7.3

3 мая 2016 г.

1 Задача 3

```
In [1]: %matplotlib inline
        import numpy as np
        import math as mt
        import matplotlib
        import matplotlib.pyplot as plt
        from pylab import *
        from scipy.stats import *
```

```
In [19]: # Размер выборки
         sz = 200
         theta0 = 0

         # Генерирую выборку размера sz из распределения Коши
         x = cauchy.rvs(size=sz)

         # Массив ОМП для модели N(theta,1), где ОМП - выборочное среднее
         means = np.array([x[:(i+1)].mean() for i in range(sz)])
```

Для модели $N(\theta, 1)$ априорное распределение - $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ with mean= μ_0, $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + n}$.

Следовательно, $\theta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + n}$.

```
In [20]: def BayesEst(x, a, sigma):
             # Байесовская оценка для модели N(theta, 1)
             return (sum(x) + (a/sigma**2))/(len(x) + (1./(sigma**2)))
```

Известно, что с вероятностью не менее 0.95 выполнено неравенство $|\theta| < 0.5$.

Осталось подобрать параметры априорного распределения.

Воспользуемся правилом трёх сигм: на отрезке $[-2\sigma_0, 2\sigma_0]$ находятся 95% всех элементов из выборки $N(0, \sigma_0^2)$.

Следовательно, так как $|\theta| < 0.5$ с вероятностью 0.95, то $2\sigma_0 < 0.5$ или $\sigma_0 < \frac{1}{4}$.

Поэтому параметры априорного распределения: $a = 0$, $\sigma_0^2 = \frac{1}{16}$.

```
In [24]: # Параметры для априорного распределения - среднее и корень из дисперсии.
         param = (0, 1/4)
```

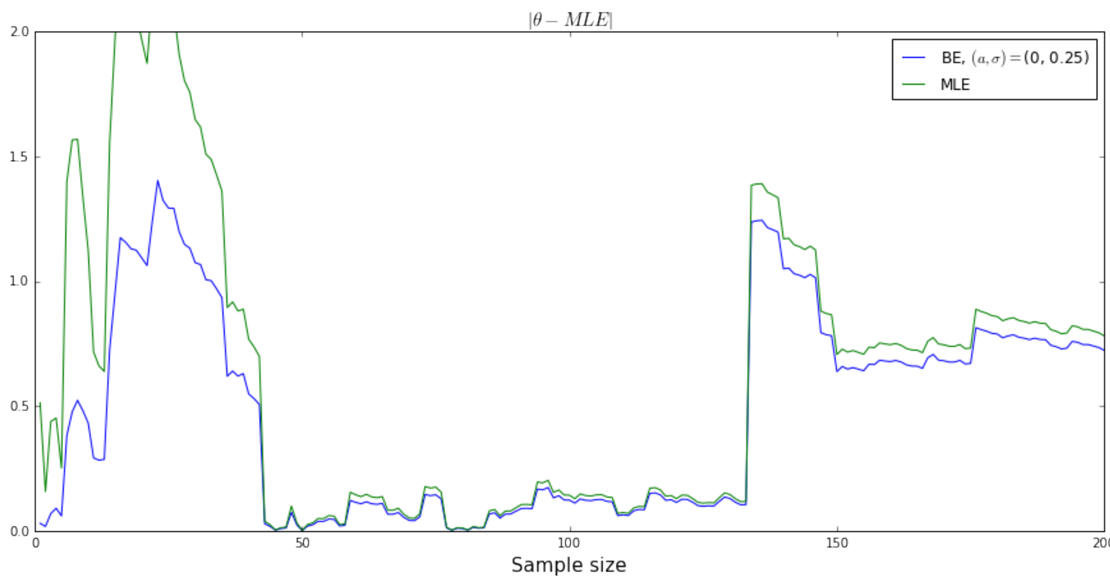
```
plt.figure(figsize=(15,7))

# Массив байесовских оценок
est = np.array([BayesEst(x[:(i+1)], param[0], param[1]) for i in range(sz)])

# BE stands for 'Bayes estimator'
# Строю график модуля разности истинного значения theta и
# байесовских оценок
plt.plot(np.arange(1,sz+1), abs(est - theta0), \
 label='BE, $(a, \sigma)=$({}, {})'.format(param[0], param[1]))

# Строю график модуля разности истинного значения theta и ОМП
plt.plot(np.arange(1,sz+1), abs(means-theta0), label='MLE')
plt.ylim((0,2))
plt.title('$|\\theta - MLE|$', fontsize=15)
plt.xlabel('Sample size', fontsize=15)
plt.legend()

plt.show()
```



Поскольку мы изначально брали выборку из распределения Коши, которое не имеет среднего, а потом рассматривали это как модель $N(\theta, 1)$, то неудивительно, что полученные оценки очень плохие. Байесовская оценка на данном графике ведет себя лучше, чем ОМП, но это зависит от выборки.