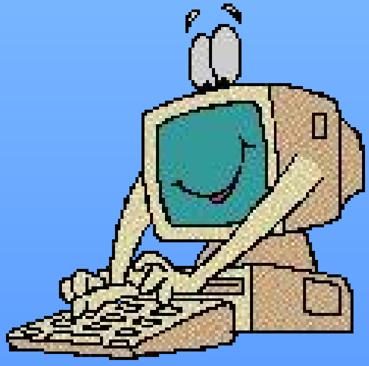
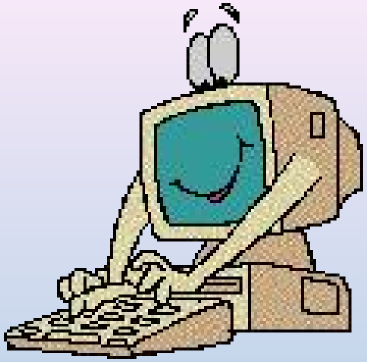
数值计算方法

非线性方程求根



非线性方程求根



§2.1　二分法

§2.2　迭代法

§2.3 牛顿迭代法与弦割法

§2.4 迭代法的收敛阶与加速收敛方法

2.5 非线性方程组的解法

本章要点

本章主要介绍非线性方程求根方法,尤其是迭代法

主要方法

二分法、简单迭代法、Newton迭代法、SOR方法和Aitken加速方法

引例

在天体力学中，有如下开普勒（**Kepler**）方程

$$x - t - \varepsilon \sin x = 0, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

非线性方程

其中 t —时间， x —弧度，行星运动的轨道 x 是 t 的函数.

讨论单变量非线性方程 $f(x) = 0$ （**6.1**）

的求根问题，这里 $x \in R$ ， $f(x) \in C[a,b]$.

§ 2.1 二分法

方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上根的情形

有唯一根

有多根

所有根均为单根

有重根

首先,我们仅讨论 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 的多个根均为单根的情形

设 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有 m 个单根，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$$

然后在每个区间上判断是否有根

计算$f(b_i)$的值， $i=0,1,2,\cdots,n$

判断$f(b_i)=0$或$f(b_i)f(b_{i+1})<0$是否成立 $,i=0,1,2,\cdots,n-1$

若成立

b_i就是一个根

$[b_i,b_{i+1}]$中至少有一个根

统计根的个数

如果根的个数正好是m个, 则所有的有根区间均为单根区间

如果根的个数小于m个，则继续对分区间,并重新判断

直到找到所有根的所在区间

然后在每个有根区间进行求根

假设区间$[c,d]$为单根区间,

取其中点$x_0=\dfrac{1}{2}(c+d)$

若$f(x_0)=0$, x_0就是$[c,d]$中的根

若$f(c)\cdot f(x_0)<0$, 则$[c,x_0]$为有根区间, 令$c_1=c, d_1=x_0$

若$f(x_0)\cdot f(d)<0$, 则$[x_0,d]$为有根区间, 令$c_1=x_0, d_1=d$

于是有根区间$[c,d]$就缩小为$[c_1,d_1]$,长度只有一半

继续取$[c_1,d_1]$的中点$x_1=\dfrac{1}{2}(c_1+d_1)$,

可得一系列的小区间和中点

小区间 $[c_0,d_0],[c_1,d_1],[c_2,d_2],\cdots,[c_n,d_n]$

中点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$x_n = \frac{1}{2}(c_n + d_n) \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

显然每个小区间都有单根

$$(d_n - c_n) = \frac{1}{2^n}(d-c)$$

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2^{n+1}}(d-c)$$

确定适当的n,可得任意要求的精度

搜索法—二分法

例8. 求方程$x^3-11.1x^2+38.79x-41.769=0$的三个根

解: 设 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.79x-41.769$

由于 $f(0)=-41.769$ $f(10)\approx 236.1$

可知方程的解在区间[0,10]内

将区间[0,10]等分成三等份

[0,3.33] $f(0)=-41.769$

[0,3.33]内至少有一个根

[3.33,6.67] $f(3.33)\approx 1.24$

[6.67,10] $f(6.67)\approx 19.87$

$f(10)\approx 236.1$

将[3.33,6.67]再分成两个区间

[3.33,5] $f(3.33) \approx 1.24$

$f(5) \approx -0.32$

[5,6.67] $f(6.67) \approx 19.87$

[3.33,5]内至少有一个根

[5,6.67]内至少有一个根

因此找到了三个有单根的区间

[0,3.33] [3.33,5] [5,6.67]

$f(0) = -41.769$ $f(3.33) \approx 1.24$ $f(5) \approx -0.32$ $f(6.67) \approx 19.87$

对分

$f(1.66) \approx -3.39$ $f(4.17) \approx -0.52$ $f(5.84) \approx 5.36$

依此类推结果为 $x_1 \approx 2.10$ $x_2 \approx 3.90$ $x_3 \approx 5.1$

二分法
优缺点?

①优点:方法简单，且只要求函数 $f(x)$ 连续.

②缺点:不能求复根及偶数重根.

举例说明:
一个方程有偶数重根，但不能用二分法求出该重实根.

例： 方程 $f(x)=(x-1)^2(x-2)=0$ 在 $[0,3]$ 内有重根 $x=1$，

但不能由二分法求出.

§2.2　迭代法

方程是在科学研究中不可缺少的工具

方程求解是科学计算中一个重要的研究对象

几百年前就已经找到了代数方程中二次至五次方程的求解公式

但是,对于更高次数的代数方程目前仍无有效的精确解法

对于无规律的非代数方程的求解也无精确解法

因此,研究非线性方程的数值解法成为必然

设非线性方程 $f(x)=0$ --------(1)

如果存在一点 x^*，使得 $f(x^*)=0$

则称 x^* 为方程 (1)的根或零点

如果方程 (1)在区间 $[a,b]$上只有一个根，

则称 $[a,b]$为单根区间

如果方程 (1)在区间 $[a,b]$上有多个根，

则称 $[a,b]$为多根区间

本节主要研究单根区间上的求解方法

一、简单迭代法(基本迭代法)

将非线性方程(1)化为一个同解方程

$$x = \varphi(x) \qquad \text{--------(2)}$$

并且假设 $\varphi(x)$为连续函数

任取一个初值 x_0,代入 (2)的右端 ,得

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

继续

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad \text{--------(3)}$$

称(3)式为求解非线性方程(2)的简单迭代法

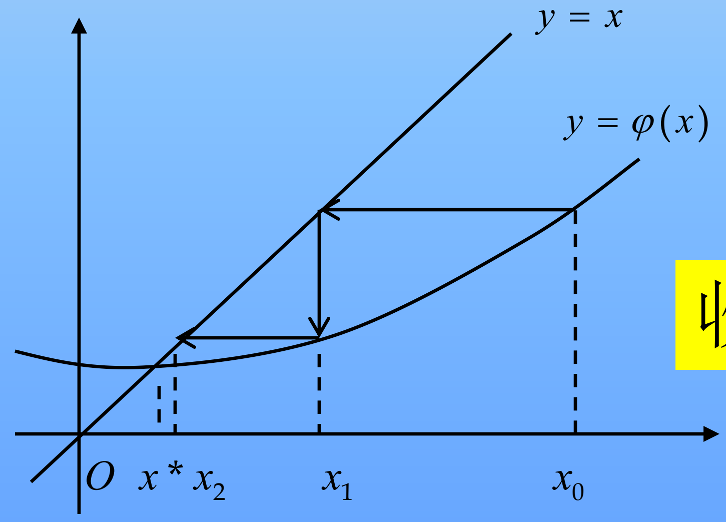
称 $\varphi(x)$ 为迭代函数，称 x_k 为第 k 步迭代值

如果存在一点 x^*，使得迭代序列 $\{x_k\}_0^\infty$ 满足

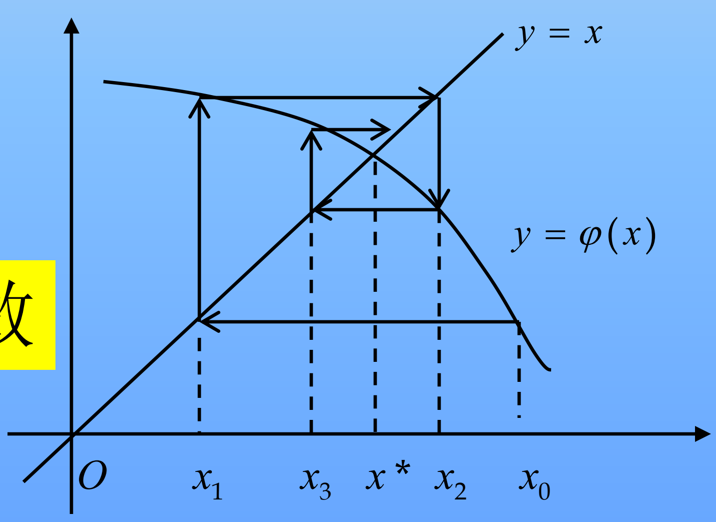
$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \qquad \text{--------(4)}$$

则称迭代法(3)收敛，否则称为发散

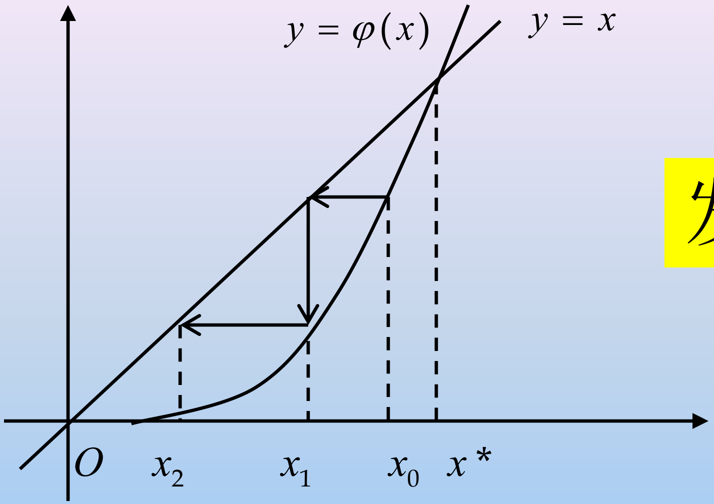
如果将(2)式表示为 $\begin{cases} y = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$ 与方程(2)同解



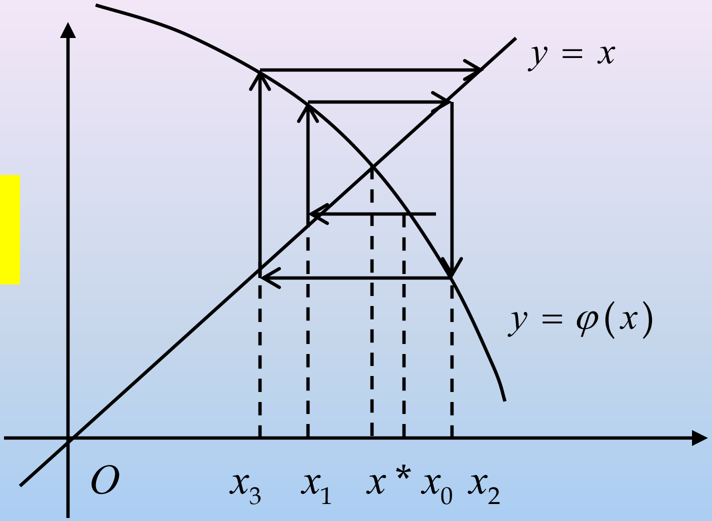
收敛



$\varphi(x)$ 在 x^* 附近较平缓



发散



$\varphi(x)$在x^*附近较陡峭

例1. 用迭代法求解方程 $2x^3 - x - 1 = 0$

解: (1) 将原方程化为等价方程

$$x = 2x^3 - 1$$

如果取初值 $x_0 = 0$,由迭代法 (3),得

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 2x_0^3 - 1 = -1$$

$$x_2 = 2x_1^3 - 1 = -3$$

$$x_3 = 2x_2^3 - 1 = -55$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

显然迭代法发散

(2) 如果将原方程化为等价方程

$$x = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

仍取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{x_0 + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{x_1 + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1.7937}{2}} \approx 0.9644$$

依此类推,得

x2 = 0.9644
x3 = 0.9940
x4 = 0.9990
x5 = 0.9998
x6 = 1.0000
x7 = 1.0000

已经收敛,故原方程的解为

$$x = 1.0000$$

同样的方程
不同的迭代格式
有不同的结果

迭代函数的构造有关

什么形式的迭代法
能够收敛呢?

定理1. 设迭代函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,且满足

(1) 当$x \in [a,b]$时, $a \le \varphi(x) \le b$;

(2) 存在一正数 L,满足 $0 < L < 1$,且$\forall x \in [a,b]$,有

$$|\varphi'(x)| \le L \qquad \text{---------}(5)$$

则1°. 方程$x=\varphi(x)$在$[a,b]$内有唯一解 x^*

2°.对于任意初值$x_0 \in [a,b]$,迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$均收敛于x^*

(局部收敛性)

3°. $$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \qquad \text{---------}(6)$$

4°. $$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| \qquad \text{---------}(7)$$

证: 设$f(x)=x-\varphi(x)$, 则$f(x)$在$[a,b]$上连续可导

由条件(1) $$f(a)=a-\varphi(a)\le 0$$

$$f(b)=b-\varphi(b)\ge 0$$

由根的存在定理, 方程$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根

由 $$|\varphi'(x)|\le L<1$$

$$f'(x)=1-\varphi'(x)>0$$

则$f(x)$在$[a,b]$上单调递增，$f(x)=0$在$[a,b]$上仅有一个根

所以 1^o. 方程 $x=\varphi(x)$在$[a,b]$内有唯一解 x^*

2^o. 对于迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$，　由微分中值定理

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_k - x^*)$$

$$x_{k+1} - x_k = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\bar{\xi})(x_k - x_{k-1})$$

由于 $|\varphi'(x)| \le L$

$$|x_{k+1} - x_k| \le L|x_k - x_{k-1}|$$

$$|x_{k+1} - x^*| \le L|x_k - x^*| = L|x_{k+1} - x^* - (x_{k+1} - x_k)|$$

$$\le L|x_{k+1} - x^*| + L|(x_{k+1} - x_k)|$$

$$|x_{k+1} - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

$$\le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

由于 $L<1$, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - x^*) = 0$

因此对任意初值 x_0,迭代法$x_{k+1} = \varphi(x_k)$均收敛于x^*

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

证毕.

定理1指出， 只要构造的迭代函数满足

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

此时虽收敛但不一定是唯一根

迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 就收敛

对于预先给定的误差限 ε 即要求 $|x_k - x^*| < \varepsilon$

由(6)式,只要

$$\frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

因此,当 $|x_k - x_{k-1}| < \dfrac{1-L}{L}\varepsilon \approx \varepsilon$ ---------(8)

迭代就可以终止， x_k 可以作为方程的近似解

例2. 用迭代法求方程的近似解,精确到小数点后6位

$$e^x + 10x - 2 = 0$$

解: 由于 $e^x > 0$, 则 $2 - 10x > 0$ $\quad x < 0.2$

$x < 0$时, $0 < e^x < 1$, $2 - 10x > 2$

因此 $[0, 0.2]$为有根区间

本题迭代函数有两种构造形式

$$x = \varphi_1(x) = \frac{2 - e^x}{10} \qquad x = \varphi_2(x) = \ln(2 - 10x)$$

由于 $|\varphi_1'(x)| = \dfrac{e^x}{10} < \dfrac{e^{0.2}}{10} < 1 \qquad |\varphi_2'(x)| = \dfrac{10}{2 - 10x} \geq 5$

因此采用迭代函数 $\quad x = \varphi_1(x) = \dfrac{2 - e^x}{10}$

取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = \frac{2 - e^{x_0}}{10} = 0.1$$

x1 = 0.1000000	d1 = 0.1000000
x2 = 0.0894829	d2 = -0.0105171
x3 = 0.0906391	d3 = 0.1156e-002
x4 = 0.0905126	d4 = -0.1265e-003
x5 = 0.0905265	d5 = 0.1390e-004
x6 = 0.0905250	d6 = -0.1500e-005
x7 = 0.0905251	d7 = 0.1000e-006

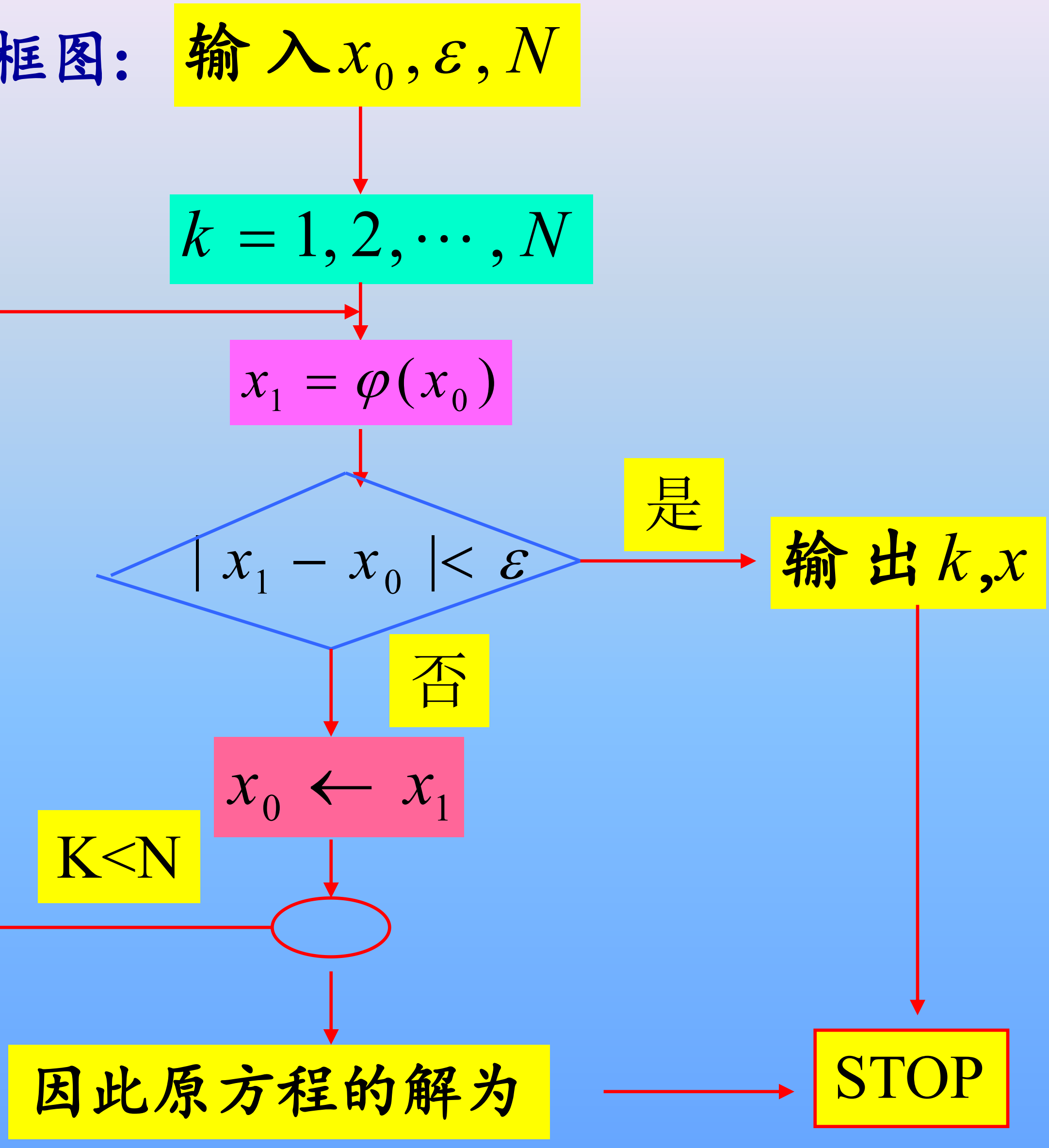
由于|d7| =0.1000e-006<1e-6

因此原方程的解为 $x^* \approx$ x7 = 0.090525

由定理1的(7)式出,

L或$|\varphi'(x)|$在$[a,b]$上越小，迭代法收敛就越快

算法的程序框图：



输 入 x_0, ε, N
$k = 1, 2, \cdots, N$
$x_1 = \varphi(x_0)$
$|x_1 - x_0| < \varepsilon$
是
输 出 k, x
否
$x_0 \leftarrow x_1$
K<N
因此原方程的解为
STOP

§ 2.3 Newton迭代法

一、Newton迭代法

设 x_k 方程 $f(x)=0$ 的近似根.又设 $f(x)$ 连续可微，且

在 x_k 附近 $f'(x)\neq 0$,则可将 $f(x)$ 在 x_k 处展开，即

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)\,.$$

得 $f(x)=0$ 的近似方程为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

近似方程为 $f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$ 线性方程

记其根 x_{k+1},则 x_{k+1} 的计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots \qquad (9)$$

给定初始值 x_0,由式(9)

求方程 $f(x)=0$ 根的方法称为牛顿法.

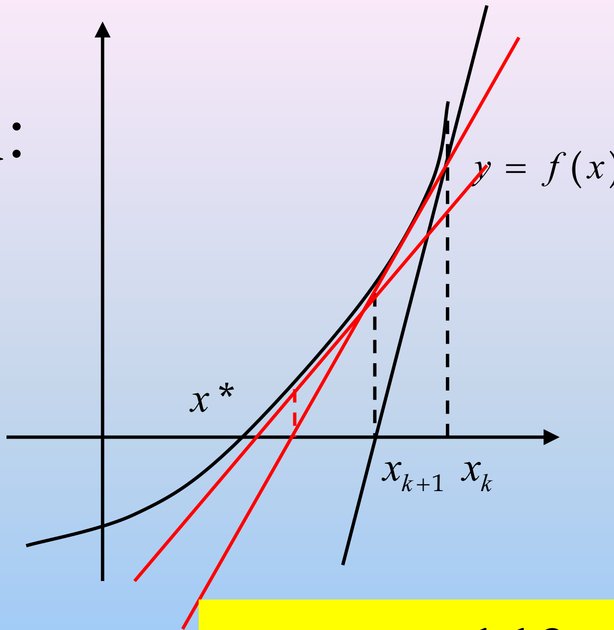
计算公式:
$$\begin{cases} \text{给定 } x_0 \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

只要$f'(x^*)\neq 0$,

Newton迭代法至少平方收敛

例5. 用Newton迭代法求方程的根:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$



解: 设$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

由Newton迭代法

Newtonddf.m

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 1}{3x_k^2 - 3}$$

取初值 $x_0 = 0.5$, 得

x0 =0.5;
x1 =0.3333333333
x2 =0.3472222222
x3 =0.3472963532
x4 =0.3472963553

迭代四次

精度达10^{-8}

讨论

导出计算 $\sqrt{c}\ (c>0)$ 的牛顿迭代公式.

取 $f(x)=x^2-c$，牛顿法计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k}),\quad k=0,1,\cdots$$

其中初值 x_0 给定.

- 注:开方法—古代数学中一颗璀璨的明珠.

刘徽《九章算术》

二、Newton迭代法的变形——弦割法

Newton迭代法 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ ---------(9)

需要求每个迭代点处的导数 $f'(x_k)$ 　复杂！

用x_0近似替代 $f'(x_k)$中的 x_k，得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$ ---------(13)

这种格式称为简化Newton迭代法　精度稍低

如果用数值导数代替 $f'(x_k)$ $$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

则Newton迭代法变为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{---------(14)}$$

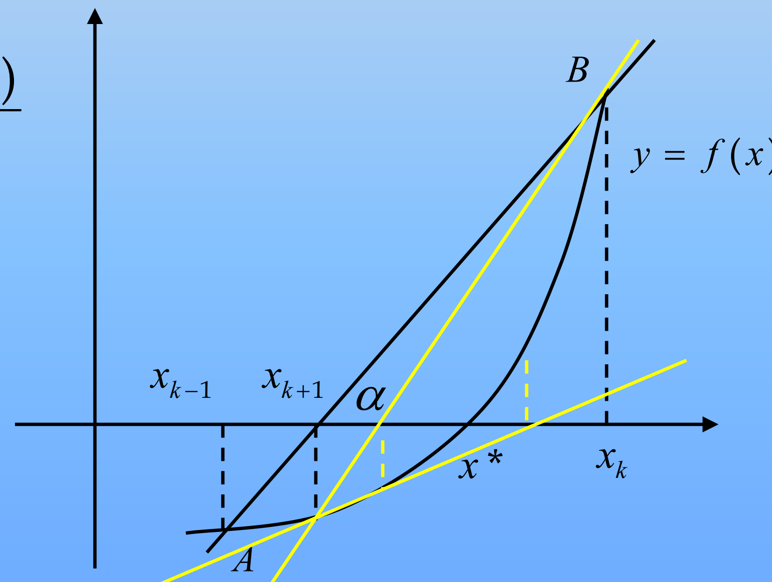
这种格式称为弦割(截)法 收敛阶约为1.618

如图，AB的斜率为 $K_{AB} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\tan\alpha = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$= x_k - \cot\alpha \cdot f(x_k)$$



$\cot\alpha \cdot f(x_k)$

几何意义

例6. 用简化Newton法和弦截法解例(5)中方程的根，并和Newton 迭代法比较 $x^3-3x+1=0$

解: 设$f(x)=x^3-3x+1$ $f'(x)=3x^2-3$

由简化Newton法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_0^2-3}$$

由弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

简化Newton法

x0=0.5
x1= 0.3333333333
x2 = 0.3497942387
x3 = 0.3468683325
x4 = 0.3473702799
x5 = 0.3472836048
x6 = 0.3472985550
x7 = 0.3472959759
x8 = 0.3472964208
x9 = 0.3472963440
x10 = 0.3472963572
x11 = 0.3472963553

由弦截法

x0=0.5;
x1=0.4;
x2 = 0.3430962343
x3 = 0.3473897274
x4 = 0.3472965093
x5 = 0.3472963553
x6 = 0.3472963553

要达到精度10^{-8}

简化Newton法迭代11次

弦截法迭代5次

Newton迭代法迭代4次

无论前面哪种迭代法：

Newton迭代法　简化Newton法　弦截法

是否收敛均与初值的位置有关

如　$f(x)=\arctan(x)=0$　精确解为　$x=0$

Newton迭代法　$x_{k+1}=x_k-\arctan x_k\cdot(1+x_k^2)$

取初值 $x_0=1$

x0 =1
x1 = -0.5708
x2 = 0.1169
x3 = -0.0011
x4 = 7.9631e-010
x5 = 0

收敛

若取初值 $x_0=2$

x0 = 2
x1 = -3.54
x2 = 13.95
x3 = -279.34
x4 = 122017

发散

如果在构造迭代法时加入要求：$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$

因此考虑引入一因子λ,建立迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{---------(15)}$$

在迭代时，选择一个 λ,使得

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

这种方法称为Newton下山法，λ称为下山因子

λ的选取方式　　按$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$的顺序

直到$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$成立为止

例7. 求解方程 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$,取初值 $x_0=-0.99$

$|x_n-x_{n-1}|\le 10^{-5}$

Newtonddf.m

解: 1.先用Newton迭代法 $f'(x)=x^2-1$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k}{3(x_k^2-1)}$$

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3-3x_0}{3(x_0^2-1)}=-32.50598$$

$$x_2=x_1-\frac{x_1^3-3x_1}{3(x_1^2-1)}=-21.69118$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^3-3x_2}{3(x_2^2-1)}=15.15689$$

x4 =	9.70724
x5 =	6.54091
x6 =	4.46497
x7 =	3.13384
x8 =	2.32607
x9 =	1.90230
x10=	1.75248
x11=	1.73240
x12=	1.73205
x13=	1.73205

迭代13次才达到精度要求

2.用Newton下山法,结果如下

k	下山因子	x_k	$f(x_k)$
k=0		x0 =-0.99	fx0 =0.666567
k = 1		x1 =32.505829	f(x) = 11416.4
	w =0.5	x1 =15.757915	f(x) = 1288.5
	w =0.25	x1 =7.383958	f(x) =126.8
	w =0.125	x1 =3.196979	f(x) =7.69
	w = 0.0625	x1 =1.103489	f(x)=-0.655
k = 2		x2 = 4.115071	f(x) =19.1
	w = 0.5	x2 = 2.60928	f(x)=3.31
	w =0.25	x2 =1.85638	f(x)=0.27
k = 3		x3 =1.74352	f(x)=0.023
k = 4		x4 = 1.73216	f(x)=0.00024
k = 5		x5 = 1.73205	f(x)=0.00000
k = 6		x6 = 1.73205	f(x)=0.000000

§2.4 迭代法的加速

自学

解非线性方程Newton系列迭代法

都涉及到收敛速度问题

也涉及到初值的选取问题

如何加快迭代法的速度呢？

如何改善迭代法的适用范围呢？

非线性方程迭代法的加速

对于迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ ----(9)

$$x_{k+1}-x_k=-x_k+\varphi(x_k)$$

令 $r_k=x_{k+1}-x_k=-x_k+\varphi(x_k)$

迭代改变量

$$x_{k+1}=x_k+\omega_k r_k=x_k+\omega_k(-x_k+\varphi(x_k))$$

加入因子 ω_k

即 $x_{k+1}=(1-\omega_k)x_k+\omega_k\varphi(x_k)$

x_k与$\varphi(x_k)$的加权平均

上式的迭代函数 $\psi(x)=(1-\omega)x+\omega\varphi(x)$

求导并令 $\psi'(x)=(1-\omega)+\omega\varphi'(x)=0$

得 $$\omega = \frac{1}{1-\varphi'(x)}$$

因此有松弛迭代法:

$$\begin{cases} \omega_k = \dfrac{1}{1-\varphi'(x_k)} \\ x_{k+1} = (1-\omega_k)x_k + \omega_k \varphi(x_k) \end{cases} \qquad \text{---------(10)}$$

从后面的例子可以看出,加速效果是明显的

甚至一些不收敛的迭代法经过松弛加速后也能收敛

松弛法的每一步迭代都 要计算 $\varphi'(x_k)$， 不方便

假设方程 $x=\varphi(x)$ 的精确解为 x^*，初值为 x_0

$$x_1=\varphi(x_0) \qquad x_2=\varphi(x_1)$$

$$x^*=x_2+x^*-x_2=x_2+\varphi(x^*)-\varphi(x_1)$$

$$=x_2+\varphi'(\xi)(x^*-x_1)$$ 中值定理

$$\approx x_2+\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0}(x^*-x_1)$$ 差商近似代替导数

即 $$x^*\approx x_2+\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0}(x^*-x_1)$$

解出x^*,得 $$x^* \approx x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

其中 $x_1 = \varphi(x_0)$ $x_2 = \varphi(x_1)$

于是可以得到迭代格式:

$$\begin{cases} x_k^{(1)} = \varphi(x_k) \\ x_k^{(2)} = \varphi(x_k^{(1)}) \\ x_{k+1} = x_k^{(2)} - \dfrac{(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})^2}{x_k^{(2)} - 2x_k^{(1)} + x_k} \end{cases} \quad k = 0,1,2,\cdots \quad \text{--------(11)}$$

上组公式称为Altken公式或Altken加速

将(11)式综合后可得一个解析式表示的迭代法:

$$x_{k+1} = \varphi(\varphi(x_k)) - \frac{[\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(x_k)]^2}{\varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k) + x_k} \quad \text{----(12)}$$

上式称为Steffensen迭代法

Altken公式与Steffensen公式是等价的

加速效果也是很明显的

例2中将比较不同加速方法

例2. 对迭代格式 $x_{k+1}=\dfrac{x_k^3+1}{3}$

进行加速解方程组 $x^3-3x+1=0$

初值$x_0=0.5$,精确到10^{-6}

解: (1)直接使用迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{x_k^3+1}{3}$$

迭代7次,得到满足精度的解

$$x=0.347296$$

x0 = 0.5
x1 = 0.375
x2 = 0.3509115
x3 = 0.3477369
x4 = 0.3473496
x5 = 0.3473028
x6 = 0.3472971
x7 = 0.3472964

(2)对迭代格式进行松弛加速

$$\varphi(x)=\frac{x^3+1}{3} \qquad \varphi'(x)=x^2 \qquad \omega_k=\frac{1}{1-x_k^2}$$

$$x_{k+1}=(1-\omega_k)x_k+\omega_k\varphi(x_k) \quad =\frac{x_k^3-3x_k^2+1}{3(1-x_k^2)}$$

迭代4次,得到满足精度的解

$$x=0.347296$$

x0 = 0.5
x1 = 0.3333333
x2 = 0.3472222
x3 = 0.3472964
x4 = 0.3472964

(3)对迭代格式进行Altken加速(11)式

$$x_k^{(1)} = \frac{x_k^3 + 1}{3} \qquad x_k^{(2)} = \frac{(x_k^{(1)})^3 + 1}{3}$$

$$x_{k+1} = x_k^{(2)} - \frac{(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})^2}{x_k^{(2)} - 2x_k^{(1)} + x_k}$$

迭代3次,得到满足精度的解

$$x = 0.347296$$

x0 = 0.5
x1 = 0.3451613
x2 = 0.3472961
x3 = 0.3472964

从以上3种结果可见,迭代法加速技术效果比较明显

(4)如果将初值改为$x_0 = 1.5$

迭代格式 $$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{3}$$ 显然不收敛

对迭代格式进行松弛加速

迭代4次,得到满足精度的解

$x = 1.532089$

x = 1.5
x = 1.5333333
x = 1.5320906
x = 1.5320889
x = 1.5320889

对迭代格式进行Altken加速

迭代4次,得到满足精度的解

$x = 1.532089$

x0 = 1.5
x1 = 1.5350706
x2 = 1.5321124
x3 = 1.5320889
x4 = 1.5320889

可见加速技术可能将不收敛的迭代法加速为收敛

附、多根区间上的逐次逼近法

方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上根的情形

有唯一根　用迭代法求解

有多根　所有根均为单根

有重根

1. $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 的多个根均为单根

设 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有 m 个单根，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$$

然后在每个区间上判断是否有根

2. $f(x)=0$在区间$[a,b]$有重根

$f(x)=0$在区间$[a,b]$有m重根$x^*, m\ge 2$

因此可令 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$　　且　$g(x^*)\neq 0$

故有　$f(x^*)=f'(x^*)=f''(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$

且　　$f^{(m)}(x^*)\neq 0$

对于Newton迭代法　$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$　趋于零

此时Newton迭代法可能不收敛

即使$f'(x_k)\neq 0$，由例3. Newton迭代法也只是线性收敛

考察函数 $\varphi(x) = x - m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 在 x^* 处的导数

由于 $f'(x^*) = 0$ 所以不能直接求 $\varphi(x)$ 在 x^* 处的导数

而应该用定义求导

$$\frac{\varphi(x^*+h) - \varphi(x^*)}{h} = \frac{x^*+h - m\dfrac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)} - x^*}{h}$$

$$= 1 - \frac{m}{h}\frac{f(x^*+h)}{f'(x^*+h)}$$

Tailor展开

$$= 1 - \frac{m}{h}\frac{f(x^*) + hf'(x^*) + \cdots + \dfrac{h^m}{m!}f^{(m)}(x^*) + O(h^{m+1})}{f'(x^*) + hf''(x^*) + \cdots + \dfrac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x^*) + O(h^m)}$$

$$= 1 - \frac{m}{h}\frac{\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x^*) + O(h^{m+1})}{\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x^*) + O(h^m)}$$

$$= 1 - \frac{m}{h}\frac{h}{m}(1 + O(h)) \quad = O(h) \quad \to 0 \quad (h \to 0)$$

所以 $\varphi'(x^*) = 0$

由定理2，迭代法 $x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

至少是二阶收敛

2.5非线性方程组的解法

考察非线性方程组
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases} \qquad (6.21)$$

其中，$f_i\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为实变量的非线性函数，

它是给定的多元函数. 一般表示为：f_i： $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.

向量形式表示为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \qquad (6.22)$

其中映射 $\boldsymbol{F}$： $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$.

一、简单迭代法

将非线性方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 转化为等价的方程组

$$\boldsymbol{x}=\Phi(\boldsymbol{x}) \qquad （6.23）$$

其中 $x_i=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

$$\Phi(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{T}}.$$

简单迭代法 $\quad \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}+1)}=\Phi(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})})$， $k=0,1,2,\cdots \qquad$ **(6.24)**

其中 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 称为迭代函数， $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$.

定理 6.7 设迭代函数$\Phi(x)$在闭域$D \subset \boldsymbol{R}^n$上满足:

(1)当$\boldsymbol{x} \in D$时，$\Phi(\boldsymbol{x}) \in D$;

(2) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$,存在常数$L \in (0,1)$,使得$\|\Phi(\boldsymbol{x}_1) - \Phi(\boldsymbol{x}_2)\| \le L\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|$

其中$\boldsymbol{x}_j = (x_1^j, x_2^j, \cdots, x_n^j)^T$, $j = 1,2$.　　则

① $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D$,由式(3.24)产生的向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛于非线性方程组(6.21)

在D上的唯一解$\boldsymbol{x}^*$;

② $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \le \dfrac{L^k}{1-L}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|$, $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \le \dfrac{L}{1-L}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$.

例 6.10 用迭代法求解方程组 $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{4 - x_2^2} \\ x_2 = 1 - e^{x_1} \end{cases}$.

解 迭代函数为 $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2) \\ \varphi_1(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{4 - x_2^2} \\ 1 - e^{x_1} \end{pmatrix}$

迭代公式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\sqrt{4 - (x_2^{(k)})^2} \\ x_2^{(k+1)} = 1 - e^{x_1^{(k)}} \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-1.8, 0.8)^T$，计算结果如表 6.8

因 $\left\|\boldsymbol{x}^{(8)} - \boldsymbol{x}^{(7)}\right\|_\infty \approx 1.05 \times 10^{-5}$,故方程组的解 $\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.816264 \\ 0.873669 \end{pmatrix}$.

二、牛顿法

设有非线性方程组 $F(x)=0$ (6.22)

其中, $F(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$.

若 $F(x)$ 的雅可比矩阵 $F'(x)$ 非奇异，则可将非线性方程组

$F(x)=0$ 化为等价方程组 $x = x-[F'(x)]^{-1}F(x)$

由此构造出牛顿法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (6.25)$$

数值实验

方程求根命令

多项式求根	roots
函数零点	fzero

例 1 求多项式 $x^6 - x - 1$ 的所有根.

```
>> roots([1 0 0 0 0 -1 -1])

ans =

   1.1347
   0.4511 + 1.0024i
   0.4511 - 1.0024i
  -0.6294 + 0.7358i
  -0.6294 - 0.7358i
  -0.7781
```

例 2 求函数 $x^3 - 2x - 5$ 的零点.

```
>> fun=inline('x^3-x*x-5','x')

fun =
     Inline function:
     fun(x) = x^3-x*x-5

>> fzero(fun,[2,3])

ans =
    2.1163

>> fplot(fun,[2,3])
```

小 结

本章主要介绍非线性方程求解方法, 尤其是迭代法

主要方法

二分法、简单迭代法、Newton迭代法和弦割法.