第4章 线性方程组的数值方法

4.1 高斯消去法

4.2 选主元素的高斯消去法

4.3 矩阵的三角分解法

4.4 平方根法与改进平方根法

4.5 向量和矩阵的范数

4.6 线性方程组的性态和解的误差分析

4.7 解线性方程组的迭代法

4.8 迭代法的收敛性及误差估计

引言

工程实际中，存在大量的解线性方程组的问题。很多数值方法到最后也会涉及到线性方程组的求解问题：如样条插值的M和m关系式，曲线拟合的法方程组，方程组的$Newton$迭代等问题。

预备知识

1、线性方程组$A_{m\times n}x=b$

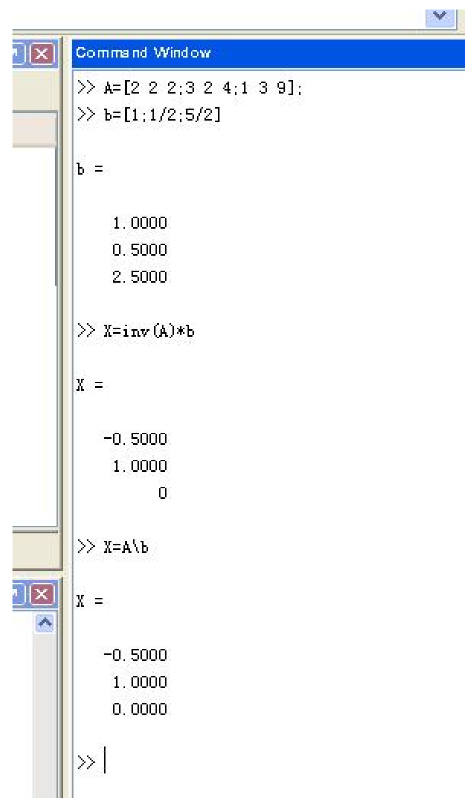
2、线性方程组$Ax=b$有解的充要条件

3、$A_{n\times n}x=b$的逆矩阵解法及MATLAB程序

命令	相同功能命令	含义
X=A\C	X=inv(A)*C	方程 AX=C 的解
Y=D/B	Y=D*inv(B)	方程 YB=D 的解
Z=A\F/B	Z=inv(A)*F*inv(B)	方程 AZB=F 的解

例

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=1/2 \\ x_1+3x_2+9x_3=5/2 \end{cases}$$



问题的提出

求解线性方程组**A**x=b，其中**A**是n阶非奇异的常系数方阵(n比较大，其行列式不等于0)，x是待求的具有n维的解向量。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

解决方法

① 直接法

$$Ax = b \xleftrightarrow{\text{等价变换}} Gx = d$$

高斯消元法（三角形方程组回代法）

列主元素消去法

杜利特尔分解法（三角分解法）

追赶法

平方根法

解决方法

$$Ax = b \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x = Bx + d$$

② 迭代法

$$\xrightarrow{\text{建立迭代格式}} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

雅可比迭代法

高斯一塞德尔迭代法

超松弛迭代法

……

注：克莱姆法则不能用于计算方程组的解.

4.1 高斯消去法

一、引例

例. 用高斯消去法解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1/2 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 5/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad -x_2 + x_3 = -1 \\ \quad\quad 10x_3 = 0 \end{cases}$$

得到与原方程组等价的**三角形方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + x_3 = -1 \\ \\ \qquad 10x_3 = 0 \end{cases}$$

用回代的方法，可求得原方程组的解为：

$$x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = -1/2$$

用矩阵来描述消去法的 约化过程

$$[A,b]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 1/2\\ 1 & 3 & 9 & \vdots & 5/2\end{bmatrix}\xrightarrow{1}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1\\ 0 & 2 & 8 & \vdots & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 10 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

这种求解过程，称为
具有回代的高斯消去法

二、高斯消去法解方程组的基本思想

用矩阵行的初等变换将系数矩阵A约化为具有简单形式的矩阵

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

三、高斯消去法

用矩阵形式表示 $Ax = b$

记 $A = A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ $b = b^{(1)} = (b_1^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)})^T$

假设A为非奇异矩阵.

第1步： 设$a_{11}^{(1)} \neq 0$ 计算乘数

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad (i = 2, \cdots, n)$$

施行行的初等变换 $r_i \leftarrow r_i - m_{i1} \cdot r_1 \quad (i = 2, \cdots, n)$

得到等价方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

记为 $A^{(2)} x = b^{(2)}$

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} \qquad (i, j = 2, \cdots, n)$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

设第1步 ～ 第*k*- *1*步计算已经完成，

得到与原方程组等价的方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

记为 $\boxed{A^{(k)}x = b^{(k)}}$

第 k步　　设$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 计算乘数

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (i = k+1, \cdots, n)$$

消去第i个方程$(i = k+1, \cdots, n)$的未知数x_k

得到

$$A^{(k+1)} X = b^{(k+1)}$$

$$A^{(k+1)}X = b^{(k+1)}$$

其中

$$\boxed{\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad (i, j = k+1, \cdots, n) \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, \quad (i = k+1, , \cdots n) \end{cases}}$$

最后，经*n-1*步消元计算，得到三角形方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

回代求解得

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \end{cases} \qquad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)$$

定理 4.1（高斯消去法）P.63

设 $Ax=b$，其中 $A\in R^{n\times n}$ 。如果约化的主元素 $a_{kk}^{(k)}\neq 0\ (k=1,2,\ldots,n)$，则可通过高斯消去法（不进行交换两行的初等交换）将方程组 $Ax=b$ 约化为三角形矩阵方程组，且消元和求解公式为

① 消元计算　　第 k 步消元（$k=1,2,\ldots,n-1$）

$$\begin{cases} m_{ik}=\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & (i=k+1,\cdots,n) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)} & (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)} & (i=k+1,,\cdots n) \end{cases}$$

① 消元计算　　第 k 步消元（$k=1,2,\ldots,n-1$）

$$\begin{cases} m_{ik}=\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & (i=k+1,\cdots,n) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)} & (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_{i}^{(k+1)}=b_{i}^{(k)}-m_{ik}b_{k}^{(k)} & (i=k+1,,\cdots n) \end{cases}$$

② 回代计算

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i=\dfrac{b_i^{(i)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j}{a_{ii}^{(i)}} & (i=n-1,n-2,\ldots,1) \end{cases}$$

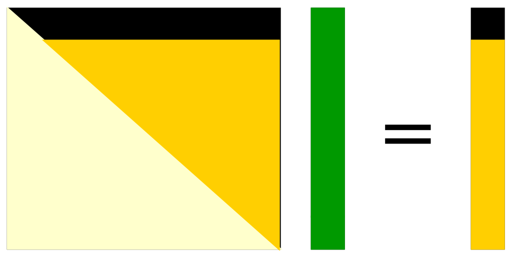
注：如果 A 为非奇异矩阵时，但可能有某 $a_{kk}^{(k)}=0$，则在第 k 列存在有元素 $a_{i_k,k}^{(k)}\neq 0,(k+1\leq i_k\leq n)$， 于是可通过交换 $(A\vdots b)$ 的第 k 行和第 i_k 行元素将 $a_{i_k,k}^{(k)}$ 调到 (k,k) 位置， 然后再进行消元计算。因此， 在 A 为非奇异矩阵时， 只要引进行交换， 则高斯消去法可将 $Ax=b$ 约化为三角形方程组，且通过回代即可求得方程组的解。

高斯消去法的**计算量**： $T=\dfrac{n^3}{3}+n^2-\dfrac{n}{3}.$

注： 消元过程要保证 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ 严格对角占优阵满足.

高斯消元法：小结

思路　首先将A化为上三角阵，再回代求解 。



$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)}
\end{pmatrix}
$$

例1：单精度解方程组 $\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

/* 精确解为 $x_1 = \dfrac{1}{1-10^{-9}} = 1.\overbrace{00\ldots0}^{8\text{个}}100\ldots$ 和 $x_2 = 2 - x_1 = 0.\overbrace{99\ldots9}^{8\text{个}}899\ldots$ */

用Gaussian 消元法计算：

$$m_{21} = a_{21}/a_{11} = 10^9$$

$$a_{22} = 1 - m_{21}\times 1 = 0.\overbrace{0\ldots0}^{8\text{个}}1\times 10^9 - 10^9 \doteq -10^9$$

$$b_2 = 2 - m_{21}\times 1 \doteq -10^9$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix}$$

小主元可能导致计算失败

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 0$$

4.2 选主元素的高斯消去法

在$Gauss$消元第k步之前，做如下的事情：

若 $\max\limits_{k\le i\le n}|a_{ik}^{(k)}|=|a_{jk}^{(k)}|$ 交换k行和j行

行的交换，不改变方程组的解，同时又有效地克服了$Gauss$消元的缺陷

例1： $\begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1 \quad ✓$$

一、全主元素消去法

$$(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & a_{i_1j_1} & & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

第 1 步$(k=1)$：首先在 A 中选主元素，即选择 i_1,j_1

使 $\left|a_{i_1j_1}\right|=\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|\neq 0$；

再交换 (A,b) 的第 1 行与第 i_1 行元素，交换 A 的第 1 列与第 j_1 列元素，将 $a_{i_1j_1}$ 调到（1,1）位置（为简单起见，交换后增广阵仍记为 (A,b)）；然后，进行消元计算。

第 k 步：继续上述过程，设已完成第1步到第 $k-1$ 步计算

回代求解

二、列主元素消去法

完全主元消去法是解低阶稠密矩阵方程组的有效方法,但完全主元素方法在选主元时要花费一定的计算机时间,在实际计算中常用的是部分选主元（即列主元）消去法.列主元消去法在每次选主元时,仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元素,且仅交换两行,再进行消元计算.

设列主元素消去法已经完成第1步到第$k-1$步的按列选主元,交换两行,消元计算得到与原方程组等价的方程组 $\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{(k)}$,其中为简单起见,增广矩阵的元素仍记为$a_{ij}, b_i$,即

$$(A^{(k)},b^{(k)})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & & \cdots & & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

第 k步 选 主 元 区 域

于是**第k步**计算：

对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 做到（4）

(1)按列**选主元**：选取 i_k,使 $\left|a_{i_k k}\right|=\max\limits_{k\le i\le n}\left|a_{ik}\right|\neq 0$

(2)如果 $a_{i_k k}=0$,则交换 A 为奇异矩阵,停止计算;

(3)如果 $i_k \neq k$,则交换 (A,b) 第 k 行与第 i_k 行元素;

(4)消元计算:

$$\begin{cases} a_{ik} \leftarrow m_{ik} = a_{ik} / a_{kk} \quad (i = k+1, \cdots, n) \\ a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj} \quad (i, j = k+1, \cdots, n) \\ b_i \leftarrow b_i - m_{ik} b_k \quad (i = k+1, \cdots, n) \end{cases}$$

(5)回代求解

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_n \rightarrow \boldsymbol{b}_n / \boldsymbol{a}_{nn} \\ \boldsymbol{b}_i \leftarrow \left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=i+1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{b}_j \right) / \boldsymbol{a}_{ii} \end{cases} \quad (\boldsymbol{i} = \boldsymbol{n} - 1, \cdots, 2, 1)$$

计算解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在常数项$b(n)$内得到.

例2. **解线性方程组(用8位十进制尾数的浮点数计算)**

$$\begin{pmatrix} 10^{-8} & 2 & 3 \\ -1 & 3.712 & 4.623 \\ -2 & 1.072 & 5.643 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解: 这个方程组和例1一样,若用Gauss消去法计算会有小数作除数的现象,若采用换行的技巧,则可避免

$$\overline{A} = (A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10^{-8} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3.712 & 4.623 & 2 \\ -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \end{array}\right)$$

10^{-8}很小,绝对值最大的列元素为$a_{13}=-2$,因此1,3行交换

$$\xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ -1 & 3.712 & 4.623 & 2 \\ 10^{-8} & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) = (A^{(1)}, b^{(1)})$$

绝对值最大
不需换行

$$\xrightarrow[m_{31}=-0.5\times10^{-8}]{m_{21}=0.5} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ 0 & 0.3176\times10 & 0.18015\times10 & 0.5 \\ 0 & 0.2\times10 & 0.3\times10 & 0.1\times10 \end{array}\right) = (A^{(2)}, b^{(2)})$$

$$\xrightarrow{m_{32}=0.629\,722\,92}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1.072 & 5.643 & 3 \\ 0 & 0.3176\times10 & 0.18015\times10 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.186\,555\,41\times10 & 0.685\,138\,54 \end{array}\right) = (A^{(3)}, b^{(3)})$$

经过回代后可得

$$x_3 = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{0.685\,138\,54}{0.186\,555\,41 \times 10} = 0.367\,257\,39$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3}{a_{22}^{(2)}} = \frac{0.5 - 0.18015 \times 10 \times x_3}{0.3176 \times 10} = -0.05088607$$

$$x_1 = \frac{b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3}{a_{11}^{(1)}} = -0.49105820$$

事实上, 方程组的准确解为

$$x^* = (-0.491058227, -0.050886075, 0.367257384)^T$$

4.3 矩阵的三角分解法

一、直接三角分解法

*Gauss*消元法的第1步：设 $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$

若$a_{11}^{(1)} \neq 0$，令 $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$，$i = 2,3,\cdots,n$ $\qquad$ $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$

施行第一步消元，得到

$$A^{(2)} = L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$Gauss$消元法的第k步：

$$\text{第k行}\times\frac{-a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}+\text{第}i\text{行}, i=k+1,\cdots,n$$

从矩阵理论来看，相当于左乘矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1k}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & l_{nk}^{(k)} & & & 1 \end{pmatrix}, l_{ik}^{(k)}=\frac{-a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, i=k+1,\cdots,n$$

因此，整个Gauss消元法相当于左乘了一个单位下三角阵

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1k}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nk}^{(k)} & \cdots & l_{nn-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

所以有 $\Rightarrow \exists L \quad s.t. \quad A=LU$ ***L***为单位下三角阵，***U***为上三角阵

因此 $$\boxed{Ax=b \Rightarrow LUx=b \Rightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}}$$

注：

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

1. 我们可以通过2次回代过程求解方程组.

2. 分解的理论由$Gauss$消元得出，因此分解能够进行的条件与$Gauss$消元一样.

定理 4.2（矩阵的 $\boldsymbol{LU}$ 分解）设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$。

如果 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $\det(A_i) \neq 0, (\boldsymbol{i} = 1,2,\cdots,\boldsymbol{n}-1)$， 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为一个单位下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 与一个上三角阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ ，且分解是惟一的。

证： **P.67**

1、Doolittle分解法

L为单位下三角阵，U为上三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

比较第1行：$a_{1j} = u_{1j} \qquad j = 1, \cdots, n \qquad \Rightarrow u_{1j} = a_{1j}$

比较第1列：$a_{i1} = l_{i1} u_{11} \qquad i = 2, \cdots, n \qquad \Rightarrow l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}$

比较第**2**行：$a_{2j} = l_{21}u_{1j} + u_{2j} \quad j = 2, \cdots, n \quad \Rightarrow u_{2j} = a_{1j} - l_{21}u_{1j}$

比较第**2**列：$a_{i2} = l_{i1}\mathrm{u}_{12} + l_{i2}\mathrm{u}_{22} \quad i = 3, \cdots, n \quad \Rightarrow l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1}\mathrm{u}_{12}}{u_{22}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

比较第k行：

$$a_{kj}=\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}+u_{kj}\quad j=k,\cdots,n\quad\Rightarrow u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}$$

K-1次

比较第k列：

$$a_{ik}=\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk}+l_{ik}u_{kk}\quad i=k+1,\cdots,n\quad\Rightarrow l_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk}}{u_{kk}}$$

K-1＋1次

分解过程完毕，加上两次回代过程

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \qquad , \quad i = 1, \cdots, n$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad , \quad i = n, \cdots, 1$$

总运算量为：

$$\sum_{k=1}^{n-1} \big((n-k+1)(k-1) + (n-k)k\big) + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

注：存储在矩阵的原来位置，且不影响计算

$$
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

紧凑格式

综合以上分析,有

$$a_{1j} = u_{1j} \quad j = 1,2,\cdots,n \qquad a_{i1} = l_{i1}u_{11} \quad i = 2,3,\cdots,n$$

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk}u_{kj} \quad \begin{matrix} j = r,\cdots,n \\ r = 1,2,\cdots,n \end{matrix} \qquad a_{ir} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik}u_{kr} \quad \begin{matrix} i = r+1,\cdots,n \\ r = 1,2,\cdots,n-1 \end{matrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj} + 1 \cdot u_{rj} \qquad a_{ir} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr} + l_{ir}u_{rr}$$

因此可以推导出

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1,2,\cdots,n \qquad \text{U的第一行} \quad \text{------(1)}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad i = 2,3,\cdots,n \qquad \text{L的第一列} \quad \text{------(2)}$$

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} \quad \begin{array}{l} r = 1,2,\cdots,n \\ j = r,\cdots,n \end{array}$$ U的第r行 ------(3)

$$l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}} \quad \begin{array}{l} r = 1,2,\cdots,n-1 \\ i = r+1,\cdots,n \end{array}$$ L的第r列 ------(4)

称各式所表示的分解过程为**Doolittle分解.**

2、Crout分解法

设$A=LU$为如下形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1} \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ u_{1j} = a_{1j}/l_{11} \quad (j=2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{对于}k=2,3,\cdots,n,\ \text{循环计算} \\ l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \quad (i=k,k+1,\cdots,n) \\ u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj})/l_{kk} \quad (j=k+1,k+2,\cdots,n) \end{cases}$$

实现了矩阵的克劳特分解后，求解*Ax=b*的问题就等价于求解两个三角形方程组.

比较第k列： $a_{ik}=\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}+l_{ik} \quad i=k,\cdots,n \quad \Rightarrow l_{ik}=a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}$

比较第k行：

$$a_{kj}=\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}+l_{kk}u_{kj} \quad j=k+1,\cdots,n \quad \Rightarrow u_{kj}=\frac{a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}}{l_{kk}}$$

两次回代过程

$$y_i=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ii}} \quad , \; i=1,\cdots,n$$

$$x_i=y_i-\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j \;, \; i=n,\cdots,1$$

例4.4 利用三角分解法解方程组

$$u_{rj}=a_{rj}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj}$$

$$j=r,r+1,\cdots,n$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-4&-12\\2&10&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\10\end{pmatrix}$$

$$l_{ir}=(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr})/u_{rr}$$

$$i=r+1,\cdots,n$$

解 进行杜利特尔三角分解

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-3\\0&0&3\end{pmatrix}$$

求解 $Ly=b$ 得到 $y_1=-2,y_2=-1,y_3=17$

再求解 $Ux=y$ 得到 $x_1=-35,x_2=8,x_3=\dfrac{17}{3}$

解 进行克劳特三角分解

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=LU$$

求解$Ly=b$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ 10\end{pmatrix} \Rightarrow y_1=-2, y_2=-1/2, y_3=17/3$$

求解$Ux=y$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -1/2\\ 17/3\end{pmatrix} \Rightarrow x_3=\frac{17}{3}, x_2=8, x_1=-35$$

二、解三对角线方程组的追赶法

预备知识

对角占优矩阵:

若矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad i=1,2,\cdots,n$

则称A为严格对角占优矩阵.

若矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足 $|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad i=1,2,\cdots,n$

则称A为弱对角占优矩阵.

有一类方程组,在前面学习的插值问题中有着重要的作用,即三对角线方程组,其形式为:

$$Ax = f \qquad \text{--------(4.16)}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

稀疏矩阵

A称为三对角线矩阵,并且满足

$$(1) \quad |b_1| > |c_1| > 0$$

(1) $|b_1|>|c_1|>0$

(2) $|b_i|\geq|a_i|+|c_i|$ ，$a_i\cdot c_i\neq 0 \quad i=2,\cdots,n-1$

(3) $|b_n|>|a_n|>0$

A称为对角占优的三对角线矩阵.

$\boxed{\text{显然,}A\text{非奇异,即}\det A\neq 0}$

证 用归纳法证明。显然，当$n=2$时有 $\det(A)=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_1b_2-c_1a_2\neq 0$

由$b_1\neq 0$和消去法，有

$$A\rightarrow\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2-\frac{c_1}{b_1}a_2 & c_2 & \vdots & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

设对n-1阶三对角线阵结论成立

显然，$\det(A)=b_1\det(\boldsymbol{B})$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\alpha_2 & c_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_n & b_n\end{pmatrix},\quad \alpha_2=b_2-\frac{c_1}{b_1}a_2$$

且有

$$|\alpha_2|=\left|b_2-\frac{c_1}{b_1}a_2\right|\ge|b_2|-\left|\frac{c_1}{b_1}\right||a_2|>|b_2|-|a_2|\ge|c_2|\ne 0$$

于是由归纳法假定有 $\det(\boldsymbol{B})\ne 0$

$$\boxed{\Rightarrow\quad \det(A)\ne 0}$$

因此A的任意k阶顺序主子式非零,即$\det A_k \neq 0$

所以,可以将A进行LU分解

定理4.3 设矩阵$\boldsymbol{A}$满足条件（4.17），则它可分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}$$

证： P.71

以下以Doolittle分解导出三对角线方程组的解法

设 $A = LU$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r=1} \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ l_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$u_{1j} = a_{1j} \qquad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ l_2 & u_2 & c_2 & & \\ & l_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r=2} \to \cdots \xrightarrow{r=n-1} \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ l_2 & u_2 & c_2 & & \\ & l_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & l_n & u_n \end{pmatrix}$$

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} \qquad l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}}$$

因此 $L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$

二对角阵

由 $A = LU$ 可得L和U的元素的计算公式

$$\begin{cases} u_1 = b_1 \\ l_i = \dfrac{a_i}{u_{i-1}} \quad u_i = b_i - l_i c_{i-1} \qquad i = 2, \cdots, n \end{cases}$$

将系数矩阵A分解成两对角阵LU的乘积后

解三对角线方程组$Ax = f$可化为求解两个三角形方程组

$$Ly = f$$

$$Ux = y$$

(1) 解$Ly = f$

$$(L, f) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & f_1 \\ l_2 & 1 & & & & f_2 \\ & l_3 & \ddots & & & f_3 \\ & & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & & l_n & 1 & f_n \end{array}\right)$$

得

$$\begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1} \quad i = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

(2) 解 $Ux=y$

$$\begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

得 $$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_n} \\ x_i = \dfrac{y_i - c_i \cdot x_{i+1}}{u_i} \qquad i = n-1, \cdots, 2, 1 \end{cases}$$

以上得到解 $Ax=f$ 的追赶法.

例4. 用追赶法解三对角线方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ & 2 & 3 & 1 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = b_1$$

$$l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}$$

$$u_i = b_i - l_i c_{i-1}$$

$$y_1 = f_1$$

$$y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1}$$

解: 设 $a = (a_2, a_3, a_4)^T = (2,2,1)^T$

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T = (3,3,3,3)^T$$

$$c = (c_1, c_2, c_3)^T = (1,1,1)^T$$

$$f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T = (1,0,1,0)^T$$

(1) 作A的LU分解

$$u_1 = b_1 = 3$$

$$l_2 = \frac{a_2}{u_1} = \frac{2}{3} \qquad u_2 = b_2 - l_2 c_1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$l_3 = \frac{a_3}{u_2} = \frac{6}{7} \qquad u_3 = b_3 - l_3 c_2 = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}$$

$$l_4 = \frac{a_4}{u_3} = \frac{7}{15} \qquad u_4 = b_4 - l_4 c_3 = 3 - \frac{7}{15} = \frac{38}{15}$$

(2) 解$Ly = f$

$$y_1 = f_1 = 1$$

$$y_2 = f_2 - l_2 \cdot y_1 = 0 - \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$$

$$y_3 = f_3 - l_3 \cdot y_2 = 1 - \frac{6}{7}(-\frac{2}{3}) = \frac{11}{7}$$

$$y_4 = f_4 - l_4 \cdot y_3 = 0 - \frac{7}{15}\frac{11}{7} = -\frac{11}{15}$$

(3) 解$Ux = y$

$$x_4 = \frac{y_4}{u_4} = -\frac{11}{38}$$

$$x_3=\frac{y_3-c_3\cdot x_4}{u_3}=(\frac{11}{7}+\frac{11}{38})\frac{7}{15}=\frac{33}{38}$$

$$x_2=\frac{y_2-c_2\cdot x_3}{u_2}=(-\frac{2}{3}-\frac{33}{38})\frac{3}{7}=-\frac{25}{38}$$

$$x_1=\frac{y_1-c_1\cdot x_2}{u_1}=(1+\frac{25}{38})\frac{1}{3}=\frac{21}{38}$$

因此原线性方程组的解为

$$x=(\frac{21}{38},-\frac{25}{38},\frac{33}{38},-\frac{11}{38})^T$$

三对角阵的追赶法小结

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_i = c_i \quad , \quad i = 2, \cdots, n \\ \alpha_i = a_i - c_i \beta_{i-1} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \quad , \quad c_1 = 0 \\ \beta_i = b_i / \alpha_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i = (f_i - c_i y_{i-1}) / \alpha_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad , \quad i = n, \cdots, 1 \quad (\beta_n = 0) \end{cases}$$

所以，有计算过程如下：

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - c_i \beta_{i-1} \\ \beta_i = b_i / \alpha_i \\ y_i = (f_i - c_i y_{i-1}) / \alpha_i \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$x_k = y_k - \beta_k x_{k+1} \quad , \quad k = n, \cdots, 1$$

4.4 平方根法与改进平方根法

0 预备知识

对称正定矩阵的概念与性质

一、平方根法

若n阶矩阵A为对称正定矩阵，则$\det(A) > 0, A^T = A.$

且A的顺序主子式 $\det A_k > 0,\ k = 1,2,\cdots,n$

因此A可以进行LU分解(或$Doolittle$分解)

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

将 U 再分解为 $U = DU_0$

其中，$D = \begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & 1 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

于是 $\quad A = LU = LDU_0 \qquad\qquad (4.22)$

由于 $A^T = A$ ，因此 $A = U_0^T(DL^T)$

由矩阵三角分解的唯一性，则 $L = U_0^T$

故 $\boxed{A = LDL^T}$ $\qquad (4.23)$

对角阵$\boldsymbol{D}$还可以分解为

$$\boldsymbol{D} = diag(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \cdots, \sqrt{u_{nn}}) \cdot diag(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \cdots, \sqrt{u_{nn}})$$

$$\equiv \boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{D}^{1/2}$$

则有 $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{L}^{T} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}})(\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}})^{T} \equiv \hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{L}}^{T}$$

其中$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$为非奇异下三角阵

定理 4.4 （对称正定阵的三角分解）

设 A 为 n 阶对称正定矩阵，则有三角分解：

① $A = LDL^T$，其中 L 为单位下三角阵，D 为对角阵，或

② $A = LL^T$，其中，L 为下三角阵且当限定 L 的对角元素为正时，这种分解是惟一的。这种矩阵分解称为乔里斯基（Cholesky）分解。

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $a_{ij} = a_{ji}$， $L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ l_{r1} & \cdots & l_{rr} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nr} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ l_{r1} & \cdots & l_{rr} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nr} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{r1} & \cdots & l_{n1} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & l_{rr} & \cdots & l_{nr} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11} \cdot l_{11} \quad a_{21} = l_{21} \cdot l_{11} \qquad a_{i1} = l_{i1} \cdot l_{11} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

L的第一列元素l_{i1}可以求出

假设L的第$1 \sim r-1$列已求出,考察A的第r列元素a_{ir}

$$a_{rr} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk} \cdot l_{rk} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2 + l_{rr}^2$$

$$a_{ir} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik} \cdot l_{rk} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} \cdot l_{rk} + l_{ir} \cdot l_{rr} \qquad i = r, r+1, \cdots, n$$

可得L的元素的计算公式

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}} \qquad l_{i1}=\frac{a_{i1}}{l_{11}} \qquad i=2,3,\cdots,n$$

$$l_{rr}=\sqrt{a_{rr}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^{2}} \qquad r=2,\cdots,n$$

$$l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}\cdot l_{rk}}{l_{rr}} \qquad i=r+1,\cdots,n$$

从公式中可以看出,在计算机上运算时,

当l_{ij}求出后,a_{ij}的储存地址可以用来存放l_{ij}

对称正定线性方程组的解法

线性方程组 $Ax=b$ 其中A为n阶对称正定矩阵

则存在主对角元为正数 的下三角阵L,使得

$$A = LL^T$$

于是线性方程组可化为两个三角形方程组

$L(L^T x) = b$ $\quad Ly = b \qquad L^T x = y$

1. 解 $Ly=b$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\cdot y_k}{l_{ii}} & i=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ l_{i1} & \cdots & l_{ii} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{ni} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

2. 解 $L^T x = y$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{l_{nn}} \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} l_{ki}\cdot x_k}{l_{ii}} & i=n-1,\cdots,2,1 \end{cases}$$

$$L^T=\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{i1} & \cdots & l_{n1} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & l_{ii} & \cdots & l_{ni} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

对称正定方程组的平方根法

二、 改进平方根法

A为对称矩阵且所有顺序主子式均不为零时，它可分解成 $A = LDL^T$

记

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

由矩阵乘法运算导出 LDL^T分解的计算公式：

对 $j = 1,2,\cdots,n$有

$$\begin{cases} d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}) / d_j \quad (i = j+1, j+2, \cdots, n) \end{cases} \tag{4.24}$$

计算量?

计算顺序:

$$d_1 \to l_{i1}(i=2,3,\cdots,n) \to d_2 \to l_{i2}(i=3,4,\cdots,n) \to \cdots \to l_{n,n-1} \to d_n$$

若记: $A = LDL^T = LU$, **其中** $U = DL^T$

则(4.24)改为

$$\begin{cases} d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{jk} l_{jk} \quad (j=1,2,\cdots,n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{ik} l_{jk} \quad (i=j+1,j+2,\cdots,n) \\ l_{ij} = u_{ij} / d_j \end{cases} \qquad \textbf{(4.25)}$$

计算量?

计算顺序:

$$d_1 \to u_{i1}(i=2,3,\cdots,n) \to l_{i1}(i=2,3,\cdots,n) \to d_2 \to u_{i2}(i=3,4,\cdots,n) \to l_{i2}\ (i=3,4,\cdots,n) \to d_3 \cdots$$

按式(4.25)对矩阵A作$\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$分解，
乘除法运算量与乔里斯基分解相当.

相应地求解方程组$Ax=b$可分两步进行：

(1)解方程组 $\mathrm{L}y=b$,

(2)由$\mathrm{L}^{\mathrm{T}}x=\mathrm{D}^{-1}y$求出$x$.

$$
\begin{cases}
y_1 = b_1 \\
y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} y_k \quad (i = 2,3,\cdots,n) \\
x_n = y_n / d_n \\
x_i = \dfrac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} x_k \quad (i = n-1, n-2, \cdots, 1)
\end{cases}
\tag{4.26}
$$

例4.7 用改进平方根法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解 按式(4.25)对矩阵A作LDL^T分解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ -3 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 9 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & \frac{2}{3} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

由式(4.26)计算得

$$y_1 = b_1 = 1, \quad y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = 0, \quad y_3 = b_3 - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}y_k = 15, \quad y_4 = b_4 - \sum_{k=1}^{3} l_{4k}y_k = 1;$$

$$x_4 = \frac{y_4}{d_4} = 1, \quad x_3 = \frac{y_3}{d_3} - l_{43}x_4 = 1, \quad x_2 = \frac{y_2}{d_2} - \sum_{k=3}^{4} l_{k2}x_k = 1, \quad x_1 = \frac{y_1}{d_1} - \sum_{k=2}^{4} l_{k1}x_k = 1.$$

4.5 向量和矩阵的范数

二维向量和三维向量都可以度量其大小和长度.

高维向量的"长度"能否定义呢?

″范数″是对向量和矩阵的一种度量, 实际上是二维和三维向量长度概念的一种推广

数域: 数的集合,对加法和乘法封闭

线性空间: 可简化为向量的集合,对向量的加法和数量乘法封闭,

也称为向量空间

一、向量的范数

定义4.1 对于n维向量空间 R^n中任意一个向量 x,

若存在唯一一个实数 $\|x\| \in R$与x对应，且满足

(1)（正定性）$\|x\| \geq 0$, 且$\forall x \in R^n$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2)（齐次性）$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$，$\forall x \in R^n, \alpha \in R$;

(3)（三角不等式）$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in R^n$.

则称 $\|x\|$为向量x的范数.

对于复线性空间C^n中的向量范数可以类似定义

在向量空间 $R^n(C^n)$中，设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

常用的向量 x的范数有

$$\|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2} \quad \text{--------(1)}$$

x的2－范数或欧氏范数

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \quad \text{--------(2)}$$

x的 1－范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i| \quad \text{--------(3)}$$

x的∞－范数或最大范数

$$\|x\|_p = (\,|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\,)^{1/p} \qquad \text{---------(4)}$$

x的$p-$范数，$p \geq 1$

显然 $\|x\|_1$和$\|x\|_2$ 是$\|x\|_p$在$p=1$和$p=2$时的特例

并且由于

$$\max_{1\le i\le n}|x_i| \le (\,|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\,)^{1/p} \le (n\max_{1\le i\le n}|x_i|^p)^{1/p}$$

$$= n^{1/p}\max_{1\le i\le n}|x_i| \to \max_{1\le i\le n}|x_i| \ (p\to\infty)$$

$\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ ($p\to\infty$时)，所以$\|x\|_\infty$也是$\|x\|_p$的特例

且 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

例6.求向量 $x=(1,4,3,-1)^T$ 的各种常用范数.

解: $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_4|=9$

$$\|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_4|^2)^{1/2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le 4}|x_i|=4$$

二、矩阵的范数

定义 4.3 若 $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 的某个非负实值函数 $N(A) \equiv \|A\|$ 满足下述条件

① 正定性： $\|A\| \geq 0$，且 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{O}$；

② 齐次性： $\|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\|$，$\alpha$ 为实数或复数；

③ 三角不等式： $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$，对任意矩阵 $A, B \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$；

④ 相容性：$\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$；

则称 $N(A) \equiv \|A\|$ 是 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 上一个矩阵范数（或模）。

二、矩阵的范数

定理 4.7 （矩阵的算子范数）P.80

设 $x \in R^n$， $A \in R^{n\times n}$，且给出一种向量范数 $\|x\|_v$，

则相应的定义一个矩阵的非负函数 $N(A) \equiv \|A\|_v$。即

$$\|A\|_v = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R^n}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}.$$

注：由定理 4.7 知,算子范数 $\|A\|_v$ 还满足下面的不等式

对任意 $x \in R^n$， $A \in R^{n\times n}$ 有 $\|Ax\|_v \le \|A\|_v \|x\|_v$ （4.28）

定理 4.8 （矩阵范数计算公式）设 $x \in R^n$， $A \in R^{n \times n}$，则

① $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ （称为 A 的列范数）；

② $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （称为 A 的行范数）；

③ $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max} A^T A}$ （称为 A 的 2-范数），其中 $\lambda_{\max}(A^T A)$ 表示 $A^T A$ 的最大特征值。

注： 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 类似向量的 2-范数

设 $\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}$

不难验证其满足定义2的4个条件

因此 $\|A\|_F$ 是一种矩阵范数

称为Frobenius范数,简称F-范数

而且可以验证 $\|A\|_F=\left(tr(A^TA)\right)^{1/2}=\left(tr(AA^T)\right)^{1/2}$

tr为矩阵的迹

例7. 求矩阵A的各种常用范数

$$A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}3\\4\\2\end{array} \\ \begin{array}{ccc}2&5&2\end{array} & \end{array}$$

解:

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\{2,5,2\}=5$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \max_{1\le i\le n}\{3,4,2\}=4$$

由于 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

因此先求$A^T A$的特征值

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\lambda I - A^T A) = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 9 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0$$

可得$A^T A$的特征值为

$$\lambda_1 = 9.1428, \lambda_2 = 2.9211, \lambda_3 = 0.9361$$

$$\lambda_{\max}(A^T A) = 9.1428$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 3.0237$$

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{2+9+2} = 3.6056$$

$\|A\|_1$ $\|A\|_\infty$	$\|A\|_2$	$\|A\|_F$
容易计算	计算较复杂	
	对矩阵元素的变化比较敏感	较少使用
	性质较好	
	使用最广泛	

4.7 解线性方程组的迭代法

在用直接法解线性方程组时,要对系数矩阵不断变换.

如果方程组的阶数很高, 则运算量将会很大, 并且大量占用计算机资源.

因此对线性方程组 $Ax = b$ --------(4.2)

其中 $A \in R^{n \times n}, b \in R^n, x \in R^n$

要求:找寻更经济、适用的数值解法.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \xleftrightarrow{\text{等价变换}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{d}$$

$$\boxed{\xrightarrow{\text{建立迭代格式}} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{Bx}^{(k)} + \boldsymbol{f}}$$

如果能将线性方程组(1)变换为

$$x = Bx + f \qquad \text{--------(4.31)}$$

其中 $B \in R^{n \times n}, f \in R^n, x \in R^n$

显然,(4.2)式和(4.31)式同解,我们称两者**等价.**

对线性方程组(4.31),采用以下步骤:

取初始向量 $x^{(0)}$, 代入(4.31), 可得

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + f$$

依此类推

$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + f$$

$$\vdots$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad \text{---------(4.32)}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

迭代矩阵B

这种方式就称为迭代法 ,以上过程称为迭代过程

迭代法产生一个序列 $\{x^{(k)}\}_0^{\infty}$

如果其极限存在,即 $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$

则称迭代法**收敛**, 否则称为**发散**.

一、雅可比迭代法

设线性方程组(1)的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\boxed{设 a_{ii} \neq 0 \ \ (i = 1,2,\cdots,n)}$,则可从上式解出 x_i

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)]$$

依此类推,线性方程组(1)可化为

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}x_j) = x_1 + \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j)\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j) = x_2 + \frac{1}{a_{22}}(b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_i &= \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j) = x_i + \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{n} a_{nj}x_j) = x_n + \frac{1}{a_{nn}}(b_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j)
\end{aligned}\right. \quad \text{-----}(*)$$

对(*)作迭代过程

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \qquad \text{--------(**)}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,2,\cdots)$$

设 $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$

则(**)式转化为矩阵形式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}Ax^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b \qquad \text{--------(4.33)}$$

令

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A的下三角部分的负矩阵

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A的上三角部分的负矩阵

$$A=D-L-U$$

$$D-A=L+U$$

选取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}$，则 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Dx}=(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

故迭代过程(4.33)化为

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

令$B_J = D^{-1}(L+U)$, $f = D^{-1}b$,于是

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f \qquad \text{--------(4.34)}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

等价线性方程组为 $x = B_J x + f \Longleftrightarrow Ax = b$

称 (4.34)式为解线性方程组(4.2)的Jacobi迭代法

B_J为$Jacobi$ 迭代法的迭代矩阵

Jacobi迭代法小结

将非奇异矩阵A分裂成 $\boxed{A = D - L - U}$

$$Ax = b \ \Rightarrow \ x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

由此构造雅可比迭代法

$$\boxed{\begin{cases} x^{(0)} (\text{初始向量}) \\ x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f \end{cases}} \qquad \text{--------(4.34)}$$

其中迭代矩阵$B_J = D^{-1}(L+U)$，而 $f = D^{-1}b$。

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \ i = 1,2,\cdots,n \qquad \text{--------(4.35)}$$

例1. **用Jacobi迭代法求解方程组,误差不超过1e-4.**

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

取初值 $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$，使用 $Jacobi$ 迭代法

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\cdots n,\cdots)$$

$$\boxed{x^{(1)} = B_J x^{(0)} + f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [2.5, 3, 3]^T \qquad \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_2 = 4.924$$

$$\boxed{x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [2.875 , 2.3636 ,1]^T \qquad \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = 2.1320$$

$$\boxed{x^{(3)} = B_J x^{(2)} + f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.875 \\ 2.3636 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [3.1364, 2.0455, 0.9716]^T \qquad \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\| = 0.4127$$

依此类推,得方程组满足精度的解为 x_{12}

x4 =	3.0241	1.9478	0.9205	d =	0.1573
x5 =	3.0003	1.9840	1.0010	d =	0.0914
x6 =	2.9938	2.0000	1.0038	d =	0.0175
x7 =	2.9990	2.0026	1.0031	d =	0.0059
x8 =	3.0002	2.0006	0.9998	d =	0.0040
x9 =	3.0003	1.9999	0.9997	d =	7.3612e-004
x10 =	3.0000	1.9999	0.9999	d =	2.8918e-004
x11 =	3.0000	2.0000	1.0000	d =	1.7669e-004
x12 =	3.0000	2.0000	1.0000	d =	3.0647e-005

迭代次数为12次

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0000 \\ 2.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

二、高斯-塞德尔迭代法

分析Jacobi迭代法(**)的迭代过程,将(**)式细化

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{a_{22}}(b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^{(k)})$$

发现在 $x_i^{(k+1)}$之前 $, x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$已经求出

但当求 $x_i^{(k+1)}$时,仍用 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$进行迭代

能否求$x_i^{(k+1)}$时,利用$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$进行迭代呢 ?

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}),\ i=1,2,\cdots,n \qquad \text{--------(4.36)}$$

选取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}$（下三角矩阵），于是 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}$。

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 转化为 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$

于是得到高斯—塞德尔迭代公式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(0)}\text{(初始向量)}\\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}_G\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}\end{cases} \qquad （4.38）$$

其中，$\boldsymbol{B}_G=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$。

称 $\boldsymbol{B}_G$ 为解（4.38）的高斯-塞德尔迭代法的迭代矩阵。

Gauss-Seidel迭代法也可表示成

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{11}}b_1$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}\sum_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{22}}\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{22}}b_2$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}\sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{33}}\sum_{j=4}^{n} a_{3j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{33}}b_3$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}b_i$$

$$x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} + \frac{1}{a_{nn}}b_n$$

例2. **用Gauss-Seidel迭代法求解例1.**

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解： 取初值$x^{(0)} = [0,0,0]^T$，使用$Gauss - Seidel$迭代法

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{3} a_{1j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{11}}b_1 = -\frac{1}{8}(-3x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + 2.5$$

例2.
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{3} a_{1j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{11}}b_1 = -\frac{1}{8}(-3x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + 2.5$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}\sum_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{22}}\sum_{j=3}^{3} a_{2j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{22}}b_2$$

$$= -\frac{4}{11}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} + 3$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}\sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(k+1)} + \frac{1}{a_3}b_3 = -\frac{1}{4}(2x_1^{(k+1)} + 1x_2^{(k+1)}) + 3$$

通过迭代,至第7步得到满足精度的解x_7

x1 =2.5000	2.0909	1.2273	d =3.4825
x2=2.9773	2.0289	1.0041	d =0.5305
x3 =3.0098	1.9968	0.9959	d =0.0465
x4 =2.9998	1.9997	1.0002	d =0.0112
x5 =2.9998	2.0001	1.0001	d =3.9735e-004
x6 =3.0000	2.0000	1.0000	d =1.9555e-004
x7 =3.0000	2.0000	1.0000	d =1.1576e-005

从例1和例2可以看出,Gauss-Seidel迭代法的收敛速度比Jacobi迭代法要高。

但一般情况不一定成立！ P.86

三、超松弛迭代法

逐次超松弛迭代法,简称SOR方法

选取分裂矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为带参数的下三角阵 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L}}{\omega}$

其中，$\omega>0$ 为可选择的松弛因子。

于是可得迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U})\text{。}$$

得到解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的逐次超松弛迭代公式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(0)}(\text{初始向量})\\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}\end{cases}\qquad\text{（4.41）}$$

其中，$\boldsymbol{f}=\omega(\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$ 。

SOR 方法的分量形式：

已知：第 k 次近似 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 及第 $k+1$ 次近似的

分量 $x_j^{(k+1)}\,(j=1,2,\cdots,i-1)$

(1)用 G-S 迭代法计算一个辅助量 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$：

$$\tilde{x}_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad (4.42)$$

(2) 由 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的第 i 个分量 $x_i^{(k)}$ 与 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 加权平均，

定义 $x_i^{(k+1)}$：

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \tag{4.43}$$

SOR 方法的分量形式：

$$\begin{cases} x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^T \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \\ (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \text{其中} x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T, \omega \text{称为松弛因子} \end{cases} \qquad \text{---------}(4.44)$$

注：迭代过程收敛，要求 $0 < \omega < 2.$

例 4.15 用 **SOR** 方法解方程组
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解 取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.0,0.0,0.0,0.0)^T$，**SOR** 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{\omega}{4}(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{\omega}{\underline{4}}(1 - \underline{x_1^{(k+1)}} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \dfrac{\omega}{4}(1 - \underline{x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \dfrac{\omega}{4}(1 - \underline{x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)}} + 4x_4^{(k)}) \\ \qquad (k = 0,1,\cdots) \end{cases}$$

① 当取松弛因子ω =1.3 时，计算结果为

$$x^{(11)} = (-0.99999646, -1.00000310, -0.99999953, -0.99999912)^T$$

且 $$\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(11)}\right\|_\infty = \left\|x^* - x^{(11)}\right\|_\infty \le 3.54 \times 10^{-6}$$

迭代次数$k = 11$。

②当取ω =1.0 时，初始向量相同，达到同样精度，所需迭代次数$k = 22$

③当取ω =1.7 时，初始向量相同，达到同样精度，则需迭代次数$k = 33$

松弛因子?

4.8 迭代法的收敛性及误差估计

一、迭代法的收敛性

定义 4.6 矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i \ (i=1,\cdots,n)$ 的模的最大值称为它的谱半径，

记为 $\rho(A)$，即 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$。 --------(4.45)

.

一、迭代法的收敛性

定理 4.11 迭代过程 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任给初始向量 $x^{(0)}$ 收敛的**充分必要条件**是矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)<1$。

略证

证 必要性：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x^*$，则 $x^*=Bx^*+f$．因为

$$x^{(k)}-x^*=Bx^{(k-1)}+f-(Bx^*+f)=B(x^{(k-1)}-x^*)=\cdots=B^k(x^{(0)}-x^*)$$

所以 $$\lim_{k\to\infty} B^k(x^{(0)}-x^*)=\lim_{k\to\infty}(x^{(k)}-x^*)=0$$

由 $x^{(0)}$ 的任意性知 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k=O$．再由引理得 $\rho(B)<1$．

充分性：若 $\rho(B)<1$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k=O$；另一方面，$\lambda=1$ 不是 B 的特征值，从而 $I-B$ 是非奇异矩阵，$(I-B)x=f$ 有唯一解，记为 x^*，即 $x^*=Bx^*+f$．于是有 $x^{(k)}-x^*=B^k(x^{(0)}-x^*)$．进一步地有，$\lim\limits_{k\to\infty}(x^{(k)}-x^*)=\lim\limits_{k\to\infty} B^k(x^{(0)}-x^*)=0$

因此序列 $\{x^{(k)}\}$ 是收敛的，且收敛于 x^*．

推论4.1

推论4.2

定理 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(B_J)<1$；

G-S 迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(B_G)<1$.

定义 4.8 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 A 满足

(1) $|a_{ii}|\ge \sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\ldots,n)$，且至少有一个 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得式中的不等号成立，则称 A 为按行弱对角占优矩阵;

(2) $|a_{ii}|> \sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|\ge 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$，则称 A 为按行严格对角占优矩阵.

几个常用的判别法

定理 4.12　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为严格对角占优阵，则 A 为非奇异矩阵。

定理 4.13　设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$。如果 A 为严格对角占优阵，则

解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 Jacobi 方法，G－S 迭代法都收敛；

且 G－S 迭代法收敛比 Jacobi 方法快。

定理 4.14 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，则解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 SOR 方法收敛 $\Leftrightarrow 0<\omega<2$.

推论 4.3 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，则 G—S 迭代法收敛。

例 试考察用Jacobi方法,G－S迭代法解下面方程组的**收敛性**.

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 17.5 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + 12x_3 = -12 \end{cases}$$

解 由于

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

为严格对角占优阵.

于是可知解方程组$Ax=b$的Jacobi迭代法，G-S迭代法均收敛。

4.10 数值实验

部分命令	含义
trial(A)	提取 A 的下三角部分
triu(A)	提取 A 的上三角部分
norm(A,p)	p 范数
cond(A,p)	条件数
[L,U,P]=lu(A)	选列主元 LU 分解
R=chol(X)	平方根分解

```
[L,U]=lu(A);
```

%矩阵A的LU分解，输出矩阵L和U，其中L是下三角矩阵，U是上三角矩阵。