

《多传感器融合感知技术笔记》之

——4. Sobel 算子数学推导_Akaxi

任务：图像空间滤波中对 Sobel 算子进行数学推导。

《Sobel 算子的数学原理》

参考书籍：《数字图像处理-第三版》冈萨雷斯

《Sobel 算子的数学基础》电科大一彭真明

《A 3x3 isotropic gradient operator for image processing》by Irwin Sobel [1973] Gary Feldman

by Akaxi

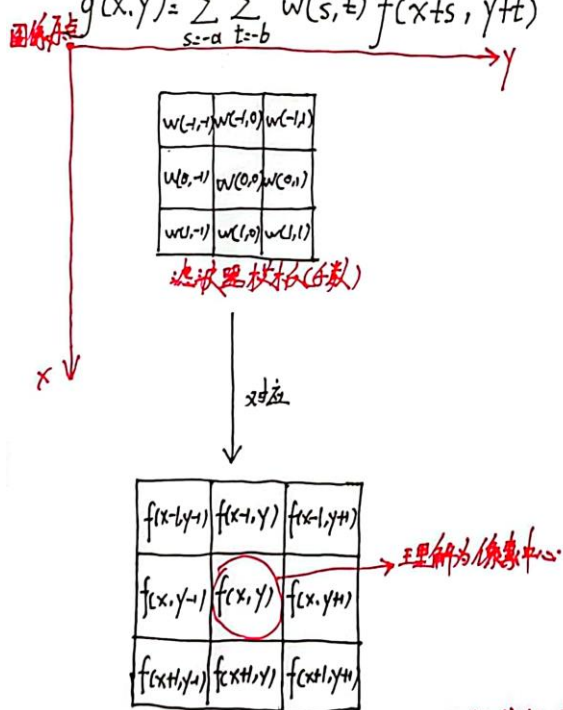
原文

一. 空间滤波

使用大小为 $m \times n$ 的滤波器对大小为 $M \times N$ 的图像进行线性空间滤波，可表示为：

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t)$$

x, y 取 \rightarrow w 中每个元素可访问 f 中的每个像素



二. 一阶/二阶微分锐化滤波器

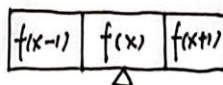
拉普拉斯算子

Roberts 交叉核算子

Sobel 算子

$$\text{定义：一阶微分 } \frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$$

$$\text{二阶微分 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$



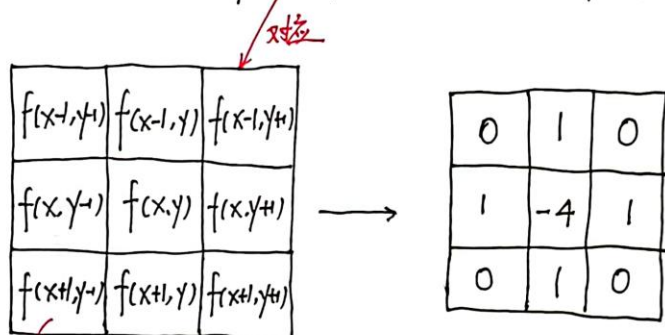
拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

x方向: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$

y方向: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$

离散拉普拉斯算子: $\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$



f 在坐标 (x, y) 处的梯度定义为 = 1 维列向量

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{梯度向量}$$

梯度向量的幅值

$$M(x, y) = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

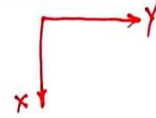
$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y| \quad (\text{可近似为这样})$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

简化模板为 $z_1 \sim z_9$ 方便书写与推导

正常来说 $\begin{cases} g_x = z_8 - z_5, \text{ 即 } f(x+1, y) - f(x, y) \\ g_y = z_6 - z_5, \text{ 即 } f(x, y+1) - f(x, y) \end{cases}$

别忘了，图像坐标是这样定义的



Robert交叉差分

$\begin{cases} g'_x = z_9 - z_5, \text{ 即 } f(x+1, y+1) - f(x, y) \\ g'_y = z_8 - z_6, \text{ 即 } f(x+1, y) - f(x, y+1) \end{cases}$

将使用差分的 $M(x, y)$ 代入 g'_x, g'_y

$$M(x, y) = \sqrt{[(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]}$$

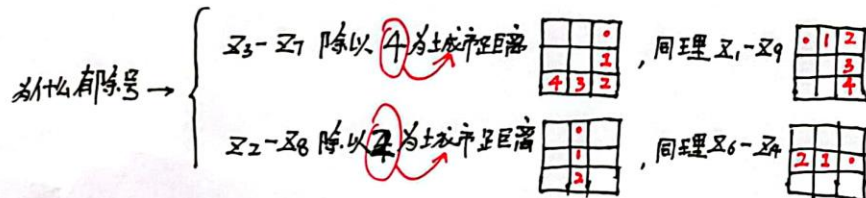
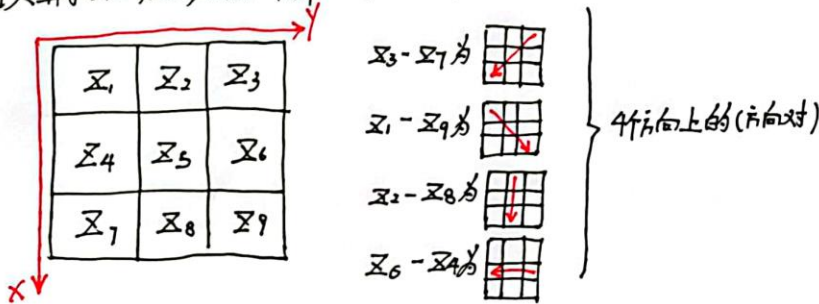
$M(x, y) \propto |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$ (罗伯特 Robert 交叉差分) 1973年



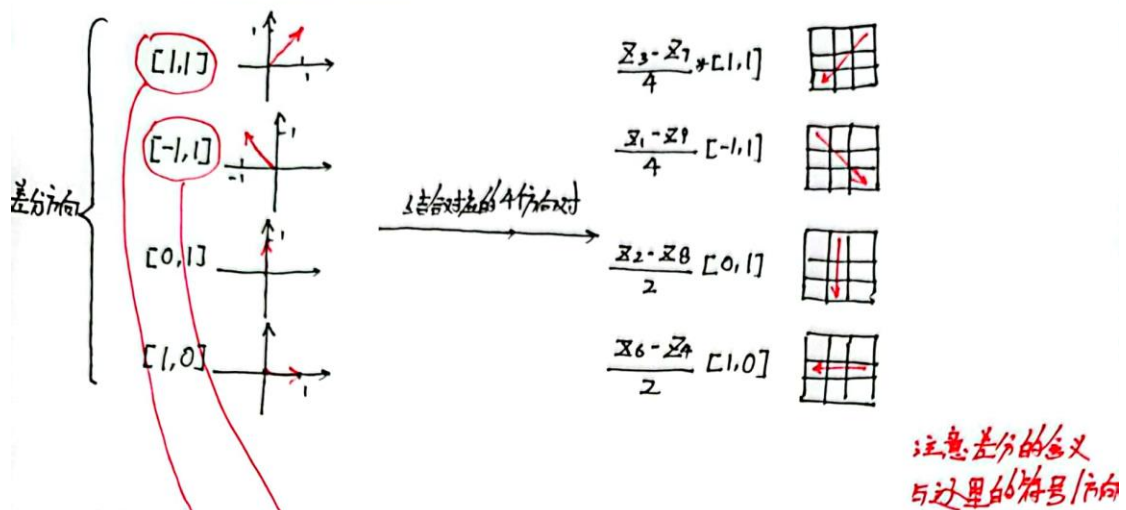
同样基于此思想，研究 Sobel 算子。

$$G = \frac{z_3 - z_7}{4} * [1, 1] + \frac{z_1 - z_9}{4} * [-1, 1] + \frac{z_2 - z_8}{2} * [0, 1] + \frac{z_6 - z_4}{2} * [1, 0]$$

该算子公式如上，具体详解含义与构成。



城市距离：从一个点到另一点(只能直走)的距离，如从 z_3 到 z_7 要 4 步



对 Sobel 公式中 G 扩大 4 倍, 消除分母影响

$$G = \left[\underbrace{\frac{(z_3 - z_7) - (z_1 - z_9)}{4}}_{x \text{ 方向}}, \underbrace{\frac{(z_3 - z_7) + (z_1 - z_9)}{4} + \frac{z_2 - z_8}{2}}_{y \text{ 方向}} \right] \times 4$$

这里的符号是说明 $z_1 - z_9$ 的方向为 x 正方向相反。

化简可得 $G = \left[\underbrace{z_3 - z_7 - z_1 + z_9}_{x}, \underbrace{z_3 - z_7 + z_1 - z_9 + 2z_2 - 2z_8}_{y} \right]$

$$\begin{cases} G_x = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7) \\ G_y = (z_1 + 2z_2 + z_3) - (z_7 + 2z_8 + z_9) \end{cases}$$

对应 $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{bmatrix}$

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

G_x G_y

Sobel 算子

1970年

参考书籍

- [1] 《数字图像处理》第三版 冈雷萨斯
- [2] <https://blog.sciencenet.cn/blog-425437-1139187.html>
- [3] 《A 3×3 isotropic gradient operator for image processing》Irwin Sobel

2023.9.28

渝北仙桃