

# Solution

## A.easy

题面暗示签到。

结论：若原图为边双，则存在方案为每一条边定向。

一种简单的方法是取任一个 DFS 树，令树边全向下，非树边全向上。然后做完了。

考虑证明。显然只要所有点都能回到根就满足要求。反证，设  $i$  为深度最浅的回不到根的点。则其子树内没有点向  $i$  的祖先连边，于是  $\langle i, fa_i \rangle$  为割边，矛盾。

容易发现桥边不可定向。找出所有桥边后对分割出的边双——定向即可。 $O(n+m)$ 。

## B.multiply

题面暗示是蒟的。

考虑  $a_i$  的质因子不超过 10 的部分，当然质因子只有 2, 3, 5, 7。对每个  $a_i$  记录状压的四位二进制数  $b_i$ ，每一位表示对应质因子有没有出现。考虑状压 DP。设  $f_{i,j}$  表示当前考虑前  $j$  个数，已选数的质因数含  $i$  的各位代表的质数时最多选择数的个数。转移形如  $f_{i,j} = \max(f_{k,j-1} + 1)$ ，要求  $k \& b_j = 0$ 。（就类似一个背包啦）二维滚动数组掉，可以通过。

注意到  $a_i \leq 1000$ ， $a_i$  的大于 32 的质因子最多一个。小于 32 的质数有 11 个，状压可以接受。对于没有大质因子的  $a_i$  状压解决，把有大质因子的  $a_i$  按大质因子分类，每一类最多只能选 1 个。类似分组背包转移即可。复杂度  $O(2^{\pi(\sqrt{n})} * n)$  约为 2000000，可以通过。

数据很水，剪枝爆搜和随机化贪心没准可能过掉。

## C.walk

先考虑  $K=1$ 。总方案数易求，于是就要求所有  $y_m = i$  方案数加权和。

然后化一下式子，发现

$$\sum_i i * \text{Count}(y_m = i) = \sum_i \text{Count}(y_m \geq i)$$

考虑求  $y_m \geq i$  的方案数。强制构造前  $i$  列的方案使之一定能走到第  $i$  列，然后随意构造后面的方案。

现在需要解决几个问题：求长度为  $i$  的总放置方案数  $f$  和使前后联通的方案数  $g$ ；求  $fg$ 。

对于总方案数，考虑最后两列填什么。经过一些计算可以得到一个递推式： $f_i = 8(f_{i-1} + f_{i-2})$ 。

对于联通的方案数，可以一列一列地推。设  $g_{i,S,pos}$  表示当前构造了前  $i$  列， $S$  集合中的行是与前面联通的，是否在最后一列放置了半个大障碍和大障碍的位置。

然后发现  $g_i$  可以直接由  $g_{i-1}$  转移，因此可以矩阵加速。

考虑如何递推  $f_n g_n$ 。  $f_n, g_n$  均可以递推。

取当前组状态为所有  $f_n g_{n,i}, f_{n-1} g_{n,i}$ ，然后有  $f_n g_{n,i} \leftarrow f_{n-1} g_{n-1,j}, f_{n-2} g_{n-1,j}$ ，其中需要的状态都是前一组状态。因此依然可以矩阵加速。

考虑上面求  $f_n g_n$  的过程。发现其转移矩阵和维护的向量就是  $f$  转移矩阵和  $g$  转移矩阵的嵌套。

$K \neq 1$  时, 所求答案就是在每个  $Count(y_m \geq i)$  前加上一个  $i$  的乘方作为系数。而  $i$  的乘方也是可以通过  $i - 1$  的乘方递推得到的 (转化为组合数递推)。于是再嵌套上一个转移矩阵即可。

加一些优化就可以过了。(可能需要卡一下矩阵大小?)

## D.konjac

因为要出成联赛难度, 方法很多。

在一棵基环树上切两条边, 如果只切出树形连通块的话, 只能切 环边+环边 或 环边+树边。发现总是切成两个树形连通块。

容易发现所求即为树形连通块直径之和。

原始方法: 树的直径是可合并的。用一条边把两棵树连在一起, 新树直径端点必为原树四个端点之二。于是可以  $O(1)$  合并。如果只删环边, 可断环倍长建线段树, 每个节点表示对应区间提出的子树直径和附属信息, 询问时合并即可。考虑X: 我们预处理出每一棵子树删掉每一条边后的直径变化情况。具体地, 删掉一条边后, 我们需要合并的是它左边的所有兄弟右边的所有兄弟和上面的所有祖先。这样可以线性一次 DFS 解决。当然也可以用树形 DP 解决, 也可以做到线性。删树边的时候, 对于每个子树预处理出它的直径和删掉其中任意一条边后剩下的直径及其附属信息。然后建立线段树, 分类讨论: 若删的都是环边, 直接两次区间查询即可。若删的一环一树, 则先把树边对应位置的子树更新 (即线段树单点修改), 再区间查询即可。注意后面更新回去。复杂度  $O(n \log n + Q \log n)$ 。细节略多, 常数微大, 可能需要卡一卡。期望100分。

欧拉序维护树的直径的方法也可以用上。

因为离线, 线段树分治或类似物也可以过。

因为不能卡常, 标程采用大常的原始方法。

本题可继续加强: 删两条树边; 动态修改边权; 动态封锁、解锁边等。

可见出题人真的很良心。