el caso discreto se debe cumplir

$$P(X \leq m) \geq 1/2 \text{ y } P(X \geq m) \geq 1/2 \tag{24}$$

La medida de dispersión mas común es la varianza de una variable aleatoria X, la cual mide la dispersión de X con respecto a su media μ_X. La varianza de X se define como

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)^2 p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

El operador $Var(\cdot)$ tiene las siguientes propiedades

- $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(b) = 0$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X) \geq 0$
- $Var(g(X)) = \mathbb{E}(g(X)^2) - [\mathbb{E}(g(X))]^2$

Los momentos de una distribución o variable aleatoria son una clase especial de esperanzas. Se definen los siguientes momentos

- El $k-$esimo momento no centrado de X, el cual se define como

$$\mathbb{E}(X^n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{X}} x^n p_X(x) & \text{Discreto} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} x^n f_X(x) & \text{Continuo} \end{cases}$$

- El $k-$esimo momento centrado de X, el cual se define como

$$\mathbb{E}[(X-\mu_X)^n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{X}} (x-\mu_X)^n p_X(x) & \text{Discreto} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} (x-\mu_X)^n f_X(x) & \text{Continuo} \end{cases}$$

Una de las propiedades mas importantes que tiene una variable aleatoria, es su función generadora de momentos, ya que sirve para calcular los momentos de una forma mas sencilla, y además es sumamente importante debido a que caracteriza de forma única a la distribución, por lo cual la generadora de momentos es única. Se define como

$$M_X(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{X}} e^{tx} p_X(x) & \text{Discreto} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} e^{tx} f_X(x)dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

A continuación propiedades útiles

- $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^k)\frac{t^k}{k!}$
- $\mathbb{E}(X^n) = \dfrac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$
- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
- $M_{\frac{X+a}{b}} = e^{\frac{at}{b}} M_X(t/b)$

En el caso de que la generadora de momentos no exista, se puede definir la función característica, la cual tiene la particularidad de siempre existir. Se define como

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{X}} e^{itx} p_X(x) & \text{Discreto} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} e^{itx} f_X(x)dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

Donde i es la unidad imaginaria. Además, tiene la siguiente propiedad

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\Big|_{t=0}$$

El percentil es una medida útil. Este se define como

Si x_p es el valor que toma el percentil $p\times$ 100%, entonces $F_X(x_p) = p$.

A modo de ejemplo el cuartil inferior corresponde a $x_{0.25}$. O el caso particular de la mediana es $x_{0.5}$. Este ultimo nos indica que el 50% de los datos es menor a $x_{0.5}$.

3.1 Distribuciones discretas

1. Bernoulli

   Esta distribución toma valores 1 y 0, por lo cual corresponde al éxito o fracaso del experimento respectivamente. Con probabilidad de extio p y fracaso $1-p$.

$$p_X(x) = \begin{cases} p & si \;\; x = 1 \\ 1-p & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

   - $\mathbb{E}(X) = p$
   - $Var(X) = p(1-p)$
   - $p \in [0,1]$
   - Notacion: $X \sim Bern(p)$
   - $M_X(t) = (1-p) + pe^t$

2. Binomial

   Esta distribución mide el numero de éxitos en n ensayos independientes Bernoulli con probabilidad p.

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, ..., n \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   - $\mathbb{E}(X) = np$
   - $Var(X) = np(1-p)$
   - $p \in [0,1]$
   - Notación: $X \sim Bin(n,p)$
   - Generalmente nos van a pedir la cantidad de x éxitos en un experimento
   - $M_X(t) = [(1-p) + pe^t]^n$

3. Uniforme discreta

   Esta distribución corresponde al caso equiprobable, donde cada resultado tiene la misma probabilidad. Con $n = b - a + 1$.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = a, a+1, ..., b-1, b \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   - $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
   - Notación: $X \sim Unif\{a,b\}$

4. Binomial negativa

   Esta distribución cuenta el numero (x) de ensayos Bernoulli necesarios para tener k éxitos.

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} & x = k, k+1, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   - $\mathbb{E}(X) = \dfrac{k}{p}$

- $Var(X) = \dfrac{k(1-p)}{p^2}$
- Notación: $X \sim BinNeg(k, p)$
- $M_X(t) = \left[\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^k$
- Algunos libros la definen de formas diferentes, por lo cual puede variar la forma de la distribución según lo que se este buscando, ya sean éxitos, fracasos, etc. Tener ojo con esto.

5. Geométrica

   Esta distribución cuenta el numero de ensayos hasta obtener el primer éxito.

$$p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
- $Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- Notación: $X \sim Geo(p)$
- $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
- En algunos libros esta definida de forma $p(1-p)^x$, para $x = 0, 1, ...$, en este caso cuenta el numero de fallos hasta el primer éxito.

6. Hipergeométrica

   Suponga que se tiene una población de N elementos de los cuales, K pertenecen a la categoría A y $N-K$ pertenecen a la categoría B. La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener x $(0 \leq x \leq K)$ elementos de la categoría A en una muestra sin reemplazo de n elementos de la población original.

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N-K}{n-x}\binom{K}{x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, 2, ..., min(n, K) \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{nK}{N}$
- N: Tamaño de la la población
- n: Tamaño de la muestra seleccionada
- K: Número de elementos o individuos en la muestra con cierta característica.
- Notación: $X \sim Hip(N, K, n)$

7. Poisson

   Esta distribución mide la probabilidad de ocurrencias.

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$
- $M_X(t) = exp[\lambda(e^{-t} - 1)]$
- Notación: $X \sim P(\lambda)$

3.2 Distribuciones continuas

Contiene algunas que no se pasan en el curso, pero resultan interesantes de conocer.

1. Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $M_X(t) = \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
- $-\infty < a, b < \infty$
- Notación: $X \sim U(a, b)$

Para efectos prácticos da lo mismo si es $U[a, b]$ o $U[a, b)$...

2. Exponencial

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$
- $\lambda > 0$
- Notación: $X \sim Exp(\lambda)$

3. Gamma

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$
- $Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$
- $M_X(t) = \left(\dfrac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$

- $\alpha, \beta > 0$
- Notación: $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

Algunas propiedades de la función Gamma:

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma(n+1) = n!$

4. Beta

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- Notación: $X \sim Beta(\alpha, \beta)$
- $\alpha, \beta > 0$
- $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

5. Normal

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma$
- $M_X(t) = e^{\mu t + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- $\mu \in \mathbb{R}$
- $\sigma^2 > 0$
- Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Se denomina la normal estándar cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. En este caso $X \sim N(0,1)$ con $f_X(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
- La acumulada de la normal estándar corresponde a $\Phi(x)$
- Se tiene la propiedad $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\Phi(x)^{-1} = -\Phi(1-x)^{-1}$

6. LogNormal

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} exp\left\{-\dfrac{(ln(x)-\lambda)^2}{2\zeta^2}\right\} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = e^{\lambda + \frac{\lambda^2}{2}}$
- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\zeta > 0$
- Notación: $X \sim LogNormal(\lambda, \zeta^2)$

7. Weibull

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu x^{\nu-1} e^{-\left(x/\lambda\right)^{\nu}}}{\lambda^{\nu}} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\nu}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \lambda\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$
- $\lambda, \nu > 0$
- Notación: $X \sim Weibull(\lambda, \nu)$

8. Chi-cuadrado

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = n$
- $Var(X) = 2n$
- $n \in \mathbb{N}$
- $M_X(t) = \left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$
- Notación: $X \sim \chi^2(n)$
- n denota los grados de libertad

9. t-Student

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = 0 \quad , \nu > 1$
- $Var(X) = \dfrac{\nu}{\nu - 2} \quad , \nu > 2$
- $n \in \mathbb{R}$
- Notación: $X \sim t_\nu$
- ν denota los grados de libertad
- No tiene MGF

10. Fisher (F)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\nu_1/2, \nu_2/2)} \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \dfrac{x^{(\nu_1-2)/2}}{\left(1 + (\frac{\nu_1}{\nu_2})x\right)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad , \nu_2 > 2$
- $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$
- Notación: $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$
- ν_1, ν_2 denotan los grados de libertad
- No tiene MGF

11. Cauchy

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\gamma} \dfrac{1}{\left[\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2 + 1\right]} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) =$ indefinida
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\gamma > 0$
- Notación: $X \sim Cauchy(x_0, \gamma)$, o también: $X \sim C(x_0, \gamma)$
- No tiene MGF

12. Doble exponencial o de Laplace

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\left|\frac{x-\mu}{\beta}\right|}}{2\beta} & -\infty < x < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{(x-\mu)/\beta}}{2} & x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-(x-\mu)/\beta}}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = 2\beta^2$
- $\mu \in \mathbb{R}$
- $\beta > 0$
- Notación: $X \sim Laplace(\mu, \beta)$
- $M_X(t) = \dfrac{e^{\mu t}}{1 - \beta^2 t^2}$

13. Rayleigh

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-(x^2/2\sigma^2)} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
- $\sigma > 0$
- Notación: $X \sim Rayleigh(\sigma)$

14. Nakagami

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} x^{2m-1} e^{-(x^2 m)/\Omega} & x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\Omega > 0$
- $m > \dfrac{1}{2}$
- Notación: $X \sim Nakagami(m, \Omega)$

15. Logística

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1 + e^{-(x-\mu)/s})^2} & x \in \mathbb{R} \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mu \in \mathbb{R}$
- $s > 0$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = \frac{\pi^2}{3} s^2$
- Notación: $X \sim Logistic(\mu, s)$