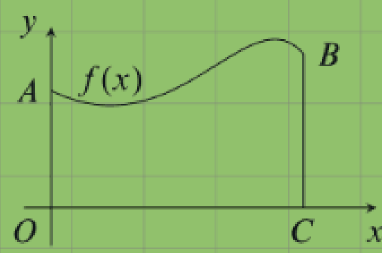
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x>0)$$



大学生数学竞赛教程

蒲和平◎编著
谢云荪◎主审

蒲和平大学生数学竞赛教程

课后习题解析

作者:hoganbin

Email:hoganbin1995@outlook.com

微信公众号:八一考研数学竞赛

更新:May 6, 2019

版本: 3.07

ElegantLaTeX Program

电子工业出版社

目　录

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　函数

✍ 习　题　1.1

1. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leq 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $g(f(x))$.
2. 已知 $f(x)$ 满足等式 $2f(x)+x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$ 的表达式.
3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right]$，求 $f(x)$ 的显式表达式.
4. 设函数 $F(x)$ 是奇函数，$f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a>0, a\neq 1$. 证明：$f(x)$ 是偶函数.
5. 设对一切实数 x，有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明 $f(x)$ 是周期函数.
6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足等式 $f(3-x)=f(3+x), f(8-x)=f(8+x)$，且 $f(0)=0$，试问：方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,2014]$ 上至少有多少个根.
7. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足 $f(x+T)=kf(x)$(其中 T 和 k 是正整数)，证明 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 $a>0, \varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.
8. 若对任意 x, y，有 $f(x)-f(y)\leqslant(x-y)^2$，求证对任意正整数 n，任意 a, b，有
$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2$$

1.2　极限

✍ 习　题　1.2

1. 求下列极限.
   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$
   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$
   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2n}\right)$
2. 求下列极限.
   (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\arctan x}{\mathrm{e}^x+x}$
   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$
3. 求下列极限.
   (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$
   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\mathrm{e}^{2+\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{2-\frac{1}{n}}-2\mathrm{e}^2\right]$
   (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$
4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x^2}}-1}{\arctan x^2}=C\neq 0$，求 a, b，使得 $x\to 0,\quad f(x)\sim ax^b$.
5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x\ln\left[\left(1+\sin x+\cos^2 x\right)/(1-\sin x)\right]$

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$

(3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

7. 设 $F(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$.

8. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(3-x_n\right)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 x_n 的极限存在，并求出极限.

9. $0<a<1, x_1=\dfrac{a}{2}, x_n=\dfrac{a}{2}+\dfrac{x_{n-1}^2}{2}\quad(n=2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 存在，并求此极限.

10. 设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{\tan x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

11. 设 $x_1=\dfrac{1}{1}, x_2=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}, x_3=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

12. 设 $x_{n+1}=x_n\left(2-Ax_n\right), n=0,1,2,\cdots$，其中 $A>0$. 确定初始值 x_0，使得 x_n 收敛.

13. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.

14. 设函数 $f(x)>0$，在 $x=a$ 处可导，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f\left(a-\frac{1}{n}\right)}\right]^n$.

15. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\dfrac{\arctan(x+1)}{\arctan x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

17. 如图弦 PQ 所对的圆心角为 θ，设 $A(\theta)$ 是弦 PQ 与弧 PQ 之间的面积，$B(\theta)$ 是切线长 PR、OR 与弧之间的面积，求极限 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$.

18. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)\left(1-\sin^{\beta}x\right)}}$

19. 试确定常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$ 存在，并求出它的值.

20. 确定 a,b 的值，使当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

21. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $f''(x)$.

22. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 是关于 x 的几阶无穷小?

23. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\sin x}-x-\cos x}{\arcsin^2 x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^4}{12}}{\sin^6 x}\right)$

24. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq 0$，求常数 A,B,C,D.

25. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{n^2}\right)$.

26. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

27. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^n x}{1+x}\mathrm{d}x$.

28. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

29. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}(a>1,k>0)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]$

30. 序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 由下列条件定义：$x_0=a,x_1=b,x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}+(2n-1)x_n}{2n}$，$n\geqslant 1$ 这里 a 与 b 是已知数，试用 a 与 b 表示 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$.

31. 证明压缩映射定理.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，存在 $0<a<1$，使得对任何 x,y 都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha|x-y|$$

证明存在唯一的 x_0 使得 $x_0=f(x_0)$(x_0称为不动点).

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且 $|f'(x)|\leqslant\alpha$，其中常数 $\alpha<1$. 任取 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 有 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并且不依赖于初始值 x_1.

32. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有几条渐近线？

33. 求曲线 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的渐近线.

1.3 连续

✍ 习 题 1.3

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$，问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否连续？若不连续，修改函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的定义使之连续.

2. 求 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x}{x^2+ax+b}, x\neq\dfrac{1}{2}\\ 2,\quad x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 连续.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{2x^3+3x^2-1}, x\neq -1\\ c, \quad x=-1\end{cases}$，试确定 a,b,c 的值使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 连续.
4. 求 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的间断点并指出其类型.
5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+ax^3\right)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？
6. 设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，求证：
   (1) 对任意的自然数 n，方程 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内仅有一根.
   (2) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.
7. 设 $f\in C(-\infty,+\infty)$ 试证：对一切 x 满足 $f(2x)=f(x)\mathrm{e}^x$ 的充分必要条件是 $f(x)=f(0)\mathrm{e}^x$.
8. 设 $f(x)\in C[0,2]$，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，证明：$\exists\xi\in(0,2)$ 使 $f(\xi)=1$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：对实数 $a(0<a<1)$，必有 $\xi\in[0,1)$，使得 $f(a+\xi)=f(a)$.
10. 依次求解下列问题：
    (1) 证明方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 有唯一的实根 $x_n(n=0,1,2,\cdots)$;
    (2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值 A;
    (3) 证明当 $n\to\infty$，x_n-A 与 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.
11. 设 Ω 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上某些连续函数所构成的集合，满足当 $f(x)=Q$，存在常数 k，使得 $f(f(x))=kx^9$. 试确定常数 k 的取值范围.
12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$. 证明：在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一个 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$.

1.4 综合题 1

1. 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.
2. 设对 $\forall x,y$ 为实数，有 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ 且 $f(x)\geqslant 0, f(0)=c$，证明：$f(x)=c$.
3. 试构造一个整系数多项式 ax^2+bx+c，使它在 $(0,1)$ 上有两个相异的根，同时给出 a 是满足所述条件的最小正整数，并证明之.
4. 炮弹击中距地面高度为 h 的正在飞行的飞机. 已知炮弹在地面上发射时有初速度 V，大炮位置及其仰角都是未知的. 试推断大炮位于一圆内，其圆心在飞机的正下方，半径是 $(V/g)\sqrt{V^2-2gh}$(忽略大气阻力).
5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负实数，试证：$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|$ 的充分必要条件为 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\leqslant 1$.
6. 是否存在自然数 n 使得式子 $(2+\sqrt{2})^n$ 的值的小数部分大于 $0.\underbrace{99\cdots9}_{2014\text{个}9}$.
7. 设 $a_1=\sqrt{\dfrac{1}{2}}, a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}(n=2,3,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1a_2\cdots a_n$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\sqrt{x^2+k}$.

9. 设 $a_n = \sum_{k=0}^{n} \ln C_{n+1}^{k}/n^2$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

10. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1+x_n), n = 1,2,\cdots$，证明：$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 且 $x_n \sim \frac{2}{n}(n\to+\infty)$.

11. 给定一个序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 且具有性质 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

12. 设 $a_1 = 1, a_k = k(a_{k-1}+1)(k=2,3,\cdots)$，求极限 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$.

13. 设 $b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $b_n = \frac{n+1}{2n}b_{n-1} + 1(n=2,3,\cdots)$

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$

14. 设 $f_1(x) = x, f_2(x) = x^x, f_3(x) = x^{x^x}, \cdots, f_n(x) = x^{\{x^x\}\text{共有}n\text{个}}$，求极限 $\lim_{x\to0+} f_n(x)$.

15. 设 $x_1 = 2, x_2 = 2+\frac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2+\frac{1}{x_n}, \cdots$，求证：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求极限值.

16. 证明：数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \cdots$ 收敛，并计算其极限值.

17. 一数列由递推公式 $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2(n=1,2,\cdots)$ 所确定. 当 a,b 满足何种关系时，数列 u_n 收敛？它的极限是何值？

18. 序列 x_n 对一切 m 与 n 满足条件 $0 \leqslant x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$. 证明：序列 $\frac{x_n}{n}$ 收敛.

19. 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是非负序列，满足 $x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

20. 设 $a > 0$，求证 $\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{a+s}{n}\right)^n$ 介于 e^a 与 e^{a+1} 之间.

21. 设 $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$，求 $\lim_{n\to\infty} u_n$.

22. 求极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$

23. 设 $0 < x_1 < 1$ 而 $x_{n+1} = x_n(1-x_n), n = 1,2,\cdots$，求证：$\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.

24. 设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，记 $\{x\} = x - [x]$. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}$.

25. 设实函数 $f(x)$ 定义于 $0 < x < 1$，以 $f(x) = o(x)$ 表示当 $x \to 0$ 时 $\frac{f(x)}{x} \to 0$.
试证以下推断：若 $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ 以及 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$，则 $f(x) = o(x)$.

26. 对于实数对 (x,y)，定义数列 a_n，其中 $a_0 = x, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + y^2}{2}(n=0,1,2,\cdots)$. 设区域 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,\text{使得数列}\{a_n\}\text{收敛}\right\}$，求 D 的面积.

27. 设 a_1, b_1 是任意取定的实数，令

$$a_n = \int_0^1 \max(b_{n-1}, x)\,\mathrm{d}x, b_n = \int_0^1 \min(a_{n-1}, x)\,\mathrm{d}x, n = 2,3,4,\cdots$$

证明数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛，并求 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} b_n$.

28. 空气通过盛有 CO_2，吸收剂的圆柱形器皿，已知它吸收 CO_2 的量与 CO_2 的百分浓度及吸收层厚度成正比. 今有 CO_2，含量为 8% 的空气，通过厚度为 10 厘米的吸收层，其 CO_2，含量为 2%. 问：

(1) 若通过的吸收层厚度为 30 厘米，出口处空气中 CO_2，的含量是多少？

(2) 若要使出口处空气中 CO_2，的含量为 1%，其吸收层厚度应为多少？

29. 求证方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1(n = 2, 3, 4, \cdots)$ 在 $(0, 1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.
30. 设有一实值连续函数，对于所有的实数 x 和 y 满足函数方程 $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$ 及 $f(1) = 2$. 证明：$f(x) = 2^x$.
31. 对于每一个 $x > e^x$，归纳定义一个数列，$u_0, u_1, u_2, \cdots$ 如下：$u_0 = e, u_{n+1} = \log_{u_n} x(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 证明：该数列收敛，记 $g(x) = \lim_{n\to\infty} u_n$，并且 $x > e^e$ 时 $g(x)$ 是连续的.
32. 设 $f(x)$ 是连续函数，使得对所有的 x 都有 $f\left(2x^2-1\right) = 2xf(x)$ 成立. 证明：对于 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，恒有 $f(x) = 0$.
33. 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并有数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$，使得 $f\left(x_{n+1}\right) = g\left(x_n\right), n = 1, 2, \cdots$ 证明存在一点 x_0，使得 $f(x_0) = g(x_0)$.
34. 设 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 为连续函数，$f(0) = 0, f(1) = 1, f[f(x)] = x$. 证明：$f(x) = x$.
35. 定义在 R 上的函数 f 满足：f 在 $x = 0$ 连续，且对 $x, y \in \mathrm{R}$ 有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 证明：对 $\forall x \in \mathrm{R}, f(x) = xf(1)$.
36. 函数 $f(x)$ 在半直线 $[0, +\infty)$ 上有定义且一致连续，已知 $\lim_{n\to\infty} f(x + n) = 0 \quad (n$ 为自然数$)$ 对任何 $x \geqslant 0$ 成立. 证明：$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

第 2 章 一元函数微分学

2.1 导数、微分的概念与计算

✍ 习 题 2.1

1. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f(0)$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且对所有 $xy\neq 1$ 的实数 x,y，都有 $f(x)+f(y)+f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求 $f(x)$ 的表达式.
3. 设 $f:I\to \mathrm{R}$ 是任一函数，$x_0\in I$，证明 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数 $\varphi:I\to\mathrm{R}$，使
   (1) $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$，$\forall x\in I$
   (2) φ 在 x_0 处连续，且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.
4. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.
5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性；确定 a、b 的值使 $f(x)$ 可导并求 $f'(x)$.
6. 确定 a,b 的值，使函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax), x<0\\ 0, x=0\\ \dfrac{1}{x}\ln\left(b+x^2\right), x>0\end{cases}$$
   在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导，并求它的导函数.
7. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx\ (a_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,n)$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.
8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=\begin{cases}f\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，求 $F'(x)$.
9. 设 $n\in\mathrm{N}_+$，试讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.
10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=1$. 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.
11. 设函数 $\varphi:(-\infty,x_0]\to\mathrm{R}$ 是二阶可导函数，选择 a,b,c，使 $f(x)$ 在 R 上二阶可导.
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant 0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x=0\end{cases}$$
12. 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

13. 设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=2t+|t| \\ y=t^2+2t|t| \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
14. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程与法线方程.
15. 由方程 $x^y=y^x+\cos\left(x^3\right)$ 确定了隐函数，试确定 $A(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}y=A(x,y)\mathrm{d}x$(其中$x>0,y>0$).
16. 设 $f(x)$ 任意可导，且 $f'(x)=e^{-f(x)}$, $f(0)=1$，求 $f^{(n)}(0)$.
17. 设 $f(x)=\min\{\sin x,\cos x\}(-\infty<x<+\infty)$，求 $f^{(n)}(x)$.
18. 求 n 阶导数 $\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)}$ $(n\geqslant 1)$.
19. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}(0)$.

2.2 微分中值定理与导数的应用

✍ 习 题 2.2

1. 证明当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$，有 $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且满足 $f(1)-2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.
3. 已知 $a<b$，且 $a\cdot b>0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，试证：存在 $\xi\in(a,b)$ 满足 $\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$.
4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 二阶可导，且 $2f(0)=\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$，证明：$\exists\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.
5. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=f(b)=0$，试证：
   (1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.
   (2) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，满足 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.
6. 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$，与点 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f"(\xi)=0$.
7. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.
8. 证明：无穷区间上的罗尔定理.
   (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty]$ 可导，且 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$
   (2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上连续，在 $(-\infty,a)$ 可导，且 $f(a)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(-\infty,a)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
   (3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

10. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f'(x) \neq 0$，证明：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$.

11. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 证明在区间 (a,b) 内至少两点 ξ_1, ξ_2，使

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$$

12. 证明：多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$ 的全部根都是实数，且均分布在 $(-1,1)$ 上.

13. 证明不等式 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2} \quad (a > 1, n \geqslant 1)$.

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，使

$$f'(x_1) = (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = \left(b^2+ab+a^2\right)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0, f(1)=1, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个正数，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1$，证明：存在 n 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$，使得

$$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n}{f'(x_n)} = 1$$

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有 n 阶连续导数，且 $f^{(k)}(x_0) = 0(k=2,3,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，当 $0 < |h| < \delta$ 时，$f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0+\theta h), (0<\theta<1)$. 试证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n\sqrt[n-1]{n}}$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足条件 $|f(x)| \leqslant a$, $\left|f''(x)\right| \leqslant b$，其中 a,b 都是正实数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$\left|f'(c)\right| \leqslant 2a + \dfrac{b}{2}$.

18. 设 $f(x) \in C^3[0,1]$，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$，证明在 $(0,1)$ 内至少一点 $\xi \in (0,1)$ 满足 $\left|f''(\xi)\right| \geqslant 24$.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导.
   (1) 证明当 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$ 时，存在一点 $\xi_1 \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi_1) \leqslant 3$.
   (2) 又设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明存在一点 $\xi_2 \in (-1,1)$，使得 $f'''(\xi_2) = 3$.

20. 试证明：当 $0 < x < a$ 时，多项式 $(a-x)^6 - 3a(a-x)^5 + \dfrac{5}{2}a^2(a-x)^4 - \dfrac{1}{2}a^4(a-x)^2$ 仅取负值.

21. 试比较 π^e 与 e^π 的大小.

22. 比较 $\prod\limits_{n=1}^{25}\left(1-\dfrac{n}{365}\right)$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 的大小.

23. 比较 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 与 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 的大小，这里 $n > 8$.

24. 求函数 $f(x) = \left(1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值.

25. 设 $f(x)$ 满足方程 $3f(x) + 4x^2 f\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{7}{x} = 0$，求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

26. 求由参数方程 $\begin{cases} x = t - \lambda\sin t \\ y = 1 - \lambda\cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的极值，其中 $0 < \lambda < 1$.

27. 若 $0 < a < b$，证明：$(1+a)\ln(1+a) + (1+b)\ln(1+b) < (1+a+b)\ln(1+a+b)$.

28. 设 $x \in (0,1)$，证明：$\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

29. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内确定方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 根的个数.

30. 方程 $xe^x = a(a > 0)$ 有几个实根.

31. 设 $x > 0$ 时，方程 $kx + \dfrac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个实根，求 k 的取值范围.

32. 设曲线 $y = 4 - x^2$ 与 $y = 2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 弧段 AB 上的一点，问 C 点在何处时 $\angle ABC$ 的面积最大？并求此最大面积.

33. 求曲线 $y=x^2\ln(ax)(a>0)$ 的拐点，并求当 a 变动时，拐点的轨迹方程.
34. 设 a,b 是正数，证明：$a^sb^t\leqslant sa+tb$，其中 s,t 是正数，$s+t=1$.
35. 对于 $i=1,2,\cdots,n$，设 $0<x_i<\pi$ 并且取 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明：$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\dfrac{\sin\overline{x}}{\overline{x}}\right)^n$.
36. 过正弦曲线 $y=\sin x$ 上点 $M(\dfrac{\pi}{2},1)$ 处作一抛物线 $y=ax^2+bx+c$，使抛物线与正弦曲线在 M 点具有相同的曲率和凹凸，并写出 M 点处两曲线的公共曲率圆方程.

2.3 综合题 2

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{|x|^{1/n}}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{|x|^{2/n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{|x|^{n/n}}{n+\frac{n}{n}}\right), & x\neq 0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan n\right), & x=0\end{cases}$，求 $f(x)$.
2. 求证极坐标方程 $r=f(\theta)$ 给出的曲线 C 在曲线上点 $M(\theta,f(\theta))$ 处的切线与向径 OM 的夹角 $\varphi=\arctan\dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$.
3. 求证：$\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\tan\dfrac{x}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{x}{2^n}-\cot x$.
4. 某人以 5/3（m/s）的速率，沿直径为 200/3（m）四周有围墙的圆形球场的一条直径前进，在与此直径相垂直的另一直径的一端有一灯，灯光照射人影于围墙上，问此人行进到离中心 20/3（m）时，围墙上人影的移动速率是多少？
5. 设 $y=\cos(\beta\arcsin x)$，求 $y^{(n)}(0)$.
6. 设 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义，并且有二阶导数. 证明：在 $a<x<b$ 内有
$$\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\frac{1}{2}f''(\xi)$$
这里 ξ 是 a 与 b 之间的某数.
7. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三阶导数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\left[f'(a)+f'(b)\right]-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$
8. 证明方程 $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{x^k}{k!}=0$ 有且仅有一个实数根，其中 n 为自然数.
9. 设 $P(x)$ 是一个实系数多项式. 构造多项式 $Q(x)$ 如下：
$$Q(x)=\left(x^2+1\right)P(x)P'(x)+x\left[(P(x))^2+\left(P'(x)\right)^2\right]$$
假定方程 $P(x)=0$ 有 n 个大于 1 的互异实数根. 证明或否定下列结论：方程 $Q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个互异的实数根.
10. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有二阶可导，且 $f(a+1)=0$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 求证在 $(a,+\infty)$ 内至少存在有一点 ξ，满足 $f''(\xi)=0$.
11. 设函数在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|<1$，又 $f^2(0)+\left[f'(0)\right]^2=4$. 试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.
12. 设 s 为正数，证明 $\dfrac{n^{s+1}}{s+1}<1^s+2^s+\cdots+n^s<\dfrac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$.
13. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意取一点 $(x,f(x))(x\neq 0)$ 作曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记作 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(u)}$.
14. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上具有任意阶导数，且在 $x=0$ 处所有导数都不等于零，设 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$, $0<\theta<1$. 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

15. 证明 $\sin 1$ 是无理数.
16. 对于所有整数 $n>1$,证明:$\dfrac{1}{2ne}<\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{1}{ne}$.
17. 设 n 为自然数,试证 $\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
18. 设 $f(x)$ 是二次可微的函数,满足 $f(1)=6, f'(1)=0$,且任意的 $x\geqslant 1$ 有 $x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x)\geqslant 0$. 证明:对 $\forall x\geqslant 1$,都有 $f(x)\geqslant x^5+\dfrac{5}{x}$.
19. 对于一切满足 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant t\leqslant 4$ 的实数 r,s,t,定出 $(r-1)^2+\left(\dfrac{s}{r}-1\right)^2+\left(\dfrac{t}{s}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{t}-1\right)^2$ 的最小值.
20. 方程 $x^3-3x+1=0$ 有几个实数根?求出其绝对值最小的一个近似根. 精确到 0.001.
21. 设 $f(x)$ 是一具有三阶连续导数的实函数,并且对所有的 $x, f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ 为正值. 假设对 $\forall x, f''(x)\leqslant f(x)$. 证明:对一切 x 有 $f'(x)<2f(x)$
22. 研究由微分方程 $f''(x)=\left(x^3+ax\right)f(x)$ 及初始条件 $f(0)=1, f'(0)=0$ 定义的函数 f. 求证:$f(x)$ 的根有上界而无下界.
23. 点 A 到点 B 的距离为 S,若质点 M 从点 A 沿直线由静止状态运动到点 B 停止,费时 $T(s)$,证明:在此运动过程中某一时刻加速度的绝对值大于等于 $\dfrac{4S}{T^2}$.
24. 众所周知,为判别二次三项式 x^2+bx+c 的实根的情况,我们可以引入判别式 $\varDelta=b^2-4c$. 那么,当 $\varDelta>0,\quad \varDelta=0$ 和 $\varDelta<0$ 时,二次三项式 x^2+bx+c 分别具有两个不等实根、两个相等实根、没有实根。对于三次三项式 $p(x)=x^3+bx+c$,请你给出一个利用 b,c 判别 $p(x)$ 实根情况的方法,并且证明你的结论.

第 3 章 一元函数积分学

3.1 不定积分

✍ 习 题 3.1

1. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

2. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

3. 计算积分 $\displaystyle\int \max\left\{x^3, x^2, 1\right\}\mathrm{d}x$

4. 设不定积分 $\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，求 $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

5. 设不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$ 的结果中不含反正切函数，计算该不定积分.

6. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\left(x^5+1\right)^2}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$

7. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(1+x^4\right)\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x$

8. 计算积分 $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\mathrm{d}x$

9. 计算积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

10. 计算积分 $\displaystyle\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

11. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，求 $f(x)$.

12. 设 y 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}$.

3.2 定积分

✍ 习 题 3.2

1. 设 $f''(x)$ 连续，当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f''(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，求 $f''(0)$.
2. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且当 $x>0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=x^3$，求 $f(x)$.
3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0,\quad f'(0)=-2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\ln\cos(x-t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.
4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(a)\neq 0$, $f'(a)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f(a)(x-a)}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}\right]$.
5. 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数)，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.
6. 确定方程 $\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内根的个数.
7. 计算下列积分：
   (1) $\int_{-1/2}^{1/2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\arcsin\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
   (2) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$
   (3) $\int_0^{\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}(0<a<1)$
   (4) $\int_0^{\pi}\dfrac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2014}\mathrm{d}x$
8. 计算下列积分：
   (1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$
   (2) $\int_0^2\dfrac{x}{e^x+e^{2-x}}\mathrm{d}x$
9. 定义 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式中 x^{2014} 的系数. 计算积分

$$\int_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2014}\right)\mathrm{d}y$$

10. 设 $f(x)=\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+(\tan t^2)^{\sqrt{2}}}$，求 $\int_0^{\pi/2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x$.
11. 设 n 为自然数，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\mathrm{d}x$，求 (1) 建立 I_n 关于下标 n 的递推公式;(2) 计算 I_n 的值.
12. 计算积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x\quad$ (n 为整数).
13. 设 $f(x)\in C[0,1]$，记 $I(f)=\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$, $J(f)=\int_0^1 x^2(f(x))^2\mathrm{d}t$. 求函数 $f(x)$ 使 $I(f)-J(f)$ 取得最大值.
14. 设 $|y|<1$，求 $\int_{-1}^1|x-y|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
15. 设 $f(x)=x, x\geqslant 0, g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求 $\varPhi(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$ 的表达式 $(x\geqslant 0)$.
16. 证明：$\int_1^a[x]f'(x)\mathrm{d}x=[a]f(a)-(f(1)+\cdots+f([a]))$，这里 a 大于 1，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，并求出 $\int_1^a\left[x^2\right]f'(x)\mathrm{d}x$ 与上式相当的表达式.
17. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在任意区间 $[\alpha,\beta](a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b)$ 上具有不等式 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$($M,\delta$ 是正的常数)，试证：$f(x)$ 恒等于零.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数的充要条件是：对于任何 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$ 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，总有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$.

19. 证明：$\int_0^x \mathrm{e}^{xt-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t$

20. 证明等式 $\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

21. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶导数连续，证明：$\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$

24. 设 $f(x)=x-[x]$，($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

25. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$.

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x^2\sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x$.

27. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 是以 $T>0$ 为周期的连续函数，且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{x}$.

28. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调减少，$f(0)=1$, $f(1)=0$. 证明 $\forall\delta\in(0,1)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1[f(x)]^n\mathrm{d}x}{\int_0^\delta[f(x)]^n\mathrm{d}x}=0$.

29. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：$\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

30. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=a>0$. 证明：$\exists\xi\in[0,2]$ 使 $|f(\xi)|\geqslant a$.

31. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin\mathrm{e}^t\mathrm{d}x$，试证：$\mathrm{e}^x|f(x)|\leqslant 2$.

32. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. 证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(t)\mathrm{d}x$.

33. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且单调减少，证明：对任给 $\alpha\in(0,1)$，有 $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

34. 设 n 为自然数，$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$. 证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可取得最大值. 且 $\max\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

35. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

36. 证明对任意连续函数 $f(x)$，有 $\max\left\{\int_{-1}^1\left|x-\sin^2x-f(x)\right|\mathrm{d}x,\int_{-1}^1\left|\cos x^2-f(x)\right|\mathrm{d}x\right\}\geqslant 1$.

37. 设在 $[a,b]$ 上 $\left|f'(x)\right|\leqslant M$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，试证：$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2$.

38. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $\left|f'(x)\right|\leqslant M$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

39. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在且可积，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：$|f(x)|\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\,dx (a<x<b)$.

40. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明：$\forall x\in(0,1)$，有 $|f(x)|\leqslant \int_0^1 (|f(t)|+|f'(t)|)\,dt$.

41. 设 $f:[0,1]\to R$ 有连续导数并且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明：对每一个 $b\in(0,1)$，$\left|\int_0^b f(x)dx\right|\leqslant \frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$.

42. 设 $f''(x)>0.x\in[a,b]$，求证：$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)dx\leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

43. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$，证明：$\frac{1}{a}\int_0^a f[g(t)]dt\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt\right]$.

44. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}dx\right)^2\leqslant \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}dx, t>0$.

45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\geqslant 0$, $\int_a^b f(x)dx=1, k$ 为任意实数，试证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx dx\right)^2\leqslant 1$$

46. 求 $\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分.

47. 计算积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

(2) $\int_0^1 \sin(\ln x)dx$

48. 计算积分：

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$

(2) $\int_0^a x^3\cdot\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx, (a>0)$

49. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}dx$.

50. 设 $f(x)=e^{x^2/2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt (x>0)$，试证：$0<f(x)<\frac{1}{x}$.

51. 设 a,b 均为常数，$a>-2, a\neq 0$，求 a,b 为何值时，使 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=\int_0^1 \ln\left(1-x^2\right)dx$.

52. 判别积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}dx (a\neq 0)$ 的收敛性.

53. 讨论下列积分的敛散性

(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{1+x}\right)dx (p\neq 0)$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$

54. 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续正值函数，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$. 证明若 $\lambda>1$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

55. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ 收敛，且 $\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx\right|\leqslant 1$.

56. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续正值函数，且在任意有限区域 $[-a,b]$ 上可积，又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|/k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$（$M$ 为常数）对任意 $k>0$ 成立. 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

57. 设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求 $f'(0)$.

58. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x>1$，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，试证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且极限值小于 $1+\pi/4$.

59. 设 $f(x)=\int_{-1}^x t|t|\mathrm{d}t\,(x\geqslant 1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积.

60. 求常数 a、b、c，使得曲线 $y=ax^2+bx+c$ 满足：(1) 通过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$；(2)$a<0$；(3) 当 $x>0$ 时，与抛物线 $y=-x^2+2x$ 有交点，且与 $y=-x^2+2x$ 所围成的图形面积最小

61. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内 $f(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$ 及 $x=a$ 所围平面图形 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$ 及 $x=b$ 所围平面图形 S_2 的 3 倍.

62. 设 D 是曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的平面图形，直线 $y=kx$ 把 D 分成 D_1,D_2 两块，若 D_1 的面积 S_1 与 D_2 的面积 S_2 之比为 $S_1:S_2=1:7$，求
   (1) 平面图形 D_1 的面积 S_1 与 D_2 的面积 S_2.
   (2) 平面图形 D_1 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

63. 求心脏线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 围成图形绕极轴旋转所成旋转体体积.

64. 设 s 是单位圆周的任意一段整个位于第一象限的弧，A 是弧段 s 与 x 轴之间的曲边梯形的面积，B 是弧段 s 与 y 轴之间的曲边梯形的面积的面积. 证明：$A+B$ 只依赖于弧 s 的长度而不依赖于弧 s 的位置.

65. 已知圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$，其中 $b>a>0$，求此圆绕 y 轴旋转所构成的旋转体体积和表面积.

66. 一容器的外表面是曲线 $y=x^2(0\leqslant y\leqslant H)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，其容积为 $70\pi m^3$，其中盛满了水，如果将水汲出 $64\pi m^3$，问至少需要做多少功？

67. 有一半径为 R 的实心球，其密度 ρ 是离开球心的距离 r 的函数. 如果球对球内任意一点的引力量值是 kr^2（k 为常数），试求出函数 $\rho=\rho(r)$. 并且求出在球外面距球心为 r 远处的一点所受引力的量值.(对于一薄球壳体作如下假设：如果点 P 在壳体里面，则设壳体对 P 的引力值为零；如果点 P 在壳体外面，则设壳体对 P 的引力值为 m/r^2，其中 m 是壳体的质量，r 是 P 到球心的距离)

3.3 综合题 3

1. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.
2. 计算不定积分 $I=\int\dfrac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.
3. 计算定积分 $\int_0^{3\pi}\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|\cos^3 x\mathrm{d}x$.
4. 计算定积分 $\int_0^1\dfrac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x$.
5. 计算积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{q-\cos x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x\,(|q|\neq 1)$.
6. 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$（$n$ 为自然数）的递推公式.
7. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos^2 x+a^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x\,(a>0)$.

8. 设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0, f(0)=f'(0)=0$. 试求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

9. 刘维尔 (Liouville) 曾证明了：如果 $f(x),g(x)$ 为有理函数，$g(x)$ 的阶大于 0，且 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x$ 为初等函数，则 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，其中 $h(x)$ 为有理函数. 试应用刘维尔的这一结果证明 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不是初等函数.

10. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

11. 设 $a(x),b(x),c(x)$ 和 $d(x)$ 都是 x 的多项式. 试证：$\int_1^x a(x)c(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)d(x)\mathrm{d}x-\int_1^x a(x)d(x)\mathrm{d}x\cdot\int_1^x b(x)c(x)\mathrm{d}x$ 可被 $(x-1)^4$ 除尽.

12. 设连续实函数 f 与 g 都是周期为 1 的周期函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right)$$

13. 在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上函数 $K(x,y)$ 是正的且连续的，在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正的且连续的，假设对于所有满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x 有 $\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y=g(x)$ 和 $\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y=f(x)$. 证明：对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有 $f(x)=g(x)$.

14. (1) 设函数 f 在闭区间 $[0,\pi]$ 上连续，且有 $\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$ 求证：在 $(0,x)$ 内存在两点 α,β，使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.(2) 设 D 是欧氏平面上任一有界的凸的开区域 (即 D 是被某一圆域包含的连通开集，D 内任意二点间的线段完全位于其内部). 试应用 (1) 的结论证明：D 的形心 (重心) 至少平分 D 内三条不同的弦.

15. 设 f 在 $[a,b]$ 上不恒为零，且其导数 f' 连续，并有 $f(a)=f(b)$. 试证明：存在点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\left|f'(\xi)\right|>\dfrac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

16. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0, |f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|(-\infty<x,y<+\infty)$，证明：$|f(x)|\leqslant LT/2$.

17. 给定一个 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$，并且 $\int_a^b f_n^2(x)\mathrm{d}x=1$，证明：可以找到自然数 N 及数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$，使 $\sum\limits_{k=1}^{N}c_k^2=1$, $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\sum\limits_{k=1}^{N}c_k f_k(x)\right|>100$.

18. 试证：对于每个正整数 n，有 $\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

19. 计算 $\displaystyle\int_0^\infty\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}-\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x$

20. 证明：反常积分 $\int_1^{+\infty}\sin x\sin x^2 dx$ 收敛.

21. 证明：对于每个整数 $n\geqslant 0$ 都有 $1+(n/1!)+\left(n^2/2!\right)+\cdots+(n^n/n!)>\mathrm{e}^n/2$.

提示：可利用积分余项形式的泰勒公式：$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}+\dfrac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，以及 $n!=\int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}t$.

22. 证明：边界由至多为数目有限的直线段组成，而面积不小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面凸区域中，至少存在一

对相距为 1 的点.

23. 如果 x 轴、曲线 $y=f(x)(f(x)>0)$、直线 $x=0$ 与 $x=a$ 所包围的面积的质量中心的 x 坐标 $\tilde{x}$ 是由 $\tilde{x}=g(a)$ 给定的. 证明 $f(x)=A\dfrac{g'(x)}{(x-g(x))^2}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-g(x)}}$. 这里 A 是正的常数.

24. 有一个立体，两底位于水平面 $z=h/2$ 与 $z=-h/2$ 内，包围它的侧面是曲面。它的每一个水平截面的面积为 $a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$(特殊情形系数可以为零). 证明：它的体积为 $V=(1/6)h\,(B_1+B_2+4M)$. 这里 B_1 与 B_2 是底的面积，M 是正中间的水平截面的面积当 $a_0=0$ 时，这个公式包含锥与球的体积公式.

第 4 章 多元函数微分学

4.1 多元函数的极限与连续

✍ 习 题 4.1

1. 设 $u(x,y)=y^2F(3x+2y)$,其中,求 $u(x,y)$.
2. 已知 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$,若当 $y=1$ 时,$z=x$,求函数 $f(t)$ 和 z.
3. 求下列各极限:

   (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)\sin(xy^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$;

   (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$;

   (3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\sin(xy)$.
4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^n}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 的连续性.
5. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y\\ 0, & x=2y\end{cases}$ 的连续性.
6. 试证:若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 内的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 均有界,则 $f(x,y)$ 在 $U(P)$ 内连续.

4.2 多元函数的偏导数与偏微分

✍ 习 题 4.2

1. 设 $S=\mathbf{R}^2\backslash\{(x,y)|x=0,y\geqslant 0\}$, $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$, $f(x,y)=\begin{cases}y^2,(x,y)\in D\\ 0,(x,y)\in S\backslash D\end{cases}$,试求 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$;并说明 $f(x,y)$ 是否与 x 无关.
2. 证明:$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续,$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在,但在点 $(0,0)$ 不可微.
3. 设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$,其中 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续,试问:

   (1) $g(0,0)$ 为何值时,偏导数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在?

   (2) $g(0,0)$ 为何值时,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.
4. 设 $P(x,y,z)$ 为曲面 S 上一点,n 为 S 在点 P 处的法向量,点 $A(a,b,c)$ 为空间中一定点 (不在 S 上). 试证函数 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ 在点 P 处沿 n 方向的方向导数等于 $\vec{n}$ 与 $\vec{PA}$ 夹角余弦的相反数,即 $\dfrac{\partial r}{\partial n}=-\cos(\vec{n},\vec{PA})$.
5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微,$\vec{l}_1,\vec{l}_2$ 是两个给定的方向,它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$. 试证:$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\leqslant\dfrac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2\right]$
6. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为一定值,且 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边长分别为 a,b,c,试证:$\dfrac{\mathrm{d}a}{\cos A}+\dfrac{\mathrm{d}b}{\cos B}+\dfrac{\mathrm{d}c}{\cos C}=0$.

7. 设 $f(x,y)$ 可微，l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上一组线性无关的向量，试证：若 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l_i} \equiv 0(i=1,2)$，则 $f(x,y) \equiv$ 常数.
8. 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 有连续的偏导数，$\Gamma: x=x(t), y=y(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是 D 中的光滑曲线，Γ 的端点为 A, B. 若 $f(A)=f(B)$，求证：存在点 $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$，使得 $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}=0$，其中 $\vec{l}$ 是 Γ 在 M_0 点的切线的方向向量.
9. 已知 $\left(axy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$ 为某函数 $f(x,y)$ 的全微分，求 a,b 的值
10. 设函数 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=a$, $f_y(0,0)=b$，且 $\varphi(t)=f\left[t, f\left(t,t^2\right)\right]$，求 $\varphi'(0)$.
11. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 与 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
12. 设 $x=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}, y=\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{v^2}, z=\dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}+\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
13. 对于函数 $F(x,y)$，如果存在常数 k，使得对于任何 x,y 及 $t>0$ 恒有 $F(tx,ty)=t^kF(x,y)$ 成立则称 $F(x,y)$ 是 k 次齐次函数。证明：可微函数 $F(x,y)$ 是 k 次齐次函数的充要条件为对任何 x,y 恒有 $xF_1(x,y)+yF_2(x,y)=kF(x,y)$ 成立.
14. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy, \dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
15. 设函数 $u(x,y)$ 二阶连续可微，且 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 与 $u(x,2x)=x, u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$.
16. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\Delta z=z_{xx}+z_{yy}$.
17. 已知 $C^{(2)}$ 函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，试证：经变换 $u=\dfrac{1}{2}(x+y)$, $v=\dfrac{1}{2}(x-y), w=z\mathrm{e}^y$，以 u,v 作自变量，w 作因变量，方程可化为 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$.

4.3 多元函数微分学的应用

✍ 习 题 4.3

1. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$. 试问：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否取得极值，是极大还是极小值？
2. 求函数 $z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 的极值点与极值
3. 设二次函数 $y=\varphi(x)$(其中，x_2 项的系数为 1) 的图形与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 及 $(B,0)$，其中 $B=\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{x}}2e^{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，求使二元函数（$I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1[\varphi(x)-(\alpha x+\beta)]^2\mathrm{d}x$ 取得最小的实数 α,β 的值.
4. 设 $z=f(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。
5. 设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$，证明 z 的最大值只能在 D 的边界上取到.
6. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.
7. 证明：当 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 时，有 $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant e^{x+y-2}$.

8. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $l=i-j$ 的方向导数最大.
9. 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R（万元）与电台广告费用 x_1（万元）及报纸广告费用 x_2（万元）之间的关系有如下经验公式：

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

10. 从已知 $\triangle ABC$ 的内部的点 P 向三条边作三条垂线，求使此三条垂线的乘积为最大的点 P 的位置.
11. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.
12. 设四边形各边长一定，分别为 a,b,c,d. 问何时四边形面积最大？
13. 设 f 为可微函数。证明：曲面 $z=xf\left(\dfrac{y+1}{x}\right)+2$ 上任一点处的切平面都相交于一点。
14. 证明：曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 任意点处的切平面在 Oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数，并求出此常数.
15. 证明旋转曲面 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(f'\neq 0\right)$ 上任一点处的法线与旋转轴相交.
16. 在空间（平面）中，设 P_1,P_2 分别属于点集 T_1,T_2，如果距离 $|P_1P_2|$ 是 T_1,T_2 中任意两点距离中的最小（大）值，则称 P_1,P_2 是点集 T_1,T_2 的最近（远）点. 则下列结论成立：

(1) 在空间（平面）中，如果 Γ 是光滑闭曲线，点 P 是 Γ 上与点 Q 的最近（远）点，则直线 PQ 在点 P 与 Γ 垂直（即 PQ 与 Γ 在点 P 的切线垂直. 如果两点 P 与 Q 重合，则规定 PQ 与任何直线垂直）

(2) 在空间中，如果 Σ 是光滑闭曲面，点 P 是 Σ 上与点 Q 的最近（远）点. 则直线 PQ 在点 P 与 Σ 垂直（即 PQ 与 Σ 在点 P 的切平面垂直. 如果两点 P 与 Q 重合，则规定 PQ 与任何平面垂直）

(3) 在空间（平面）中，点 P_1,P_2 分别是光滑闭曲线 Γ_1,Γ_2 之间的最近（远）点，则直线 P_1P_2 是 Γ_1,Γ_2 的公垂线.

(4) 在空间中，点 P_1,P_2 分别是光滑闭曲面 Σ_1,Σ_2，之间的最近（远）点. 则直线 P_1P_2 是 Σ_1,Σ_2 的公垂线

注: 以上结论统称为最近（远）距离的垂线原理.

17. 设函数 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\chi(x,y,z)$ 与 $\phi(x,y,z)$
18. 设有一表面光滑的橄榄球，它的表面形状是由长半轴为 6，短半轴为 3 的椭圆绕其长轴旋转所得的旋转椭球面. 在无风的细雨天，将该球放在室外草坪上，使长轴在水平位置，求雨水从椭球面上流下的路线方程.

4.4 综合题 4

1. 试求通过三条直线：

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=0 \\ x+y-z=-2 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y-z=0 \end{cases}$$

的圆柱面方程.

2. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内分别对每一个变量 x 和 y 是连续的，而且对其中一个是单

调的，则 $f(x,y)$ 是 D 内的二元连续函数.

3. 设 $F(u,v)$ 可微，$y=y(x)$ 是由方程

$$F\left(x\mathrm{e}^{x+y}, f(xy)\right)=x^2+y^2$$

所确定的隐函数，其中 $f(x)$ 满足 $\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\mathrm{d}t$, $f(1)=1$ 的连续函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 设有方程 $\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$，试证：$\|\operatorname{grad} u\|^2=2r\cdot\operatorname{grad} u$，其中 $r=(x,y,z)$.

5. 取 x 作为 y 和 z 的函数，解方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

6. 记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, 2x+y\leqslant 4$ 上的最低点 P 处的切平面为 π，曲线 $x^2+y^2+z^2=6$ $x+y+z=0$ 在点 $Q(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到直线 l 在平面 π 上的投影 l' 的距离 d.

7. 设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$，求 $w=(ax+by+cz)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 在整个空间上的最大值与最小值.

8. 设 $a>b>1$，求证：$a^{b^a}>b^{a^b}$

9. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $Ax+By+Cz=0$ 相交所得椭圆的面积.

10. 在平面上有一 $\triangle ABC$，三边长分别为 $BC=a, CA=b, AB=c$，以此三角形为底，h 为高，可做无数个三棱锥，试求其中表面积为最小者.

11. 设 $f(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上有连续偏导数，$\Gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t)(\alpha<t<\beta)$ 是 Ω 中的一条光滑曲线. 若 P_0 是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的极值点，求证：
    (1) $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \tau}=0$，其中 τ 是 Γ 在 P_0 点的单位切向量.
    (2) Γ 在 P_0 点的切线位于等值面 $f(x,y,z)=f(P_0)$ 在 P_0 点的切平面上.

12. 过椭球面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 外一定点 (α,β,γ) 作其切平面，再过原点作切平面的垂线，求垂足的轨迹方程.

13. 设 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 分别位于曲线 $L_1: f(x,y)=0, L_2: g(x,y)=0, L_3: g(x,y)=0$ 上，试证：若 $\triangle ABC$ 的面积达到最大值，则曲线在 A,B,C 处的法线都与三角形的对边垂直.

14. 在 A,B 两种物质的溶液中，我们想提取出物质 A，可采取这样的方法：在 A,B 的溶液中加入第三种物质 C，而 C 与 B 不互溶，利用 A 在 C 中的溶解度较大的特点，将 A 提取出来. 这种方法就是化工中的萃取过程.
    现有稀水溶液的醋酸，利用苯作为溶剂，设苯的总体积为 m，进行 3 次萃取来回收醋酸。若萃取时苯中的醋酸重量浓度与水溶液中醋酸重量浓度成正比. 问每次应取多少苯量，方使水溶液中取出的醋酸最多？

第 5 章 多元数量值函数积分学

5.1 二重积分

✍ 习 题 5.1

1. 设 D 为中心在原点，半径为 r 的圆域，求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 求 $\iint_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，其中 $[\cdot]$ 为取整函数.
3. 计算 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.
4. 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1|\}$.
5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.
6. 计算积分 $\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x+2y\right\}$.
7. 计算 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y(a>0)$
8. 计算 $\iint_D|\sin(x-y)|\mathrm{d}\sigma,D:0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$
9. 计算积分 $\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)|y^2\leqslant x+2,x^2\leqslant y+2\right\}$.
10. 已知 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
11. 设 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴围成的区域，求 $\iint_D\dfrac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$.
12. 计算二重积分 $\iint_D\dfrac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)|0<\dfrac{\pi y}{2}\leqslant x^2\leqslant\pi y,\quad 0<x\leqslant y^2\leqslant 2x\right\}$.
13. 设有一半径为 R，高维 H 的圆柱形容器，盛有高 $\dfrac{2}{3}H$ 的水，放在离心机上高速旋转，因受离心力的作用，水面呈抛物面形，问当水刚要溢出容器时，液面的最低点在何处？
14. 求曲面 $(z+1)^2=(x-z-1)^2+y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成立体的体积.
15. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$. 求 $f(t)$.
16. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
17. 设 $D:0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$
    (1) 求 $B=\iint_D|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    (2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，试证：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\dfrac{1}{B}$

18. 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且正值递减，试证：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

19. 证明：$\dfrac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)<\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2<\dfrac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)$

20. 证明 $1\leqslant\iint_D\left(\cos x^2+\sin y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$.

21. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且满足 $\forall x,y\geqslant 0$，有 $f(x)f(y)\leqslant xf\left(\dfrac{y}{2}\right)+yf\left(\dfrac{x}{2}\right)$，试证：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant 2x^2$

5.2 三重积分

✍ 习 题 5.2

1. 求由下列曲面所围的体积 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$
2. 计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y$
3. 设 f(x)在闭区间 [0,1] 上连续，且 ff(x)dx=m. 试求
4. 设三元函数 $f(x,y,z)$ 连续，且 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{\frac{1}{4}}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$. 在积分区域 Ω 的边界曲面 S 上求一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，使 S 在点 P 处的切平面 π 经过点 $Q_1(1,-1,-1)$ 和 $Q_2(3,0,2)$.
5. 设有一半径为 R 的球形物体，其内任意一点 P 处的体密度 $\rho=\dfrac{1}{|PP_0|}$，其中 P_0 为一定点，且 P_0 到球心的距离 r_0 大于 R，求该物体的质量.
6. 求曲线 AB 的方程，使图形 $QABC$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的重心的横坐标等于 B 点的横坐标的 $\dfrac{4}{5}$
7. 求密度为常数 μ 的球体 (半径为 R)，对于它的某条切线的转动惯量.
8. 在某平地上向下挖一个坑，坑分为上下两部分，上半部分是底面半图 5.21 径与高度均为 a 圆柱形，下半部分是半径为 a 的半球. 若某点泥土的密度为 $\mu=\rho^2/a^2$，其中 ρ 为此点离坑中心轴的距离，求挖此坑需做的功.
9. 一均匀圆锥体高为 h，半顶角为 α. 求圆锥体对位于其顶点处且质量为 m 的质点的引力.
10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，记

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma},G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f\left(x^2\right)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\right\},D(t)=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$

(1) 讨论 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

(2) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

5.3 第一型曲线与曲面积分

✍ 习 题 5.3

1. 计算 $\oint_L\left(2x^2+3y^2\right)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x^2+y^2=2(x+y)$.
2. 计算 $\oint_L\left(x^3+z\right)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=x$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线.

3. 求八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲线的质心. 设曲线的密度为 1.
4. 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在平面 $z=0$ 与马鞍面 $z=xy$ 之间部分的面积
5. 计算 $I=\oint_{\Gamma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s$. 其中 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$
6. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b\leqslant a)$ 内那部分的面积
7. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2+y^2=1}(ax+by+cz)^2\,\mathrm{d}S$.
8. 求 $F(t)=\displaystyle\iint\limits_{x+y+z=t}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1\end{cases}$
9. 已知球 A 的半径为 R，另一半径为 r 的球 B 的中心在球 A 的表面上 $(r<2R)$.
   (1) 求球 B 被夹在球 A 内部的表面积；
   (2) 问 r 值为多少时这表面积为最大？并求最大表面积的值.
10. 在半径为 R 的圆柱体上，镗上一个半径为 $r(r\leqslant R)$ 的圆柱形的孔，两轴成直角.
    (1) 证明：小圆柱套上大圆柱的表面的面积为 $S=8r^2\displaystyle\int_0^1\frac{1-v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}\mathrm{d}v$，这里 $m=r/R$.
    (2) 如果 $K=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}$, $E=\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-m^2v^2}{1-v^2}}\mathrm{d}v$. 证明：$S=8\left[R^2E-\left(R^2-r^2\right)K\right]$
11. 设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面元的距离，求 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.
12. 求高度为 $2h$，半径为 R，质量均匀的正圆柱面对柱面中央横截面一条直径的转动惯量
13. 设球面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$ 的密度等于点到 xOy 平面的距离，求球面被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下部分曲面的重心.

5.4 综合题 5

1. 计算积分 $\displaystyle\iint_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.
2. 计算积分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|x^2\leqslant y\leqslant 4\}$，$[\cdot]$ 为取整函数.
3. $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分
   $$I=\iint\limits_{x^2+y^y\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
4. 设二元函数 $f(x,t)=\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}$，计算二次极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)$
5. 设 $f(x)\in C[a,b]$，而在 $[a,b]$ 之外等于 0，记 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t(h>0)$，试证：$\displaystyle\int_a^b|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$
6. 设 $p(x), f(x), g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $p(x)$ 非负，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的单调性.
   证明：$\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

7. 设 $F(x)=\dfrac{x^4}{e^{x^3}}\displaystyle\int_0^x\int_0^{x-u}e^{u^3+v^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ 或者证明它不存在

8. 设 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，证明不等式是 $\dfrac{61}{165}\pi\leqslant\displaystyle\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\dfrac{2}{5}\pi$.

9. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\phi(x)$ 上可微，其中 $\varphi(x),\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x,\varphi(x))=0$，证明：$\exists K>0$，使得 $\displaystyle\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

10. 令 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的一个实值连续函数. 证明：

$$\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$$

11. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 连续，对任意 $(a,b)\in D$，设 $D(a,b)$ 是以 (a,b)（为中心含于 D 内且各边与 D 的边平行的最大正方形，若总有 $\displaystyle\iint_{D(a,b)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，证明在 D 上 $f(x,y)\equiv 0$.

12. 计算积分 $\displaystyle\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+z^2=x\\ y=\sqrt{x^2+z^2}\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面所围成的区域

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，$f(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=c>0$. 记

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}V,G(t)=\iint\limits_{x^2+y^2}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

试求函数 $h(x)$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{F(t)}{h(t)G(t)}=1$.

14. 设椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1(a>b>c>0)$ 的密度为 1，求它对过原点的任一直线 $L:\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ 的转动惯量（其中 $l^2+m^2+n^2=1$），并求此转动惯量的最大、最小值.

15. 求曲线 $L_1:y=\dfrac{1}{3}x^3+2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2:y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成旋转曲面的面积.

16. 设曲线 $C:y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$，证明：$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\displaystyle\int_C x\mathrm{d}s\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

17. 设曲面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$，计算 $\displaystyle\oiint\limits_\Sigma(x+y+1)^2\mathrm{d}S$.

18. 设曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间中任意一点，计算曲面积分 $\displaystyle\oiint\limits_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{\rho}$，其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

第 6 章 多元向量值函数积分学

6.1 第二型曲线积分

✍ 习 题 6.1

1. 设 L 为封闭曲线 $|x|+|x+y|=1|$ 的正向一周，计算 $\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x-\cos(x+y)\mathrm{d}y$.
2. 设质点在力 $F=\dfrac{-y-x^2}{x^2+y^2+2|xy|}i+\dfrac{x+y^2}{x^2+y^2+2|xy|}$ 作用下沿闭曲线 $|x|+|y|=1$ 逆时针方向运动一周，求力 F 所做的功.
3. 计算 $\int_C\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1+xy-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$，其中 C 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.
4. 计算 $I=\int_L\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 L 从点 $(1,0)$ 沿上半圆周 $x^2+y^2=1$ 到点 $(-1,0)$.
5. 计算 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$ 其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心，半径为 $R(\neq 0,1)$ 的逆时针方向的圆
6. 计算 $\int_L\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}-y\right)\mathrm{d}x+\left(x-\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2}$，其中 L 是由点 $(0,-1)$ 到点 $(0,1)$ 经过圆 $x^2+y^2=1$ 右部分的路径.
7. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1,g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，L 围成的平面区域为 D，已知 $\oint_L y[x-f(x)]\mathrm{d}x+[yf(x)+g(x)]\mathrm{d}y=\iint_D yg(x)\mathrm{d}\sigma$，求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$.
8. 设 $u(x,y)$ 于圆盘 $D:x^2+y^2\leqslant\pi$ 内有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{\pi-x^2-y^2}\sin\left(x^2+y^2\right)$，记 D 的正向边界曲线为 ∂D, ∂D 的外法线向量为 n，求 $\int_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$.
9. 设积分 $\oint_L 2[xf(y)+g(y)]\mathrm{d}x+\left[x^2g(y)+2xy^2-2xf(y)\right]\mathrm{d}y=0$，其中 L 为任一条平面曲线. 求：
   (1) 可微函数 $f(y),g(y)$，已知 $f(0)=-2,g(0)=1$.
   (2) 沿 L 从原点 $(0,0)$ 到点 $\mathrm{M}(\pi,\dfrac{\pi}{2})$ 的曲线积分.
10. 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$）在光滑曲线 $\varGamma$ 上可积，L 为 $\varGamma$ 的弧长，而 $M=\max\limits_{(x,y)\in\varGamma}\sqrt{P^2+Q^2}$. 试证：$\left|\int_\varGamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant ML$
11. 设 C 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，又 $f(x)$ 为正值连续函数. 试证：$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi$
12. 设 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求 $u(x,y,z)$.
13. 计算曲线积分 $\oint_\varGamma z^3dx+x^3dy+y^3dz$，其中曲线 $\varGamma$ 是 $z=2\left(x^2+y^2\right)$ 与 $z=3-x^2-y^2$ 的交线，从 Oz 的正向看 $\varGamma$ 是逆时针方向的.
14. 设一力场 F 的大小与作用点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离成反比 (比例系数为 $k>0$)，方向总是指向原点，质点受 F 的作用从点 $A(0,0,e)$ 沿螺旋线 $x=\dfrac{1}{2}(1+\cos t),y=\sin t,z=\dfrac{e}{\pi}t$ 到点 $B(l,0,0)$，求力场 F 对质点所做的功 W.

6.2 第二型曲面积分

✍ 习 题 6.2

1. 计算 $I=\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截部分的外侧.
2. 计算曲面积分 $\iint_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R,z=-R(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.
3. 设函数 $u(x,y,z)$ 在由球面 $S:x^2+y^2+z^2=2z$ 所包围的闭区域 Q 上具有二阶连续偏导数，且满足关系式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2+y^2+z^2.n$ 为 S 的外法线方向的单位向量，试计算 $\iint_s \dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$.
4. 计算向量场 $r=(x,y,z)$ 对有向曲面 S 的通量
   (1) S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；
   (2) S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围锥体表面的外侧.
5. 设 $u=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，求向量场 grad u 通过曲面 $S:1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$ 上侧的通量.
6. 设 S 是锥面 x=y2+22 与两球面 x2+y2+z2=1，x2+y2+z2=2 所围成立体表面的外侧，计算曲面积分 $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^3+f(yz)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^3+f(yz)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(u)$ 是连续可微的奇函数.
7. 设 S 是以 L 为边界的光滑曲面，试求可微函数 $\varphi(x)$ 使曲面积分 $\iint_S (1-x^2)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4xy\varphi(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与曲面 S 的形状无关.
8. 设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数，证明
$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
   其中 S 是闭区域 Ω 的整个边界曲面，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 为函数（$v(x,y,z)$ 沿 S 的外法线方向的方向导数.

6.3 综合题 6

1. 假设 L 为平面上一条不经过原点的光滑闭曲线，试确定 k 的值，使曲线积分 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ky\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0$，并说明理由.
2. 半径为 a 的圆在内半径为 $3a$ 的一个圆环的内侧滚动，求在动圆圆周上一点生成的闭曲线所包围的面积.
3. 设 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上具有连续的导数，且 $f(1)=f(4)$，计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{1}{y}f(xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由 $y=x,y=4x,xy=1,xy=4$ 所围成区域 D 的正向边界.
4. 设 $f(x)$、$g(x)$ 为连续可微函数，且 $w=yf(xy)\mathrm{d}x+xg(xy)\mathrm{d}y$.
   (1) 若存在 u，使得 $\mathrm{d}u=w$，求 $f-g$.
   (2) 若 $f(x)=g(x)$，求 u 使得 $\mathrm{d}u=w$.
5. 设函数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\cos t|\mathrm{d}t$，$L$ 是从点 $A(10)$ 到原点的位于第一象限的光滑曲线，并且与线段可围成的闭区域 D 的面积为 1.
   (1) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值 a 与最小值 b.

(2) 对 (1) 的 a、b，求曲线积分 $I=\int_L (3+by+\mathrm{e}^x\sin y)\,\mathrm{d}x+(ax+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{d}y$.

6. 已知曲线积分 $\int_L \frac{1}{\varphi(x)+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\equiv A$(常数)，其中 $\varphi(x)$ 是可导函数且 $\varphi(1)=1$，L 是绕原点 $(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线，试求出 $\varphi(x)$ 及 A.

7. 已知点 $A(0,0,0)$ 与点 $B(1,,1,1)$，Σ 是由直线 AB 绕 Oz 轴旋转一周而成的旋转曲面介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间部分的外侧，函数 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma [xf(xy)-2x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^2-yf(xy)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

8. 计算曲面积分 $I=\iint_S (xy+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yz+\cos(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(6z+\mathrm{e}^{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

9. 设 S 为一光滑闭曲面，原点不在 S 上，n 为 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量，$r=(x,y,z)$，计算曲面积分 $I=\oiint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}S$，其中 $r=\|r\|$.

10. 设 $A=\iint_S x^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是曲面 $az=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant a)$ 的第一卦限部分的上侧. 求二阶可导函数 $f(x)$，使之满足 $f(0)=A, f'(0)=-A$，并使 $y\left[f(x)+3\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

第 7 章 常微分方程

7.1 各类方程求解

✍ 习 题 7.1

1. 若函数 $y=y(x)$ 连续,且满足 $x\int_1^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_1^x ty(t)\mathrm{d}t-x+1$,求函数 $y(x)$.
2. 设函数 $y(x)$ 可导,且对任何实数 x,h 满足 $f(x)\neq 0,\ f(x+h)=\int_x^{x+h}\frac{t\left(t^2+1\right)}{f(t)}\mathrm{d}t+f(x)$,此外,$f(1)=\sqrt{2}$,求 $f(x)$ 的表达式.
3. 设 $f\in C(-\infty,\infty),\ f'(0)$ 存在,且对任意 x,y 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$,求 $f(x)$.
4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}$ 的通解.
5. 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y+1}$ 的通解
6. 设 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}f(x)+1$,其中 $f(x)$ 为连续函数,求 $f(x)$.
7. 设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,且 $\Phi'(x)=\varphi(x),\ \Phi'(0)=0,\ \Phi'(2\pi)\neq 0$.
   (1) 求解 $y'+y\sin x=\varphi(x)\mathrm{e}^{\cos x}$
   (2) 以上解中是否存在以 2π 为周期的解,若有求之.
8. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, 若 x<1\\ 0, 若 x>1\end{cases}$. 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$,使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程,且满足条件 $y(0)=0$.
9. 求解方程 $y'+x\sin 2y=x\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 y,\ y(0)=\frac{\pi}{4}$.
10. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x^6y^3-x}$ 的通解.
11. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导,对 $\forall a\in I$,有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=a^2e^a$,求 $f(x)$.
12. 求方程 $(\ln y+2x-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y$ 的通解.
13. 微分学中的一个错误结论是:$(fg)'=f'g'$. 如果 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,是否存在一个开区间 (a,b) 和定义在 (a,b) 上的非零函数 g 使得这个错误的乘积对于((a,b) 中的 x 是对的
14. 求方程 $yy''+1=y^2$ 满足 $y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{1}{2}$ 的特解.
15. 求方程 $yy'+1=y'^2$ 满足 $y(0)=1,\ y'(0)=-\sqrt{2}$ 的特解.
16. 求解微分方程 $\left(y'''\right)^2-y''y^{(4)}=0$.
17. 试证曲率为非零常数的平面曲线为圆.
18. 若 $u=f(xyz),\ f(0)=0,\ f'(1)=1$,,且 $\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$,求 u.
19. 求方程 $xyy''-xy^2=yy'$ 的通解.
20. 求满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$.
21. 求代数多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$ 使得
$$\int[\left(2x^4-1\right)\cos x+\left(8x^3-x^2-1\right)\sin x]\mathrm{d}x=F(x)\cos x+G(x)\sin x+C$$
22. 求方程 $y''+ay=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)(a>0)$ 的通解.

23. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x^2y\right]\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

24. 解微分方程 $x^3y''-x^2y''+2xy'-2y=x\sin(\ln x)$.

25. 设函数 $u=f(r), r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$，求 $f(r)$.

26. 设 $f(x)$ 在 $[1+\infty)$ 上有连续的二阶导数，且 $f(1)=0, f'(1)=1$，二元函数 $z=\left(x^2+y^2\right)f\left(x^2+y^2\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 求 $\lim\limits_{t\to 0+}\iint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:0<t\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$.

27. 设 $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 是某微分方程的通解，求对应的微分方程.

7.2 微分方程的应用

✍ 习 题 7.2

1. 设函数 f 定义在有限或无限区间 I 上，I 的左端点为 0. 若正数 $x\in I$，则 f 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，求满足上述条件的函数 $f(x)$.
2. 设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1), B(1,0)$ 的一段连续曲线，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点. 若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式。
3. 求一曲线，使得在其上任一点 P 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到点 P 的距离.
4. 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.
5. 在第一象限内求一条与 x 轴相切于点 $A(\mathrm{e},0)$ 的下凸曲线 $y=f(x), f''(x)\geqslant 0$，使曲线上任意两点 M_1, M_2 之间的弧长，等于曲线在这两点处的切线在 y 轴上截下的线段 P_1P_2 之长.
6. 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.
7. (CPU 降温问题) 一台计算机启动后，其芯片 CPU 温度会不断升高，升高速度为 20°C/h. 为防止温度无限升高而烧坏 CPU，在计算机启动后就要用风扇将恒温空气对它猛吹，使它冷却降温. 根据牛顿冷却定律可知冷却速度和物体与空气的温差成正比. 设空气的温度一直保持 15°C/h 不变. 试求 CPU 温度的变化规律.
   (1) 试证明在这种冷却方法下，CPU 温度 T 是关于时间 t 的单调增加函数，但 $T(d)$ 有上界；
   (2) 若已知计算机在启动 1h 后其温度的升高率为 14°C/h，试求在启动 2h 后 CPU 温度的升高率.
8. 拖拉机后面通过长为 $a(m)$ 不可拉伸的钢绳拖拉着一个重物，拖拉机的初始位置在坐标原点，重物的初始位置在 $A=(0,a)$ 点. 现在拖拉机沿 x 轴正向前进，求重物运动的轨迹曲线方程.
9. 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮子的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.
10. 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $V/6$，流入湖泊内不含 A 的水量为

$V/6$，流出湖泊的水量为 $V/3$. 已知 1999 年底的湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 m_0/V. 问至少需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的）

11. 有一小船从岸边的 O 点出发驶向对岸，假定河流两岸是互相平行的直线，并设船速为 a 方向始终垂直于对岸，又设河宽为 $2l$，河面上任一点处的水速与该点到两岸距离之积成正比，比例系数为 $k=\dfrac{v_0}{l^2}$，求小船航行的轨迹方程

12. 一条鲨鱼在发现血腥味时，总是沿血腥味最浓的方向追寻. 在海平面上进行试验表明，如果把坐标原点取在血源处，在海平面上建立直角坐标系，那么点 (x,y) 处血液的浓度 C(每百万份水中所含血的份数) 的近似值为 $C=\mathrm{e}^{-(x^2+2y^2)/10^4}$。求鲨鱼从点 (x_0,y_0) 出发向血源前进的路线.

7.3 综合题 7

1. 找出所有的可微函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，对于这样的函数，存在一一个正实数 a，使得对于所有的 $x>0$，有 $f'\left(\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{x}{f(x)}$.

2. 解二阶偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，其中 $z=z(x,y)$，有连续的二阶偏导数。

3. 设 $p_1(x),p_2(x)$ 是连续函数，$y_1(x),y_2(x)$ 是方程 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ 的两个线性无关的解. 证明：如果 α,β 是 $y(x)$ 的两个零点，则在 α,β 之间必存在 $y_2(x)$ 的一个零点.

4. 设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 为方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的两个积分因子，且 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\neq$ 常数，求证 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=C$ 是该方程的通解，其中 C 为任意常数.

5. 设函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\displaystyle\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\dfrac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$，且 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f'(x)=0$.

   (1) 试求函数 $f(x)$ 的表达式：

   (2) 若 $f(0)=0$，求 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^4}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\Omega(t)=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2,z\geqslant0\right\}$，$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面，$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 面的投影区域，$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线，已知当 $t\in(0,+\infty)$ 时，恒有

$$\oint_{L(t)} f\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s+\oiint_{S(t)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\iint_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma+\iiint_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$$

   求 $f(x)$ 的表达式

7. 求出所有定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续的，在 $(0,+\infty)$ 上（函数）值是正实数的函数 $y=g(x)$，使得对所有 $x>0$，区域 $R_x=\{(s,t)|0\leqslant s\leqslant x,0\leqslant t\leqslant g(s)\}$ 的质心的 y 坐标和 g 在 $[0,x]$ 上的平均值相同. 并证明你的结论.

8. 一个质点在直线上运动，仅有与速度成反比的力作用于其上. 如果初速为每秒 1000 尺，当它经过 1200 尺后，速度为每秒 900 尺. 试计算运行这段距离的时间. 误差不超过百分之一秒.

9. 飞机在机场开始滑行着陆。在着陆时刻已失去垂直速度，水平速度为 v_0 米/秒飞机与地面的摩擦系数为 μ，且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比，在水平方向的比例系数为 k_x 千克 · 秒 ^{2}/米，在垂直方向的比例系数为 k_y 千克 · 秒 ^{2}/米. 设飞机的质量为 m 千克，求飞机从着陆到停止所需的时间.

10. 有一圆锥形的塔，底半径为 R 高为 $(h>R)$，现沿塔身建一登上塔顶的楼梯，要求楼梯曲线在每一点的切线与过该点垂直于 xOy 平面的直线的夹角为工，设楼梯入口在点 $(R,0,0)$，试求

楼梯曲线的方程 (设塔底面为 xOy 平面).

11. 设过曲线上任一点 $M(x, y)$ 的切线 MT 与坐标原点到此点的连线 OM 相交成定角 ω，求此曲线方程.
12. (四人追逐问题) 位于边长为 $2a$ 的一个正方形的四个顶点有四个人 P_1, P_2, P_3, P_4，一开始分别位于点 $A_1(a, a), A_2(-a, a), A_3(-a, -a), A_4(a, -a)$ 处，他们玩依次追逐的游戏，P_1 追逐 P_2，P_2 追逐 P_3，P_3 追逐 P_4，P_4 追逐 P_1. 求各自追逐路线的方程.
13. 一个质点缚在一条轻的竿 AB 的一端 A 上. 竿长为 a，竿的 B 端有绞链使它能在一个垂直平面上自由转动. 竿在绞链上面竖直的位置处于平衡，然后轻微地扰动它. 证明：竿从通过水平位置降到最低位置的时间是 $\sqrt{a/g}\ln(1+\sqrt{2})$.
14. 一个质量为 $m = 1\text{kg}$ 的爆竹，以初速度 $v_0 = 21\text{m/s}$ 铅直向上飞向高空，已知在上升的过程中，空气对它的阻力与它运动速度 v 的平方成正比，比例系数为 $k = 0.025\text{kg/m}$. 求该爆竹能够到达的最高高度.
15. 一质点在一与距离 k 次方成反比的有心力作用下运动。如果质点的运动轨道为一圆 (假设有心力由圆周上的点出发)，试求 k 的值
16. (雨滴下落的速度) 有一滴雨滴，以初速度为零开始从高空落下，设其初始质量为 $m_0(\text{g})$. 在下落的过程中，由于不断地蒸发，所以其质量以 $a(\text{g/s})$ 的速率逐渐减少. 已知雨滴在下落时，所受到的空气阻力和下落的速度成正比，比例系数为 $k > 0$. 试求在时刻 $t\left(0 < t < \dfrac{m_0}{a}\right)$，雨滴的下落速度 $v(t)$.

第 8 章 无穷级数

8.1 常数项级数

✍ 习 题 8.1

1. 讨论下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(a>b>0)$

2. 判定下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)^{\ln(1+n)}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\mathrm{d}x$

3. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；(2) 试证：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 收敛.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的正项级数，求证 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 也收敛，反之是否正确？

5. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$ 的敛散性，并求其和.

6. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}\left(n^2+n+1\right)$ 的和.

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)a_n\right]=1(p>1)$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 存在.

9. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 的敛散性。其中 x_n 是方程 $x=\tan x$ 的正根按递增顺序的排列. =1Xn

10. 设 $B_n(x)=1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x$，判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n(\log_n 2)}{(n\log_2 n)^2}$ 收敛.

11. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n t\mathrm{d}t$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

12. 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明：当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

13. 设 $\{p_n\}$ 是单调增加的正实数列，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 同敛散.

14. 设 $\{u_n\},\{c_n\}$ 为正实数列，试证明：

(1) 若对所有的正整数 n 满足：$c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1}\leqslant 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

(2) 若对所有的正整数 n 满足：$c_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant a$（常数 $a>0$），且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

15. 设数列 $S_1=1,S_2,S_3,\cdots$ 由公式 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}\,(u_n>0)$ 确定，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{S_n\}$ 收敛.

16. 令 A 为整数的一个集合，这些数在它们的十进制表示中不包含数字 9，证明：$\sum\limits_{\alpha\in A}\frac{1}{a}$ 收敛，即 A 定义了一个调和级数的收敛子列.

17. 设 $\{a_n\}$ 是正项递减数列，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_{n-1}-a_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_0=0$

18. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$ 收敛.

19. 设 F_n 满足条件 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n=2,3,\cdots)$. 判断两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n},\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln F_n}$ 的敛散性.

20. 设实数列 $u_0,u_1,u_2,\cdots$ 满足 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2, n=0,1,2,\cdots$，试证：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对于所有的 k 都有 $u_k=0$.

21. 判断下列级数的敛散性？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(3^n+2^n)\,n}$

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$

(3) $a-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots\left(a^2+b^2\neq 0\right)$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^2+an+b}{n}\pi\right)$（$a,b$ 为常数）

22. 设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

23. 设 $|a_n|\leqslant 1\ (n\in\mathbf{N}_+)$，且 $|a_n-a_{n-1}|\leqslant\frac{1}{4}\left|a_{n-1}^2-a_{n-2}^2\right|\ (n\geqslant 3)$，求证：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

24. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}(p\geqslant 1)$ 的敛散性.

25. 给定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$, $p>0$. 证明下列结论：

(1) 当 $p>1$ 时，该级数绝对收敛;

(2) 当 $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时，该级数条件收敛；

(3) 当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，该级数发散.

26. 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 (n = 1, 2, \cdots)$，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n} = 1$.

27. 证明：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

8.2 函数项级数

✍ 习 题 8.2

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-1)^n$ 的收敛半径.
2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ 的收敛域.
3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$ 的收敛域.
4. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.
5. 对 p 讨论幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln n}$ 的收敛域.
6. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) x^n$

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \cdot (x-a)^{2n}}{2^n}$

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$

   (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n\right) x^n$

7. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$ 的收敛区间及和函数.
8. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{2n}$ 级数的和函数.
9. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n^2 - n + 1\right)}{2^n}$ 级数的和函数.
10. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx, n = 0, 1, 2, \cdots$，求 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} I_n$.
11. 求 $\dfrac{1 + \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{\pi^8}{2^8 \cdot 8!} + \frac{\pi^{12}}{2^{12} \cdot 12!} + \cdots}{\frac{1}{2!} + \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 6!} + \frac{\pi^8}{2^8 \cdot 10!} + \frac{\pi^{12}}{2^{12} \cdot 14!}}$ 的值.
12. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域与和函数.
13. 设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_n (n = 2, 3, \cdots)$. 证明当 $|x| < 1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求和函数 $S(x)$.

14. 给定三个幂级数 $u=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$, $v=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$, $w=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$, 证明:$u^3+v^3+w^3-3uvw=1$

15. 设 $f_0(x)=e^x$,对于 $n=0,1,2,\cdots$,定义 $f_{n+1}(x)=xf_n'(x)$. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(x)}{n!}=e^{ex}$

16. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数从某项起具有周期性. 证明:此级数的和函数是有理函数.

17. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots(3n)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, $(-2\leqslant x<2)$

(1) 证明 $S(x)$ 满足 $\left(1-\frac{x}{2}\right)S'(x)=\frac{1}{6}S(x)+\frac{1}{6}$;

(2) 求和函数 $S(x)$.

18. 将 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数

19. 将 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 函数展开成 x 的幂级数.

20. 将 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 函数展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

21. 将函数 $e^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数

22. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 函数,求:

(1) $f(x)$ 的麦克劳林展开式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$;

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{2n}|x^{2n}$ 的和函数 $S(x)(-1<x<1)$.

23. 将 $f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

24. 设 $f(x)$ 是以 2π 为为周期的连续函数,其傅里叶系数为 a_0,b_n,c_n.

(1) 求函数 $G(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的傅里叶级数 A_0,B_n,C_n.

(2) 利用 (1) 的结果证明巴塞瓦 (Parseval) 等式: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$

8.3 综合题 8

1. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3\mathrm{d}t$,判断级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 的敛散性.

2. 求级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$ 的值.

3. 设 $u_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\ln\frac{n+1}{n-1}(p>0)$,判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$ 的敛散性与参数 p,x 的关系.

5. 证明弗林克 (Frink) 判别法: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n=k$ 存在,则当 $k<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数收敛;当 $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数发散.

6. 证明:若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}+\cdots}$ 发散

7. 设 $a_1 = a > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) (n = 1, 2, \cdots)$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^2 - 1\right]$ 收敛.

8. 设有一严格递增的正整数序列 (例如 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, \cdots$).$u_n$ 表示此序列前 n 项的最小公倍数. 求级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛.

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$ 的值.

10. 设 $E(n)$ 表示能使 5^k 整除乘积 $1^1 2^2 3^3 \cdots n^n$ 的最大的整数 k，计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{n^2}$.

11. 讨论级数的敛散性：$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^q} - \frac{1}{4^p} + \cdots - \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^q} + \cdots$.

12. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

13. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n$ 的敛散性.

14. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 的敛散性.

15. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 A，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = A$.

16. 求 $\lim_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

17. 判定下列反常积分的敛散性.

    (1) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$，($[\cdot]$ 为取整函数)

    (2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1 + x^a\sin^2 x}$

18. 令 $A = \{(x, y)|0 \leqslant x, y < 1\}$，对任何 $(x, y) \in A$，令 $S(x, y) = \sum_{\frac{1}{2}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 2}x^m y^n$. 这里的求和对一切满足所列不等式的正整数 m, n 进行. 试计算 $\lim_{(x,y)\to(1,y)\in A}\left(1 - xy^2\right)\left(1 - x^2y\right)S(x, y)$

19. 当 r 取何值时，级数 $\frac{1}{2} + r\cos x + r^2\cos 2x + r^3\cos 4x + r^4\cos 8x +$ 的所有部分和对一切 x 都非负.

20. 已知 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots)$，试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径与和函数.

21. 设 $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$，其中 a, b 是满足 $a + b < 1$ 的正的常数，求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ 的和函数篇！

22. 设 $a_0 = 3, a_1 = 5$，且对任何自然数 $n > 1$，有 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-1}$，证明：当 $|x| < 1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，并求其和函数。

23. 试证幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 逐项求导后所得的级数与原级数有相同的收敛半径.

24. 对于每一个正整数 n，用 $a(n)$ 表示 n 的 3 进位数中 0 的个数。试求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{a(n)}}{n^3}$ 的收敛域

25. 幂级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的每一个系数 a_n 只取值 0 或 1. 证明：$f(x)$ 是有理函数的充要条件

为 $f(\frac{1}{2})$ 是有理数

26. 设 $y=y(x)=\frac{1}{4}\left(1+x-\sqrt{1-6x+x^2}\right)$,其幂级数展开式为 $y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$,证明该幂级数展开式的系数都是正整数

27. 将函数如 $\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ 展开为 x 的幂级数

28. 证明:$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2x^2}{1+x^2}\right)^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{2n-1}(|x|<1)$.

29. 证明:$\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

30. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,并且平方可积,证明 Bessel 不等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

其中 a,b 是 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数.

31. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数,其傅里叶系数为 a_0,a_n,b_n,记 $S_0(x)=a_0/2$,$S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)$. 证明

(1) $S_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$;

(2) $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t$.