

18

Orthogonal Distance Regression

正交回归

输入和输出数据都参与主成分分析，构造正交空间



数学展现出秩序、对称和有限——这些都是美的极致形态。

The mathematical sciences particularly exhibit order, symmetry, and limitations; and these are the greatest forms of the beautiful.

—— 亚里士多德 (Aristotle) | 古希腊哲学家 | 384 ~ 322 BC



```
numpy.linalg.eig() 特征值分解
numpy.linalg.svd() 奇异值分解
numpy.mean() 计算均值
numpy.std() 计算均方差
numpy.var() 计算方差
pandas_datareader.get_data_yahoo() 下载股价数据
scipy.odr 正交回归
scipy.odr.Model() 构造正交回归模型
scipy.odr.ODR() 设置正交回归数据、模型和初始自
scipy.odr.RealData() 加载正交回归数据
statsmodels.api.add_constant() 增加 OLS 常数项
statsmodels.api.OLS 最小二乘法线性回归
```



18.1 主成分与回归

本章主要介绍一种和主成分分析息息相关的回归方法——**正交回归** (orthogonal regression)。

正交回归，也叫做**正交距离回归** (Orthogonal Distance Regression, ODR)，又叫**全线性回归** (total linear regression)。平面上，最小二乘法线性回归 OLS 仅考虑纵坐标方向上误差，如图 1 (a) 所示；而正交回归 TLS 同时考虑纵横两个方向误差，如图 1 (b) 所示。

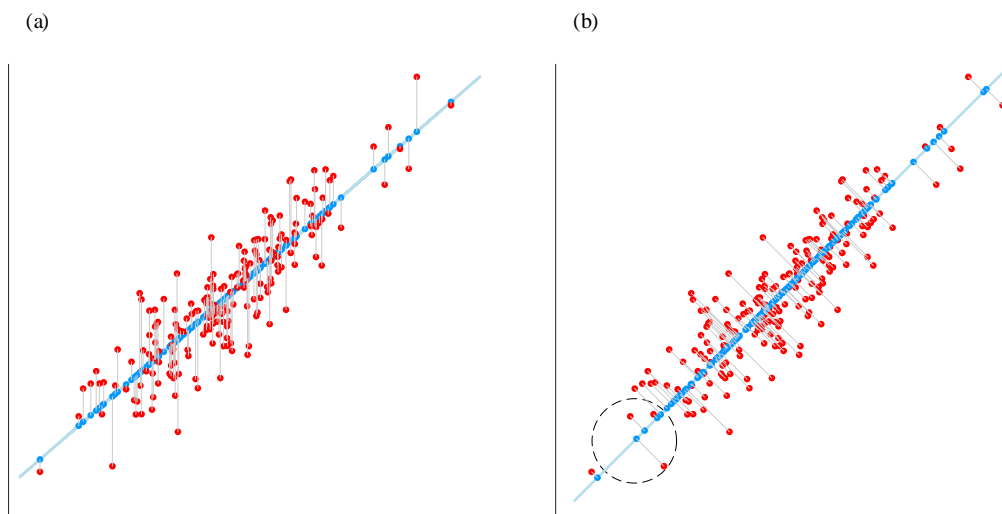


图 1. 对比 OLS 和 TLS 线性回归

从主成分分析角度，正交回归特点是输入数据 \mathbf{X} 和输出数据 \mathbf{y} 都参与主成分分析。按照特征值从小到大顺序排列特征向量 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D, \mathbf{v}_{D+1}]$ ，用其中前 D 个向量 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D]$ 构造一个全新超平面 H 。利用 \mathbf{v}_{D+1} 垂直于超平面 H 便可以求解出回归系数。

下面用两特征 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ 数据作例子，聊一下主成分回归的思想。如图 2 所示， \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 为输入数据， \mathbf{y} 为输出数据；通过主成分分析， \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_2 和 \mathbf{y} 正交化之后得到 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 (根据特征值从小到大排列)； \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 两两正交。第一主成分 \mathbf{v}_1 和第二主成分 \mathbf{v}_2 构造平面 H 。 \mathbf{v}_3 垂直于平面 H ，通过这层关系求解出正交回归系数。

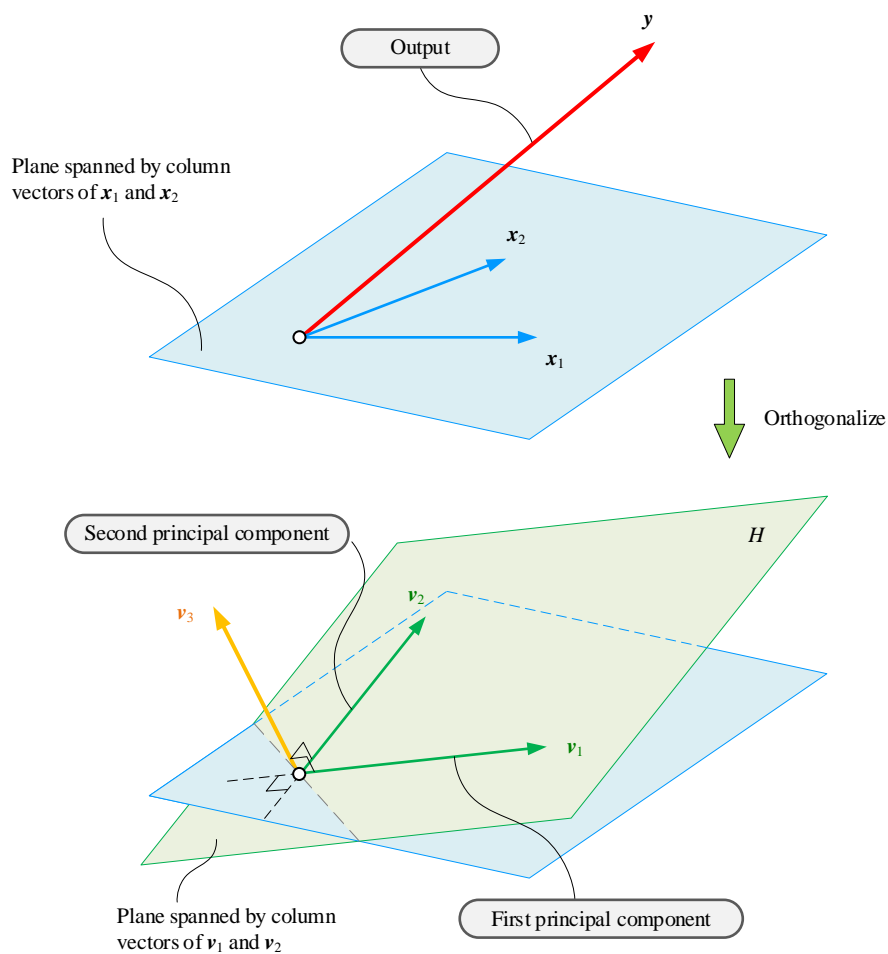
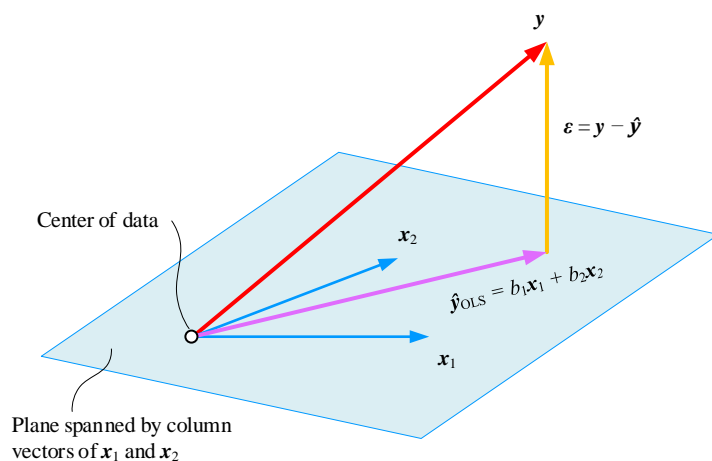
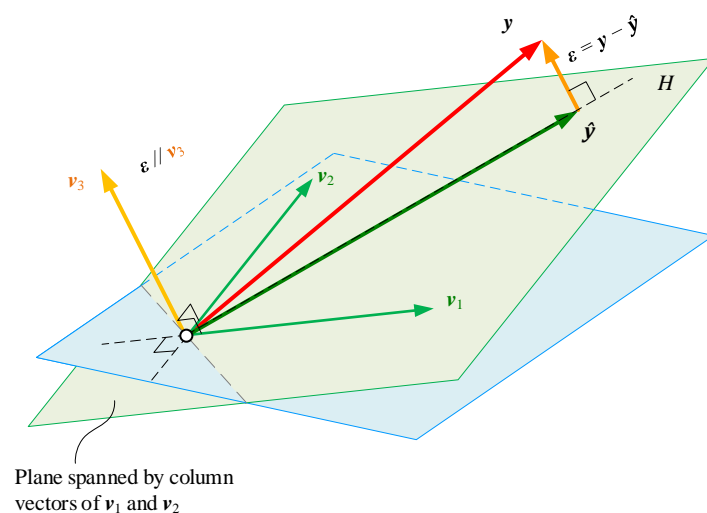


图 2. 通过主成分分析构造正交空间

前文介绍的线性回归采用算法叫做**普通最小二乘法** (Ordinary Least squares, OLS); 而正交回归采用的算法叫做**完全最小二乘法** (Total Least Squares, TLS)。如图 3 所示, 最小二乘回归, 将 y 投影到 x_1 和 x_2 构造的平面上。而对于正交回归, 将 y 投影到 H , 得到 \hat{y} 。而残差, $\varepsilon = y - \hat{y}$, 平行于 v_3 。再次强调, 平面 H 是由第一主成分 v_1 和第二主成分 v_2 构造。

此外, 建议读者完成本章学习之后, 回过头来再比较图 3 和图 4。这样, 相信大家会更清楚 OLS 和 TLS 之间的区别。

图 3. 最小二乘回归，将 y 投影到 x_1 和 x_2 构造的平面上图 4. 正交回归，将输出数据 y 投影到 H

下一节首先用一元正交回归给大家建立正交回归的直观印象，本章后续将逐步扩展到二元回归和多元回归。

18.2 一元正交回归

设定一元正交回归解析式如下：

$$y = b_0 + b_1x \quad (1)$$

其中， b_0 为截距项， b_1 为斜率。

如图 5 所示， x - y 平面上任意一点 $(x^{(i)}, y^{(i)})$ 和正交回归直线距离可以利用下式获得：

$$d_i = \frac{y^{(i)} - (b_0 + b_1 x^{(i)})}{\sqrt{1 + b_1^2}} \quad (2)$$

当 $i = 1 \sim n$ 时， d_i 构成列向量为 \mathbf{d} ：

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{y} - (b_0 + b_1 \mathbf{x})}{\sqrt{1 + b_1^2}} \quad (3)$$

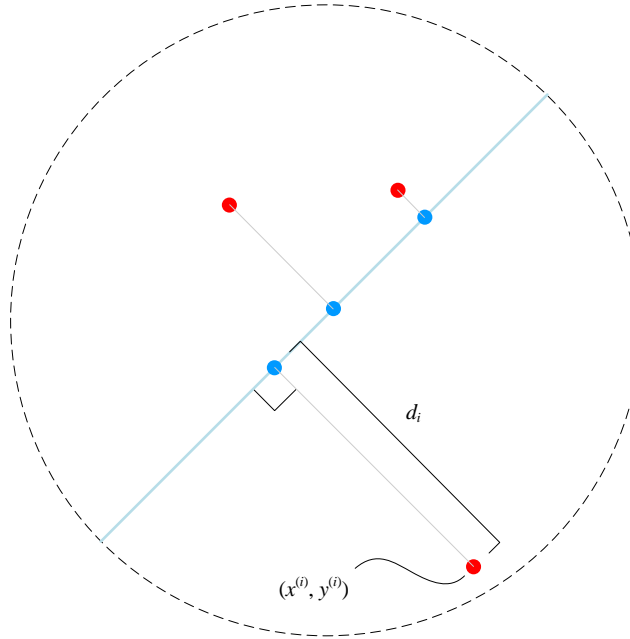


图 5. 正交投影几何关系

构造如下优化问题， b_0 和 b_1 为优化变量，优化目标为最小化欧氏距离平方和：

$$\arg \min_{b_0, b_1} f(b_0, b_1) = \|\mathbf{d}\|^2 = \mathbf{d}^T \mathbf{d} \quad (4)$$

将 (3) 代入 $f(b_0, b_1)$ 得到：

$$f(b_0, b_1) = \frac{(\mathbf{y} - (b_0 + b_1 \mathbf{x}))^T (\mathbf{y} - (b_0 + b_1 \mathbf{x}))}{1 + b_1^2} \quad (5)$$

为了方便计算，也引入全 1 向量 $\mathbf{1}$ ，它和 \mathbf{x} 形状一样为 n 行 1 列向量； $f(b_0, b_1)$ 展开整理为下式：

$$f(b_0, b_1) = \frac{nb_0^2 + 2b_0b_1\mathbf{x}^T\mathbf{I} + b_1^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2b_0\mathbf{y}^T\mathbf{I} - 2b_1\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}}{1 + b_1^2} \quad (6)$$

$f(b_0, b_1)$ 对 b_0 偏导为 0，构造如下等式：

$$\frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_0} = \frac{2nb_0 + 2b_1\mathbf{x}^T\mathbf{I} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{I}}{1 + b_1^2} = 0 \quad (7)$$

$f(b_0, b_1)$ 对 b_1 偏导为 0，构造如下等式：

$$\frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_1} = \frac{2b_1\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2b_0\mathbf{x}^T\mathbf{I} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{1 + b_1^2} - \frac{(nb_0^2 + 2b_0b_1\mathbf{x}^T\mathbf{I} + b_1^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2b_0\mathbf{y}^T\mathbf{I} - 2b_1\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y})2b_1}{(1 + b_1^2)^2} = 0 \quad (8)$$

观察 (7)，容易用 b_1 表达 b_0 ：

$$b_0 = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{I} - b_1\mathbf{x}^T\mathbf{I}}{n} = \mathbf{E}(\mathbf{y}) - b_1\mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

其中，

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{I}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(i)}}{n} \\ \mathbf{E}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{I}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y^{(i)}}{n} \end{cases} \quad (10)$$

将 (9) 给出 b_0 解析式代入 (8) 获得仅含有 b_1 的一元二次方程：

$$b_1^2 + kb_1 - 1 = 0 \quad (11)$$

其中，

$$\begin{aligned} k &= \frac{n\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x}^T\mathbf{I} - n\mathbf{y}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{I}\mathbf{y}^T\mathbf{I}}{n\mathbf{x}^T\mathbf{y} - \mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{y}^T\mathbf{I}} \\ &= \frac{\left(\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}{n} - \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{x}^T\mathbf{I}}{n^2}\right) - \left(\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}{n} - \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{I}\mathbf{y}^T\mathbf{I}}{n^2}\right)}{\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{n} - \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{I}\mathbf{y}^T\mathbf{I}}{n^2}} \\ &= \frac{\text{var}(\mathbf{x}) - \text{var}(\mathbf{y})}{\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y} \end{aligned} \quad (12)$$

上式，不区分求解方差协方差时， $1/(n-1)$ 和 $1/n$ 之间差别。

求解 (11) 一元二次方程，得到 b_1 解如下：

$$b_1 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad (13)$$

将 (12) 给出的 k ，代入 (13)，整理得到 b_1 解：

$$b_1 = \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)^2}}{2\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y} \quad (14)$$

发现 b_1 两个解即**主成分分析** (principal component analysis, PCA) 主元方向。

构造 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 数据矩阵，它的协方差矩阵 Σ 可以记做：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \\ \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

对 Σ 进行特征值分解，得到两个特征向量：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)^2}}{2\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)^2}}{2\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Σ 两个特征值，从大到小排列：

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{(\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)^2 + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2}\right)^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{(\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)^2 + \left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2}\right)^2} \quad (17)$$

特征值较大的特征向量为正交回归直线切线向量；特征值较小特征向量对应直线法线向量，这样求得 b_1 斜率。有了上述思路，便可以用 PCA 分解来获得正交回归系数，这是下一节要讲解的内容。

如下代码首先介绍如何利用 `scipy.odr` 可以求解得到正交回归系数。构造线性函数 `linear_func(b, x)`，利用 `scipy.odr.Model(linear_func)` 创建线性模型；然后，采用 `scipy.odr.RealData()` 加载数据，再用 `scipy.odr.ODR()` 整合数据、模型和初始值，输出为 `odr`。`odr.run()` 求解回归问题。然后，用 `pprint()` 打印结果。

```
Beta: [0.00157414 1.43773257]
Beta Std Error: [0.00112548 0.05617699]
Beta Covariance: [[ 1.21904872e-02 -2.43641786e-02]
 [-2.43641786e-02 3.03712371e+01]]
Residual Variance: 0.00010390932459480641
Inverse Condition #: 0.22899877744275976
Reason(s) for Halting:
Sum of squares convergence
```

一元正交回归的解析式为：

$$y = 1.4377x + 0.00157 \quad (18)$$

下一节将介绍如下采用主成分分析来求解一元正交回归系数，并比较正交回归和最小二乘法线性回归。

18.3 几何角度看正交回归

图 6 所示为正交回归和 PCA 分解关系，发现主元回归直线通过数据中心 $(E(x), E(y))$ ，回归直线方向和主元方向 v_1 平行，垂直于次元 v_2 方向。即，次元方向 v_2 和直线法向量 n 平行。

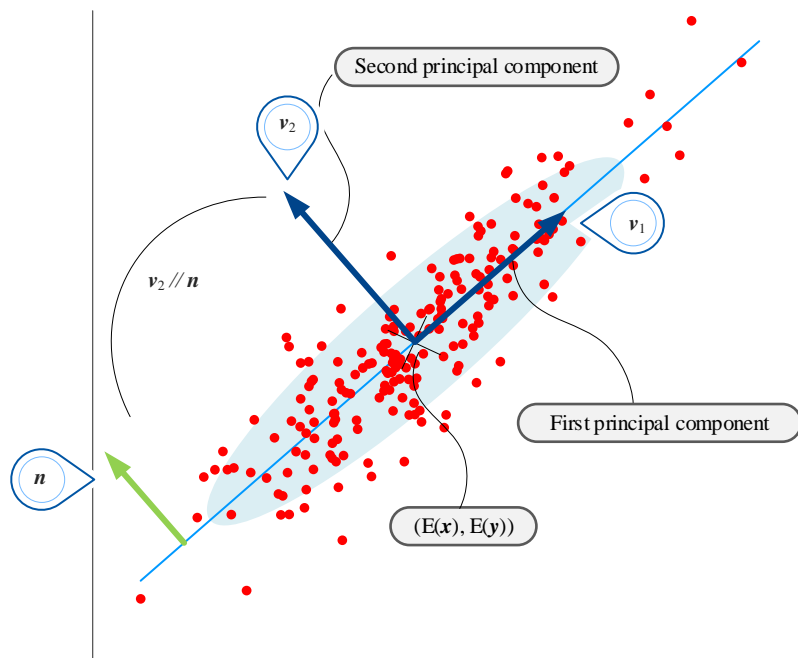


图 6. 正交回归和 PCA 分解关系

对于 (1) 所示一元一次函数，构造二元 $F(x, y)$ 函数如下：

$$F(x, y) = b_0 + b_1x - y \quad (19)$$

$F(x, y)$ 法向量，即平面上形如 (1) 直线法向量 n 可以通过下式求解：

$$n = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

如前文所示， n 方向即 PCA 分解第二主元方向，即次元方向。

为了方便计算，假设数据已经经过中心化处理，即已经完成如下运算：

$$x = x - E(x), \quad y = y - E(y) \quad (21)$$

由于 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 已经是中心化向量，协方差矩阵可以通过下式运算得到：

$$\Sigma = [\mathbf{x} \ \mathbf{y}]^T [\mathbf{x} \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{y}^T \end{bmatrix} [\mathbf{x} \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{x} & \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

为了方便计算，本节计算协方差矩阵不考虑系数 $1/(n-1)$ 。

由于 \mathbf{n} 为 Σ 次元方向：

$$\Sigma \mathbf{n} = \lambda_2 \mathbf{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{x} & \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \lambda_2 \mathbf{n} \quad (23)$$

将 (20) 代入 (23)，整理得到如下两个等式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{x} & \mathbf{x}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{x} b_1 - \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \lambda_2 b_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x} b_1 - \mathbf{y}^T \mathbf{y} = -\lambda_2 \end{cases} \quad (24)$$

联立 (24) 两个等式，用 λ_2 表示 b_1 ：

$$b_{1_TLS} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \lambda_2)^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (25)$$

下式为本书前文获得的一元线性回归 OLS 中 b_1 解：

$$b_{1_OLS} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (26)$$

对比 OLS 和 TLS；当 (25) 中 λ_2 为 0 时，两种回归方法得到斜率完全一致。 $\lambda_2 = 0$ 时， \mathbf{y} 和 \mathbf{x} 完全线性相关。

数据中心化前后，回归直线梯度向量不变；中心化之前的回归直线通过 $(E(\mathbf{x}), E(\mathbf{y}))$ 一点，即：

$$E(\mathbf{y}) = b_0 + b_1 E(\mathbf{x}) \quad (27)$$

获得回归式截距项 b_0 表达式：

$$b_0 = E(\mathbf{y}) - b_1 E(\mathbf{x}) \quad (28)$$

图 7 所示为一元正交回归数据之间关系。发现自变量 \mathbf{x} 列向量和因变量 \mathbf{y} 列向量数据都参与 PCA 分解得到正交化向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 ，然后用特征值中较大值对应特征向量 \mathbf{v}_1 作为一元正交回归直线切线向量。更为简单计算方法是，用特征值较小值对应特征向量 \mathbf{v}_2 作为一元正交回归直线法向量。

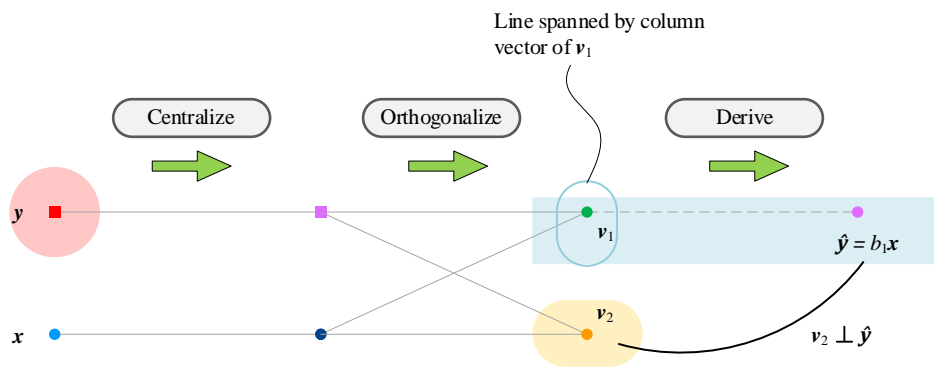


图 7. 一元正交回归 TLS 数据关系

图 8 所示为最小二乘法 OLS 一元线性回归系数，对应的一元 OLS 解析式为：

$$y = 1.1225x + 0.0018$$
(29)

图 9 比较 OLS 和 TLS 结果。

OLS Regression Results						
=====						
Dep. Variable:	AAPL		R-squared:	0.687		
Model:	OLS		Adj. R-squared:	0.686		
Method:	Least Squares		F-statistic:	549.7		
Date:	Thu, 07 Oct 2021		Prob (F-statistic):	4.55e-65		
Time:	07:08:46		Log-Likelihood:	678.03		
No. Observations:	252		AIC:	-1352.		
Df Residuals:	250		BIC:	-1345.		
Df Model:	1					
Covariance Type:	nonrobust					
=====						
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]

const	0.0018	0.001	1.759	0.080	-0.000	0.004
SP500	1.1225	0.048	23.446	0.000	1.028	1.217
=====						
Omnibus:	52.424	Durbin-Watson:	1.864			
Prob(Omnibus):	0.000	Jarque-Bera (JB):	210.804			
Skew:	0.777	Prob(JB):	1.68e-46			
Kurtosis:	7.203	Cond. No.	46.1			
=====						

图 8. 最小二乘法 OLS 一元线性回归结果

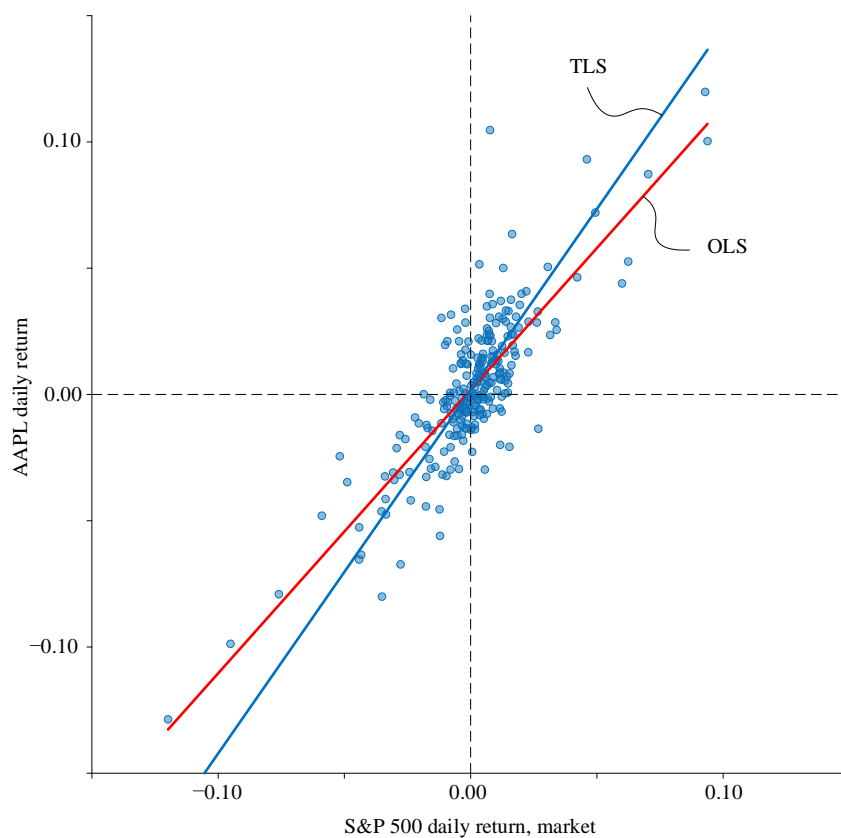


图 9. 比较 OLS 和 TLS 结果



Bk6_Ch18_01.py 绘制本节图像。

18.4 二元正交回归

这一节用主成分分析讨论二元正交回归。

首先也是对数据进行中心化处理：

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{E}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{E}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{E}(\mathbf{y}) \quad (30)$$

根据 PCA 计算法则，首先求解协方差矩阵。由于 \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_2 和 \mathbf{y} 已经为中心化矩阵，因此协方差矩阵 Σ 通过下式计算获得。

$$\begin{aligned}\Sigma &= [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}]^T [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \mathbf{y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (31)$$

为了方便计算，本节也计算不考虑系数 $1/(n-1)$ 。

正交回归解析式表达：

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (32)$$

构造二元 $F(x_1, x_2, y)$ 函数如下：

$$F(x_1, x_2, y) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 - y \quad (33)$$

$F(x_1, x_2, y)$ 法向量即平面 $f(x_1, x_2)$ 法向量 \mathbf{n} 通过下式求解：

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)^T = [b_1 \quad b_2 \quad -1]^T \quad (34)$$

\mathbf{n} 平行于 Σ 矩阵 PCA 分解特征值最小特征向量，即：

$$\Sigma \mathbf{v}_3 = \lambda_3 \mathbf{v}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \lambda_3 \mathbf{n} \quad (35)$$

整理得到：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 - \lambda_3) b_1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 b_2 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 b_1 + (\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 - \lambda_3) b_2 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{y} \end{cases} \quad (36)$$

\mathbf{n} 平行于 Σ 矩阵 PCA 分解特征值最小特征向量 \mathbf{v}_3 ，构造如下等式并求解 b_1 和 b_2 ：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -1 \end{bmatrix} = k \mathbf{v}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (37)$$

根据 (37) 最后一行，可以求得 k

$$k = \frac{-1}{v_{3,3}} \quad (38)$$

b_1 和 b_2 构成的列向量为：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{v_{3,3}} \begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

回归方程常数项通过下式获得：

$$b_0 = E(y) - [E(x_1) \ E(x_2)] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

为了方便多元正交回归运算，令：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = [X] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & y \end{bmatrix} = [X \ y] \quad (41)$$

协方差矩阵 Σ 为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} X^T X & X^T y \\ y^T X & X^T y \end{bmatrix} \quad (42)$$

上式 Σ 也不考虑系数 $1/(n-1)$ ：

$$\Sigma v_3 = \lambda_3 v_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} X^T X & X^T y \\ y^T X & y^T y \end{bmatrix} n = \lambda_3 n \quad (43)$$

构造 $b = [b_1, b_2]^T$ 这样重新构造特征值和特征向量以及 Σ 之间关系：

$$n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

将 (44) 代入 (43)，整理得到 b ：

$$\begin{bmatrix} X^T X & X^T y \\ y^T X & y^T y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} b \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = (X^T X - \lambda_3)^{-1} X^T y \quad (45)$$

下一节将使用 (45) 这一解析式计算正交回归解析式系数。

图 10 回顾本章第一节介绍的二元正交回归坐标转换过程。

数据 $[x_1, x_2, y]$ 中心化后，用 PCA 正交化获得正交系 $[v_1, v_2, v_3]$ 。 v_1, v_2 和 v_3 对应特征值由大到小。前两个主元向量 v_1 和 v_2 相互垂直，构成了一个平面 H ，特征值最小主元 v_3 垂直于该平面。 n 为 H 平面法向量， n 和 v_3 两者平行。

图 10 还比较了 OLS 和 TLS 回归结果。值得大家注意的是，如图 10 上半部分所示，对于最小二乘回归 OLS， \hat{y} 在 x_1 和 x_2 构造的平面上；而如图 10 下半部分，正交回归 TLS 中， \hat{y} 在 v_1 和 v_2 构造平面 H 上。

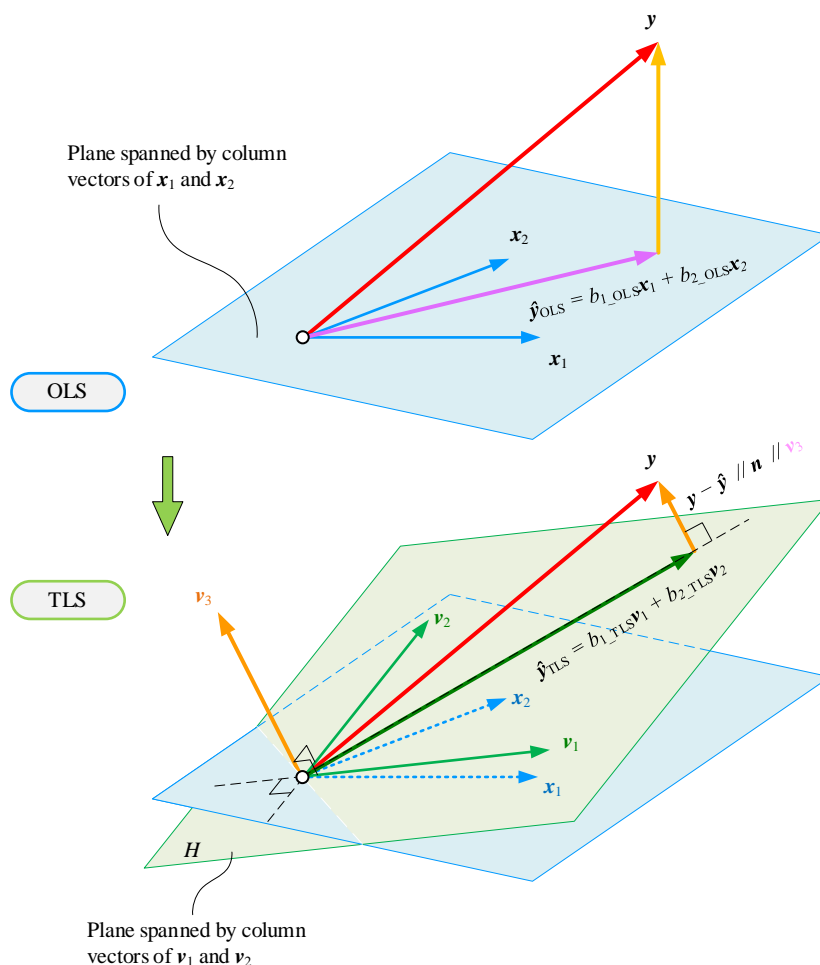


图 10. 几何角度解释二元正交回归坐标转换

图 11 解释二元正交回归数据关系。如前文反复强调，输入数据和输出数据都参与主成分分析，也就是正交化过程，因此特征向量既有“输入”成分，也有“输出”成分，呈现“你中有我，我中有你”。

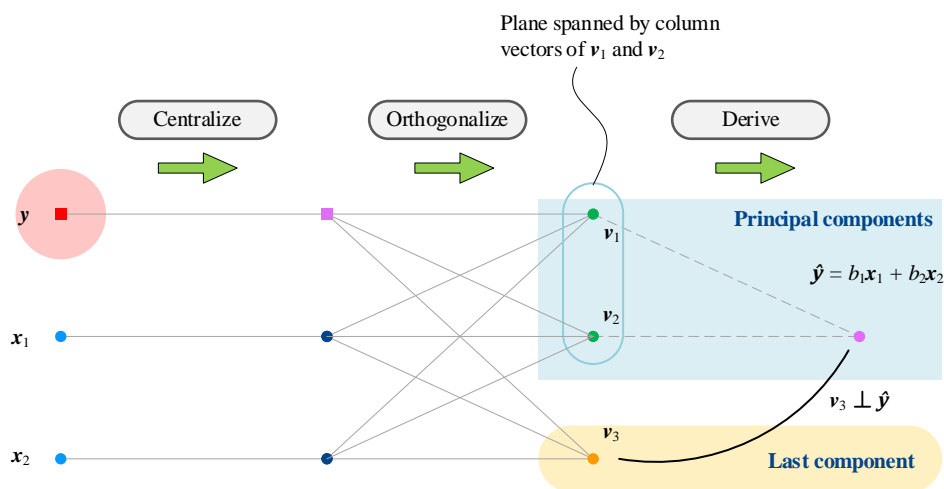


图 11. 二元正交回归数据关系

利用上一节介绍的 `scipy.odr`，可以求解一个二元正交回归的结果如下。利用主成分分析，我们可以获得相同正交回归的系数。

```
Beta: [-0.00061177  0.40795725  0.44382723]
Beta Std Error: [0.00057372 0.02454606 0.02864744]
Beta Covariance: [[ 5.46486647e-03 -2.24817813e-02  1.00466594e-02]
 [-2.24817813e-02  1.00032390e+01 -7.07446738e+00]
 [ 1.00466594e-02 -7.07446738e+00  1.36253753e+01]]
Residual Variance: 6.02314210079386e-05
Inverse Condition #: 0.16900716799896934
Reason(s) for Halting:
Sum of squares convergence
```

二元正交回归的平面解析式为：

$$y = 0.4079x_1 + 0.4438x_2 - 0.00061 \quad (46)$$

图 12 所示为最小二乘法 OLS 二元线性回归结果，对应的平面解析式如下：

$$y = 0.3977x_1 + 0.4096x_2 - 0.006 \quad (47)$$

```

=====
                        OLS Regression Results
=====
Dep. Variable:          SP500      R-squared:                0.830
Model:                  OLS        Adj. R-squared:            0.829
Method:                  Least Squares    F-statistic:              607.4
Date:                    Thu, 07 Oct 2021  Prob (F-statistic):      1.69e-96
Time:                    07:31:57      Log-Likelihood:           831.06
No. Observations:        252          AIC:                     -1656.
Df Residuals:            249          BIC:                     -1646.
Df Model:                 2
Covariance Type:         nonrobust
=====

```

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
const	-0.0006	0.001	-0.984	0.326	-0.002	0.001
AAPL	0.3977	0.024	16.326	0.000	0.350	0.446
MCD	0.4096	0.028	14.442	0.000	0.354	0.465

```

=====
Omnibus:                 37.744      Durbin-Watson:           1.991
Prob(Omnibus):            0.000      Jarque-Bera (JB):        157.710
Skew:                     0.492      Prob(JB):                 5.67e-35
Kurtosis:                 6.749      Cond. No.                 59.4
=====

```

图 12. 最小二乘法 OLS 二元线性回归结果

图 13 比较 OLS 和 TLS 二元回归结果。

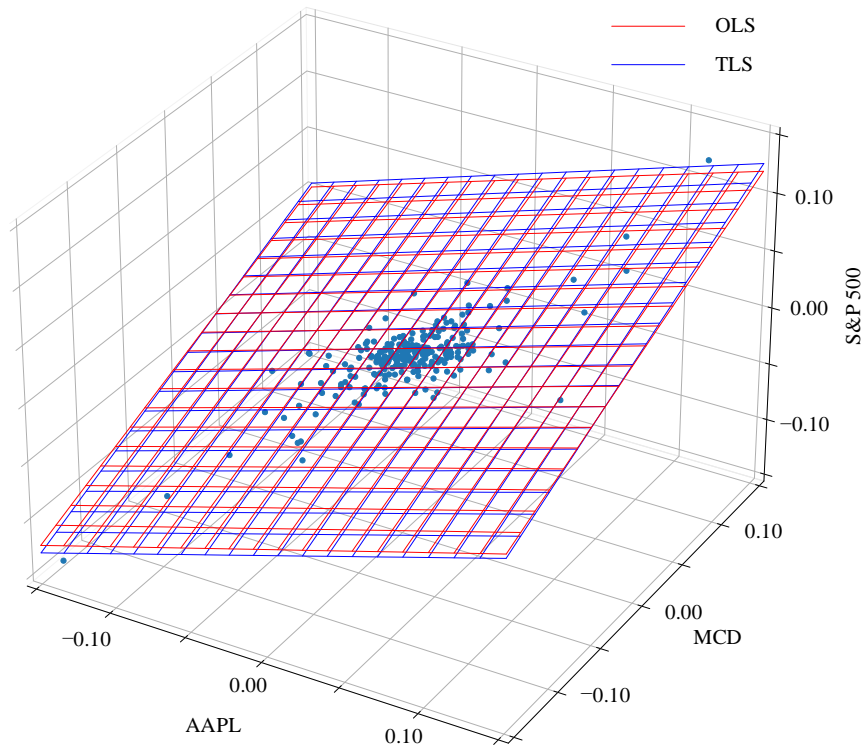
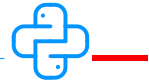


图 13. 比较 OLS 和 TLS 二元回归结果, 重新做图



Bk6_Ch18_02.py 完成本节回归运算。

18.5 多元正交回归

下面，把上述思路推广到 D 维度 X 矩阵。首先中心化数据，获得如下两个中心化 X, y 向量：

$$X_{n \times D} = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) X, \quad y = y - E(y) \quad (48)$$

为了表达方便，假设 X 和 y 已经为中心化数据；这样，构造回归方程式时，不必考虑常数项 b_0 ，即回归方程中没有截距项：

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{D-1} x_{D-1} + b_D x_D \quad (49)$$

为了进行 PCA 分解，首先计算 $[X, y]$ 矩阵协方差矩阵。

X 和 y 均是中心化数据，不考虑系数 $1/(n-1)$ ，协方差矩阵通过下式简单运算获得：

$$\Sigma_{(D+1) \times (D+1)} = [X, y]^T [X, y] = \begin{bmatrix} X^T \\ y^T \end{bmatrix} [X, y] = \begin{bmatrix} X^T X & X^T y \\ y^T X & y^T y \end{bmatrix} \quad (50)$$

上述协方差矩阵行列宽度均为 $D + 1$ 。对它进行特征值分解得到：

$$\Sigma = V \Lambda V^{-1} \quad (51)$$

其中，

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_D \\ & & & & \lambda_{D+1} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_D \geq \lambda_{D+1} \quad (52)$$

$$V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_D \quad \mathbf{v}_{D+1}]$$

特征值矩阵对角线特征值从左到右，由大到小。有了本章之前内容铺垫，相信读者已经清楚正交回归的矩阵运算过程，具体如图 14 所示。

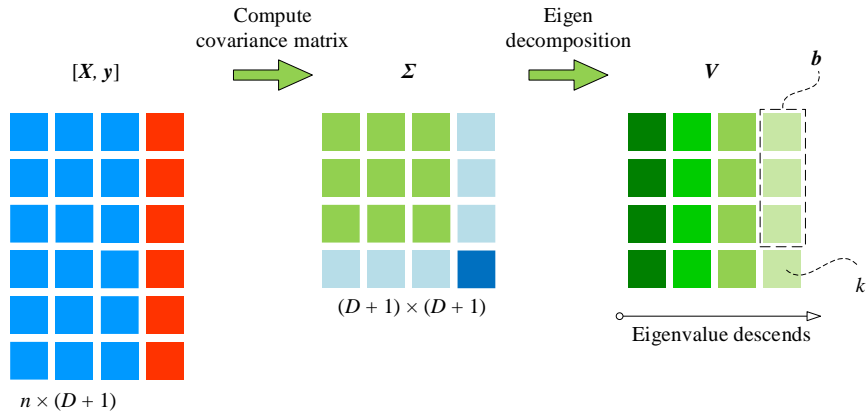


图 14. 多元正交回归矩阵运算过程

V 中第 1 到第 D 个行向量 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D]$ 构造超平面 H ，而 \mathbf{v}_{D+1} 垂直于该超平面。

构造 $F(x_1, x_2, \dots, x_D, y)$ 函数：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_D, y) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{D-1} x_{D-1} + b_D x_D - y \quad (53)$$

$F(x_1, x_2, \dots, x_D, y)$ 法向量即平面上 $f(x_1, x_2, \dots, x_D)$ 法向量 \mathbf{n} 通过下式求解：

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_D}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_D \quad -1]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

这样重新构造特征值 λ_{D+1} 和特征向量 \mathbf{v}_{D+1} 以及 Σ 之间关系。注意， \mathbf{n} 平行 \mathbf{v}_{D+1} 。 \mathbf{n} 对应 Σ 矩阵 PCA 分解特征值最小特征向量，即：

$$\Sigma \mathbf{v}_{D+1} = \lambda_{D+1} \mathbf{v}_{D+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{X} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \mathbf{n} = \lambda_{D+1} \mathbf{n} \quad (55)$$

求解获得多元正交回归系数列向量 \mathbf{b} 解：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{X} & \mathbf{y}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_{D+1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_{\text{TLS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \lambda_{D+1})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (56)$$

对比多元线性最小二乘系数向量结果：

$$\mathbf{b}_{\text{OLS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (57)$$

发现当 λ_{D+1} 等于 0 时， \mathbf{y} 完全被 \mathbf{X} 列向量解释，即两个共线性。

这里我们再次区分一下最小二乘法和正交回归。最小二乘法寻找因变量和自变量之间残差平方和最小超平面；几何角度上讲，将因变量投影在自变量构成超平面 H ，使得残差向量垂直 H 。正交回归则通过正交化自变量和因变量，构造一个新正交空间；这个新正交空间基底向量为分解得到主元向量，具体如图 15 所示。

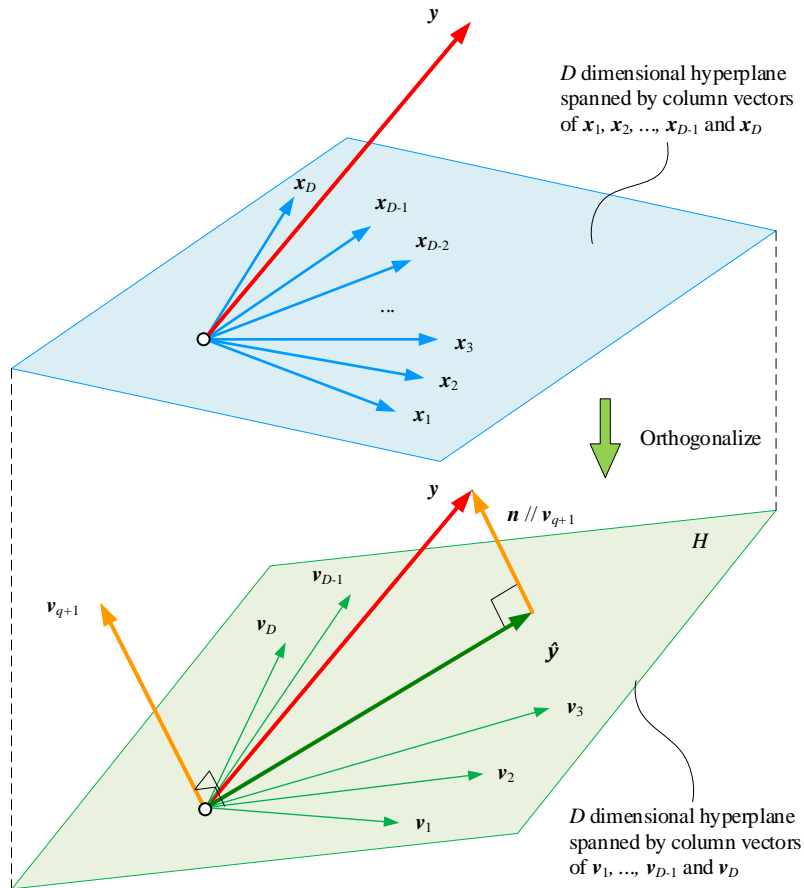


图 15. 几何角度解释多元正交回归

\mathbf{n} 平行于数据 $[\mathbf{X}, \mathbf{y}]$ PCA 分解特征值最小特征向量 \mathbf{v}_{D+1} ，构造如下等式并求解 b_1, \dots, b_D ：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_D \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix} = k \mathbf{v}_{D+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} v_{1,D+1} \\ v_{2,D+1} \\ \vdots \\ v_{D,D+1} \\ v_{D+1,D+1} \end{bmatrix} \quad (58)$$

求解 k 得到：

$$k = \frac{-1}{v_{D+1,D+1}} \quad (59)$$

求解 \mathbf{b} 得到：

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_D \end{bmatrix} = \frac{-1}{v_{D+1,D+1}} \begin{bmatrix} v_{1,D+1} \\ v_{2,D+1} \\ \vdots \\ v_{D,D+1} \end{bmatrix} \quad (60)$$

b_0 通过下式求得。

$$b_0 = E(\mathbf{y}) - \begin{bmatrix} E(\mathbf{x}_1) & E(\mathbf{x}_2) & \cdots & E(\mathbf{x}_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_D \end{bmatrix} \quad (61)$$

图 16 展示多元正交回归运算数据关系。看到数据 $[\mathbf{X}, \mathbf{y}]$ 均参与到了正交化中；正交化结果为 $D + 1$ 个正交向量 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D, \mathbf{v}_{D+1}]$ 。通过向量 \mathbf{v}_{D+1} 垂直 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D$ 构成超平面，推导出多元正交回归解析式。

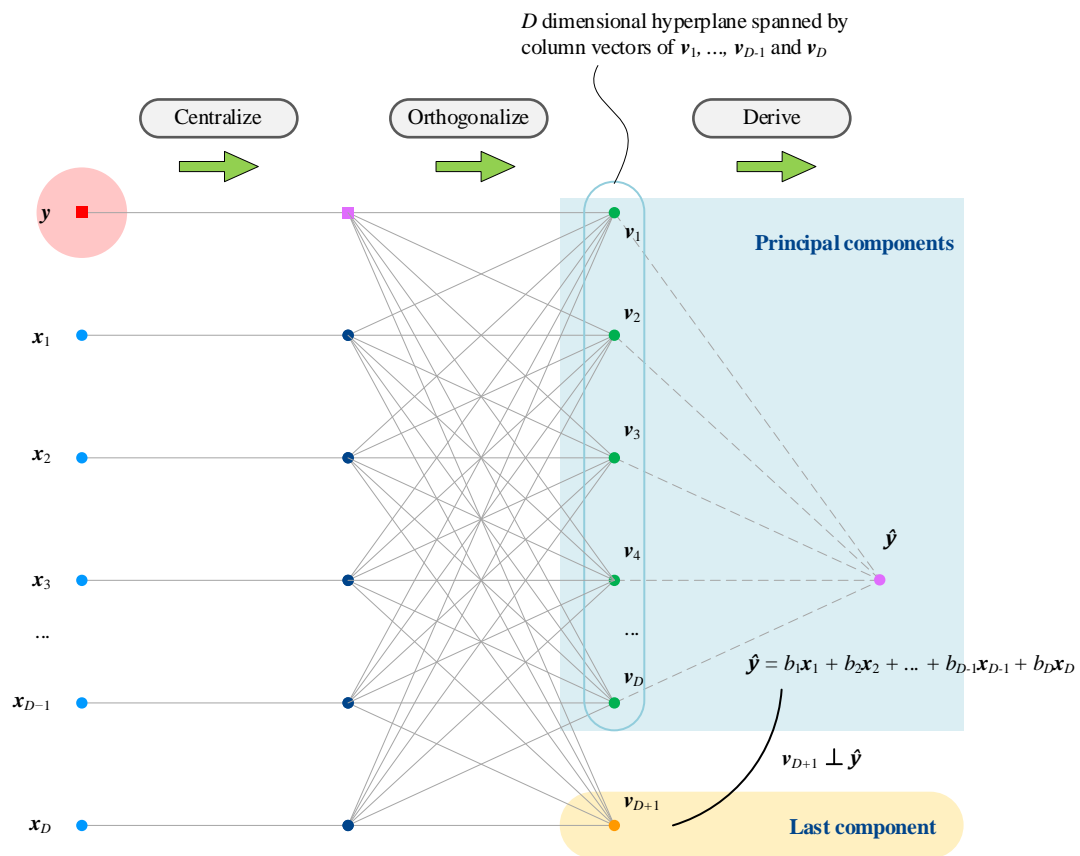


图 16. 多元正交回归运算数据关系

图 17 所示直方图，比较多元 TLS 回归和多元 OLS 回归系数。

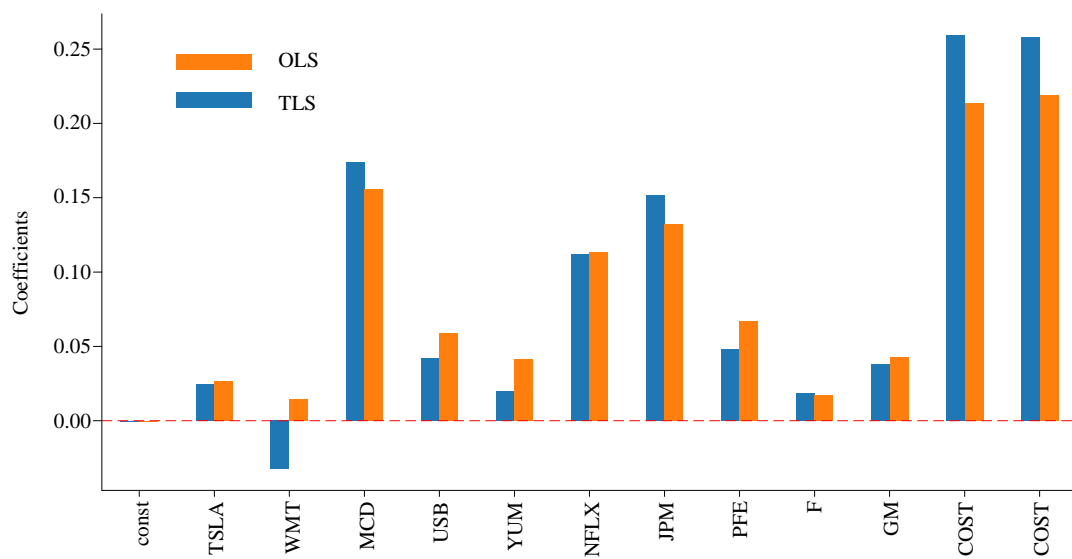


图 17. 比较多元 TLS 回归和多元 OLS 回归系数



Bk6_Ch18_03.py 完成本节回归运算。