第一章 基本概念

计算机系网络所：张小平

清華大學
Tsinghua University

主要内容

- 图论概述
- 图的基本概念及定义
- 图的代数表示

图论概述

- 离散数学：
  - 离散数学是以研究离散量的结构和相互之间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素。
  - 离散数学充分契合了计算机科学的特点
  - 离散数学是计算机科学重要的基础理论之一
- 离散数学主要包括以下四个方面：
  - 数理逻辑、集合论、图论、代数结构

图论概述

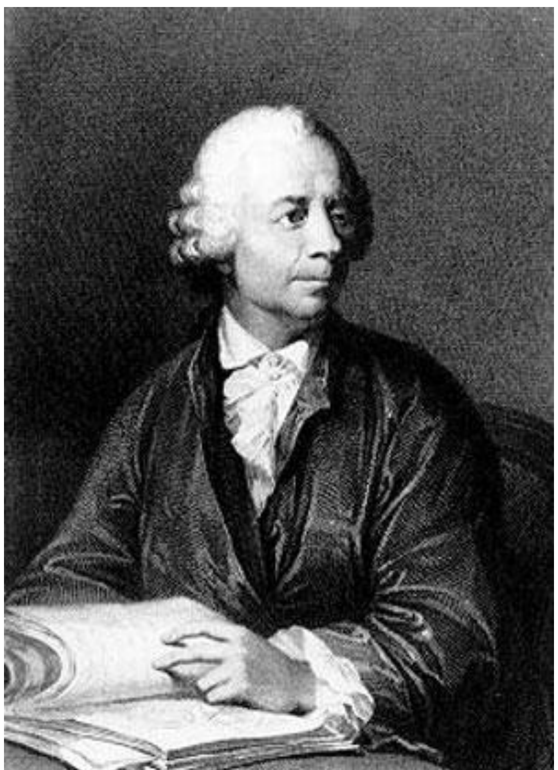
- 图论［Graph Theory］是数学的一个分支，它以图为研究对象。
- 世界上各事物之间，自然界内诸现象之间经常存在着某些必然的联系，需要人们通过研究分析，去揭示这些关系。
- 人们常把事物、现象用结点表示，用有向的或无向的边来表示它们之间的联系。这就构成了图论中所讨论的图。

图论概述

- 历史上图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在欧拉1736年的论著中，其原始问题有很强的实际背景。
- 18世纪在哥尼斯堡城(今俄罗斯加里宁格勒)的普莱格尔河上有7座桥，将河中的两个岛和河岸连结。

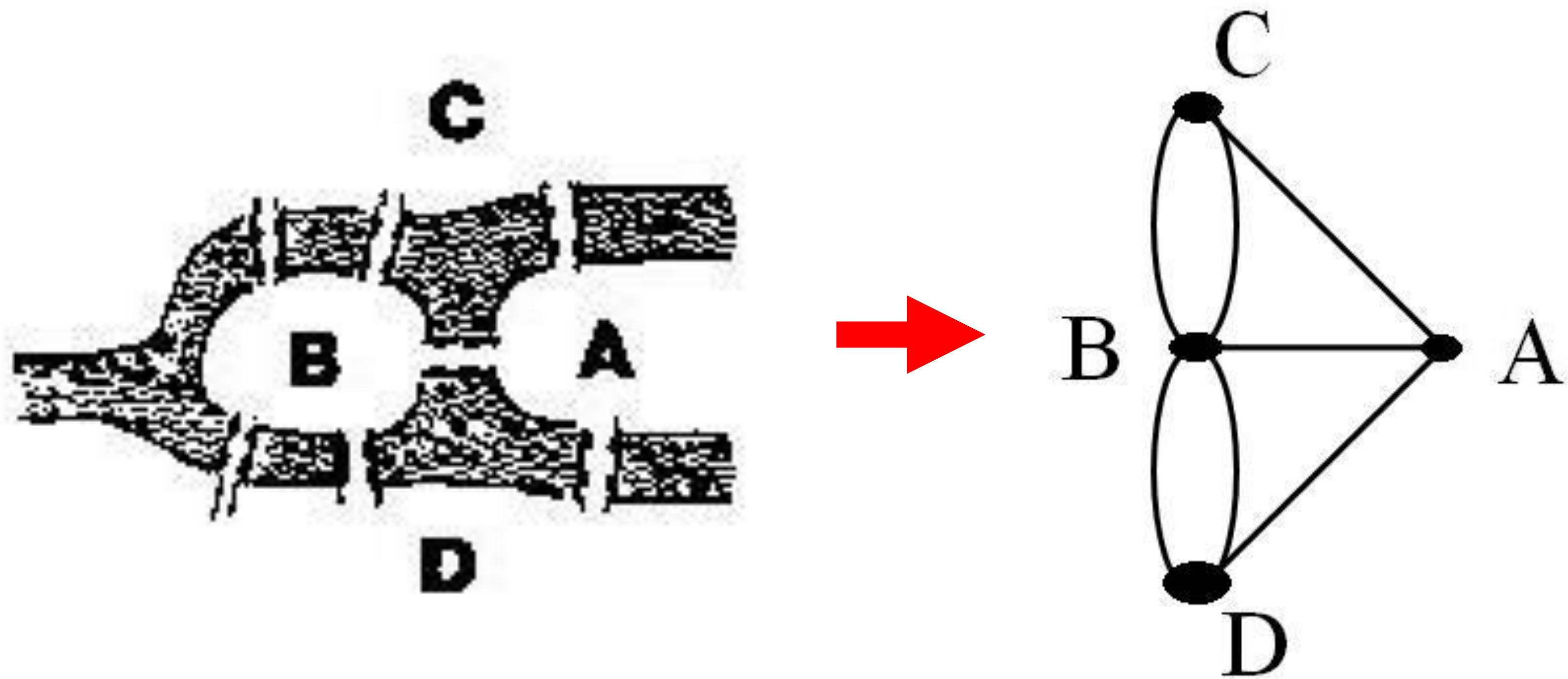
图论概述

- 欧拉与哥尼斯堡城七桥问题



图论概述

- 欧拉对“七桥问题”的研究是图论研究的开始。



图论概述

- 早期的图论与数学游戏有密切的联系：
  - 周游世界问题、渡河问题、三家三井问题…
- 20世纪后，图论的应用渗透到其他学科领域，如物理、化学、运筹学、博弈论、计算机网络、社会学、语言学等等
- 对于基础图论来说，不要求事先掌握高深的数学工具，只需要有集合论和线性代数的基本概念，即可进行学习

图论概述

- 学习目标：
  - 掌握图论的基本概念、基本方法
  - 掌握图论的基本理论和重要定理、算法
  - 同时学习将实际问题转化为图论问题的能力

图论是一个非常有用的数学工具

图论概述

- 如何学好图论：
  - 注意图论中解题或证明的方法：与微积分不同，反证法、构造法是图论解题的主要方法。
  - 从基本概念入手充分掌握定义、定理，并重视定理的证明过程。
  - 认真听课！
  - 保质保量完成作业！

主要内容

- 图论概述
- **图的基本概念及定义**
- 图的代数表示

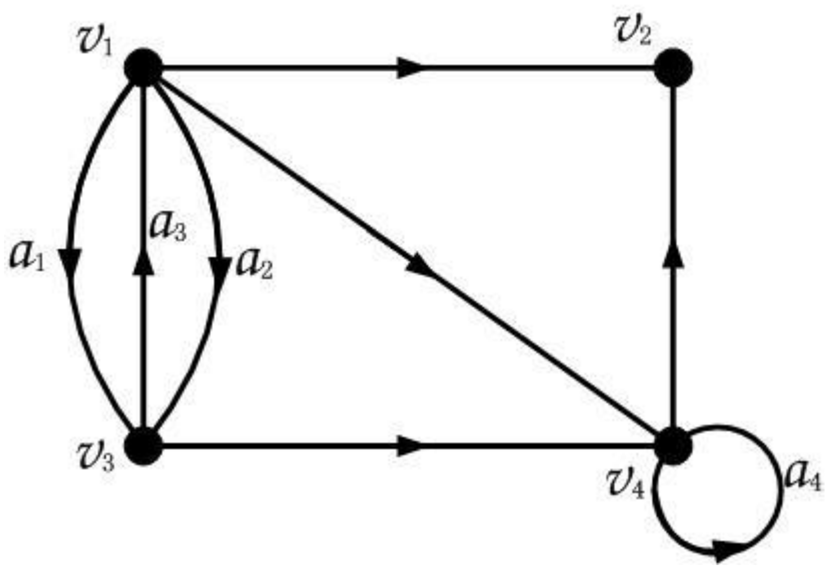
图的基本概念及定义

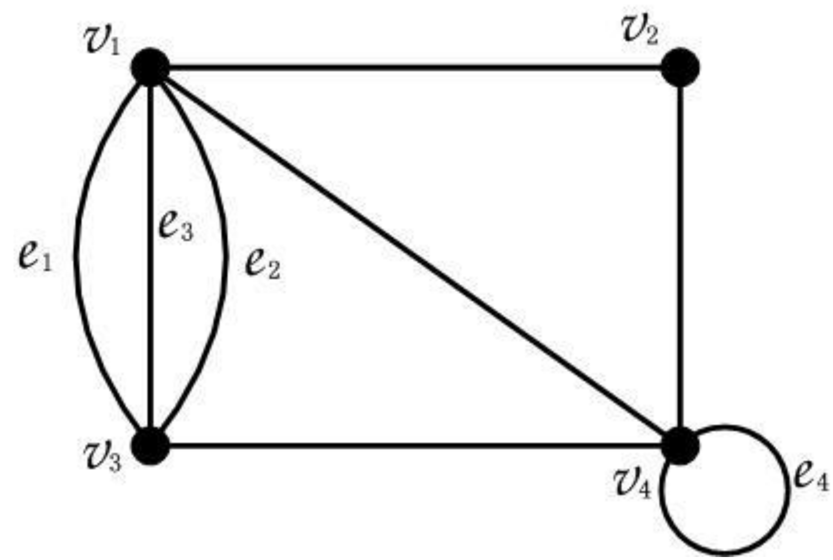
- **定义1.1.1** 二元组 $G=(V(G),E(G))$ 称为图。其中 $V(G)$ 是非空集，称为结点集；$E(G)$ 为 $V(G)$ 各结点之间边的集合，称为边集。
- 常用 $G=(V,E)$ 表示图。
- 当 V,E 都是有限集合时，称 G 为有限图。
- 当 V 或 E 是无限集合时，称 G 为无限图。
- 一般情况下，给定 $G=(V,E)$，如不加特殊说明，认为 $V=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_m\}$，即结点数 $|V|=n$，边数 $|E|=m$ 。

Tsinghua University

图的基本概念及定义

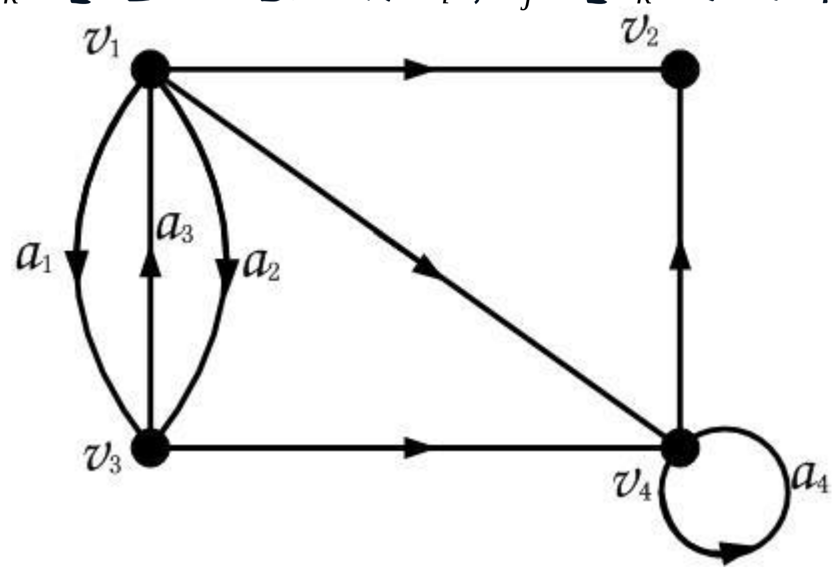
- 有向图和无向图：
  - 若图中的边为有向的，则称为**有向图**
  - 若图中的边为无向的，则称为**无向图**
  - 若图中既有有向边又有无向边，则称为**混合图**





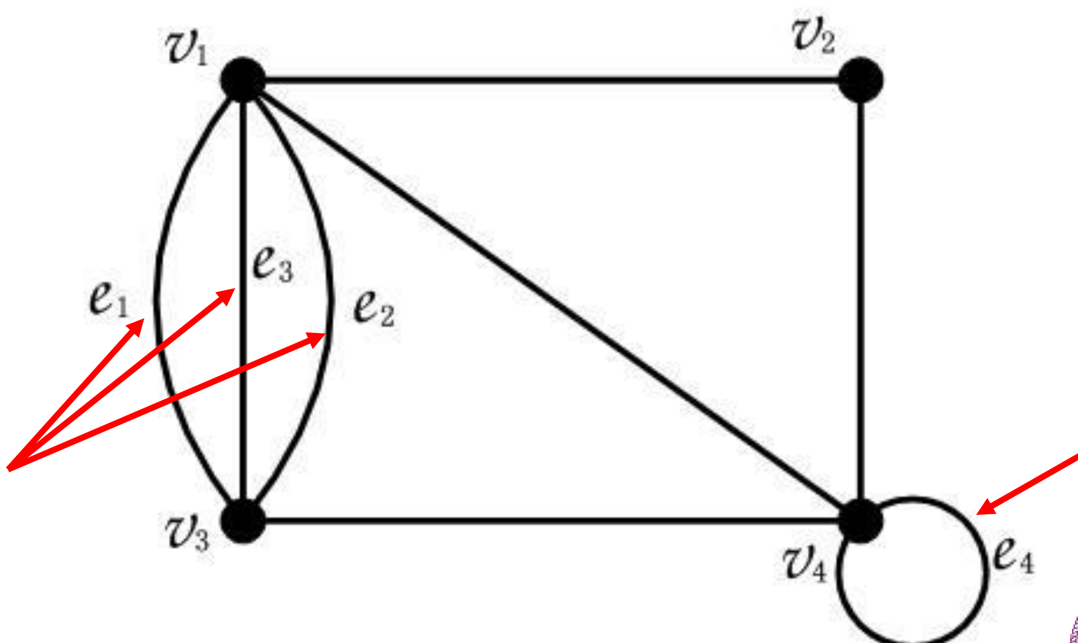
图的基本概念及定义

- 图的边可用 $e_k=(v_i,v_j)$ 表示
  - 称 v_i 与 v_j 是**相邻结点**
  - 称 e_k 分别与 v_i , v_j **相关联**
  - 如果 e_k 是有向边，称 v_i 是 e_k 的**始点**，v_j 是 e_k 的**终点**，并称 v_i 是 v_j 的**直接前驱**，v_j 是 v_i 的**直接后继**
  - 如果 e_k 是无向边，称 v_i , v_j 是 e_k 的两个**端点**



图的基本概念及定义

- 只与一个结点相关联的边称为**自环**
- 在同一对结点之间可以存在多条边，称为**重边**
- 含有重边的图叫**多重图**



图的基本概念及定义

- 定义1.1.2 G=(V,E)的某结点所关联的边数称为该**结点的度**，用d(v)表示。如果v带有自环，则自环对d(v)的贡献为2。
- 有向图中：
  - 以结点v为始点的边数目称为v的**正度**，记为$d^+(v)$
  - 以结点v为终点的边数目称为v的**负度**，记为$d^-(v)$
- 显然，有$d^+(v) + d^-(v) = d(v)$

图的基本概念及定义

- 定义1.1.3 任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为**简单图**。

- 没有任何边的简单图叫**空图**，记为N_n。

- 任何两结点间都有边的简单图称为**完全图**，记为K_n。
  - K_n中每个结点的度为n-1

Tsinghua University

图的基本概念及定义

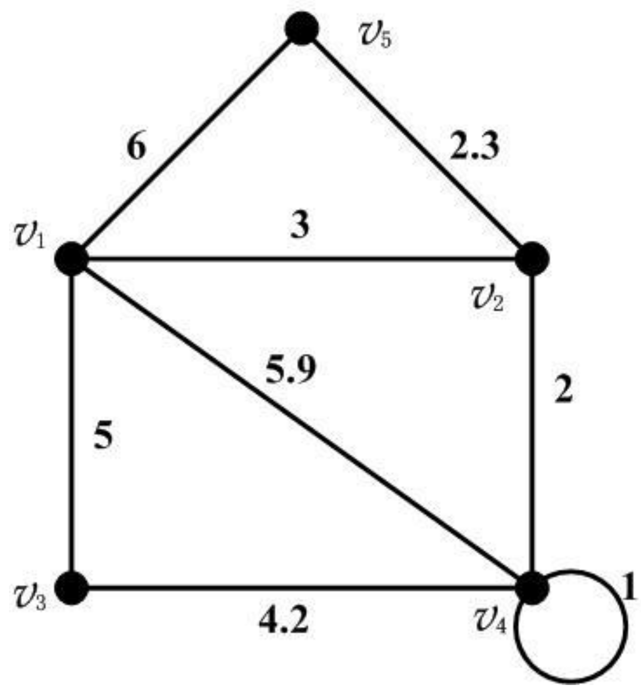
- 性质1.1.1 设$G=(V,E)$有n个结点，m条边，则

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2m$$

- 性质1.1.2 G中度为奇数的结点必为偶数个
- 性质1.1.3 有向图G中正度之和等于负度之和
- 性质1.1.4 K_n中的边数为$\frac{1}{2}n(n-1)$
- 性质1.1.5 非空简单图中一定存在度相同的结点

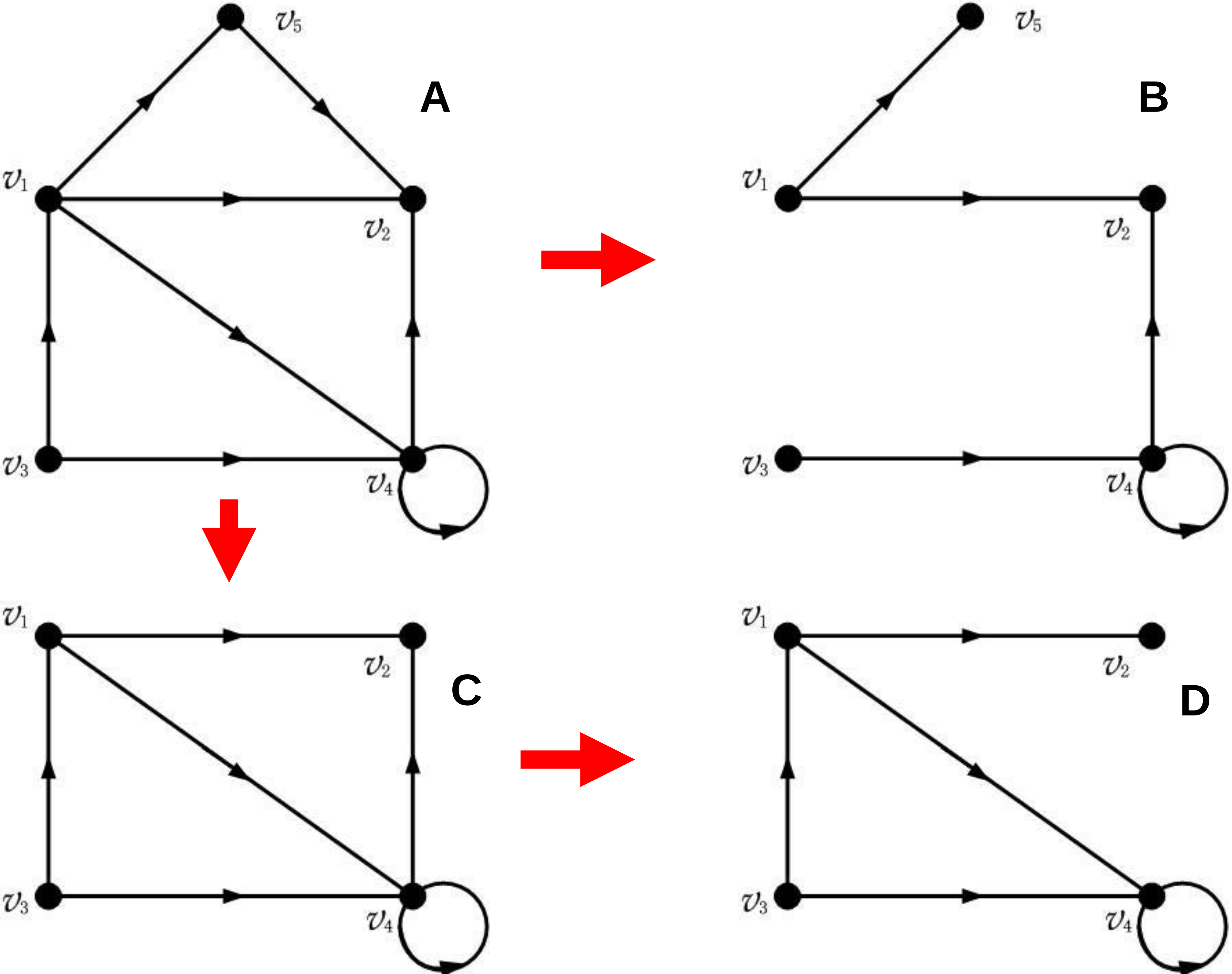
图的基本概念及定义

- 定义1.1.4 如果图G=(V,E)的每条边$e_k=(v_i,v_j)$都赋予一个实数w_k做为该边的权，则称G为赋权图。如果这些权都是正实数，就称G为正权图。



图的基本概念及定义

- 定义1.1.5 给定G=(V,E)，如果存在另外一个图G'=(V',E')，满足V'包含于V，E'包含于E，则称G'是G的一个**子图**
- 如果V'=V，就称G'是G的**支撑子图**
- 如果V'包含于V，且E'包含了在结点子集V'之间的所有边，则称G'是G的**导出子图**



A
B
C
D
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5

图的基本概念及定义

- 显然，根据上述定义，图G是自身的子图，支撑子图，导出子图
- 空图是图G的支撑子图
- 称原图G和空图都是图G的平凡子图

图的基本概念及定义

- 定义1.1.6 给定两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$。令

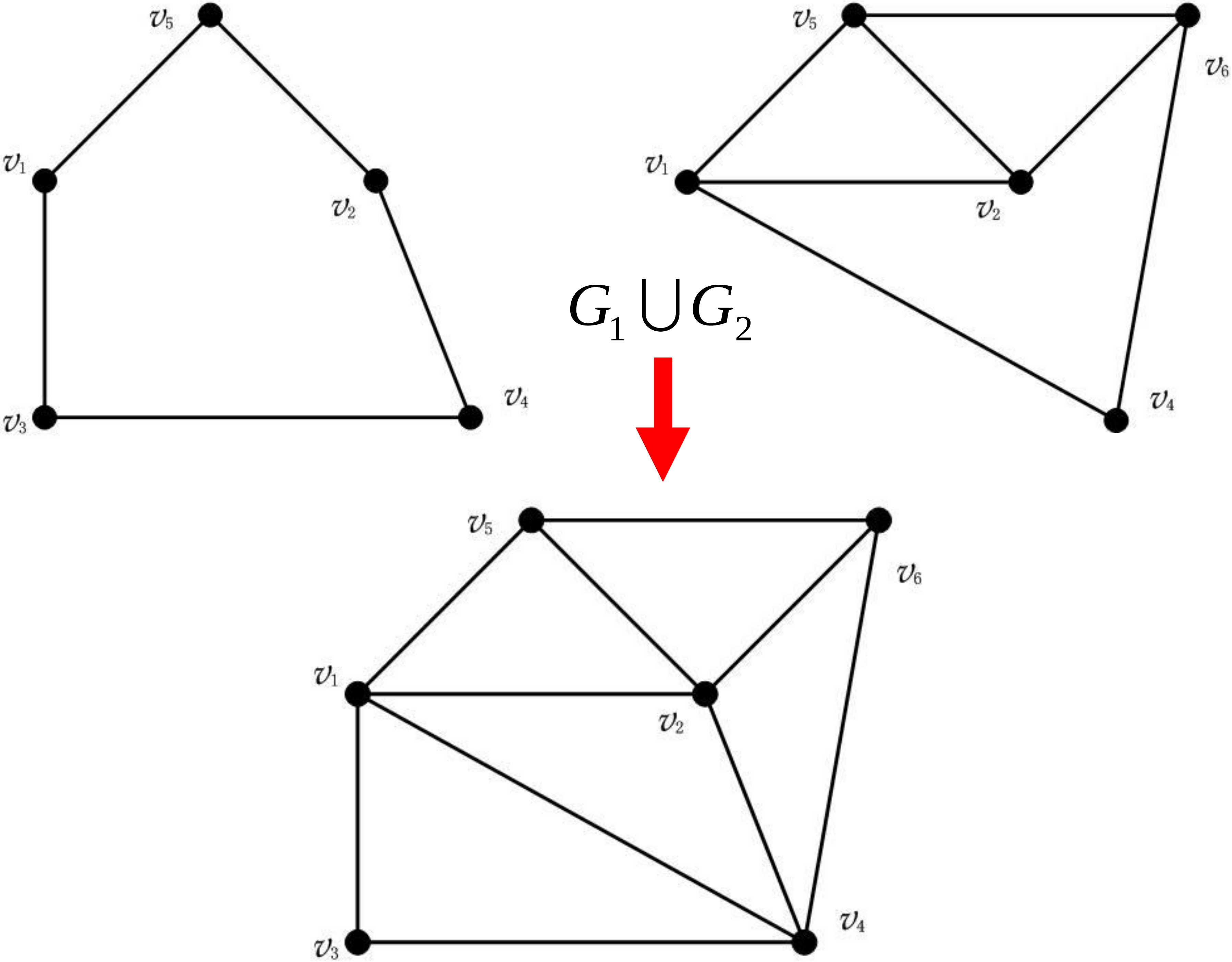
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$$

$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2)$$

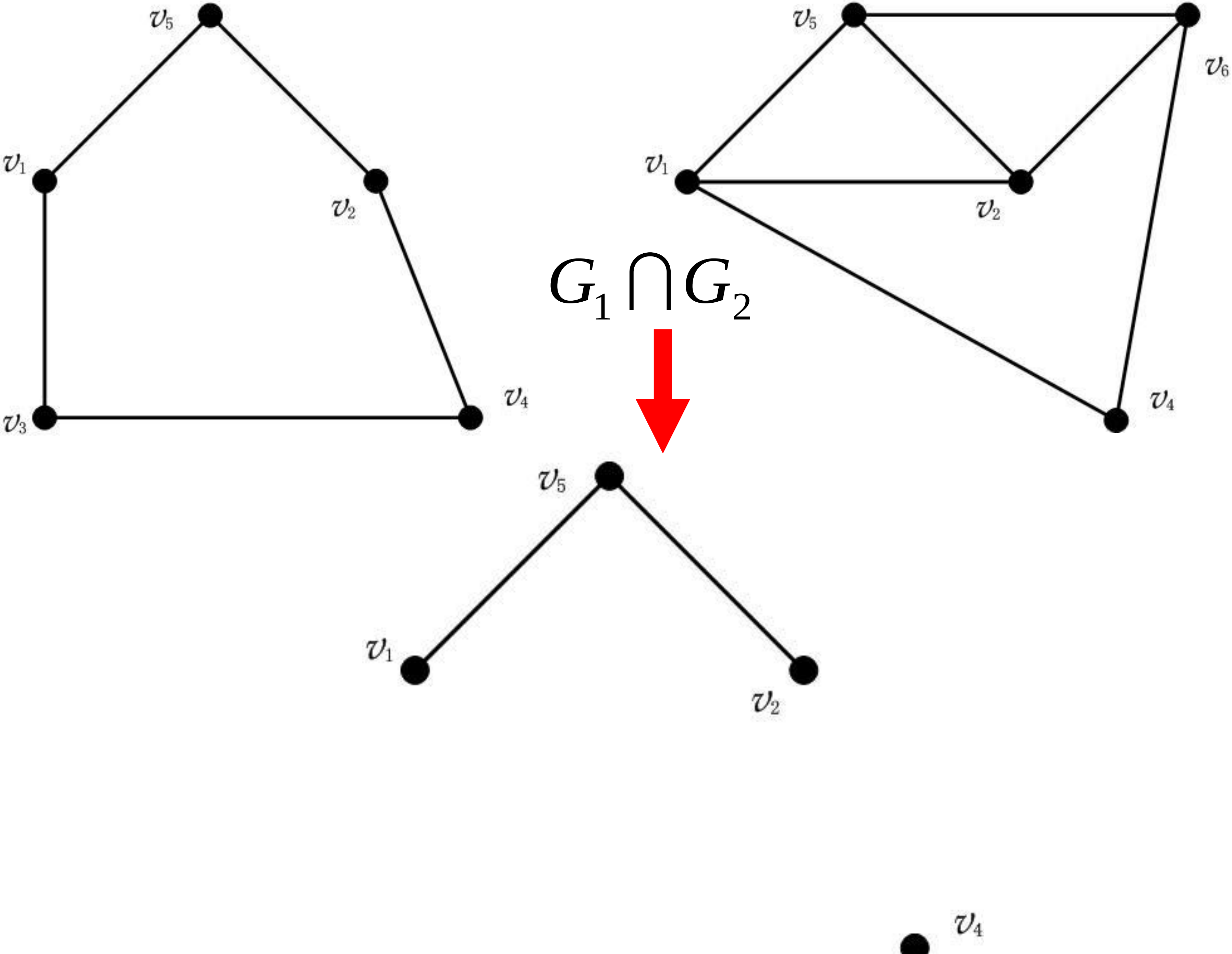
$$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \oplus E_2)$$

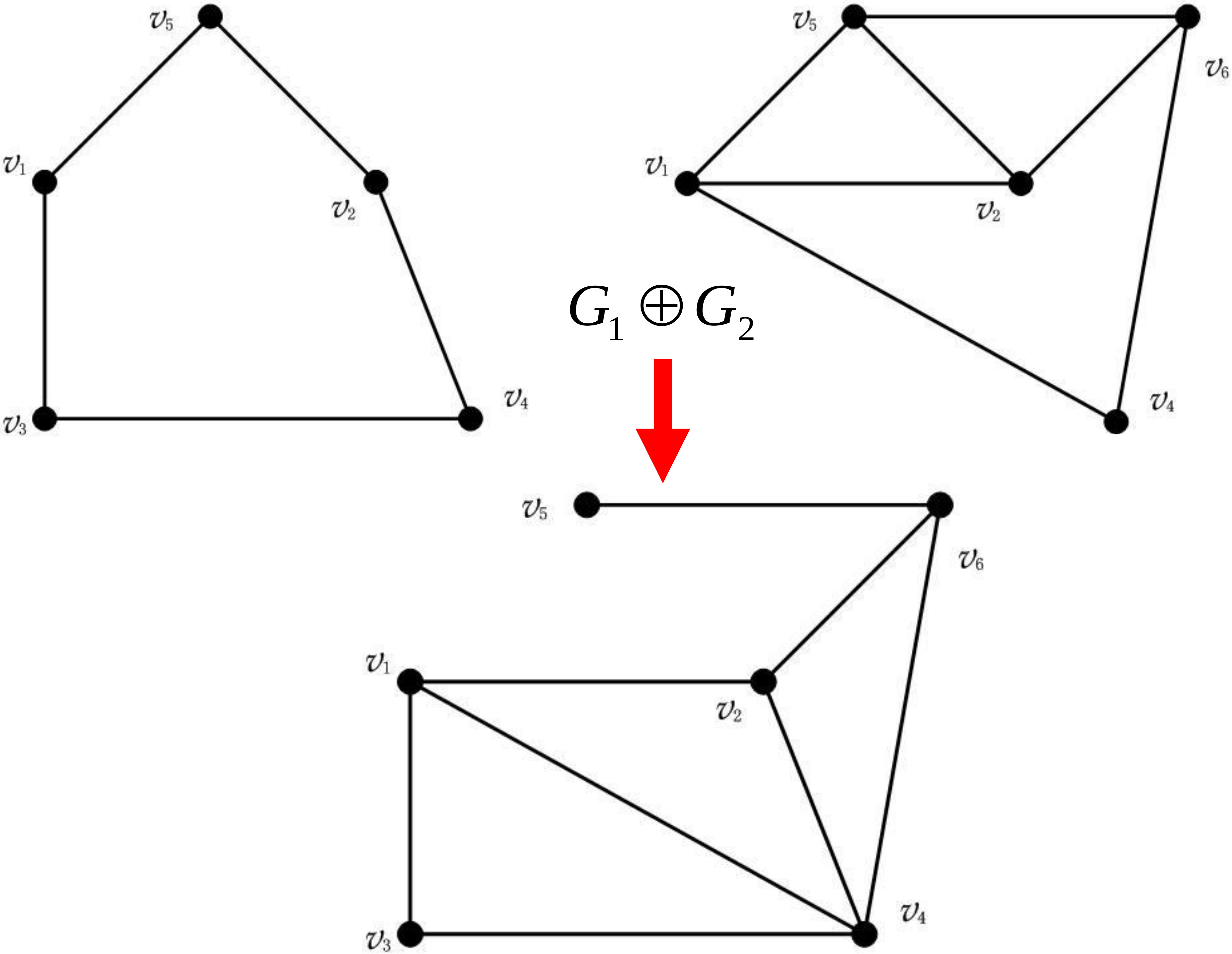
分别称为 G_1 和 G_2 的并、交、对称差

去同存异



v_5
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_1
v_2
v_4
$G_1 \bigcup G_2$
v_5
v_6
v_1
v_2
v_3
v_4


v_5
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_1
v_2
v_4
$G_1 \cap G_2$
v_5
v_1
v_2
v_4


v_5
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_1
v_2
v_4
$G_1 \oplus G_2$
v_5
v_6
v_1
v_2
v_3
v_4

图的基本概念及定义

- 在图G中删掉一个子图H，指删掉H中的各条边，记做G-H。
- 对于简单图G，称K_n-G为G的补图，记做$\overline{G}$
- 从G中删去某个结点v及其关联的边所得到的图记做G-v
- 从G中删掉某条特定的边e，记做G-e
- 显然，G-v是图G的导出子图，G-e是图G的支撑子图

图的基本概念及定义

- 定义1.1.7 如G为无向图，则

$$\Gamma(v)=\{u\mid(v,u)\in E\}$$ 称为v的邻点集

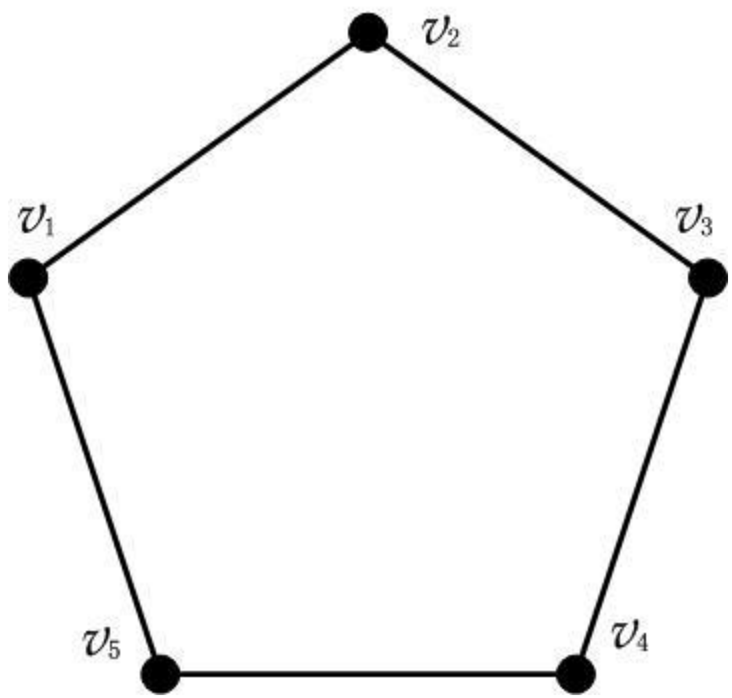
如G为有向图，v是其一个结点，则

$$\Gamma^{+}(v)=\{u\mid(v,u)\in E\}$$

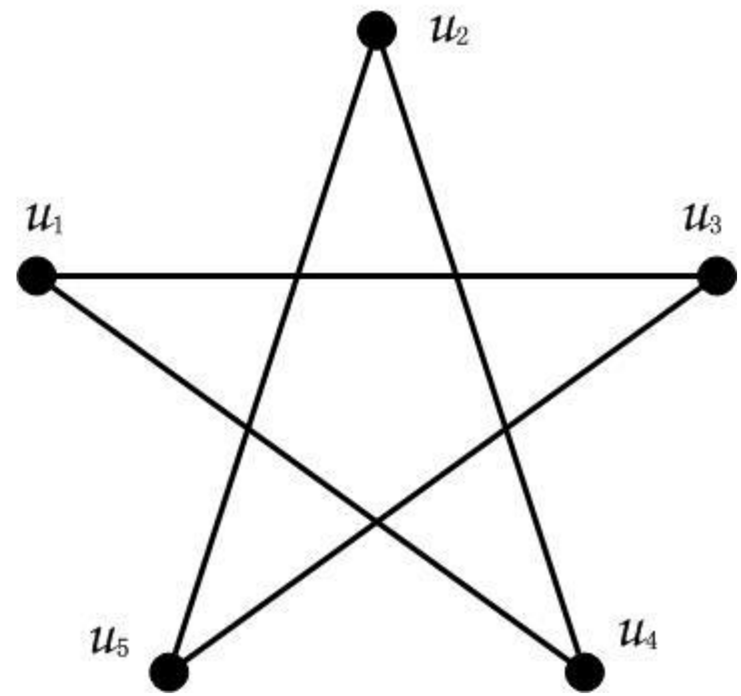
称为v的直接后继集或外邻集；相应地

$$\Gamma^{-}(v)=\{u\mid(u,v)\in E\}$$

称为v的直接前趋集或内邻集



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5



u_1
u_2
u_3
u_4
u_5

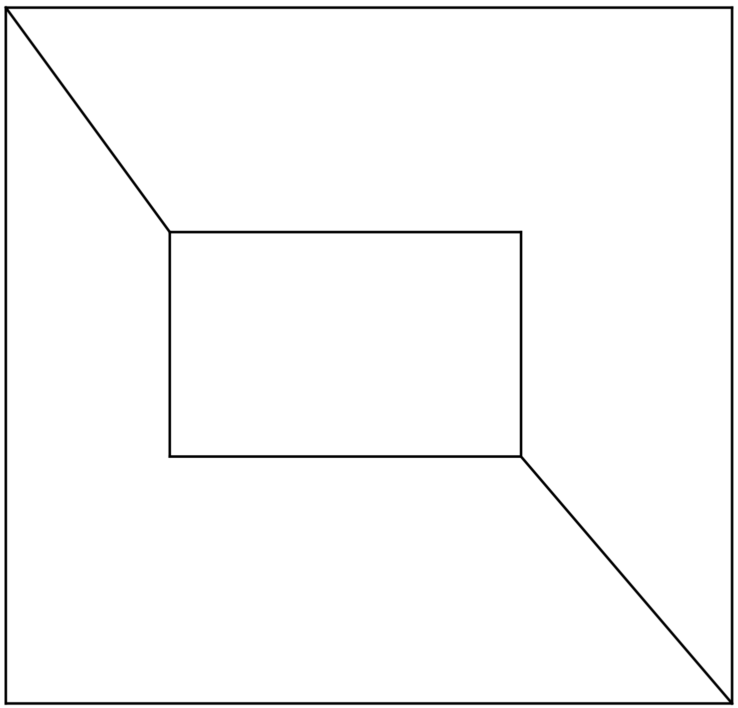
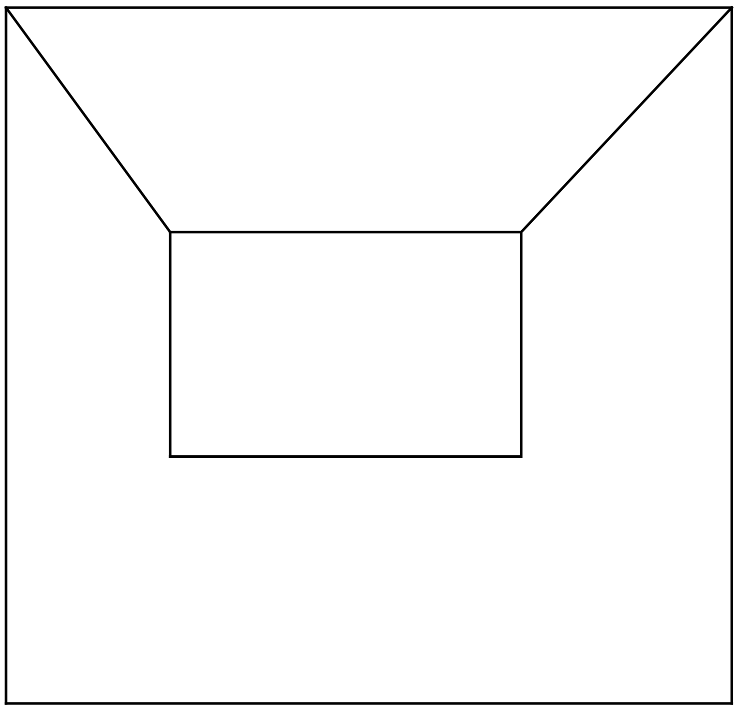
图的基本概念及定义

- 定义1.1.8 两个图$G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$，如果V_1, V_2之间存在双射f，而且$(u,v)\in E_1$，当且仅当$(f(u),f(v))\in E_2$时，称G_1和G_2同构。记做

$$G_1 \cong G_2$$

图的基本概念及定义

- 从定义知，若$G_1 \cong G_2$，必须满足：
  - (1) $|V(G_1)| = |V(G_2)|, |E(G_1)| = |E(G_2)|$
  - (2) G_1和G_2结点度的非增序列相同
  - (3) G_1和G_2存在同构的导出子图
- 如何判定两图同构？

图的基本概念及定义

- 小结：
  - 图、有限图、无限图
  - 有向图、无向图、混合图
  - 相邻结点、始点、终点、直接前驱、直接后继、端点
  - 自环、重边、多重图
  - 结点度、正度、负度
  - 简单图、空图、完全图
  - 权、赋权图、正权图
  - 子图、支撑子图、导出子图、平凡子图
  - 图的交、并、对称差、补图
  - 图的同构

主要内容

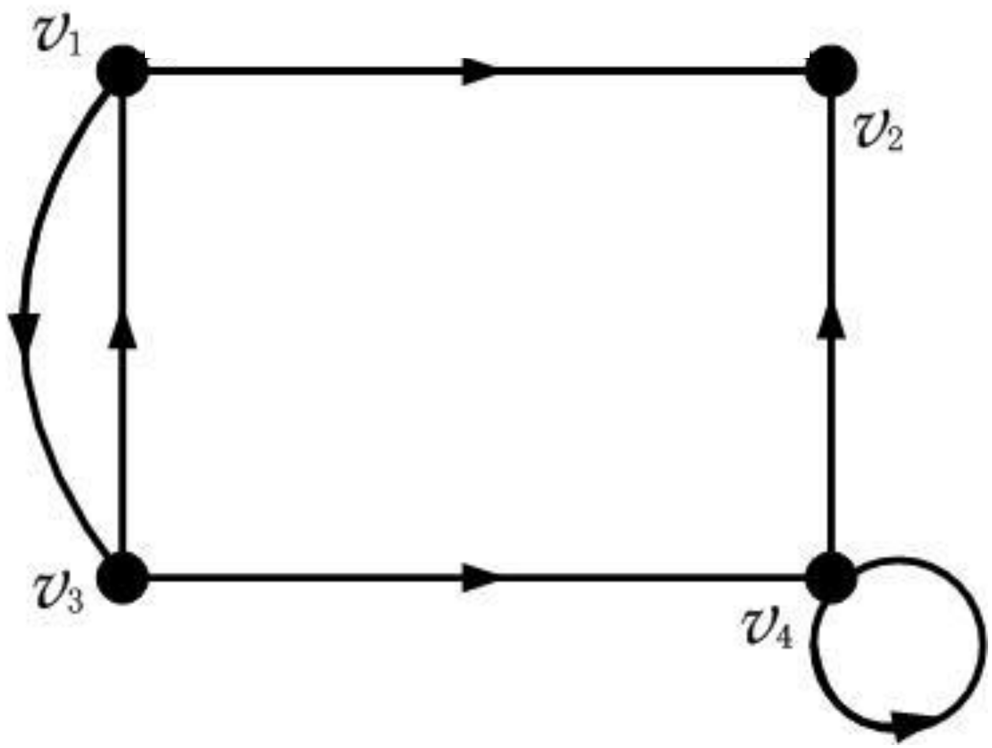
- 图论概述
- 图的基本概念及定义
- 图的代数表示

图的代数表示

- 如何对图进行描述或运算？

- 我们需要用代数的方法来表示图！

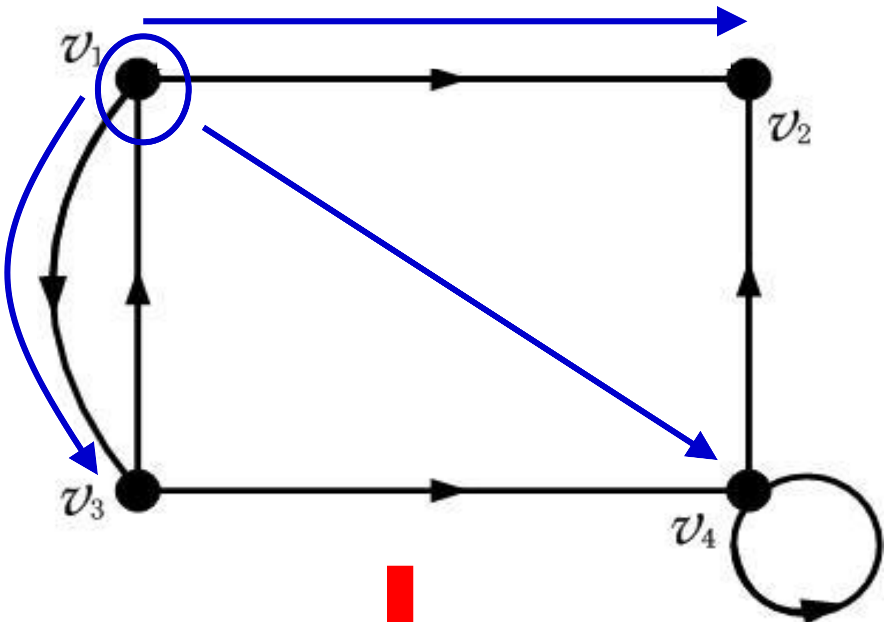
图的代数表示



图的代数表示

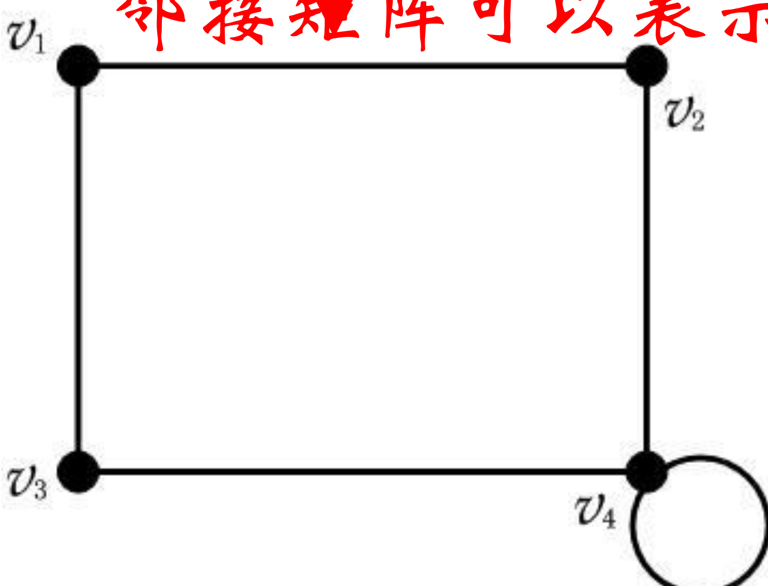
- **邻接矩阵**：表示了结点间的邻接关系
  - 有向图的邻接矩阵A是一个n阶方阵，其元素为：

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad a_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in E \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

邻接矩阵可以表示自环，但无法表示重边

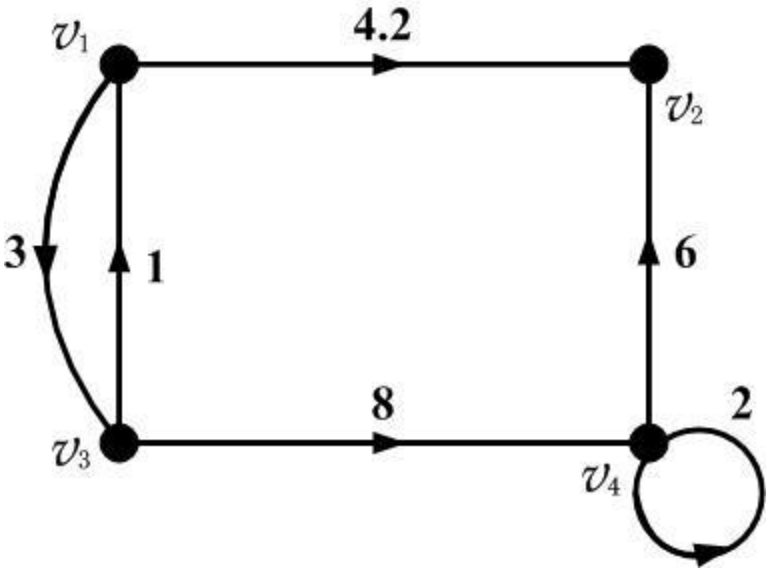


$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

图的代数表示

- **权矩阵**：赋权图常用权矩阵A进行表示，其元素为：

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad a_{ij}=\begin{cases} w_{ij} & (v_i,v_j)\in E \\ 0 & 其它 \end{cases}$$



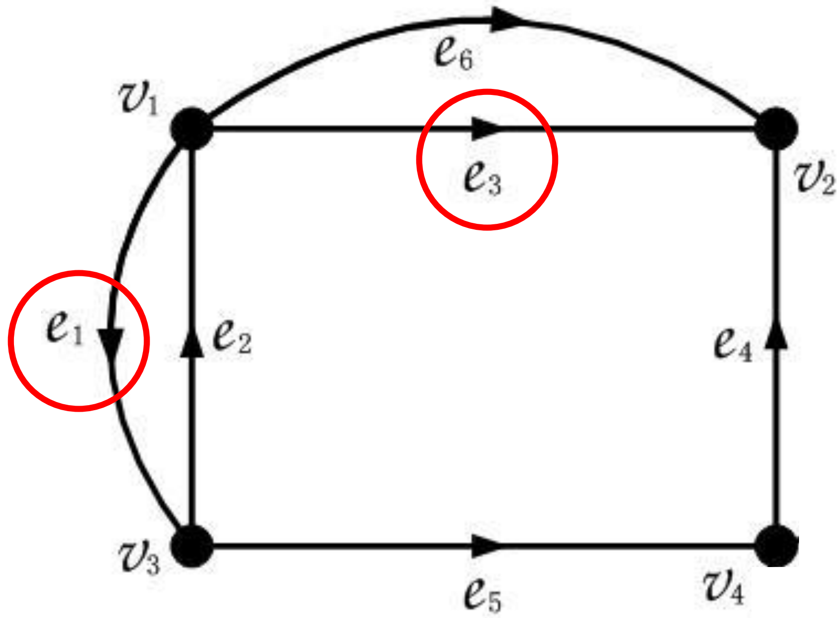
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4.2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

同样，权矩阵可以表示自环，但无法表示重边

图的代数表示

- **关联矩阵**：关联矩阵表示结点与边之间的关联关系。
  - 有向图G的关联矩阵B是n×m的矩阵，当给定结点和边的编号之后，其元素

$$B=[b_{ij}]_{n\times m}\qquad b_{ij}=\begin{cases}1 & e_j=(v_i,v_k)\in E\\ -1 & e_j=(v_k,v_i)\in E\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



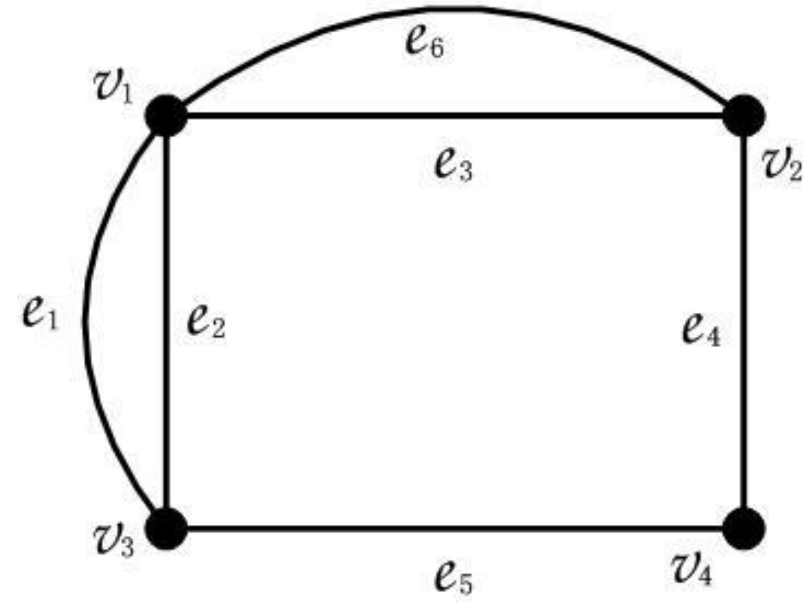
$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & ? \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \end{array}$$

关联矩阵可以表示重边，但无法表示自环

图的代数表示

- 关联矩阵：关联矩阵表示结点与边之间的关联关系。
  - 无向图G的关联矩阵B是n×m的矩阵，当给定结点和边的编号之后，其元素

$$B=[b_{ij}]_{n\times m} \qquad b_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{与}v_i\text{关联} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图的代数表示

- 关联矩阵的性质（有向图）：
  - 每列只有两个非零元：1、－1
  - 第i行非零元的数目恰为结点v_i的度，其中1的数目为其正度，－1的数目为其负度
- 关联矩阵的性质（无向图）：
  - 每列只有一个非零元：1
  - 第i行1的数目恰为结点v_i的度
- 能够表示重边，但不能表示自环

图的代数表示

- 优点：
  - 邻接矩阵、权矩阵和关联矩阵一旦写出代数表达式，则可得到确定图，且非常直观
- 缺点：
  - 不能表示重边或自环
  - 在计算机上存储邻接矩阵与关联矩阵时，将占据较大的存储空间并可能增加计算复杂度。
- 因此引入边列表、正向表、逆向表、邻接表等。

图的代数表示

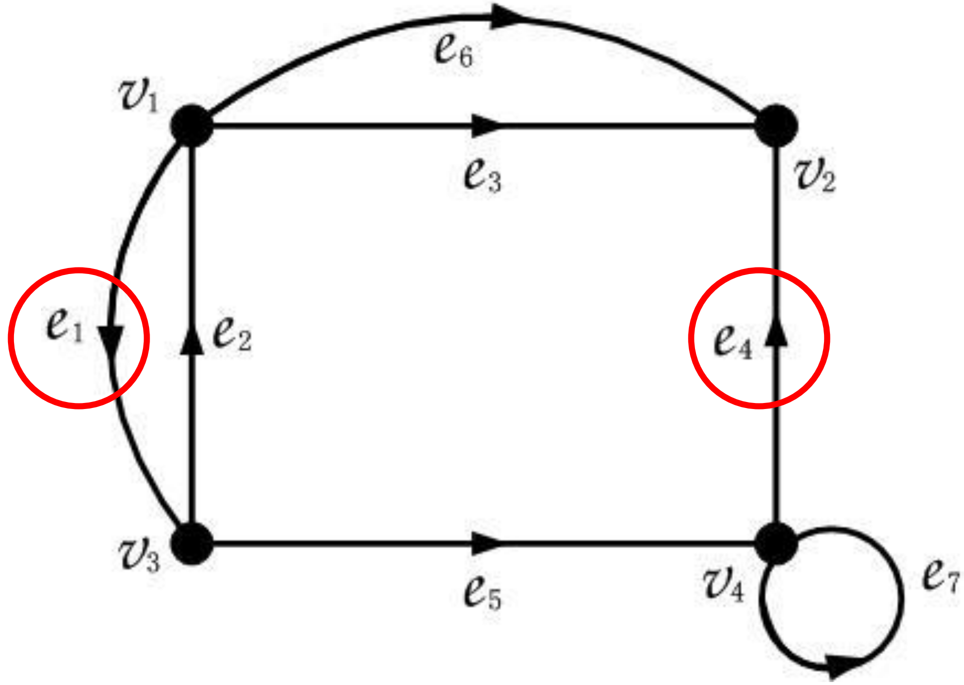
- **边列表**

由两个 m 维向量 A 和 B 组成。

若 $e_k = (v_i, v_j)$，则 $A(k) = i$，$B(k) = j$

如 G 为赋权图，则再增加一个 m 维变量 Z，

若 e_k 的权值为 w_k，则令 $Z(k) = w_k$



$$
\begin{array}{rccccccc}
A: & (1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4) \\
B: & (3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4) \\
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7
\end{array}
$$

边列表实质是关联矩阵的压缩形式并克服了其缺点

图的代数表示

- 赋权图只需增加权值向量Z即可，不详述
- 类似，可以得到无向图的边列表表示

Tsinghua University

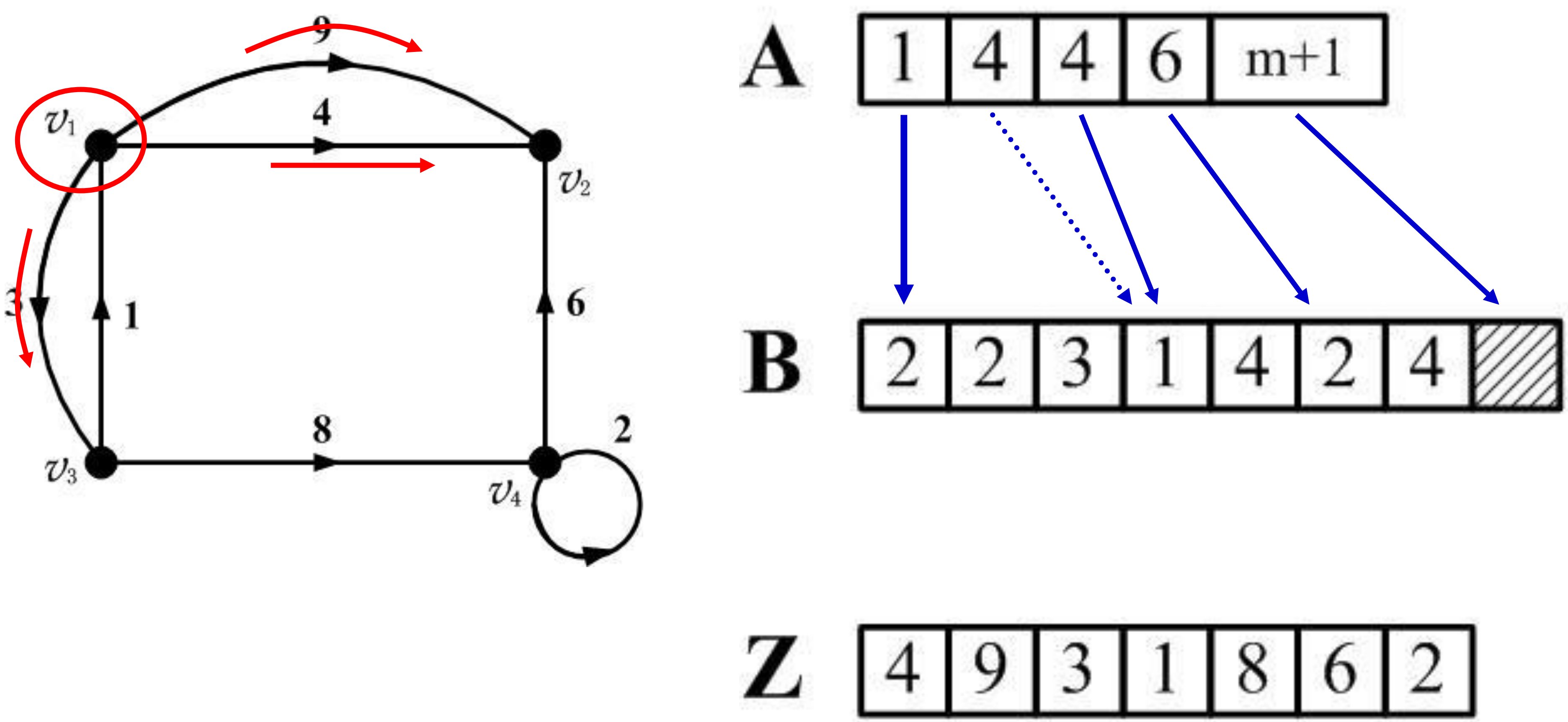
图的代数表示

- **正向表**：当对 G 的结点与边进行编号后，正向表将每个节点的直接后继集中在一起存放。

- 有向图的正向表由一个 $(n+1)$ 维向量 A，一个 m 维向量 B 组成。$A(i)$ 表示结点 v_i 的第一个后继在 B 中的地址，B 中存放这些后继结点的编号

$$A(n+1)=m+1$$

- 对赋权图，用 m 维向量 Z 存放权 $Z(k)=w_k$



v1
v2
v3
v4
9
4
3
1
6
8
2
A
1 4 4 6 m+1
B
2 2 3 1 4 2 4
Z
4 9 3 1 8 6 2

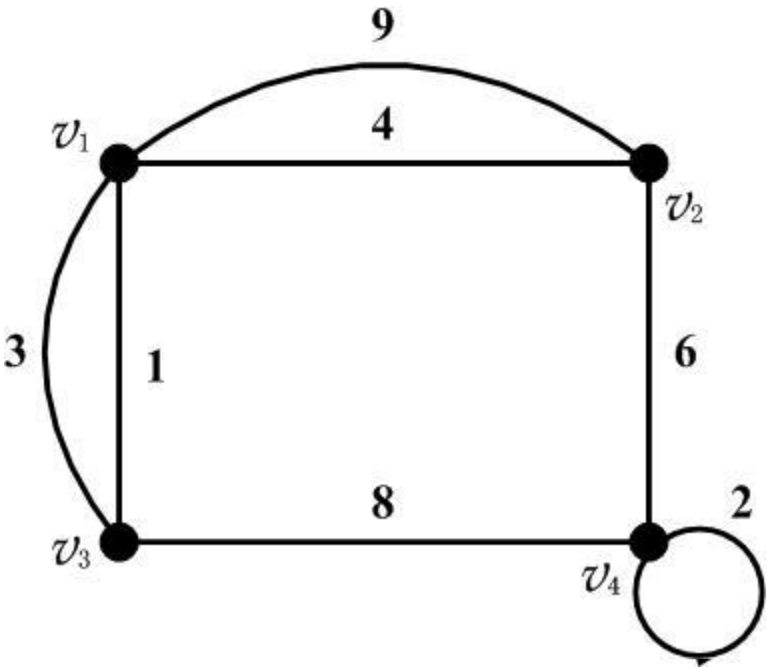
图的代数表示

- 正向表存在下述关系：
  - 1. $d^+(v_i) = A(i+1) - A(i)$
  - 2. $A(i) = \sum_{j=1}^{i-1} d^+(v_j) + 1$
  - 3. 从 $B(A(i))$ 到 $B(A(i+1)-1)$ 的任意一个值，都是 v_i 的直接后继

Tsinghua University

图的代数表示

- 无向图的正向表结构：
- B向量中存放的是相应邻结点的编号，因此为$2m$维
- 相应地，Z向量也变为$2m$维



A

1	4	4	6	m+1

B

2	2	3	1	4	2	4	

Z

4	9	3	1	8	6	2

A

1	5	8	11	m+1

B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
2	2	3	3	1	1	4	1	1	4	2	3	4	4	

Z

4	9	3	1	4	6	9	1	8	3	2	8	6	2

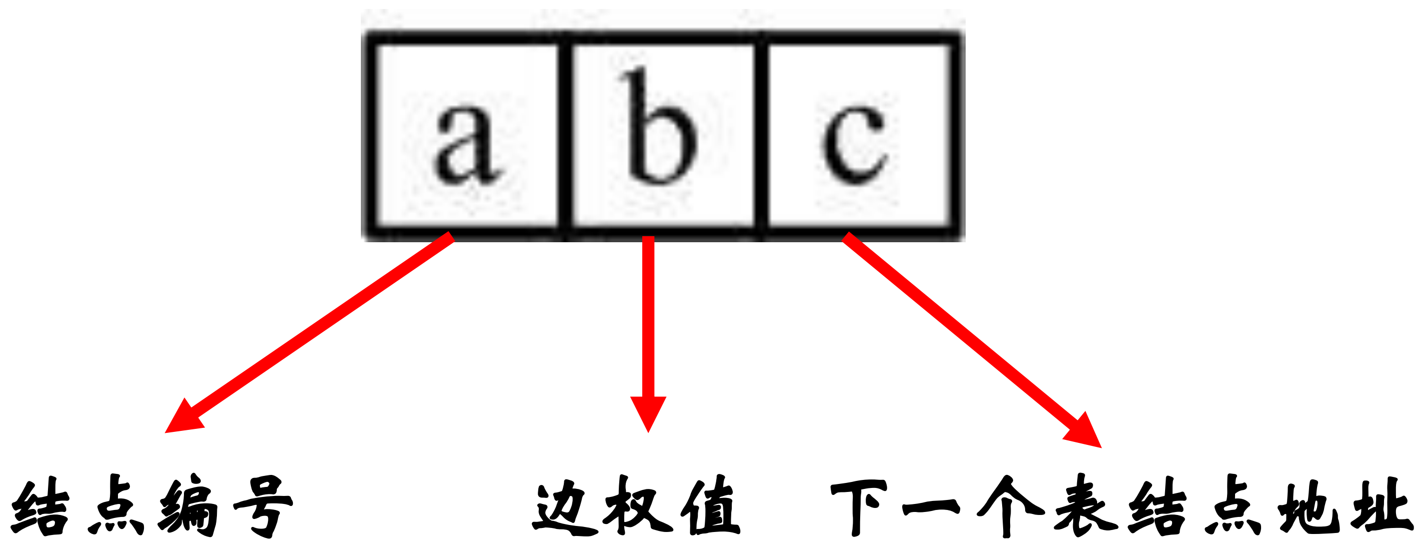
图的代数表示

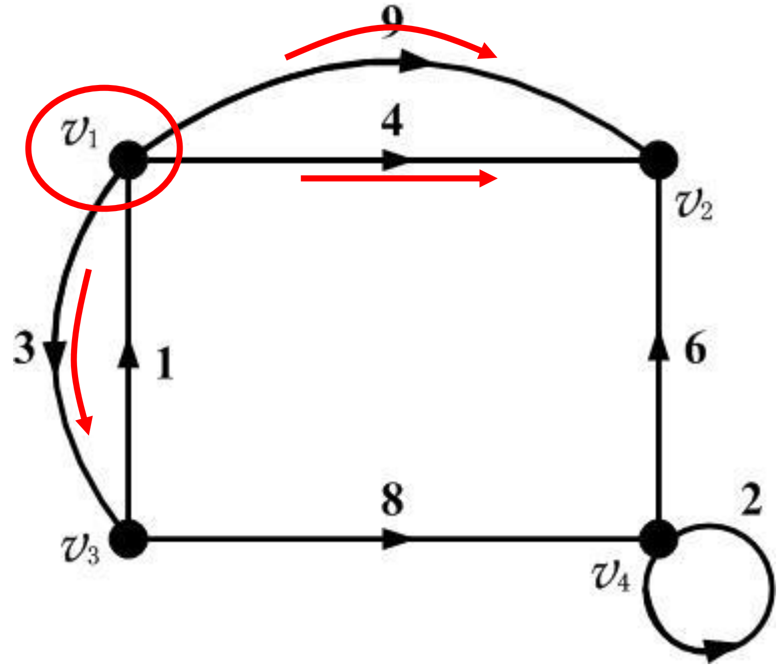
- **逆向表**：与正向表相反，逆向表是将每个结点的直接前趋集中在一起存放。
- 逆向表实质是对有向图邻接矩阵的列进行压缩的结果。

思考：正（逆）向表的优缺点是什么？

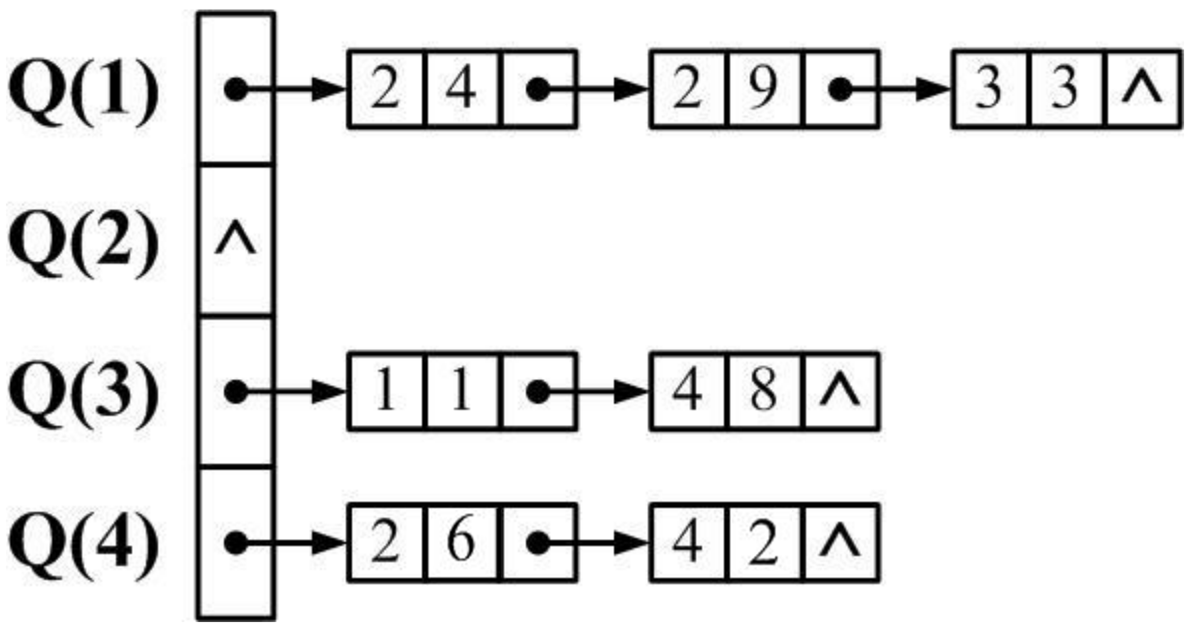
图的代数表示

- **邻接表**：采用单链表结构表示一个图。其基本单元为表结点，如下所示：





9
4
3
1
6
8
2
v_1
v_2
v_3
v_4



Q(1)
Q(2)
Q(3)
Q(4)
2 4
2 9
3 3
1 1
4 8
2 6
4 2

图的代数表示－小结

- 图的代数表示方法：
  - 邻接矩阵
  - 权矩阵
  - 关联矩阵
  - 边列表
  - 正向表
  - 逆向表
  - 邻接表
- 思考：各种表示方法如何相互转换

主要内容

- 图论概述
- 图的基本概念及定义
- 图的代数表示

作业

- 课后习题
  - 2、3、8
- 选作：
  - 1，4