7. Lösungen der Trainingsaufgaben

Aufgabe 1

Wie lange muss man 2.000 € jährlich mit 2,5% verzinsen, damit man 3.000 € erhält?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(n) der Kontostand in € nach n Jahren.
Gegeben sind $K(0) = 2.000$ und $p = 2{,}5\% = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + p = 1{,}025$

Rechnung:

Kontostandsfunktion: $K(n) = K(0) \cdot q^n$

Mit den Gegebenheiten: $K(n) = 2.000 \cdot 1{,}025^n$

Ziel: $K(n) = 3.000$

Gleichsetzen: $2.000 \cdot 1{,}025^n = 3.000$

Umstellen nach n: $1{,}025^n = \frac{3.000}{2.000} = 1{,}5$

Logarithmieren: $\log 1{,}025^n = \log 1{,}5$

Logarithmusregel anwenden: $n \cdot \log 1{,}025 = \log 1{,}5$

$$n = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}025} \approx 16{,}42$$

Da für n nur ganzzahlige Werte möglich sind, muss man die nächste größere ganze Zahl nehmen:

Ergebnis: Nach 17 Jahren ist ein Kontostand von über 3.000 € erreicht worden.

Aufgabe 2

Wie lange muss man ein beliebiges Kapital mit p = 2,5% jährlich verzinsen, bis es sich verdoppelt hat?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(n) der Kontostand in € nach n Jahren.
Gegeben ist $p = 2{,}5\% = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + p = 1{,}025$

Rechnung:

Kontostandsfunktion:	$K(n) = K(0) \cdot q^n$
Nach n Jahren soll gelten:	$K(n) = 2 \cdot K(0)$
Gleichsetzen:	$K(0) \cdot q^n = 2 \cdot K(0)$
Durch K(0) dividieren:	$q^n = 2$
Logarithmieren:	$\log q^n = \log 2$
Logarithmusregel anwenden:	$n \cdot \log q = \log 2$
	$\boxed{n = \frac{\log 2}{\log q}}$

Bisher wurde die Rechnung völlig allgemein durchgeführt. Dies ist so einfacher als die Schreibarbeit mit Zahlen! Was dabei auffallen muss, ist die Tatsache, dass es für das Ergebnis völlig unerheblich ist, um welchen Geldbetrag es sich handelt. Dies erkennt man daran, dass man diesen Geldbetrag K(0) herausdividieren kann. Er tritt daher in der Ergebnisformel nicht mehr auf.
Erst jetzt sollte man q einsetzen:

$$\boxed{n = \frac{\log 2}{\log 1{,}025} \approx 28{,}07}$$

Nun ist zu beachten, dass für n nur natürliche Zahlen zugelassen sind. (Der Definitionsbereich für die Kontostandsfunktion ist stets $D = \{0; 1; 2; ...\}$. Also ist 28,07 keine Lösung dieser Gleichung. Das bedeutet, dass man zu keinem Zeitpunkt genau die doppelte Anfangssumme auf dem Konto hat. Nach n = 28 Jahren hat man noch nicht das Doppelte erreicht, und nach n = 29 Jahren hat man bereits mehr als das Doppelte.
Daher versteht man diese Aufgaben immer so, dass man mindestens das Doppelte meint.

Ergebnis: Nach 29 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

Aufgabe 3

Welchen Zinssatz muss man anwenden, damit sich ein Kapital bei jährlicher Verzinsung in 10 Jahren verdoppelt?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(n) der Kontostand in € nach n Jahren.

Gesucht ist p.

Rechnung:

Kontostandsfunktion:	$K(n) = K(0) \cdot q^n$
Nach 10 Jahren:	$K(10) = K(0) \cdot q^{10}$
Gegeben:	$K(10) = 2 \cdot K(0)$
Gleichsetzen:	$K(0) \cdot q^{10} = 2 \cdot K(0)$
Durch K(0) dividieren:	$q^{10} = 2$
	$q = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}0718$
Zinssatz:	$p = q - 1 = 0{,}0718 = 7{,}18\%$

Ergebnis: Bei einem Zinssatz von 7,18% hat sich ein Kapital nach 10 Jahren verdoppelt.

Aufgabe 4

Ein besonderer Sparvertrag sichert einem Sparer eine Zinserhöhung zu, wenn er 10.000 € 7 Jahre lang fest anlegt. Er bekommt in den erste 2 Jahren 3% Zins, im 3. und 4. Jahr 3,5% Zins, im 5. und 6. Jahr 4% und im 7. Jahr 5% Zins.

a) Berechne das so angesparte Vermögen.

b) Welcher konstante „mittlere" Zinssatz hätte über 7 Jahre hinweg dieselbe Endsumme bewirkt?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(n) der Kontostand in € nach n Jahren und p_n der Zinssatz im n-ten Jahr und q_n der zugehörige Zinsfaktor.

Gegeben sind: $p_1 = p_2 = 3\%$, also ist $q_1 = q_2 = 1{,}03$,
$p_3 = p_4 = 3{,}5\%$, also ist $q_3 = q_4 = 1{,}035$,
$p_5 = p_6 = 4\%$, also ist $q_5 = q_6 = 1{,}04$ und
$p_7 = 5\%$, also ist $q_7 = 1{,}05$.

Rechnung:

Kontostand nach 1 Jahr:	$K(1) = K(0) \cdot q_1$		
Kontostand nach 2 Jahren:	$K(2) = K(0) \cdot q_1 \cdot q_2$	also	$K(2) = K(0) \cdot q_1^2$
Kontostand nach 3 Jahren:	$K(3) = K(2) \cdot q_3$	also	$K(3) = K(0) \cdot q_1^2 \cdot q_3$
Kontostand nach 4 Jahren:	$K(4) = K(2) \cdot q_3^2$	also	$K(4) = K(0) \cdot q_1^2 \cdot q_3^2$
Kontostand nach 5 Jahren:	$K(5) = K(4) \cdot q_5$	also	$K(5) = K(0) \cdot q_1^2 \cdot q_3^2 \cdot q_5$
Kontostand nach 6 Jahren:	$K(6) = K(4) \cdot q_5^2$	also	$K(6) = K(0) \cdot q_1^2 \cdot q_3^2 \cdot q_5^2$
Kontostand nach 7 Jahren:	$K(7) = K(6) \cdot q_7$	also	$K(7) = K(0) \cdot q_1^2 \cdot q_3^2 \cdot q_5^2 \cdot q_7$

Diese letzte Formel kann man eigentlich sofort anschreiben, wenn man den Hintergrund kennt:.
Mit Zahlen:

$$K(7) = 10.000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}05 = 12.906{,}57$$

Mit einem einheitlichen Zinssatz p und dem zugehörigen Zinsfaktor q würde man diese Summe so erreichen:

$$K(7) = 10.000 \cdot q^7 = 12.906{,}57$$

Daraus folgt: $q^7 = \dfrac{12.906{,}57}{10.000} = 1{,}290657$

und der Zinsfaktor: $q = \sqrt[7]{1{,}290657} \approx 1{,}037$

Und der Zinssatz: $p = q - 1 = 0{,}037 = 3{,}7\%$

Ergebnis: Mit dem konstanten Zinssatz von 3,7 % hätte man dieselbe Verzinsung erreicht.

Aufgabe 5

Wie groß muss ein Jahreszinssatz sein, der bei monatlicher Verzinsung dieselbe Endsumme erzeugen soll, wie eine jährliche Verzinsung mit einem Jahreszinssatz von p = 3%?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(n) der Kontostand in € nach n Jahren und $K^*(m)$ der Kontostand bei monatlicher Verzinsung nach m Monaten.
Gegeben ist der Jahreszins p = 3%, also ist der Zinsfaktor q = 1+p = 1,03.

Bei monatlicher Verzinsung sei der noch unbekannte Jahreszinssatz p*.
Daraus folgt $p_m^* = \frac{1}{12}p^*$ und $q_m^* = 1 + \frac{1}{12}p^*$

Rechnung:

Verzinsung mit Jahreszins p = 3 %: $K(n) = K(0) \cdot 1{,}03^n$

Verzinsung mit Monatszins: $K^*(m) = K(0) \cdot (q_m^*)^m$

Bei gleichem Kontostand gilt: $K(n) = K^*(12 \cdot n)$

Gleichsetzen: $K(0) \cdot 1{,}03^n = K(0) \cdot (q_m^*)^{12 \cdot n}$

Durch K(0) dividieren: $1{,}03^n = (q_m^*)^{12 \cdot n}$

$(q_m^*)^{12 \cdot n} = 1{,}03^n$

Mit $\frac{1}{n}$ potenzieren: $\left((q_m^*)^{12 \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1{,}03^n\right)^{\frac{1}{n}}$

$(q_m^*)^{12} = 1{,}03$

$q_m^* = \sqrt[12]{1{,}03} \approx 1{,}002466$

Monatszinssatz: $p_m^* = q_m^* - 1 = 0{,}002466 = 0{,}2466\%$
Zugehöriger Jahreszinssatz: $p^* = 12 \cdot p_m^* = 12 \cdot 0{,}2466\% = 2{,}959\% \approx 2{,}96\%$

Bemerkung:

Man kann dieses Ergebnis dadurch kontrollieren, dass man beide Kontostandsfunktionen aufschreibt:
Für jährliche Verzinsung gilt: $K(n) = K(0) \cdot 1{,}03^n$
Für monatliche Verzinsung gilt: $K^*(m) = K(0) \cdot 1{,}002466^m$.
Nach einem Jahr führt dies zu: $K^*(12) = K(0) \cdot 1{,}002466^{12} = K(0) \cdot 1{,}0299996674...$
aufgerundet: $K^*(12) = K(0) \cdot 1{,}03 = K(1\,\text{Jahr})\,!$

Ergebnis: Ein Jahreszinssatz von 2,96% führt bei monatlicher Verzinsung in jedem Jahr zum gleichen Ergebnis wie eine Jahresverzinsung mit 3%.

Aufgabe 6

Wie viele Monate muss man einen Geldbetrag bei monatlicher Verzinsung mit $p = 4,2\ \%$ p.a. „arbeiten“ lassen, damit man 50% Zugewinn hat?

Lösung

Vorarbeit:

Es sei K(m) der Kontostand in € nach m Monaten.

Jahreszinssatz:	$p = 4,2\ \%$
Monatszinssatz:	$p_m = \frac{4,2}{12}\% = 0,35\% = 0,0035 \quad \Rightarrow \quad q_m = 1,0035$
Endkapital:	$K(m) = 1,5 \cdot K(0)$

Rechnung:

Kontostandsfunktion:	$K(m) = K(0) \cdot 1,0035^m$
Bedingung:	$K(m) = 1,5 \cdot K(0)$
Gleichsetzen:	$K(0) \cdot 1,0035^m = 1,5 \cdot K(0)$
Durch K(0) dividieren:	$1,0035^m = 1,5$
Logarithmieren:	$\log 1,0035^m = \log 1,5$
Logarithmusregel anwenden:	$m \cdot \log 1,0035 = \log 1,5$
	$m = \frac{\log 1,5}{\log 1,0035} \approx 116,04$

Da für n nur ganzzahlige Werte möglich sind, muss man die nächste größere ganze Zahl nehmen:

Ergebnis: Nach 117 Monaten (9 Jahre und 9 Monate) ist ein Kontostand um 50% gewachsen.