Quadratische Funktion - Extremwertaufgaben

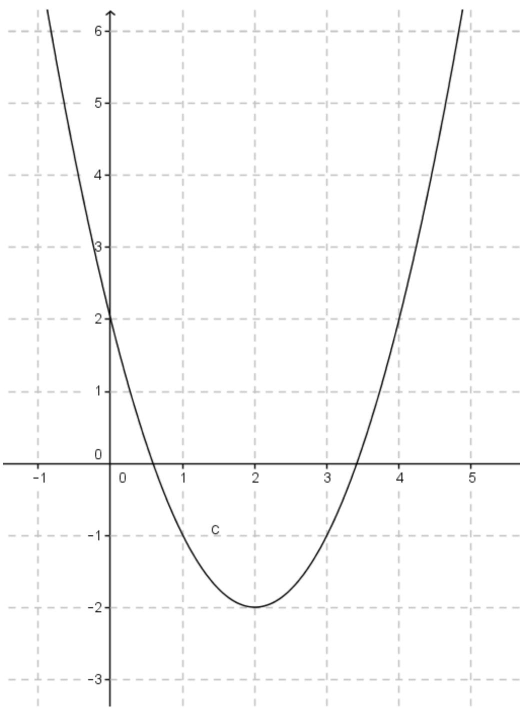
	Stoff	Bemerkungen
	Ihre Lernziele: 1 Verständnis der Begriffe *Funktionswert, Extremwert (Hauptbedingung, Nebenbedingung)* 2. Extremwertaufgaben selbstständig lösen können: bei jedem Schritt wissen, was warum gemacht wird (repetieren wir noch gemeinsam).	
	 Dieses Bild hat viel mit dem Thema Extremwertaufgaben zu tun, entdecken Sie dieses interessante Thema! **Doch zuerst eine Einführung:**	

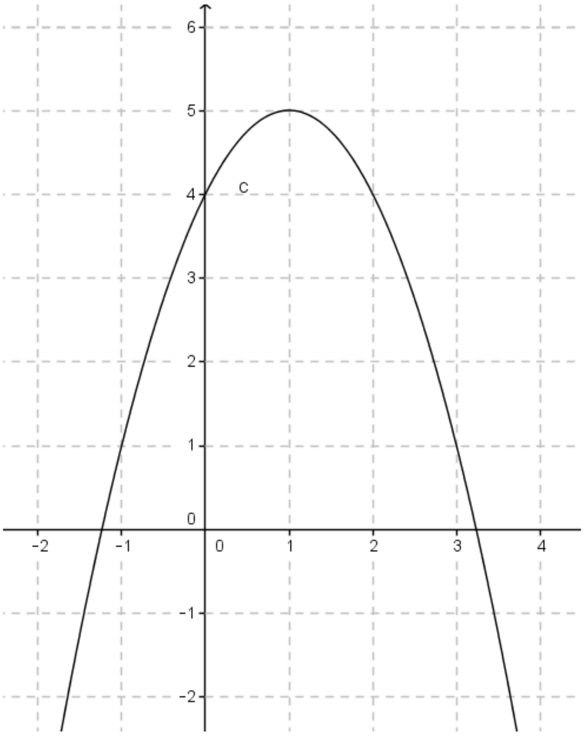
2) Funktionswert → Extremwert

Im Folgenden sehen wir und nochmals genau an, wie ein Graph zustande kommt und was die wichtigsten Elemente sind.

Der Graph ist nichts anderes als die Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem, es braucht also als erstes eine Funktion, wir nehmen natürlich die quadratische:

2 Beispiele: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 2}$ $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x + 4}$





<u>Elemente:</u> Funktion, Variable, Funktionswert, Graph
→ Einzeichnen für einen Punkt auf dem Graphen mit verschiedenen Farben!

Bei quadratischen Funktionen hat der Graph, die Parabel, einen speziellen Punkt:
den *Scheitelpunkt*.

Seine Lage bestimmt - die Lage der Parabel im Koordinatensystem
Die Öffnungszahl a bestimmt - einen speziellen Funktionswert:
Ist es ein Maxima oder Minima?

Parabel gegen oben geöffnet: Koeffizient a > 0 → Funktionswert ist ein Minimum

Parabel gegen unten geöffnet: Koeffizient a < 0 → Funktionswert ist ein Maximum

Minimum und Maximum werden darum als <u>Extremwerte</u> bezeichnet.

Extremwerte sind also nichts anderes als spezielle Funktionswerte! (y-Werte)

Es interessiert ebenfalls, wo (bei welchem x-Wert) sich dieser Extremwert befindet!

Mit diesem Wissen können wir nun sogenannte Extremwertaufgaben lösen.

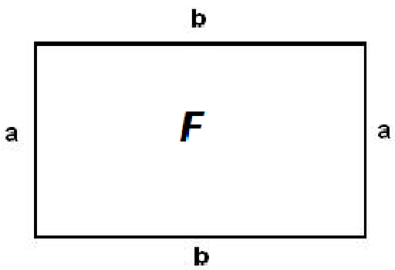
1. Extremwertaufgabe

Ein Schäfer hat für seine Schafe einen Zaun mit der Länge 100 Meter. Wie muss er seinen Zaun aufstellen, damit er eine rechteckige Weide mit maximaler Fläche erhält?

Sie sehen jetzt den Zusammenhang mit unserem Bild vom Beginn der Lektion!

Der folgende Lösungsweg soll wie ein „Rezept" für Sie sein!

1) Machen Sie eine entsprechende Skizze und beschriften Sie diese vollständig!



Stellen Sie nun die mathematische Bedingung auf, sie können diese aus Ihrer Skizze ablesen!   Es gibt jeweils eine *Hauptbedingung* und eine *Nebenbedingung*:

2) Aufstellen der **Hauptbedingung**:

In der Hauptbedingung steht eine Berechnungsformel für die Größe, die minimiert oder maximiert werden soll. Das ist hier die Fläche der Weide!
Soll die Fläche eines Rechtecks extrem werden, lautet die Hauptbedingung: $F = a * b$

3) Aufstellen der **Nebenbedingung**: Aus der Zusatzinformation wissen wir: Die Länge des Zauns ist 100 Meter:

$$2a + 2b = 100 \quad \rightarrow \quad a + b = 50 \quad \rightarrow \quad b = 50 - a$$

4) Kombinieren Sie diese beiden Bedingungen zur Zielfunktion:
Setzen Sie die Gleichung der Nebenbedingung in der Hauptbedingung ein (wie bei den linearen Gleichungssystemen: Einsetzverfahren):

$$F = a * b \;, \quad b = 50 - a \quad \rightarrow \quad F = a * (50-a) \quad \rightarrow \quad F = a(50 - a)$$

$F = 50a - a^2$ **oder** $F = -a^2 + 50$: Zielfunktion

Wir können auch schreiben: $f(a) = -a^2 + 50a$ **oder** $f(x) = -x^2 + 50x$

Berestimmen Sie nun den <u>Extremwert</u>: = Funktionswert des Scheitelpunktes *y(s)* (an der Stelle x(s))

<u>Scheitelpunkt-Koordinaten *x(s)* und *y(s)*:</u>
Achtung: die folgenden a und b haben nichts mit unserer Länge a und Breite b des Rechteckes zu tun! Diese hier stammen aus der a-b-c-Formel und sind die Koeffizienten der Funktionsgleichung.

$x(s) = -\frac{b}{2a}$ → *b = 50, a = -1* → *x(s) = - 50/-2 = <u>25</u> (Breite des Z.)*

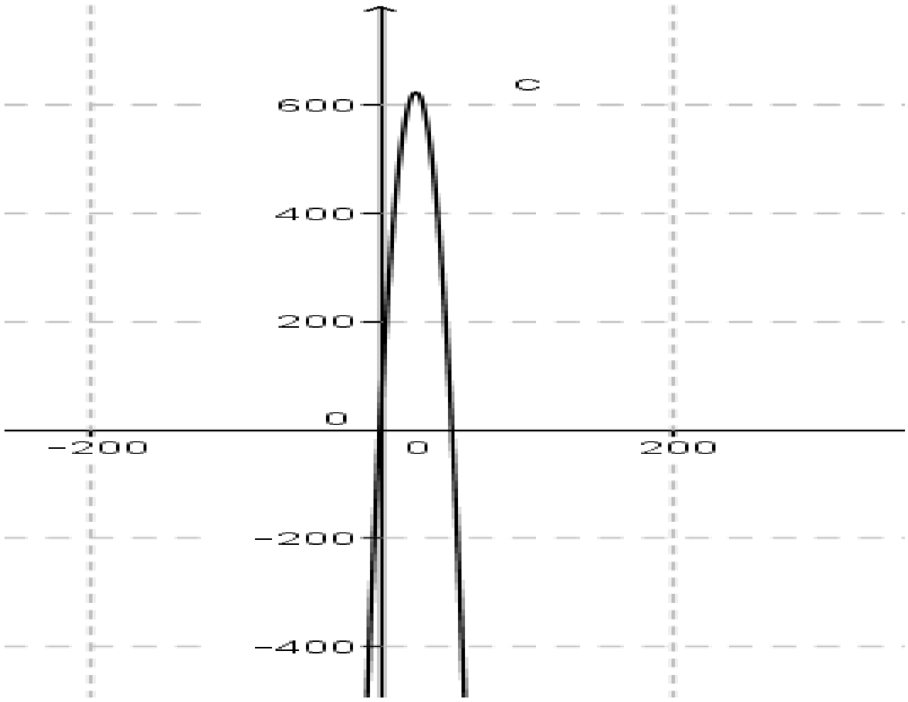
(Bem: Man könnte die x-Koordinate des Scheitels auch mit der quadratischen Ergänzung berechnen…)

*y(s) = Extremwert = - $(25)^2$ +50*25 = - 625 + 1'250 = <u>625 = F_{max}</u>*

<u>Wir sehen</u>: Die Länge der Weide ist gleich gross wie die Breite: nämlich 25 Meter.
Die Maximale Fläche bei gegebenem Umfang ist also quadratisch, in unserem Beispiel 25m x 25m = 652 m^2.

<u>Antwortsatz:</u>
Der Schäfer muss für die rechteckige Weide eine Länge und Breite von je 25 Metern wählen, dann hat seine Weide die Maxiamlfläche von 625 m^2.

Funktion:



<u>Falls die Frage kommt:</u> Kreis mit Umfang 100 m: Fläche = $\pi * r^2 = \pi * (15{,}92)^2$=795,7 m^2. Der Kreis hat also nochmals ca. 27% mehr Fläche mit demselben Zaun (Umfang)!

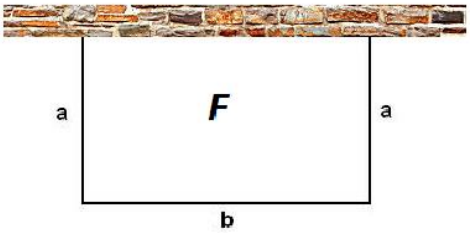
2. Extremwertaufgabe

(Lernende lösen selbstständig oder zu zweit, wenn nötig mit Hilfe der LP).

Ein Schäfer hat für seine Schafe einen Zaun mit der Länge 100 Meter. Seine Wiese wird auf der einen Seite durch eine Mauer begrenzt. Der Schäfer nimmt diese Mauer als eine Begrenzung seiner Weide. Wie muss er seinen Zaun aufstellen, damit er eine rechteckige Weide mit maximaler Fläche erhält?

Lösungsweg:

1) Skizze mit Beschriftung:



2) Hauptbedingung:
Soll die Fläche eines Rechtecks extrem werden, lautet die Hauptbedingung:

$F = a * b$

3) Nebenbedingung: Die Länge des Zauns ist 100 Meter:

$2a + b = 100 \quad \rightarrow \quad b = 100 - 2a$

4) Zielfunktion:

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung:

$F = a * b \;,\; b = 100 - 2a \quad \rightarrow \quad F = a * (100 - 2a) \quad \rightarrow \quad F = -2a^2 + 100a$

$$f(x) = -2x^2 + 100x$$

Berestimmen Sie nun den Extremwert: = Funktionswert des Scheitelpunktes *y(s)* (an der Stelle x(s))

Scheitelpunkt Koordinaten: *x(s)* und *y(s)*:

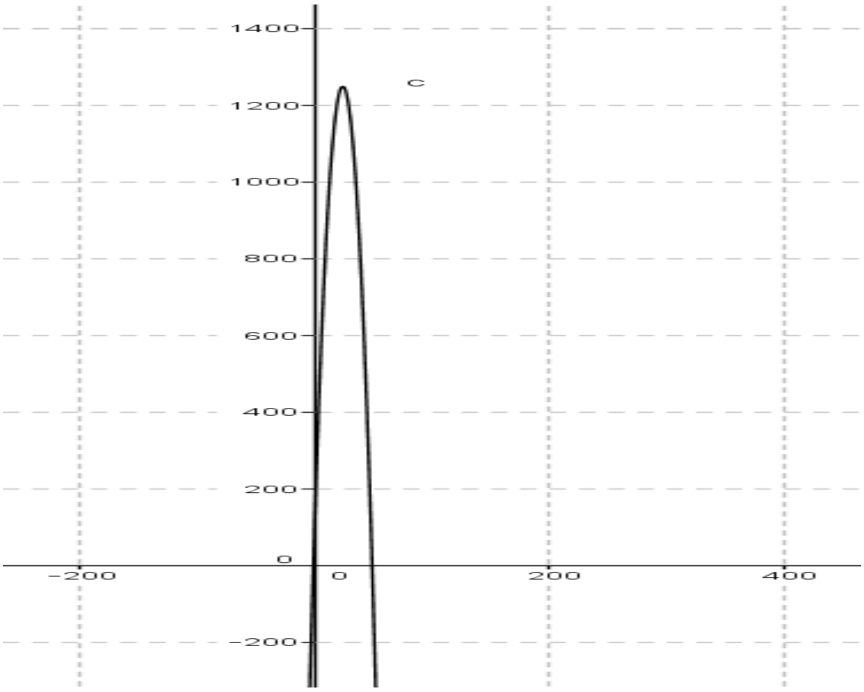
$x(s) = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad b = 100, \quad a = -2 \quad \rightarrow \quad x(s) = -100/-4 = \underline{25}$ *(Breite oder Länge des Zaunes.)*

$y(s) = \text{Extremwert} = -2(25)^2 + 100*25 = -1'250 + 2'500 = \underline{1'250 = F_{max}}$

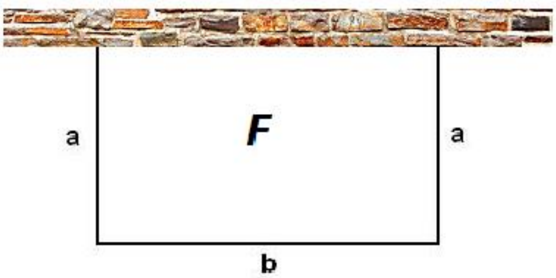
Wir sehen: Es gibt zwei Lösungen, wobei die geometrische Form dieselbe ist.
Die Länge (oder die Breite) der Weide ist gleich 50 Meter, die Breite (oder die Länge) ist 25 Meter. Die Maximale Fläche ist 50m x 25m = 1‘250 m^2.

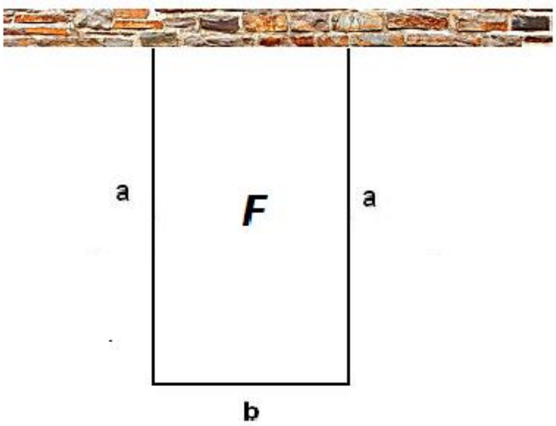
Antwortsatz:
Der Schäfer muss für die reteckige Weide, unter Einbezug der Mauer, eine Breite von 25 Metern und eine Länge von 50 Metern wählen, dann hat seine Weide die Maxiamlfläche von 1‘250 m^2.

Funktion:



Mögliche Lösungen:

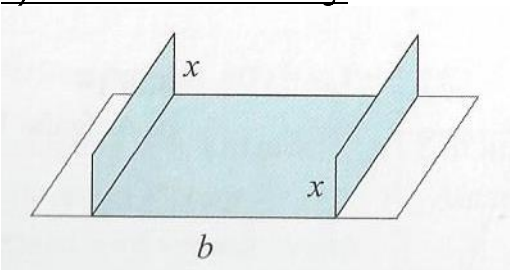




Zusatzaufgabe für die ganz schnellen Lernenden:

Ein rechteckiges Metallblech mit einer Breite von b = 0,5 m soll zu einer Dachrinne mit rechteckiger Querschnittsfläche gebogen werden. Wie muss die Wandhöhe x gewählt werden, damit die Querschnittsfläche möglichst gross wird und damit die Wasserabflussmenge maximal wird?

1) Skizze mit Beschriftung:



2) Hauptbedingung:

Soll die Fläche dieser Dachrinne extrem werden, lautet die Hauptbedingung:

$F = b * x$

3) Nebenbedingung: Die Breite des Blechs ist 0,5 Meter = 50 cm

$\boldsymbol{2x + b = 50} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b = 50 - 2x}$

4) Zielfunktion:

Einsetzen der Nebenbedingung in der Hauptbedingung:

$F = b * x$, $\boldsymbol{b = 50 - 2x} \quad \rightarrow \quad F = x * (50 - 2x) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F = -2x^2 + 50x}$

$$\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 50x}$$

Extremwert: = Funktionswert des Scheitelpunktes *y(s)* (an der Stelle x(s))

Scheitelpunkt Koordinaten: *x(s)* und *y(s)*:

$x(s) = -\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} \quad \rightarrow \quad b = 50, \quad a = -2 \quad \rightarrow \quad x(s) = -50/-4 = \underline{12{,}5}$ *(Wandhöhe des abgebogenen Bleches.)*

$y(s) = \text{Extremwert} = -2(12{,}5)^2 + 50*12{,}5 = -312{,}5 + 625 = 312{,}5\ cm^2 \underline{= F_{max}}$

Antwortsatz:

Die Wandhöhe der Abkantung des Bleches muss mit 12,5 cm gewählt werden, damit eine maximale Querschnittsfläche erreicht wird.