



## 第七章

# 代数结构基本知识 I

---

计算机系网络所：张小平



清华大学  
Tsinghua University



## 主要内容

- 7.1 集合与映射
- 7.2 等价关系
- 7.3 代数系统的概念
- 7.4 同构与同态



清华大学  
Tsinghua University



# 集合与映射

- 设 $S$ 是任意一个集合，如果元素 $a$ 属于 $S$ ，记记为 $a \in S$ ，否则记 $a \notin S$ 。
- $S$ 中不同元素的个数称为该集合的**基数**，用 $|S|$ 表示。
- 当集合 $S$ 确定之后，能相应地得到另一个集合 $\rho(S)$ ， $\rho(S)$ 是 $S$ 的全部子集的集合。  
**的幂集**
- $\rho(S)$  的基数是 $2^{|S|}$



# 集合与映射

- $\rho(S)$  中的元素A，是集合S的一个子集，可以刻划为

$$A = \{x \in S \mid P(x)\}$$

其中P代表某种性质

- 因此A可以解释为：具有性质P的S的元素的集合



# 集合与映射

- 集合运算：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

分配律！



# 集合与映射

- 定义7.1.1 设 $S$ 和 $T$ 是给定的两个集合，如果有  
一个规则 $f$ ，使对任意一个元素 $x \in S$ ，在  
 $T$ 中有唯一的元素 $y$ 与之对应。则称 $f$ 是 $S$ 到 $T$   
的一个映射

记作 $f: S \rightarrow T$  和  $y = f(x)$ ， $S$ 称为 $f$ 的定义域，  
 $T$ 为 $f$ 的值域， $y$ 称为 $x$ 的象， $x$ 称为 $y$ 的原  
象。



# 集合与映射

- 根据定义：
  - $S$  中每个元素在  $T$  中都有象
  - $T$  中的每个元素在  $S$  中不一定都有原象
  - 习惯上我们将  $S$  中全部元素的象所构成的集合称为  $f$  的象，记作  $f(S)$ 。显然  $f(S) \subseteq T$ 。



# 集合与映射

- 定义7.1.2 两个映射 $f, g$

$$f : A_1 \rightarrow B_1$$

$$g : A_2 \rightarrow B_2$$

当且仅当  $A_1 = A_2, B_1 = B_2$ ，且对任意  $x \in A$ ，

都有  $f(x) = g(x)$ ，称 $f$ 和 $g$ 是相等的映射，

记为 $f = g$

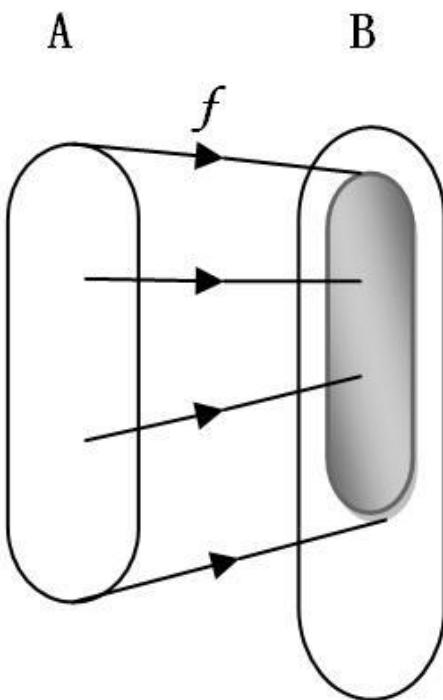


# 集合与映射

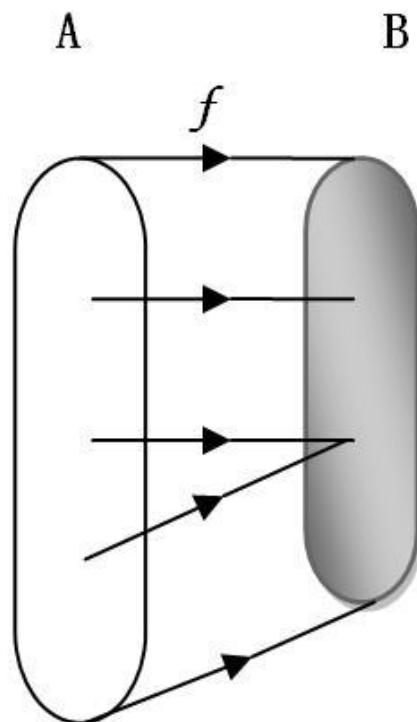
- 定义7.1.3 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的一个映射。
  1. 若对任意  $a_i \neq a_j$ ,  $a_i, a_j \in A$  , 都有  $f(a_i) \neq f(a_j)$  , 称  $f$  是  $A$  到  $B$  的单射。
  2. 若  $f(A) = B$  , 则称  $f$  是  $A$  到  $B$  的满射。
  3. 若  $f$  既是单射又是满射, 则称它是  $A$  到  $B$  的双射。



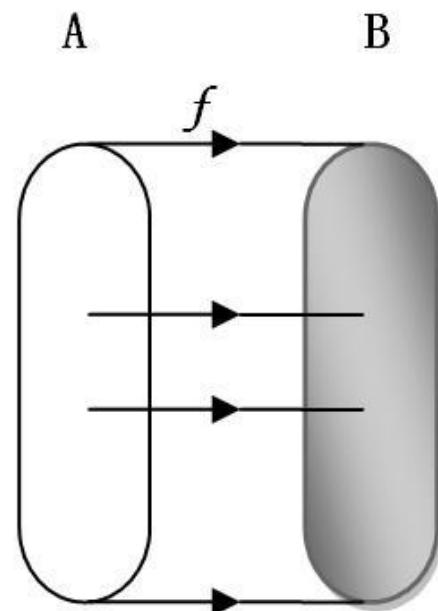
# 集合与映射



单射



满射



双射



清华大学  
Tsinghua University



# 集合与映射

- 定义 7.1.4 设 A、B、C 是三个集合，有两个映射：

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

则由  $f$  和  $g$  可确定一个 A 到 C 的映射  $h$ ,

$$h : a \rightarrow g(f(a))$$

称  $h$  为  $f$  与  $g$  的合成，记作  $h = gf$ ，亦即

$$h(a) = (gf)(a) = g(f(a))$$

$$gf(a) = g(f(a))$$



# 集合与映射

- 映射的合成一般不满足交换律，  
但是满足结合律。

例如：  $\alpha: A \rightarrow B$ ,  $\beta: B \rightarrow C$ ,  $\gamma: C \rightarrow D$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = (\gamma\beta)(\alpha(a)) = ((\underline{\gamma\beta})\alpha)(a)$$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = \gamma((\beta\alpha)(a)) = (\underline{\gamma(\beta\alpha)})(a)$$

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$



# 集合与映射

- 定理7.1.1 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的映射， $I_A$  和  $I_B$  分别是  $A$  与  $B$  中的恒等映射，则

$$I_B f = f \quad , \quad f I_A = f$$

证明：

- $I_B f$  和  $f$  具有相同的定义域  $A$  和相同的值域  $B$ ，且对于任意的  $a \in A$ ，都有

$$I_B f(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

- 因此  $I_B f = f$
- 同理可证：  $f I_A = f$



# 集合与映射

- 定义7.1.5 设两个映射：

$$f : A \rightarrow B \quad g : B \rightarrow A$$

若  $gf = I_A$  成立，则称  $f$  是左可逆映射， $g$  是右可逆映射，并称  $g$  是  $f$  的左逆映射， $f$  是  $g$  的右逆映射。

又若  $fg = I_B$  也成立，则称  $f$  和  $g$  都是可逆映射。

思考：可逆映射是否一定是双射？



# 集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射 $f$ :

$f$ 是左可逆的充要条件是 $f$ 为单射

$f$ 是右可逆的充要条件是 $f$ 为满射



清华大学  
Tsinghua University



# 集合与映射

- 证明：

- 必要性： $f$ 左可逆  $\implies f$ 为单射

- 如何证明  $f$ 是单射？

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- 由  $f$ 左可逆，可知必存在  $g: B \rightarrow A$ ，使得

$$gf = I_A$$

$$a_1 = I_A(a_1) = gf(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = gf(a_2) = I_A(a_2) = a_2$$

必要性得证！





# 集合与映射

- 证明：

- 充分性： $f$ 为单射  $\implies f$ 左可逆

- 如何证明  $f$ 左可逆？构造 $g$ ！  $gf = I_A$

- 定义  $g$ ： $B \rightarrow A$  如下：

$$g(b) = \begin{cases} a, & \text{若存在 } a \in A, \text{ 使 } f(a) = b \\ a_0, & \text{若 } b \notin f(A) \quad \text{且 } a_0 \in A \end{cases}$$

- 此时， $\forall a \in A \quad gf(a) = g(f(a)) = g(b) = a$

- 因此  $gf = I_A$

充分性也得证！



# 集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射 $f$ :

$f$ 是左可逆的充要条件是 $f$ 为单射

$f$ 是右可逆的充要条件是 $f$ 为满射



清华大学  
Tsinghua University



# 集合与映射

- 推论:  $f: A \rightarrow B$  是可逆映射, 当且仅当  $f$  是双射



清华大学  
Tsinghua University



# 集合与映射

- 定理7.1.3 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的映射。

且  $gf = I_A$ ,  $fh = I_B$ , 则  $g = h$

证明：

$$g = gI_B = g(fh) = (gf)h = I_Ah = h$$

可逆映射的逆映射是唯一的！