第七章
代数结构基本知识Ⅱ

计算机系网络所：张小平

Tsinghua University

主要内容

- 7.1 集合与映射
- **7.2 等价关系**
- 7.3 代数系统的概念
- 7.4 同构与同态

等价关系

- 定义7.2.0 设A，B是集合，称集合

$$\{\langle a,b\rangle \mid a\in A, b\in B\}$$

是A和B的**笛卡儿积**，记为A×B

等价关系

- 对于集合A到集合B的任何一个映射 f，都可以写出很多二元组 (a,b)，其中 $a \in A$，$b \in B$。显然，这是A×B的子集。

清華大學
Tsinghua University

等价关系

- 我们将映射的概念加以推广，即定义域不一定是A本身，就引出二元关系。

- 定义7.2.1 集合A和B的笛卡儿积A×B的任一子集R称为A与B之间的一个**二元关系**。

- 当A=B时，称R为集合A上的二元关系

Tsinghua University

等价关系

- 定义7.2.2 设R是集合A上的二元关系，如果
  1.对所有的$a \in A$，都有aRa，即R具有**自反性**
  2.对所有的$a, b \in A$，若aRb，则bRa，即R具有**对称性**
  3.对所有的$a, b, c \in A$，若aRb，bRc，则aRc，即R具有**传递性**

则称R是A上的**等价关系**。用符号~表示。

等价关系

- 设R是集合A上的一个等价关系，对任一元素$a \in A$，可以把所有与a有R关系的元素构成一个集合，称之为A的一个等价类，记做$\bar{a}$，即$\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$

其中，a为该等价类的代表元

等价关系

- 等价类 $\overline{a}$ 的性质：

1. $a \in \overline{a}$

2. 若 $b,c \in \overline{a}$，则 $b \sim c$

等价类中任两个元素都有等价关系！

3. 若 $b \in \overline{a}$ 且 $b \sim x$，则 $x \in \overline{a}$

任两个有等价关系的元素都在同一等价类中！

Tsinghua University

等价关系

- 定理7.2.2　设$\overline{a_1},\overline{a_2},\cdots,\overline{a_n}$是A上由等价关系～确定的全部等价类，那么

$$\bigcup_{i=1}^{n}\overline{a_1}=A \qquad \overline{a_i}\bigcap_{i\neq j}\overline{a_j}=\phi$$

集合A上的等价关系～可确定它的一个划分！

等价关系

- 把由等价关系～确定的等价类的集合称为**等价类族**，用$\overline{A}$表示：

$$\overline{A}=\left\{\ \overline{a}\,|\,a\in A\ \right\}$$

为表示等价类族是由等价关系～确定的，常使用记号A/~表示$\overline{A}$，并称之为集合A关于～的**商集**

商集就是由A上等价关系~确定的等价类的集合

等价关系

- 商集A/~确定后，对每一个 $a \in A$，它必定属于唯一的等价类，即对应商集中某个确定元 $\overline{a}$。
- 令映射 γ: $a \to \overline{a}$ 为集合A到A/~的一个映射，称之为A到A/~的**自然映射**
- 显然，自然映射为满射

Tsinghua University

等价关系-小结

- 基本概念：
  - 二元关系、等价关系
  - 等价类、代表元
- 等价类的性质
  - 等价类的基本性质
  - 商集的概念
  - 等价类与集合划分的关系

主要内容

- 7.1 集合与映射
- 7.2 等价关系
- **7.3 代数系统的概念**
- 7.4 同构与同态

代数系统的概念

- 定义7.3.1 设A是非空集合，A^2到A的一个映射 f： $A^2 \to A$ 称为A的一个二元代数运算，简称**二元运算**

- 定义7.3.2 设A是非空集合，A^n到A的一个映射 f： $A^n \to A$ 称为A的一个 n 元代数运算，简称**n元运算**

代数系统的概念

- 定义7.3.3 设A是一个非空集合，$f_1, f_2, \cdots, f_s$ 分别是A的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 元运算，$k_i (i = 1,2,\cdots,s)$ 是正整数。称集合A和运算 $f_1, f_2, \cdots, f_s$ 所组成的系统为一个**代数系统**(或一个**代数结构**)，简称为一个**代数**，用记号 $(A, f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 表示。A是有限集合时，也称该系统是**有限代数系统**。

代数系统的概念

- 例：　$(R, +, \times)$ 是一个代数系统，其中R为实数集，运算为普通的加法和乘法。

- 例：　$(M_n(R), \times)$是一个代数系统，其中$M_n(R)$是全体 $n \times n$ 实矩阵的集合，运算为通常的矩阵乘法。

代数系统的概念

- 思考：
  - 如何判定一个给定的系统是代数系统？

$(R, \ +, \ \times)$　　**1. 定义的运算应该满足映射成立条件**

$(R, \ \div)$　　**2. 所有运算的封闭性**

$(R, \ -)$

$(N, \ -)$

代数系统的概念

- 例：给定一个系统，集合 $X=\{a,b,c,d\}$，定义二元运算 $\bullet$ 如下表：

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	b	d
c	c	a	b	c
d	c	a	c	c

Tsinghua University

代数系统的概念

- 例：设 $Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{m-1}\}$ 是整数模 m 同余所确定的等价类集合，Z_m 上的运算 + 定义如下：

$$\overline{i}+\overline{j}=\overline{(i+j)(\bmod\ m)}$$

则 $(Z_m\ ,+)$ 是代数系统！

我们称该运算为模 m 加法运算。

代数系统的概念

- 代数系统 $(X, \bullet)$ 中

  如果 $\forall x_i, x_j \in X$，

  都有 $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$ 成立，

  则称 $(X, \bullet)$ 对于二元运算 $\bullet$ 适合**交换律**。

  $(M_n(R), +)$

  $(M_n(R), \times)$

代数系统的概念

- 代数系统 $(X, \bullet)$ 中

  如果 $\forall x_i, x_j, x_k \in X$ ，

  都有 $(x_i \cdot x_j) \cdot x_k = x_i \cdot (x_j \cdot x_k)$ 成立，

  则称代数系统 $(X, \bullet)$ 对于 $\bullet$ 适合**结合律**。

$(R, +, \times)$

$(R, -)$

$(R^+, \div)$

代数系统的概念

- 定理7.3.1 若 $(X, \bullet)$ 对二元运算•适合结合律，则对于任何正整数 m 和 n，有

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $\left(x^m\right)^n = x^{m \times n}$

指数律！

代数系统的概念

- 定义7.3.4 给定一个代数系统 $V=(X,\ \bullet)$ ，如果 $\$e_L$ Î X，使得 $\forall x \in X$，都有 $e_L \times x = x$，则称 e_L 是X上关于运算•的一个**左单位元**。若 e 既是左单位元又是右单位元，则称之为**单位元**。

代数系统的概念

- 定理7.3.2 若代数系统 $V=(X,\ \bullet)$ 既有左单位元 e_L，又有右单位元 e_R，则 $e=e_L=e_R$ 是X的唯一的单位元。

代数系统单位元唯一！

代数系统的概念

- 例：$(R, +)$ 单位元是 “0”

  $(R, \times)$ 单位元是 “1”

  $(R, -)$ 右单位元是 “0”

代数系统的概念

- 定义7.3.5 设 $V=(X, \bullet)$ 是有单位元 e 的代数系统，对于 $x\in X$，若 $\exists x'\in X$，使得 $x'\cdot x=e$，则称 x 是**左可逆的**，并称 x' 是 x 的一个**左逆元**；若 $\exists x''\in X$，使得 $x\cdot x''=e$，则称 x 是**右可逆的**，并称 x'' 是 x 的一个**右逆元**；若 x 既是左可逆的又是右可逆的，则说 x 是**可逆元**。

代数系统的概念

- 定理7.3.3 设代数系统 $V=(X,\ \bullet)$ 具有单位元e，且适合结合律，对于 $x\in X$ ，如果x 有左逆元x'，又有右逆元x''，则 x 有唯一逆元

$$x^{-1}=x'=x''\ ,\ \text{并且}\ \left(x^{-1}\right)^{-1}=x\ 。$$

代数系统逆元素唯一！

代数系统的概念

- 如果代数系统 $V=(X,\ \bullet)$ 中每个元都有逆元，

则 $\forall a,b,c\in X$

$$ab=ac \quad\Rightarrow\quad b=c$$

$$ba=ca \quad\Rightarrow\quad b=c$$

消去律！

代数系统的概念-小结

- 基本概念：
  - 二元运算、n元运算
  - 代数系统定义
  - 代数系统的判定
- 代数系统的运算
  - 结合律、交换律、指数律、消去律
- 代数系统的单位元
- 代数系统中的逆元素

主要内容

- 7.1 集合与映射
- 7.2 等价关系
- 7.3 代数系统的概念
- **7.4 同构与同态**

Tsinghua University

同构与同态

- 有些代数系统，它们除了元素的名称和运算符号不同以外，在结构上是没有差别的

例：

$$(\{a,b\}, \bullet) \qquad (\{0,1\}, \times)$$

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\times$	0	1
0	0	1
1	1	0

同构与同态

- 定义7.4.1 设$V_1=(X,o_1,o_2,\cdots,o_r)$和$V_2=(Y,\overline{o_1},\overline{o_2},\cdots,\overline{o_r})$是两个代数系统，若$o_i$和$\overline{o_i}$都是$k_i$元运算，且$k_i(i=1,2,\cdots,r)$是正整数

  则说代数系统V_1和V_2是同类型的。

同构与同态

- 定义7.4.2 设 $(X, \bullet)$ 和 $(Y, *)$ 是两个同类型的代数系统，$f: \quad X \to Y$ 是一个双射。

  如果 $\forall a,b \in X$，恒有 $f(a \bullet b) = f(a) * f(b)$

  则称 f 是 $(X, \bullet)$ 到 $(Y, *)$ 的一个同构映射，

  并称 $(X, \bullet)$ 与 $(Y, *)$ 同构，用 $X \cong Y$ 表示。

同构与同态

- 定义7.4.3 设 $(X,\ \bullet)$ 和 $(Y,\ *)$ 是两个同类型的代数系统，$f:\quad X \to Y$ 是一个映射。

  如果 $\forall a,b \in X$，恒有 $f(a \bullet b) = f(a) * f(b)$

  则称 f 是 $(X,\ \bullet)$ 到 $(Y,\ *)$ 的一个同态映射，

  简称同态。

Tsinghua University

同构与同态

- 问题：
  - 如果给定一个映射 $f: \quad X \rightarrow Y$ 是从代数系统 $(X, \bullet)$ 到 $(Y, *)$ 的一个同态，则必定有 $f(X) \quad Y$
  - 那么，$f(X)$ 和运算 $*$ 是否能够构成一个代数系统？

同构与同态

- 定义7.4.4 设 $(X, \bullet)$ 是一个代数系统，R 是 X 的一个非空子集，如果 R 在运算 $\bullet$ 下是封闭的，则称 $(R, \bullet)$ 是 $(X, \bullet)$ 的一个子代数系统或子代数。

同构与同态

- 定理7.4.1 设映射 $f: \quad X \to Y$ 是从代数系统 $(X, \bullet)$ 到 $(Y, *)$ 的一个同态，则 $(f(X), *)$ 是 $(Y, *)$ 的一个子代数，并称 $f(X)$ 是在 f 作用下 X 的**同态象**

Tsinghua University 清華大學

同构与同态

- 定义7.4.5 设映射 $f: \quad X \to Y$ 是从代数系统 $(X, \bullet)$ 到 $(Y, *)$ 的一个同态，如果：

1. f 是单射，则称 f 为单一同态
2. f 是满射，则称 f 是满同态，用 $X \sim Y$ 表示，并称Y是X的一个同态象。

同构与同态

- 定理7.4.2 给定代数系统 $(X, \bullet)$ 和 $(Y, *)$，其中 $\bullet$ 和 $*$ 都是二元运算。

设 $f: X \to Y$ 是 $(X, \bullet)$ 到 $(Y, *)$ 的满同态，则

1、如果 $\bullet$ 是可交换的或可结合的运算，则 $*$ 也是可交换的或可结合的运算。

2、若 $(X, \bullet)$ 中运算 $\bullet$ 具有单位元 e，则 $(Y, *)$ 中运算 $*$ 具有单位元 $f(e)$ 。

3、对运算 $\bullet$，如果每一个元素 $x \in X$ 都有逆元 x^{-1}，则对运算 $*$，每一个元素 $f(x) \in Y$ 都具有逆元 $f(x^{-1})$

清華大學 Tsinghua University

同构与同态

- 定义7.4.6 代数系统 $(X, \bullet)$ 上的同态映射

$$f: \quad X \to X$$

称为**自同态**，若 f 是同构映射，则称之为**自同构**。

同构与同态-小结

- 基本概念：
  - 同类型代数系统
  - 同构、同态
  - 子代数系统
  - 单一同态、满同态
  - 自同态、自同构
- 同态基本性质

清華大学 Tsinghua University

主要内容

- 7.1 集合与映射
- 7.2 等价关系
- 7.3 代数系统的概念
- **7.4 同构与同态**