Finanzaufgaben

Lösung Nr. 201

Eine Bank verzinst am Ende eines Jahres das auf einem Konto liegende Kapital K_o = 4 000 € mit dem Zinssatz p = 3 %.

a) Berechne das Kapital nach 1, 2, 3, 4 und n Jahren.

b) Stelle die Berechnungsformel für die Kontostandsfolge auf.

c) Zeichne ein Schaubild dazu.

Lösung:

Startkapital: K_o Zahlenbeispiel: $K_0 = 4000\ \ (€)$

Nach 1 Jahr: $K_1 = K_0 + Z_1$

Jahreszins: $Z_1 = K_O \cdot p = K_O \cdot 0{,}03$

Das ergibt eingesetzt: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 + K_0 \cdot 0{,}03$

K_O ausklammern: $K_1 = K_O \cdot \underbrace{(1+p)}_{q} = K_O \cdot \boxed{1{,}03}$ q = 1,03 heißt Zinsfaktor

Zahlenbeispiel: $K_1 = 4000 \cdot 1{,}03 = 4120$

Nach 2 Jahren: $K_2 = K_1 + Z_2$

Mit Zahlen: $K_2 = 4120 \cdot 1{,}03 = 4243{,}60$

Nach 3 Jahren: $K_3 = K_2 + Z_3$

Mit Zahlen: $K_3 = 4243{,}60 \cdot 1{,}03 = 4370{,}91$

Nach 4 Jahren: $K_4 = K_0 \cdot q^4 = 4000 \cdot 1{,}03^4 = 4502{,}04$

Nach 5 Jahren: $K_5 = K_0 \cdot q^5 = 4000 \cdot 1{,}03^5 = 4637{,}10$

Nach n Jahren: $K_n = K_0 \cdot q^n = 4000 \cdot 1{,}03^n$

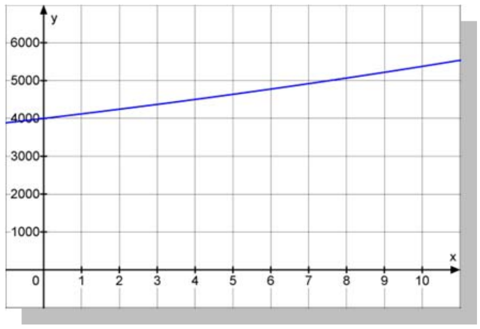
Schaubild der Zinseszinsfunktion

Das Kapital (der Kontostand) ist eine Funktion der Zeit, genauer gesagt der Zahl n der Jahre oder Monate, in denen das Kapital unverändert auf dem Konto liegen bleibt und „nur“ verzinst wird.

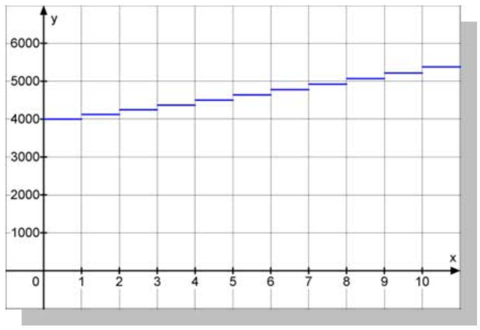
Verwendet man die Funktionsschreibweise, dann erhält man: $K(n) = 4000 \cdot 1{,}03^n$ (1)

Dies darf nicht verwechselt werden mit $K(x) = 4000 \cdot 1{,}03^x$ (2)

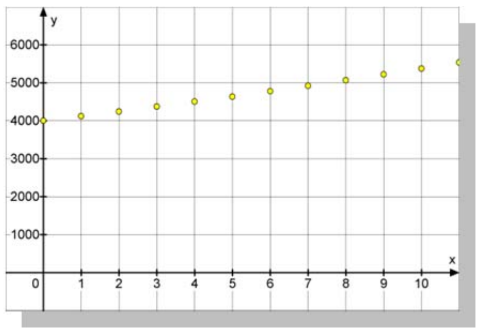
Die Formel (2) stellt eine Exponentialfunktion dar, deren Schaubild so aussieht:



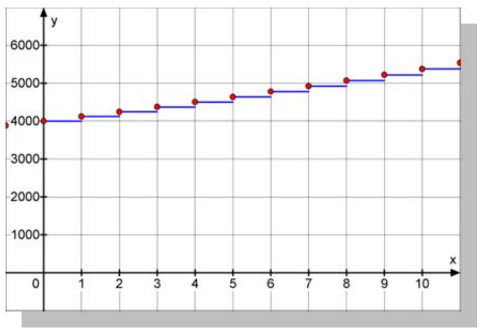
Dieses beschreibt jedoch nicht die finanzielle Situation, denn mit (2) kann man auch Zwischenwerte wie $K(1{,}5) = 4181{,}34$ € berechnen. Diese haben jedoch keine praktische Bedeutung, denn der Kontostand bleibt immer ein Jahr (bzw. bei monatlicher Verzinsung einen Monate) lang konstant, bevor der neue Zins dazukommt und der Kontostand dann einen Sprung nach oben macht. So entsteht eine sogenannte **Treppenfunktion**.



Genau genommen stellt die Formel (1) eine **Zahlenfolge** dar, denn man berechnet die Funktionswerte nur für ganzzahlige n. Das Schaubild einer Folge besteht daher nur aus den Punkten zu ganzzahligen x-Koordinaten. Rechts das Schaubild zu (1):



Andererseits bleiben die Werte der Folge für ein ganzes Jahr konstant stehen, so dass man eigentlich Schaubild 2 und 3 überlagern muss. Dann entsteht die Abbildung 4. Der Punkt am linken Endpunkt einer Stufe besagt, dass dort der Funktionswert liegt, während das rechte Ende einer solchen Stufe nicht mehr als Wert dazu gehört, denn dort springt ja die Funktion durch Addition des nächsten Zinses auf das nächste Niveau.



Hinweis:

Diese Schaubilder wurden mit **MatheGrafix von Roland Hammes** erzeugt. (Download über www.mathegrafix.de).

Die Treppenfunktion erzeugt man mit der dort eingebauten Gauss-Funktion so:

f(x) = 4000*1,03^Gauss(x).

Lösung Nr. 211

Birgit besitzt zwei Sparbücher. Auf Sparbuch 1 sind 2100 € zu 3,5% jährlich angelegt, auf Sparbuch 2 1900 € zu 4,5 %. Einzahlungen und Abhebungen erfolgen keine.

a) Berechne das Guthaben auf Sparbuch 1 nach 7 Jahren.

Vorarbeit:

Sparbuch 1: Es sei $K_1(t)$ das Guthaben in € auf Sparbuch 1 nach t Jahren.
Gegeben: $K_1(0) = 2100$ und Zinssatz $p_1 = 3{,}5\ \%$
Dies ergibt die Kontostandsfunktion: $K_1(t) = 2.100 \cdot 1{,}035^t$

Sparbuch 2: Es sei $K_2(t)$ das Guthaben in € auf Sparbuch 2 nach t Jahren.
Gegeben: $K_2(0) = 1900$ und Zinssatz $p_2 = 4{,}5\ \%$.
Dies ergibt die Kontostandsfunktion: $K_2(t) = 1.900 \cdot 1{,}045^t$

Rechnung:

Kontostandsfunktion Sparbuch 1: $K_1(t) = 2.100 \cdot 1{,}035^t$

Sparbuch 1 nach 7 Jahren: $K_1(7) = 2.100 \cdot 1{,}035^7 \approx 2671{,}79$

Ergebnis: Nach 7 Jahren ist der Kontostand auf Sparbuch 1 2671,79 €.

b) Bei welchem Zinssatz würde sich das Guthaben auf Sparbuch 1 in 14 Jahren verdoppeln?

Kontostandsfunktion Sparbuch 1: $K_1(t) = 2.100 \cdot q^t$

Doppeltes Guthaben nach t = 14: $K_1(14) = 2 \cdot 2.100$

Gleichsetzen: $2 \cdot \cancel{2.100} = \cancel{2.100} \cdot q^{14}$

Nach t umstellen: $q^{14} = 2$

$q = \sqrt[14]{2} = 2^{\frac{1}{14}} \approx 1{,}051$

Ergebnis: Bei einer Verzinsung mit p = 5,1 % verdoppelt sich auf Sparbuch 1 das Kapital in 14 Jahren.

c) Nach wie vielen Jahren ist das Guthaben auf Sparbuch 2 erstmals höher?

Kontostandsfunktion Sparbuch 1: $K_1(t) = 2.100 \cdot 1{,}035^t$

Kontostandsfunktion Sparbuch 2: $K_2(t) = 1.900 \cdot 1{,}045^t$

Bedingung laut Aufgabe: $K_2(t) > K_1(t)$

$$1.900 \cdot 1{,}045^t > 2.100 \cdot 1{,}035^t$$

Umstellen nach t: $\frac{1{,}045^t}{1{,}035^t} > \frac{2.100}{1.900}$

Potenzregel anwenden: $\left(\frac{1{,}045}{1{,}035}\right)^t > \frac{2.100}{1.900}$

Logarithmieren: $\log\left(\frac{1{,}045}{1{,}035}\right)^t > \log\frac{2.100}{1.900}$

Logarithmusgesetz anwenden: $t \cdot \log\left(\frac{1{,}045}{1{,}035}\right) > \log\frac{21}{19}$

Logarithmusgesetz anwenden: $t \cdot (\log 1{,}045 - \log 1{,}035) > \log 21 - \log 19$

$$t > \frac{\log 21 - \log 19}{\log 1{,}045 - \log 1{,}035} \approx 10{,}41$$

Ergebnis: Nach 11 Jahren enthält Sparbuch 2 erstmalig einen höheren Betrag.

Lösung Nr. 212

a) Frau Schild gewinnt 4 400 € im Lotto. Sie legt dieses Geld bei der Bank zu einem jährlichen Zinssatz von 5 % an. Wie hoch ist ihr Guthaben nach 3 Jahren?

Vorarbeit: Es sei G(t) das Guthaben in € nach t Jahren. Gegeben G(0) = 4400.
Aus p = 5 % folgt q = 1,05.

Rechnung:

Guthabenfolge:	$G(t) = G(0) \cdot q^t$
Mit den Vorgaben:	$G(t) = 4400 \cdot 1{,}05^t$
Nach 3 Jahren:	$G(3) = 4400 \cdot 1{,}05^3 = 5093{,}55$

Ergebnis: Nach 3 Jahren hat sie 5093,55 € auf dem Konto.

b) Frau Schild erfährt, dass bei einer anderen Bank ein Kapital von 4 400 € in 2 Jahren um 360 € anwachsen würde. Welcher Zinssatz gilt bei dieser Bank?

Vorarbeit: Gegeben: $G(0) = 4400$, $G(2) = G(0) + 360 = 4760$

Rechnung:

Guthabenfolge:	$G(t) = G(0) \cdot q^t$
Mit der Vorgabe:	$G(t) = 4400 \cdot q^t$
Punktprobe mit	$G(2) = G(0) + 360 = 4760:$
	$\boxed{4760} = 4400 \cdot q^{\boxed{2}}$
Umstellen nach q:	$q^2 = \frac{4760}{4400}$
	$q = \sqrt{\frac{476}{440}} \approx 1{,}04$

(Nur die positive Lösung ist brauchbar.)

Ergebnis: Diese Bank gewährt 4 % Zinssatz.

c) Wie lange muss Frau Schild warten, bis ihr Lottogewinn von 4400 € bei einem Zinssatz von 5% auf ein Guthaben von 6 500 € angewachsen sein wird?

Vorarbeit: Gegeben: $G(0) = 4400$, $G(t) = 6500$ bei p = 5%.

Rechnung:

Guthabenfolge:	$G(t) = 4400 \cdot 1{,}05^t$
Vorgabe: $G(t) = 6500$:	$\boxed{6500} = 4400 \cdot 1{,}05^t$
Umstellen nach t:	$1{,}05^t = \frac{6500}{4400}$
Logarithmieren:	$t \cdot \log 1{,}05 = \log \frac{6500}{4400} = \log \frac{65}{44}$
Logarithmusregel:	$t \cdot \log 1{,}05 = \log 65 - \log 44$
	$t = \frac{\log 65 - \log 44}{\log 1{,}05} \approx 8$

Ergebnis: Frau Schild muss 8 Jahre warten.

Lösung Nr. 220

Herr Spar will 10.000 € als Festgeld für 7 Jahre anlegen. Er erhält folgenden Zinssatz:
Im 1. und 2. Jahr 3,5%, dann zwei Jahre lang 4,0% und die letzten drei Jahre 4,5%.
Berechne den Endbetrag nach jedem der 7 Jahre. Welchen mittleren Zinssatz hätte die Bank anwenden müssen, wenn sie die ganzen 7 Jahre lang gleich verzinst hätte?

Lösung

Gemäß den Überlegungen von Beispiel 7 bedeutet eine Verzinsung mit 3 % die Multiplikation mit 1,03. Entsprechend kommen hier dann drei verschiedene Zinsfaktoren zum Einsatz: Im 1. und 2. Jahr erhält Herr Spar jeweils 3,5%, das ergibt einen Zinsfaktor $q_1 = 1{,}035$, dann $q_2 = 1{,}04$ und für die letzten drei Jahre $q_3 = 1{,}045$. Somit erhält man diese Lösung:

Es sei K(t) der Kontostand in € nach t Jahren. Dann folgt:

Startkapital: $K(0) = 10.000$

Nach 1 Jahr: $K(1) = K(0)\cdot q_1 = 10.000 \cdot 1{,}035 = 10.350$

Nach 2 Jahren: $K(2) = K(1)\cdot 1{,}035 = 10{,}712{,}25$ bzw.

$K(2) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}} = 10.000\cdot 1{,}035^2 = 10.712{,}25$

Nach 3 Jahren: $K(3) = K(2)\cdot q_2 = 10712{,}25 \cdot 1{,}04 = 11.140{,}74$ bzw.

$K(3) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2} = 10.000\cdot 1{,}035^2\cdot 1{,}04 = 11.140{,}74$

Nach 4 Jahren: $K(4) = K(3)\cdot q_2 = 11.140{,}74\cdot 1{,}04 = 11.586{,}37$ bzw.

$K(4) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}} = 10.000\cdot 1{,}035^2\cdot 1{,}04^2 = 11.586{,}37$

Nach 5 Jahren: $K(5) = K(4)\cdot q_3 = 11.586{,}37\cdot 1{,}045 = 12.107{,}75$ bzw.

$K(5) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3} = 10.000\cdot 1{,}035^2\cdot 1{,}04^2\cdot 1{,}045 = 12.107{,}75$

Nach 6 Jahren: $K(6) = K(5)\cdot q_3 = 12.107{,}75\cdot 1{,}045 = 12.652{,}60$ bzw.

$K(6) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3^{\;2}} = 10.000\cdot 1{,}035^2\cdot 1{,}04^2\cdot 1{,}045^2 = 12.652{,}60$

Nach 7 Jahren $K(7) = K(6)\cdot q_3 = 12.652{,}60\cdot 1{,}045 = 13.221.97$ bzw.

$K(7) = \boxed{K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3^{\;3}} = 10.000\cdot 1{,}035^2\cdot 1{,}04^2\cdot 1{,}045^3 = 13.221{,}97$

Bei allen Ergebnissen wurde stets zum Vorteil der Bank abgerundet. Die erste Berechnung eines Wertes ist jeweils ***rekursiv****, d.h. aus dem Vorjahreskapital berechnet worden.*

Bei gleichmäßiger Verzinsung mit dem Faktor q würde gelten: $K(7) = K(0)\cdot q^7$

Vergleicht man diese Formel mit der in der letzten Gleichung aus (a), folgt:

$$K(0)\cdot q^7 = K(0)\cdot q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3^{\;3}.$$

Hieraus folgt: $q^7 = q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3^{\;3} \quad\Rightarrow\quad q = \sqrt[7]{q_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}\cdot q_3^{\;3}} \approx 1{,}0407$

Wegen q = 1 + p erhält man dann p = 1 – q = 0,0407 = 4,07 %

Ergebnis: Ein konstanter Zinssatz von 4,07 % ergibt in 7 Jahren denselben Kontostand.

Lösung Nr. 221

Herr Heuro sucht eine günstige Bank und findet zwei interessante Angebote.

Bank 1 bietet an: Anlage auf 7 Jahre mit **jährlicher** Verzinsung:
In den ersten 3 Jahren 3 %, dann 4,5%.

Bank 2 bietet: **Monatliche** Verzinsung mit einem Jahreszinssatz von 3,6 %.
Mindesteinzahlung 10000 € einbezahlen.
Keine vorgeschriebene Laufzeit.

a) Untersuche, welches Angebot für 10.000 € Startkapital auf 7 Jahre das günstigere ist.

Vorarbeit:

Bank 1: Anlage auf 7 Jahre mit jährlicher Verzinsung:
In den ersten 3 Jahren 3 % , dann 4,5%.

Bank 2: Monatliche Verzinsung mit einem Zinssatz von 3,6 % p.a.
Mindestanlage 10000 €. Keine vorgeschriebene Laufzeit.

Rechnung:

Kontostandsfolge Bank 1 (t in Jahren):

Für $0 \le t \le 3$: $K_1(t) = K_1(0) \cdot 1{,}03^t$

Für $t \ge 4$: $K_1(t) = K_1(0) \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^{t-3}$

(denn im 4. Jahr wird einmal mit 4,5% verzinst, im 5. Jahr zweimal usw.)

Bank 2 (t in Monaten)

Monatlicher Zinssatz: $p_m = \frac{3{,}6\%}{12} = 0{,}3\% = 0{,}003$

Kontostandsfolge: $K_2(t) = K_2(0) \cdot 1{,}003^t$

Berechnung für $K_1(0) = K_2(0) = 10000$ und t = 7 Jahre.

Bank 1: $K_1(7) = 10.000 \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4 = 13.030{,}97$

Bank 2: $K_2(84) = 10.000 \cdot 1{,}03^{84} = 12861{,}11$

Ergebnis: Das Angebot der Bank 1 ist günstiger.

b) Welchem durchschnittlichen Zinssatz über 7 Jahre entspricht das Angebot der Bank 1?

Gegebene Kontostandsfolge: $K_1(t) = K_1(0) \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4$

Mit konstanten Zinsfaktor q_3: $K_1(t) = K_1(0) \cdot q^7$

Vergleich: $\cancel{K_1(0)} \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4 = \cancel{K_1(0)} \cdot q^7$

$q = \sqrt[7]{1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4} \approx 1{,}03854$

Ergebnis: Der durchschnittliche Zinssatz beträgt etwa 3,85%.

c) Welchen Jahreszinssatz müsste die Bank 2 geben, um bei ihrer Methode auf denselben Endbetrag nach 7 Jahren zu kommen, wie Bank 1?

Bank 1:

Kontostandsfolge: $K_1(t) = K_1(0) \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^{t-3}$

Nach 7 Jahren: $K_1(7) = K_1(0) \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4$

Bank 2:

Der neue Zinsfaktor sei q_4.

Kontostandsfolge: $K_2(t) = K_2(0) \cdot q_4{}^t$

Nach 7 Jahren: $K_2(84) = K_2(0) \cdot q_4{}^{84}$

Vergleich mit $K_1(7) = K_2(84)$: $\cancel{K_2(0)} \cdot q_4{}^{84} = \cancel{K_1(0)} \cdot 1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4$

$$q_4 = \sqrt[84]{1{,}03^3 \cdot 1{,}045^4} \approx 1{,}0031567$$

Daraus folgt: $p_m = q_4 - 1 = 0{,}0031567$

Jahreszinssatz: $p_a = p_m \cdot 12 \approx 0{,}03788 \approx 3{,}8\%$

Lösung 222

a) Franz hat 4000 € auf seinem Konto, das jährlich mit 3,5 % verzinst wird.
Nach wie viel Jahren hat sich sein Guthaben verdoppelt?
Wie sieht das bei monatlicher Verzinsung mit gleichem Zinssatz aus?
Bei welchem Zinssatz (jährliche Verzinsung) wäre eine Verdopplung in genau 12 Jahren erreicht?

Vorarbeit:

Es sei G(t) das Guthaben nach t Jahren. Gegeben ist $G(0) = 4000$ €.

Jährliche Verzinsung mit p = 0,035 ergibt den Zinsfaktor q = 1,035

Rechnung:

Guthabenfunktion: $G(t) = G(0) \cdot q^t$

Mit den Vorgaben: $G(t) = 4000 \cdot 1{,}035^t$

Verdopplung des Guthabens: $G(t) = 2 \cdot G(0)$

d. h. $G(0) \cdot q^t = 2 \cdot G(0)$

$q^t = 2$

Logarithmieren: $t \cdot \log q = \log 2$

$\boxed{t = \frac{\log 2}{\log q}}$

Für q = 1,035: $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}035} \approx 20{,}1$ (Jahre)

Ergebnis: Nach 21 Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt.

Bei monatlicher Verzinsung ist $p_m = \frac{0{,}035}{12} \approx 0{,}0029 \quad \Rightarrow \quad q_m = 1{,}0029$

Verdopplung des Guthabens führt dann zu $t = \frac{\log 2}{\log 1{,}0029} \approx 239{,}3$ (Monate)

Ergebnis: Nach 240 Monaten = 20 Jahren hat sich jetzt das Guthaben verdoppelt.

Verdopplung in 12 Jahren bedeutet: $G(12) = 2 \cdot G(0)$

d. h.: $G(0) \cdot q^{12} = 2 \cdot G(0)$

$q^{12} = 2$

$q = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$

$p = 1 - q$: $p = 0{,}059 = 5{,}9\%$

Ergebnis: Bei p = 5,9% erreicht man bei jährlicher Verzinsung eine Verdoppelung in 12 Jahren.

b) Klaus hat ein Angebot der S-Bank, wonach er bei 5000 € Startkapital in den ersten 2 Jahren 3 % , in den nächsten beiden 3,5 % und ab dem 5. Jahr 4 % Zins erhält.
Stelle eine zusammengesetzte Kapitalfunktion auf.
Wie hoch ist sein Kapital nach 8 Jahren?
Bei welchem konstanten Zins hätte er in derselben Zeit denselben Kontostand erreicht?

Vorarbeit:

Es sei $K(t)$ das Kapital nach t Jahren.

Gegeben sind $K(0) = 5000$ und diverse Zinssätze.

Rechnung:

Für die Kapitalfunktion gilt:

$$K(t) = \begin{cases} 5000 \cdot 1{,}03^t & \text{für } t \in \{0; 1; 2\} \\ 5000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^{t-2} & \text{für } t \in \{3; 4\} \\ 5000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \cdot 1{,}04^{t-4} & \text{für } t \in \{5; 6; ...\} \end{cases}$$

Kapital nach 8 Jahren: $K(8) = 5000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \cdot 1{,}04^4 = 6647{,}50$

Ergebnis: Nach 8 Jahren besitzt Klaus 6647,50 € Guthaben.

Kapital bei gleichmäßiger jährlicher Verzinsung: $K(t) = 5000 \cdot q^t$

Nach 8 Jahren: $K(8) = 5000 \cdot q^8$

Mit dem Ergebnis $K(8) = 6647{,}50$

Vergleich: $5000 \cdot q^8 = 6647{,}50$

Nach q umstellen: $q^8 = \dfrac{6647{,}50}{5000}$

$$q = \sqrt[8]{\frac{6647{,}5}{5000}} \approx 1{,}036$$

Anderer Lösungsweg:

$$K(8) = K(0) \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \cdot 1{,}04^4$$
$$K(8) = K(0) \cdot q^8$$

Vergleich: $q = \sqrt[8]{1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \cdot 1{,}04^4} \approx 1{,}036$

Ergebnis: Eine gleichmäßige Verzinsung mit 3,6 % führt in 8 Jahren zum selben Ergebnis.

c) Susi hat 40.000 € geerbt und legt es so an, dass sie bei jährlicher Verzinsung 4,2 % Zins erhält.
Nach Ablauf eines jeden Folgejahres hebt sie nach der Verzinsung 4000 € ab.
Wie hoch ist ihr Kontostand nach 5 Jahren?

Rekursiv zu berechnende Guthabenfolge:

Anfangsglied:		$G(0) = 40.000{,}00$
Nach 1 Jahr:	$G(1) = G(0) \cdot q - 4000$	$G(1) = 37.680{,}00$
Nach 2 Jahren:	$G(2) = G(1) \cdot q - 4000$	$G(2) = 35.262{,}56$
Nach 3 Jahren:	$G(3) = G(2) \cdot q - 4000$	$G(3) = 32.743{,}59$
Nach 4 Jahren:	$G(4) = G(3) \cdot q - 4000$	$G(4) = 30.118{,}82$
Nach 5 Jahren:	$G(5) = G(4) \cdot q - 4000$	$G(5) = 27.383{,}81$

Ergebnis: Susi hat nach 5 Jahren noch 27.383,81 € auf ihrem Konto.

Rekursiv heißt „Berechnung aus dem jeweiligen Vorgänger.

Es folgt ein Zusatz für Anspruchsvolle!

Für Fortgeschrittene Mathematiker: Zusammensetzen zu einer Formel.

Es ist eine Rentenformel, denn hier wird ein fester Betrag angelegt

und davon Raten quasi als Rente ausbezahlt.

Herleitung der Formel:

Man beginnt mit: $G(1) = G(0) \cdot q - R$ (R ist die entnommene Rate/Rente)

Und setzt dies ein in $G(2) = G(1) \cdot q - R$: $G(2) = \left[G(0) \cdot q - R\right] \cdot q - R$

$G(2) = G(0) \cdot q^2 - R \cdot q - R$.

Nächster Schritt: $G(3) = G(2) \cdot q - R$

G(2) eingesetzt: $G(3) = G(0) \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R$

Nächster Schritt: $G(4) = G(3) \cdot q - R$

G(3) eingesetzt: $G(4) = G(0) \cdot q^4 - R \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R$

Beobachtet man, dass hier t = 4 steht und rechts die Exponenten 4, 3, 2, 1 und 0 folgen, dann kann man direkt ohne den Einsetzvorgang aufschreiben:

$$G(5) = G(0) \cdot q^5 - R \cdot q^4 - R \cdot q^3 - R \cdot q^2 - R \cdot q - R$$

Und für beliebiges t: $G(t) = G(0) \cdot q^t - R \cdot q^{t-1} - R \cdot q^{t-2} - \ldots - R \cdot q^2 - R \cdot q - R$

Man klammert nun rechts das Minuszeichen aus:

$$G(t) = G(0) \cdot q^t - \left(R \cdot q^{t-1} + R \cdot q^{t-2} + \ldots + R \cdot q^2 + R \cdot q + R\right).$$

In der Klammer steht (mit jetzt vertauschter Reihenfolge) das, was man eine geometrische Reihe nennt. In Aufgabe 216 wurde bereits die dafür vorhandene Summenformel verwendet:

$$R + Rq + Rq^2 + \ldots + Rq^{t-1} = R \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

Fertige Formel:

$$\boxed{G(t) = G(0) \cdot q^t - R\frac{q^t - 1}{q - 1}}$$

Dies ist die Formel zur Berechnung der Guthabenfolge für $t \in \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Mit den Zahlen der Vorgabe: $G(t) = 40.000 \cdot 1{,}042^t - 4000 \cdot \frac{1{,}042^t - 1}{1{,}042 - 1}$

Vereinfachung: $G(t) = 40.000 \cdot 1{,}042^t - 4000 \cdot \frac{1{,}042^t - 1}{0{,}042}$

$$G(t) = 40.000 \cdot 1{,}042^t - \frac{4000}{0{,}042} \cdot \left(1{,}042^t - 1\right)$$

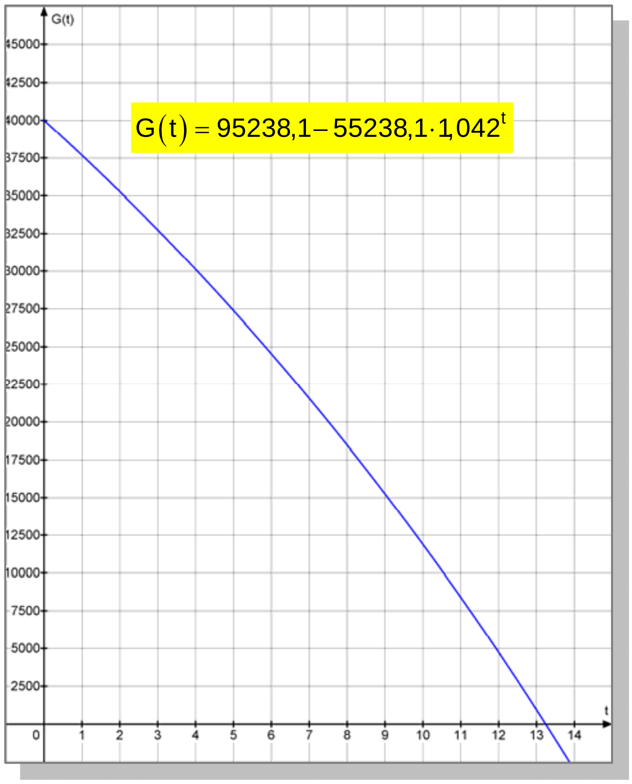
$$G(t) = 40.000 \cdot 1{,}042^t - 95238{,}1 \cdot \left(1{,}042^t - 1\right)$$

$$G(t) = \underbrace{40.000 \cdot 1{,}042^t - 95238{,}1 \cdot 1{,}042^t} + 95238{,}1$$

$$G(t) = -55238{,}1 \cdot 1{,}042^t + 95238{,}1$$

Oder so: $G(t) = 95238{,}1 - 55238{,}1 \cdot 1{,}042^t$

Das Schaubild dieser Exponentialfunktion zeigt die Rechtskrümmung der Kurve.
Je mehr abgehoben wird, umso weniger ist auf dem Konto, umso weniger Zins gibt es.
Daher nimmt der Kontostand mehr ab, als dies bei einer linearen Abnahmefunktion der Fall sein würde.



Dort, wo die Kurve die t-Achse schneidet, liegt die Nullstelle der Funktion. Sie liegt etwa bei 13,2. Man kann also nach 14 Jahren keine Rate mehr abheben, der Kontostand ist dazu zu niedrig.

Hier die Rechnung dazu:

Wie lange reicht dieser Geldbetrag?

Bedingung für die Nullstelle: $G(t) = 0$

$95238{,}1 - 55238{,}1 \cdot 1{,}042^t = 0$

Umstellen nach t: $55238{,}1 \cdot 1{,}042^t = 95238{,}1$

$1{,}042^t = \dfrac{95238{,}1}{55238{,}1}$

Logarithmieren: $\log 1{,}042^t = \log \dfrac{95238{,}1}{55238{,}1}$

Logarithmusregeln anwenden: $t \cdot \log 1{,}042 = \log 95238{,}1 - \log 55238{,}1$

$t = \dfrac{\log 95238{,}1 - \log 55238{,}1}{\log 1{,}042} \approx 13{,}24$

Folgerung:

Nach t = 13 Jahren kann man noch einmal die Rente R = 4000 € abheben.
Danach ist der Kontostand noch $G(13) = 95238{,}1 - 55238{,}1 \cdot 1{,}042^{13} = 936{,}49$

Dieser Betrag bleibt ein weiteres Jahr auf dem Konto und wird verzinst.
Am Jahresende, also nach 14 Jahren wurde daraus dann

$G^*(14) = 936{,}49 \cdot 1{,}042 = 975{,}83$

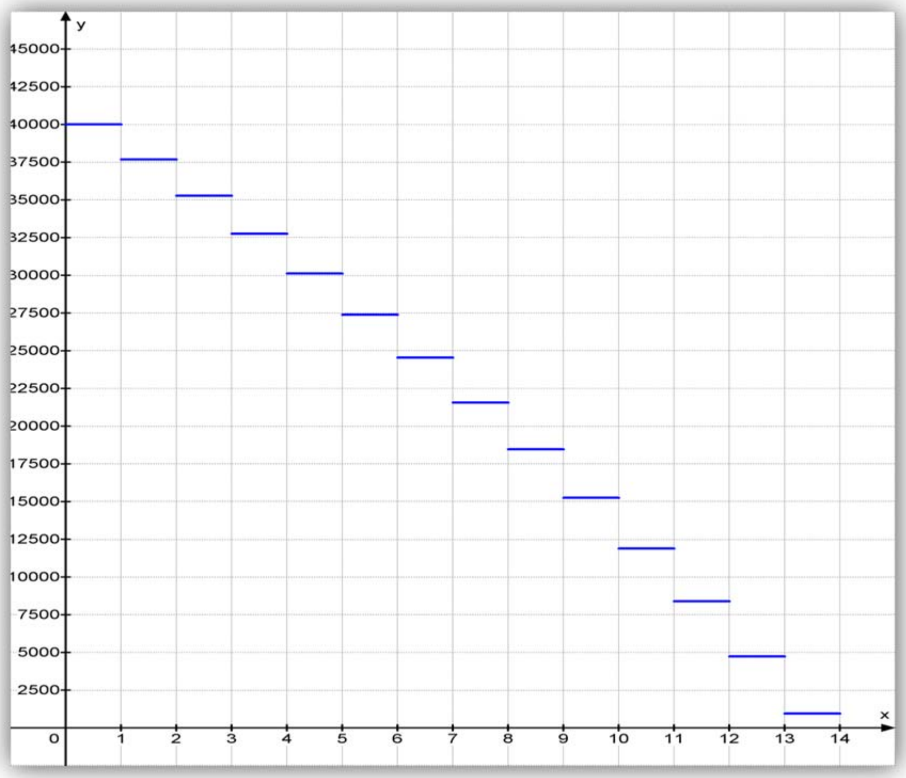
Dies ist der letzte Betrag, der abgehoben werden kann.
Dann ist der Kontostand Null.

Erkennen Sie, dass das Schaubild nicht der Bankrealität entspricht?
Was ist an diesem Schaubild als absolut realitätsfremd zu bezeichnen?

Die Antwort lautet:

Der Kontostand bleibt ein ganzes Jahr konstant und springt dann zum nächst tieferen Wert,
Es liegt im Grunde eine Treppenfunktion vor.

Mit dem Programm **MatheGrafix** kann man das richtige Schaubild erstellen lassen.
Dazu ersetzt man x duirch Gauss(x).



Der linke Randpunkt der Stufe gehört zum Funktionswert, der rechte nicht mehr.

Beispiel: Von t = 5 bis t = 6 haben wir eine Stufe auf der „Höhe“ etwa 27.500 (€).
Dann ist $G(5,xxx) \approx 27.500$ aber ab $G(6) \approx 24.500$ sind wir beim nächst kleineren Wert.

Lösung Nr. 223

a) Bei *Sparen* mit *wachsendem Zins* wird das angelegte Geld im 1. Jahr mit 5,5 % verzinst, im 2. Jahr mit 6 %, im 3. Jahr mit 7%, im 4. Jahr mit 8% und im 5. Jahr mit 8,5 %.
Die anfallenden Zinsen werden jeweils dem Kapital zugerechnet und dann mit verzinst.
Um wie viel Prozent ist ein Startkapital von 8000 € nach Ablauf der 5 Jahre gewachsen?

Vorarbeit:

Es sei K(t) der Kontostand in € nach t Jahren.

Gegeben : K(0) = 8000

Kontostandsfolge : $K(t) = K(0) \cdot q^t$

Rechnung:

Im 1. Jahr:	$p_1 = 5{,}5\%$	d.h. $q_1 = 1{,}055$	$K(1) = K(0) \cdot q_1$
Im 2. Jahr:	$p_2 = 6\ \%$	d.h. $q_2 = 1{,}06$	$K(2) = K(1) \cdot q_2$
Im 3. Jahr:	$p_3 = 7\ \%$	d.h. $q_3 = 1{,}07$	$K(3) = K(2) \cdot q_3$
Im 4. Jahr:	$p_4 = 8\ \%$	d.h. $q_4 = 1{,}08$	$K(4) = K(3) \cdot q_4$
Im 5. Jahr:	$p_5 = 8{,}5\ \%$	d.h. $q_5 = 1{,}085$	$K(5) = K(4) \cdot q_5$

Zusammengesetzt; $K(5) = K(0) \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 = 11.217{,}23$

Da $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 = 1{,}402$ ist, gilt: K(5) = K(0) 1,402

Ergebnis: In diesen 5 Jahren hat sich K(0) um etwa 40 % vermehrt.

b) Bei welchem gleich bleibenden Zinssatz würde ein beliebiges Anfangskapital K in 5 Jahren mit Zinseszins um 40% anwachsen?

Neue Kontostandsfunktion: $K(t) = K(0) \cdot q^t$

Bedingung laut Vorgabe: $K(5) = 1{,}4 \cdot K(0)$

Gleichsetzen: $\cancel{K(0)} \cdot q^5 = 1{,}4 \cdot \cancel{K(0)}$

$q^5 = 1{,}4$

$q = \sqrt[5]{1{,}4} \approx 1{,}07$

Aus $q = 1 + p$ folgt $p = q - 1$, also $p = 0{,}07 = 7\%$

Ergebnis: Eine gleichmäßige 5-jährige Verzinsung mit 7 % erzielt eine Zunahme um 40%.

c) Auf Sparbüchern angelegtes Geld wird mit 3% jährlich verzinst.
Wie lange dauert es hier, bis ein beliebiges Anfangskapital K einschließlich Zinseszins ebenfalls um 40% angewachsen ist?

Kontostandsfolge: $K(t) = K(0) \cdot 1{,}03^t$

40% Zunahme ergibt $K(t) = 1{,}4 \cdot K(0)$

Gleichsetzen: $\cancel{K(0)} \cdot 1{,}03^t = 1{,}4 \cdot \cancel{K(0)}$

$1{,}03^t = 1{,}4$

Logarithmieren: $t \cdot \log 1{,}03 = \log 1{,}4$

$$t = \frac{\log 1{,}4}{\log 1{,}03} \approx 11{,}4$$

Ergebnis: Nach 12 Jahren hätte man bei einem Zinssatz von nur 3% ebenfalls einen Zuwachs um 40 % erreicht.

Hinweis: Bei jährlicher Verzinsung muss man abwarten, bis das Jahr voll ist, daher werden aus 11,4 Jahren 12 Jahre.

Lösung Nr. 225

a) Auf Konto 1 werden 3000 € eingezahlt und mit 2,5 % jährlich verzinst.
Auf Konto 2 werden 2500 € einbezahlt und mit 3,5 % jährlich verzinst.
Nach wie vielen Jahren hat das Konto 2 erstmals einen höheren Kontostand?

<u>Vorarbeit;</u> Gegeben sind $K_1(0) = 3000\text{ €}$ sowie $p_1 = 0{,}025 \Rightarrow$ Zinsfaktor $q_1 = 1{,}025$.
und $K_2(0) = 2500\text{ €}$ sowie $p_2 = 0{,}035 \Rightarrow$ Zinsfaktor $q_1 = 1{,}035$.

<u>Rechnung:</u> 1. Kontostandsfolge $K_1(t) = 3000 \cdot 1{,}025^t$
2. Kontostandsfolge $K_2(t) = 2500 \cdot 1{,}035^t$

Ansatz: $K_2(t) > K_1(t)$

$$2500 \cdot 1{,}035^t > 3000 \cdot 1{,}025^t$$

Umstellen nach t: $\dfrac{1{,}035^t}{1{,}025^t} > \dfrac{3000}{2500}$

Potenzgesetz anwenden: $\left(\dfrac{1{,}035}{1{,}025}\right)^t > \dfrac{30}{25} = \dfrac{6}{5}$

Logarithmieren: $\log\left(\dfrac{1{,}035}{1{,}025}\right)^t > \log\dfrac{6}{5}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot \log\left(\dfrac{1{,}035}{1{,}025}\right) > \log\dfrac{6}{5}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot (\log 1{,}035 - \log 1{,}025) > \log 6 - \log 5$

$$t > \frac{\log 6 - \log 5}{\log 1{,}035 - \log 1{,}025} \approx 18{,}8$$

Ergebnis: Nach 19 Jahren hat das Konto 2 einen höheren Kontostand.

b) Eine Aktie verliert dreimal nacheinander 8%, dann 12% und dann zweimal 5% ihres Wertes. Um wie viel Prozent hat sie insgesamt an Wert verloren?

Es sein W(t) der Wert der Aktie zum Zeitpunkt t (in Jahren).

Wertverlust um 8% bedeutet: $W(3) = W(0) \cdot 0{,}92^3$

Wertverlust um 12% bedeutet: $W(4) = W(3) \cdot 0{,}88$

Wertverlust um 5 % bedeutet: $W(6) = W(4) \cdot 0{,}95^2$

Zusammengesetzt erhält man: $W(6) = W(0) \cdot \underbrace{0{,}92^3 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}95^2}_{\approx 0{,}6184}$

Der Faktor 0,6184 bedeutet eine Abnahme um 1 - 0,6184 = 0,3816.

Ergebnis: Die Aktie hat insgesamt um 38,16% verloren.

Lösung Nr. 230

a) Ein Arbeitnehmer verdient zu Beginn des Jahres 2002 monatlich 2400 €.
Sein Lohn steigt jeweils nach Ablauf eines Jahres um 3 %.
Wie hoch ist sein Monatslohn 2007?

Vorarbeit:

Es sei L(t) der Lohn in € im Jahre (2002 + t).
Gegeben ist L(0) = 2400.
Aus p = 3 % folgt q = 1,03.

Rechnung:

Lohnfunktion: $L(t) = L(0) \cdot q^t$

Mit den Vorgaben: $L(t) = 2.400 \cdot 1{,}03^t$

Nach 5 Jahren: $L(5) = 2.400 \cdot 1{,}03^5 \approx 2.782{,}26$

Ergebnis: Im Jahre 2007 erhält er einen Monatslohn von 2782,26 €.

b) 2002 kostet ein bestimmtes Auto 24 000 €.
Dieser Preis steigt jährlich um einen festen Prozentsatz.
Wie groß ist dieser, wenn der Preis nach 5 Jahren 26 500 € beträgt?

Vorarbeit:

Es sei P(t) der Preis des Autos in € im Jahre 2002+t.
Gegeben: $P(0) = 24.000$ und $P(5) = 26.500$

Rechnung:

Preisfunktion: $P(t) = P(0) \cdot r^t$

Vorgabe $P(0) = 24.000$: $P(t) = 24.000 \cdot r^t$

Punktprobe mit $P(5) = 26.500$: $\boxed{26.500} = 24.000 \cdot r^{\boxed{5}}$

Umstellen nach r: $r^5 = \frac{26.500}{24.000}$

$r = \sqrt[5]{\frac{265}{240}} \approx 1.02$

Ergebnis: Der Autopreis steigt jährlich um etwa 2 % an.

c) 2002 kostet das Auto den 10-fachen Monatslohn des Arbeitnehmers aus a).
Der Lohn steigt jährlich um 3 %, der Preis des Autos um 2,5 %.
Nach welcher Zeit kostet ein solches Auto nur noch 9 Monatslöhne?

Vorarbeit:

Jetzt geht es um eine Kopplung von Lohn L(t) und Autopreis P(t).

Jährliche Lohnsteigerung: 3%, d. h. $q_1 = 1{,}03$

Jährliche Autopreissteigerung: 2,5%, d. h. $q_2 = 1{,}025$

Rechnung:

Lohnfunktion: $L(t) = L(0) \cdot 1{,}03^t$

Autopreisfunktion: $P(t) = P(0) \cdot 1{,}025^t$

Anfänglich war: $P(0) = 10 \cdot L(0)$ (1)

Ziel ist: $P(t) = \boxed{9} \cdot L(t)$

d. h. $P(0) \cdot 1{,}025^t = \boxed{9} \cdot L(0) \cdot 1{,}03^t$ (2)

(1) in (2) einsetzen: $\boxed{10 \cdot L(0)} \cdot 1{,}025^t = 9 \cdot L(0) \cdot 1{,}03^t$

Durch L(0) teilen: $10 \cdot 1{,}025^t = 9 \cdot 1{,}03^t$

Nach t umstellen: $\frac{10}{9} = \frac{1{,}03^t}{1{,}025^t}$

(Hier wurde durch 1,025 geteilt, damit der Zähler größer als der Nenner wird.)

Potenzregel anwenden: $\left(\frac{1{,}03}{1{,}025}\right)^t = \frac{10}{9}$

Logarithmieren: $\log\left(\frac{1{,}03}{1{,}025}\right)^t = \log\frac{10}{9}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot \log\left(\frac{1{,}03}{1{,}025}\right) = \log\frac{10}{9}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot (\log 1{,}03 - \log 1{,}025) = \underbrace{\log 10}_{1} - \log 9$

$$t = \frac{1 - \log 9}{\log 1{,}03 - \log 1{,}025} \approx 21{,}6$$

Ergebnis: Nach 22 Jahren kostet das Auto nur noch 9 Monatslöhne.

Bemerkung: Hier wurde die Rechnung ganz ohne Verwendung von Geldsummen erledigt.
Dies ist viel eleganter als das Rechnen mit den Geldbeträgen für L(0) und P(0) – und geht schneller.

Lösung 235

Auf zwei Konten liegt ein Geldbetrag:

Konto 1: 3000 € mit Zinssatz $p = 3\ \%$ p.a.

Konto 2: 4000 € mit Zinssatz $p = 2{,}5\ \%$ p.a.

a) Nach wie viel Jahren ist der Kontostand 1 höher als der von Konto 2?

b) Beantworte a), wenn das Konto 2 5 Jahre später angelegt wird als Konto 1.

Lösung:

<u>Vorarbeit;</u> Gegeben sind $K_1(0) = 3000\ €$ sowie $p_1 = 0{,}03 \Rightarrow$ Zinsfaktor $q_1 = 1{,}03$.

und $K_2(0) = 4000\ €$ sowie $p_2 = 0{,}025 \Rightarrow$ Zinsfaktor $q_1 = 1{,}025$.

<u>Rechnung:</u>

1. Kontostandsfolge $K_1(t) = 3000 \cdot 1{,}03^t$
2. Kontostandsfolge $K_2(t) = 4000 \cdot 1{,}025^t$

Ansatz: $K_1(t) > K_2(t)$

$$3000 \cdot 1{,}03^t > 4000 \cdot 1{,}025^t$$

Umstellen nach t: $\dfrac{1{,}03^t}{1{,}025^t} > \dfrac{4000}{3000}$

Potenzgesetz anwenden: $\left(\dfrac{1{,}03}{1{,}025}\right)^t = \dfrac{4}{3}$

Logarithmieren: $\log\left(\dfrac{1{,}03}{1{,}025}\right)^t = \log\dfrac{4}{3}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot \log\left(\dfrac{1{,}03}{1{,}025}\right) = \log\dfrac{4}{3}$

Logarithmengesetz anwenden: $t \cdot (\log 1{,}03 - \log 1{,}025) = \log 4 - \log 3$

$$t = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 1{,}03 - \log 1{,}025} \approx 59{,}12$$

Ergebnis: Nach 60 Jahren hat das Konto 1 einen höheren Kontostand.

Wenn Konto 2 5 Jahre später eröffnet wird, ist die Laufzeit um 5 Jahre kürzer: $K_2(t) = 4000 \cdot 1{,}025^{t-5}$

Dann ändert sich die Rechnung nur dadurch, dass man in K_2 t durch t-5 ersetzt:

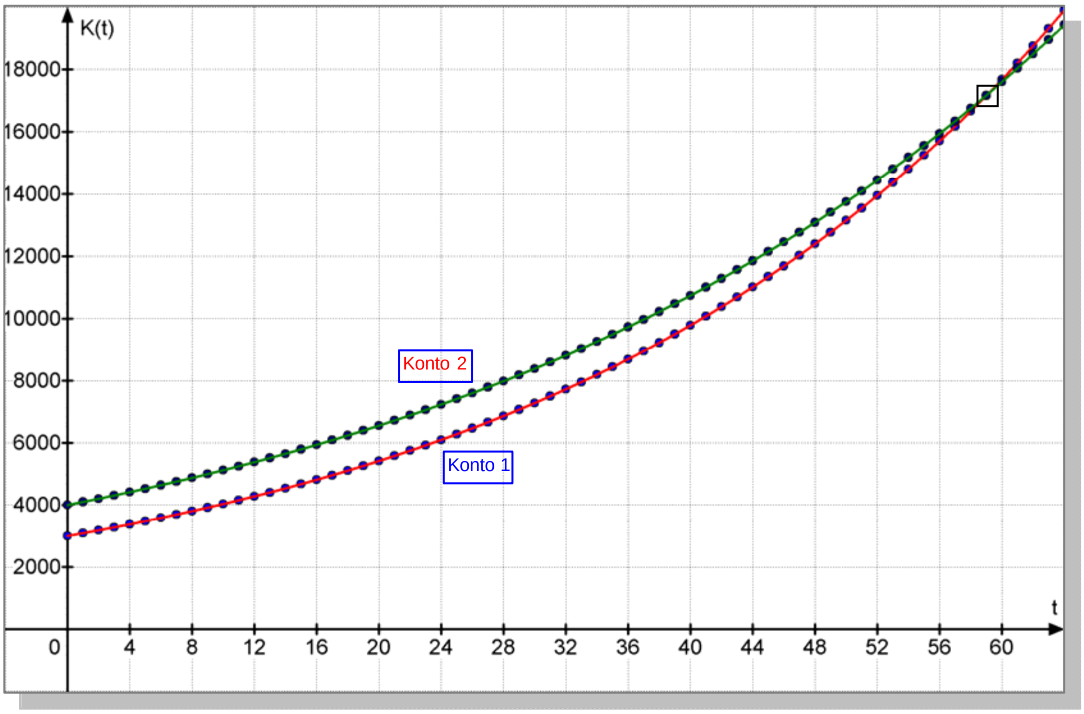
Ansatz: $3000 \cdot 1{,}03^t > 4000 \cdot 1{,}025^{t-5}$

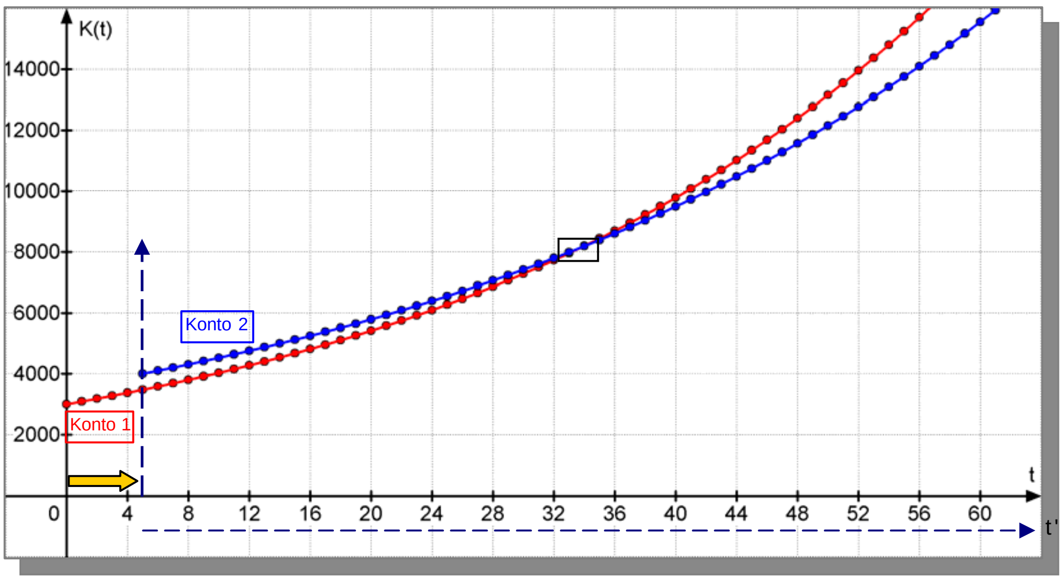
Aufsplitten: $3000 \cdot 1{,}03^t > 4000 \cdot \dfrac{1{,}025^t}{1{,}025^5}$

bzw. $3000 \cdot 1{,}03^t > 3535{,}41 \cdot 1{,}025^t$

Letzte Zeile: $t = \dfrac{\log 3535{,}41 - \log 3000}{\log 1{,}03 - \log 1{,}025} \approx 33{,}75$

Ergebnis: Nach 34 Jahren hat das Konto 1 einen höheren Kontostand.





Die obere Abbildung zeigt die beiden Wachstumsfolgen bei gleichzeitigem Beginn.

Wenn das 2. Konto 5 Jahre später angelegt wird als das 1. Konto, bedeutet das eine Verschiebung der Kurve 2 um 5 Einheiten (Jahre) nach rechts. Der Schnittpunkt, an dem der Kontostand $K_1(t) > K_1(t)$ wird, rückt daher weiter nach links.