1. Zinseszinsrechnungen

1.1 Grundlagen

Wer einer Bank sein Geld übergibt, erhält von dieser dafür Zins. Dieser wird durch den sogenannten **Zinssatz** berechnet. Bei einem Zinssatz von p = 3 % (das sind 3 Hundertstel der Grundwerts) erhält man den Jahreszins durch diese Formel: $\boxed{Z = K \cdot p}$

Beispiel:

Startkapital K_O = 2.500 und Zinssatz p = 3 % = 0,03 p.a. (per annum = Jahreszins)

Jahreszins: $Z_1 = 2.500 \cdot 0{,}03 = 75$

Dieser Jahreszins kommt nach einem Jahr zum Startkapital dazu und ergibt das

neue Kapital: $K_1 = K_0 + Z_1 = 2.500 + 75 = 2.575$

Bleibt dieses Geld unangetastet auf dem Konto, dann kommt nach Ablauf eines weiteren Jahres der nächste Zins dazu. Dieser ist nun höher als der erste Zins mit 75 €, denn der Zins wird aus dem um 75 € erhöhten Kapital K_1 = 2575 € berechnet:

Neuer Jahreszins: $Z_2 = K_1 \cdot p = 2575 \cdot 0{,}03 = 77{,}25$

Dadurch erhöht sich das Kapital auf: $K_2 = K_1 + Z_2 = 2575 + 77{,}25 = 2652{,}25$

So könnte man prinzipiell weiterrechnen und stets den neuen Zins zum alten Kapital dazu addieren um den neuen Kontostand zu bekommen. Das ist aber sehr umständlich.
Die bessere Methode erhält man, wenn man diese Berechnung einmal allgemein durchführt und dabei einen Trick entdeckt.

Berechnung des Kapitals mit Zinseszins

Startkapital: K_o Zahlenbeispiel: $K_0 = 4000$ (€)

Nach 1 Jahr: $K_1 = K_0 + Z_1$

Jahreszins: $Z_1 = K_O \cdot p = K_O \cdot 0{,}03$

Das ergibt eingesetzt: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 + K_0 \cdot 0{,}03$

K_O ausklammern: $K_1 = K_O \cdot \underbrace{(1+p)}_{q} = K_O \cdot \boxed{1{,}03}$ q = 1,03 heißt Zinsfaktor

Zahlenbeispiel: $K_1 = 4000 \cdot 1{,}03 = 4120$

Nach 2 Jahren: $K_2 = K_1 + Z_2$

Jahreszins: $Z_2 = K_1 \cdot p = K_1 \cdot 0{,}03$

Das ergibt: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot p = K_1 + K_1 \cdot 0{,}03$

K_1 ausklammern: $K_2 = K_1 \cdot \underbrace{(1+p)}_{q} = K_1 \cdot \boxed{1{,}03}$

Mit Zahlen: $K_2 = 4120 \cdot 1{,}03 = 4243{,}60$

K_1 Ersetzen: $K_2 = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 = K_0 \cdot 1{,}03^2$

Nach 3 Jahren: $K_3 = K_2 + Z_3$

Jahreszins: $Z_3 = K_2 \cdot p = K_2 \cdot 0{,}03$

Das ergibt: $K_3 = K_2 + K_2 \cdot p = K_2 + K_2 \cdot 0{,}03$

K_2 ausklammern: $K_3 = K_2 \cdot \underbrace{(1+p)}_{q} = K_2 \cdot \boxed{1{,}03}$

Mit Zahlen: $K_3 = 4120 \cdot 1{,}03 = 4370{,}91$

K_2 ersetzen: $K_3 = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 = K_0 \cdot 1{,}03^3$

Man beobachtet, dass man durch den Trick des Ausklammerns nicht jedes Mal den Zins neu berechnen muss. Vielmehr erhält man einen so genannten Zinsfaktor q = 1+p , mit dem man nur den alten Kontostand multiplizieren muss um den neuen zu erhalten!

Ab jetzt kann man daher die nächsten Kontostände ohne größere Rechnungen anschreiben:

Nach 4 Jahren:	$K_4 = K_3 \cdot q = K_3 \cdot 1{,}03$	oder:	$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 4000 \cdot 1{,}03^4 = 4502{,}04$
Nach 5 Jahren:	$K_5 = K_4 \cdot q = K_4 \cdot 1{,}03$	oder:	$K_5 = K_0 \cdot q^5 = 4000 \cdot 1{,}03^5 = 4637{,}10$
Nach n Jahren:	$K_n = K_{n-1} \cdot q = K_{n-1} \cdot 1{,}03$	oder:	$K_n = K_0 \cdot q^n = 4000 \cdot 1{,}03^n$

Im ersten Kasten wird der Kontostand durch Multiplikation mit q aus dem jeweils letzten Kontostand berechnet.
Man nennt das rekursive Berechnung.

Im zweiten Kasten wird der Kontostand sofort aus dem Startkapital berechnet.
Man kann also direkt jeden beliebigen Kontostand berechnen.

MERKE:
Mit dem Verzinsungsfaktor $q = 1+p$ **kann man sofort jeden Kontostand berechnen:**

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

Beispiel 1

Es sei K_0 = 4.000 € und p = 3 % = 0,03 der Jahreszinssatz.
Dann ist der Zinsfaktor $q = 1 + p = 1{,}03$
und die Kontostandsformel lautet: $K_n = K_0 \cdot q^n$, also $K_n = 4.000 \cdot 1{,}03^n$

Sie ergibt diese Werte:

$K_1 = 4.000 \cdot 1{,}03 = 4.120$
$K_2 = 4.000 \cdot 1{,}03^2 = 4.243{,}60$
$K_3 = 4.000 \cdot 1{,}03^3 = 4.370{,}91$
$K_4 = 4.000 \cdot 1{,}03^4 = 4.502{,}04$

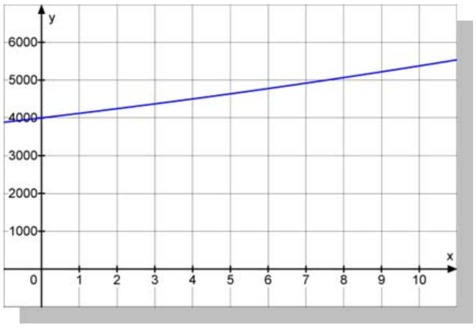
Das Kapital (der Kontostand) ist eine Funktion der Zeit, genauer gesagt der Zahl n der Jahre oder Monate, in denen das Kapital unverändert auf dem Konto liegen bleibt und „nur“ verzinst wird.
Verwendet man die Funktionsschreibweise, dann erhält man:

$$K(n) = 4.000 \cdot 1{,}03^n \qquad (1)$$

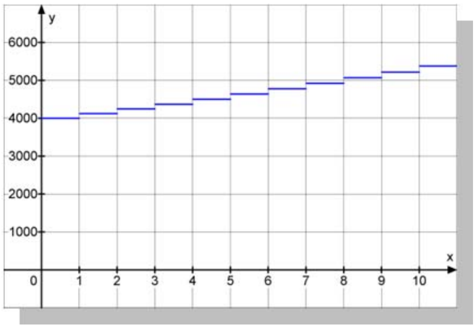
Dies darf nicht verwechselt werden mit

$$K(x) = 4.000 \cdot 1{,}03^x \qquad (2)$$

Die Formel (2) stellt eine Exponentialfunktion dar, deren Schaubild so aussieht:

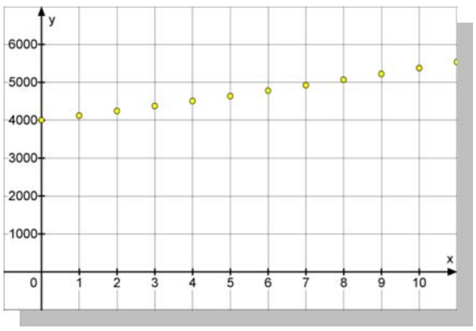


Dieses beschreibt jedoch nicht die finanzielle Situation, denn mit (2) kann man auch Zwischenwerte wie $K(1{,}5) = 4.181{,}34$ € berechnen. Diese haben jedoch keine praktische Bedeutung, denn der Kontostand bleibt bei jährlicher Verzinsung ein Jahr lang konstant, bei monatlicher Verzinsung einen Monat lang, bevor der neue Zins dazukommt und der Kontostand dann einen Sprung nach oben macht.

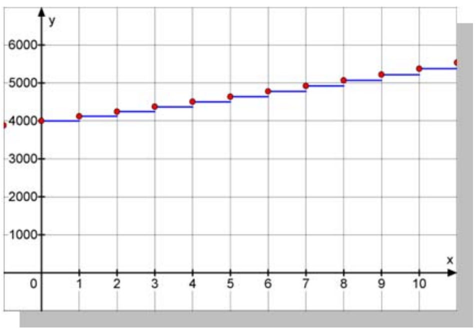


So entsteht eine sogenannte **Treppenfunktion**.

Genau genommen stellt die Formel (1) eine **Zahlenfolge** dar, denn man berechnet die Funktionswerte nur für ganzzahlige n. Das Schaubild einer Folge besteht daher nur aus den Punkten zu ganzzahligen x-Koordinaten.
Rechts das Schaubild zu (1):



Andererseits bleiben die Werte der Folge für ein ganzes Jahr konstant stehen, so dass man eigentlich Schaubild 2 und 3 überlagern muss. Dann entsteht die Abbildung 4.
Der Punkt am linken Endpunkt einer Stufe besagt, dass dort der Funktionswert liegt, während das rechte Ende einer solchen Stufe nicht mehr als Wert dazu gehört, denn dort springt ja die Funktion durch Addition des nächsten Zinses auf das nächste Niveau.



Hinweis:

Diese Schaubilder wurden mit **MatheGrafix** von Roland Hammes erzeugt: www.mathegrafix.de.
Die Treppenfunktion erzeugt man mit der dort eingebauten Gauss-Funktion so: f(x) = 4000*1,03^Gauss(x).