

# Symulacja ruchu cząstki w układzie z więzami

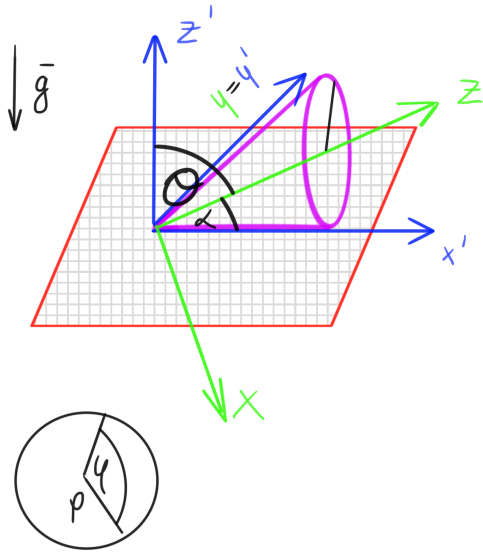
Paweł Lipiór

26 kwietnia 2020

## 1 Wstęp

Tematem odbytych zajęć laboratoryjnych było zastosowanie komputerowych metod obliczeniowych do symulacji ruchu cząstki w polu grawitacyjnym po powierzchni stożka. Zapoznano się z metodą RK4 służącą do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zebrane wyniki przedstawiono na wykresach. Zbadano rozwiązania dla różnych warunków początkowych.

## 2 Wstęp teoretyczny



Rysunek 1: Rysunek przedstawiający geometrię układu

Podczas zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było zapoznanie się z ruchem cząstki w polu grawitacyjnym po powierzchni stożka. Stożek o kącie rozwarcia  $2\alpha$  leży na płaszczyźnie  $x'y'$  tak jak zaprezentowano to na rysunku 1.

W celu rozwiązania problemu tej cząstki poruszającej się po powierzchni stożka postanowiono użyć współrzędnych cylindrycznych, w których oś pokrywa się z osią symetrii stożka.

Równania ruchu przyjmują postać:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g \cos^2 \alpha \sin \phi}{z \sin \alpha} - \frac{2\dot{z}\dot{\phi}}{z} \quad (1)$$

$$\ddot{z} = \sin^2 \alpha z \dot{\phi}^2 - g \sin \alpha \cos^2 \alpha [1 - \cos \phi] \quad (2)$$

Otrzymujemy układ równań różniczkowych drugiego rzędu.

Energia całkowita cząstki poruszającej się po powierzchni stożka w polu grawitacyjnym dana jest za to równaniem:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left[ \tan^2 \alpha z^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\dot{z}^2}{\cos^2 \alpha} \right] - g z \sin \alpha [1 - \cos \phi] \quad (3)$$

## 2.1 Układ związany ze stożkiem i laboratoryjny

W trakcie obliczeń posługujemy się cylindrycznym układem współrzędnych. Jeśli chcemy przejść do układu związanego ze stożkiem  $\mathcal{O}$  dokonujemy transformacji:

$$\begin{aligned}\rho &= z\tau\alpha \\ x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z\end{aligned}$$

Jednak aby zobaczyć tor ruchu cząstki w układzie laboratoryjnym  $\mathcal{O}'$  musimy dokonać przekształcenia, które sprowadzi się do obrotu układu  $\mathcal{O}$  wzdłuż osi  $Oy$ . Do operacji takiej wykorzystujemy macierz obrotu  $X(\theta)$ :

$$\vec{r}' = X(\theta)\vec{r} \quad (4)$$

dla kąta  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Rozwijając do jawnej postaci równanie 4 otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

## 3 Metoda Rungego-Kutty 4-tego rzędu

Do rozwiązywania układu równań 1 oraz 2 można użyć metod numerycznych. Aby wyniki były zadowalającej jakości postanowiono użyć metody Rungego-Kutty czwartego rzędu. Cechuje się ona błędem lokalnym na poziomie  $O(\Delta t^5)$ . Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{s}}{dt} &= f(t, \vec{s}) \\ \vec{k}_1 &= f(t_i, \vec{s}_i) \\ \vec{k}_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_1}{2}\right) \\ \vec{k}_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_2}{2}\right) \\ \vec{k}_4 &= f(t_i + \Delta t, \vec{s}_i + \Delta t \vec{k}_3) \\ \vec{s}_{i+1} &= \vec{s}_i + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\end{aligned}$$

Podaną powyżej metodę zaimplementowano w programie komputerowym służącym do symulacji ruchu cząstki po powierzchni stożka w polu grawitacyjnym.

Jak można zauważyć metoda RK4 służy do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Ale możemy, w łatwy sposób, zamienić układ równań 1 oraz 2 różniczkowych rzędu drugiego na układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Dokonujemy podstawienia:

$$\begin{aligned}s_0 &= \phi \\ s_1 &= z \\ s_2 &= \dot{\phi} \\ s_3 &= \dot{z}\end{aligned}$$

Następnie układ równań 1 oraz 2 zamieniamy na układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}\dot{s}_0 &= f(t_i, \vec{s}_i) = s_2 \\ \dot{s}_1 &= f(t_i, \vec{s}_i) = s_3 \\ \dot{s}_2 &= f(t_i, \vec{s}_i) = -\frac{g \cos^2 \alpha}{\sin} s_0 s_1 \sin \alpha - \frac{2s_3 s_2}{s_1} \\ \dot{s}_3 &= f(t_i, \vec{s}_i) = \sin^2 \alpha s_1 s_2^2 - g \sin \alpha \cos^2 \alpha [1 - \cos s_0]\end{aligned}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy numeryczną iteracją metody RK4 przyjmując zadane warunki początkowe.

## 4 Przeprowadzenie obliczeń

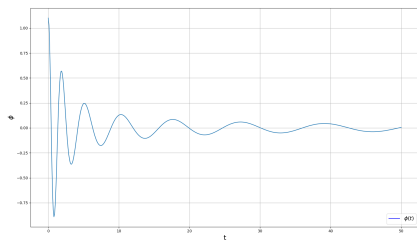
Do przeprowadzenia symulacji ruchu cząstki wykorzystano własny program obliczeniowy wykorzystujący opisaną powyżej metodę RK4. W obliczeniach przyjęto następujące warunki:

- $g = 9.81$
- $\alpha = 0.5$
- $\Delta t = 0.1$
- $N = 500$  kroków czasowych
- $t_0 = 0$

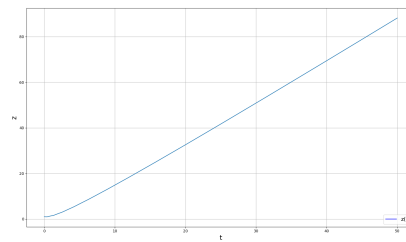
Postanowiono wykonać symulację dla kilku różnych zestawów warunków początkowych. Stabilność energii cząstki w trakcie symulacji sprawdzono sporządzając wykres  $E(t)$ .

## 5 Wyniki symulacji

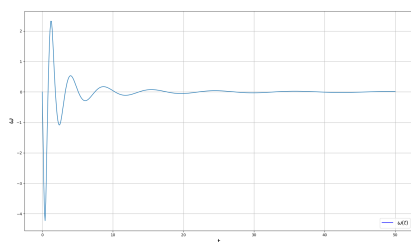
W pierwszym kroku postanowiono sprawdzić poprawność napisanego programu przyjmując warunki początkowe:  $\phi_0 = 1.1$   $z_0 = 1.0$   $\dot{\phi}_0 = 0$   $\dot{z}_0 = 0$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach: 2, 3 oraz 4.



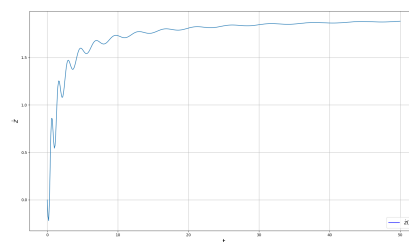
(a) Wykres  $\phi(t)$



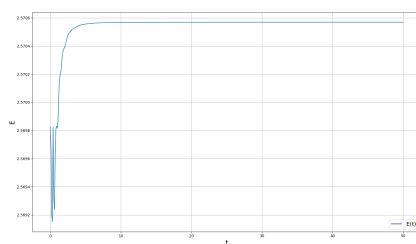
(b) Wykres  $z(t)$



(c) Wykres  $\omega(t)$



(d) Wykres  $\dot{z}(t)$

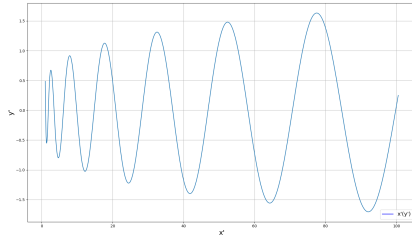


(e) Wykres  $E(t)$

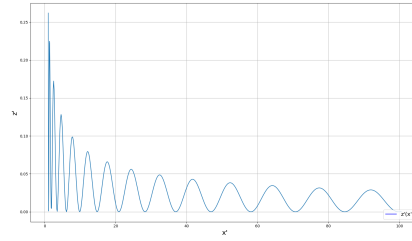
Rysunek 2: Wykresy ruchu i energii całkowitej cząstki.

Powyższe wykresy opisują ruch cząstki w układzie cylindrycznym.

Wykres zmian energii przedstawia zaburzenia na poziomie  $10^{-4}$  więc energia w układzie jest zachowana. Niedokładności wynikają ze skończenia dokładnych metod numerycznych i przyjętego korku czasowego  $\Delta t$ .

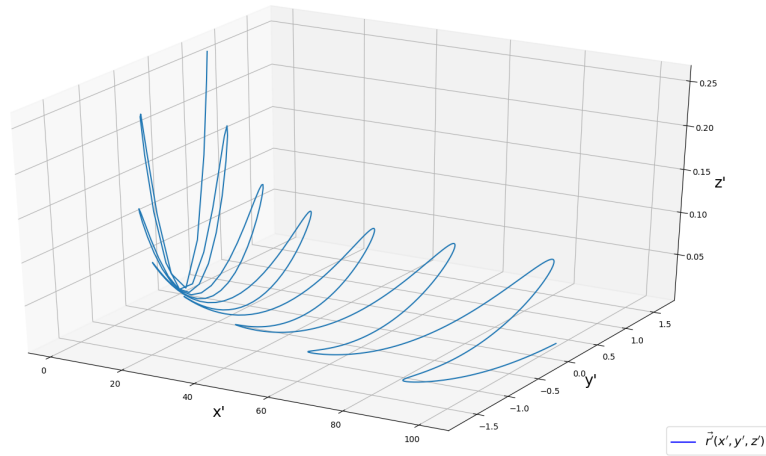


(a) Rzut  $y'(x')$  na płaszczyznę  $Oz'$



(b) Rzut  $z'(x')$  na płaszczyznę  $Oy'$

Rysunek 3: Rzuty ruchu cząstki w układzie  $\mathcal{O}'$  na płaszczyzny.



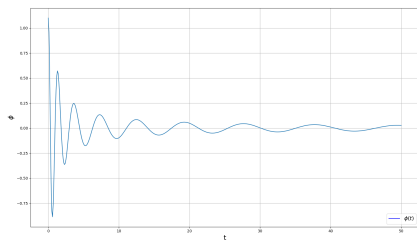
Rysunek 4: Wykres toru ruchu cząstki  $\vec{r}'(x', y', z')$

Powyższe wykresy, rzuty oraz wykres  $\vec{r}'(x', y', z')$  pokazują iż cząstka porusza się coraz szybciej w kierunku osi  $Ox'$ , a jednocześnie zauważamy iż zwiększa się jej wychylenie w osi  $Oy'$  za to zmniejsza w osi  $Oz'$ .

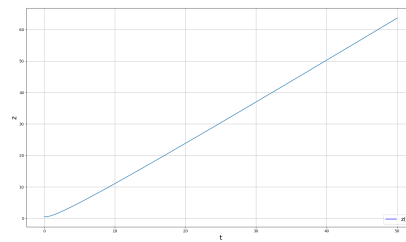
Następnie po sprawdzeniu poprawności działania programu przystąpiono do wykonania wykresów dla innych zestawów warunków początkowych.

### Przypadek I

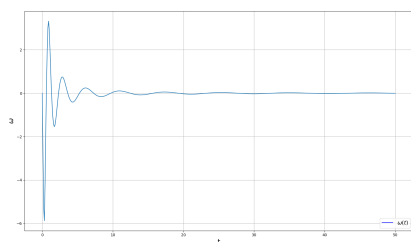
Warunki początkowe:  $\phi_0 = 1.1$   $z_0 = 0.5$   $\dot{\phi}_0 = 0$   $\dot{z}_0 = 0$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach: 5, 6 oraz 7.



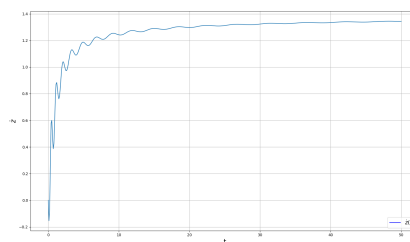
(a) Wykres  $\phi(t)$



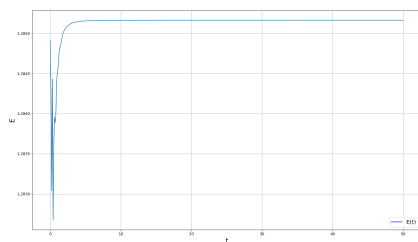
(b) Wykres  $z(t)$



(c) Wykres  $\omega(t)$

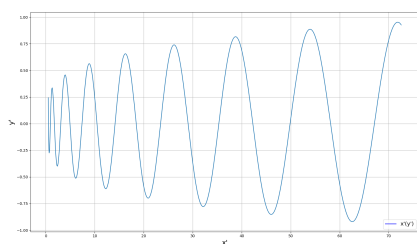


(d) Wykres  $\dot{z}(t)$

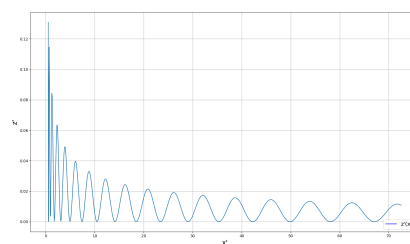


(e) Wykres  $E(t)$

Rysunek 5: Wykresy ruchu i energii całkowitej cząstki.

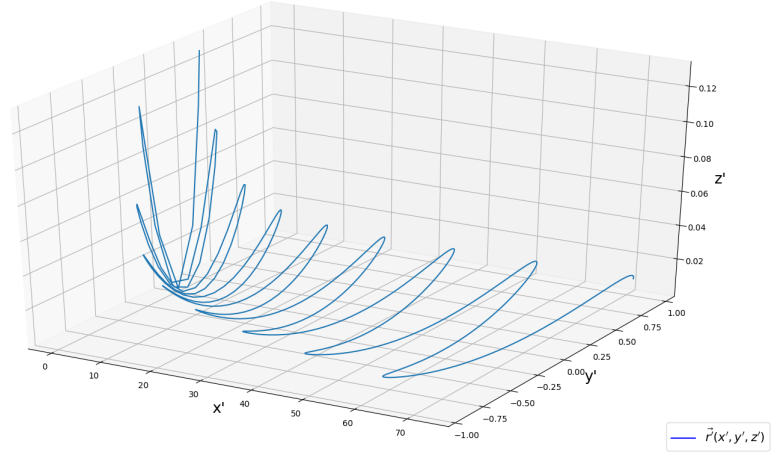


(a) Rzut  $y'(x')$  na płaszczyznę  $Oz'$



(b) Rzut  $z'(x')$  na płaszczyznę  $Oy'$

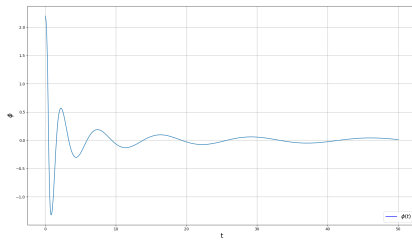
Rysunek 6: Rzuty ruchu cząstki w układzie  $\mathcal{O}'$  na płaszczyzny.



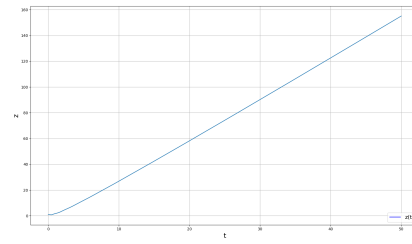
Rysunek 7: Wykres toru ruchu cząstki  $\vec{r}'(x', y', z')$

### Przypadek II

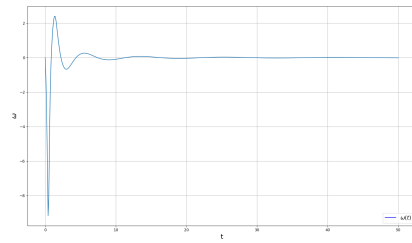
Warunki początkowe:  $\phi_0 = 2.2$   $z_0 = 1.0$   $\dot{\phi}_0 = 0$   $\dot{z}_0 = 0$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach: 8, 9 oraz 10.



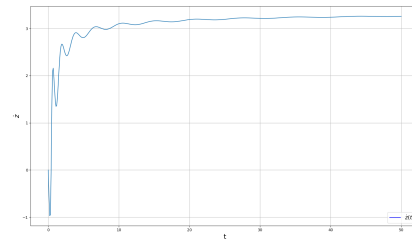
(a) Wykres  $\phi(t)$



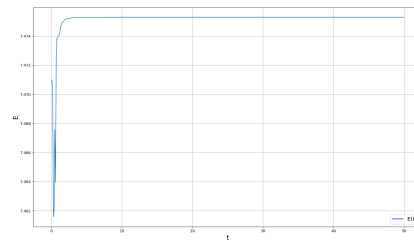
(b) Wykres  $z(t)$



(c) Wykres  $\omega(t)$

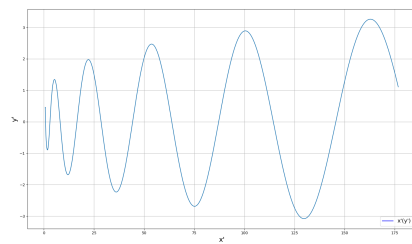


(d) Wykres  $\dot{z}(t)$

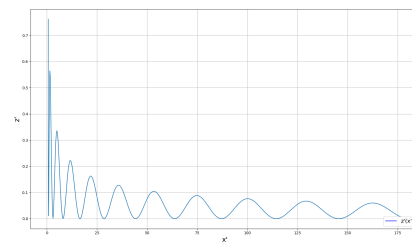


(e) Wykres  $E(t)$

Rysunek 8: Wykresy ruchu i energii całkowitej cząstki.



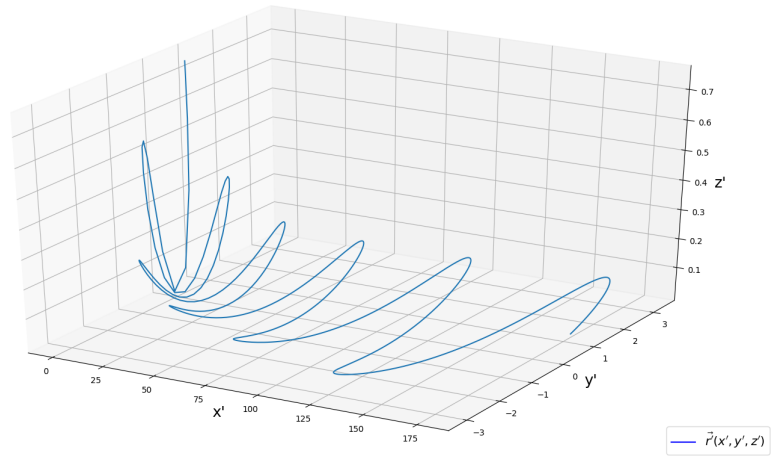
(a) Rzut  $y'(x')$  na płaszczyznę  $Oz'$



(b) Rzut  $z'(x')$  na płaszczyznę  $Oy'$

Rysunek 9: Rzuty ruchu cząstki w układzie  $\mathcal{O}'$  na płaszczyzny.

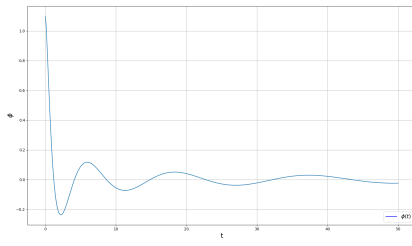




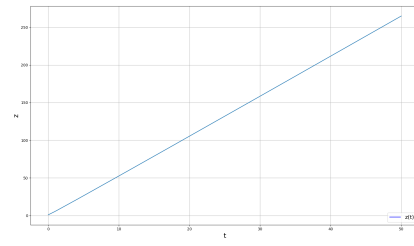
Rysunek 10: Wykres toru ruchu cząstki  $\vec{r}'(x', y', z')$

### Przypadek III

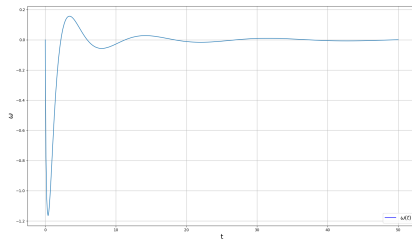
Warunki początkowe:  $\phi_0 = 1.1$   $z_0 = 1.0$   $\dot{\phi}_0 = 0$   $\dot{z}_0 = 5$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach: 11, 12 oraz 13.



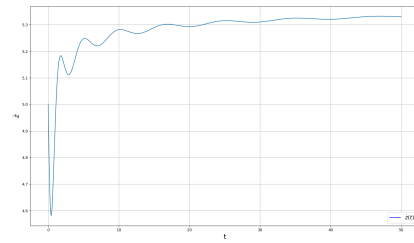
(a) Wykres  $\phi(t)$



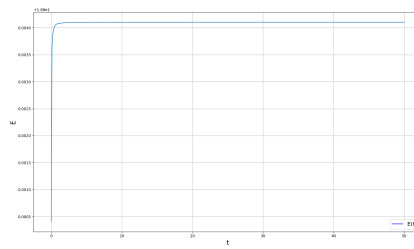
(b) Wykres  $z(t)$



(c) Wykres  $\omega(t)$

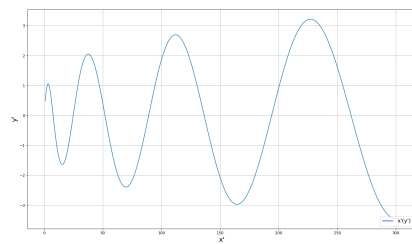


(d) Wykres  $\dot{z}(t)$

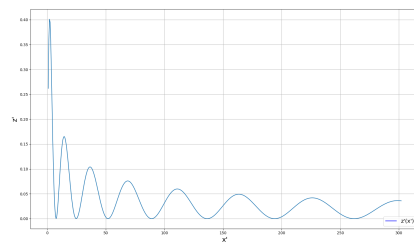


(e) Wykres  $E(t)$

Rysunek 11: Wykresy ruchu i energii całkowitej cząstki.

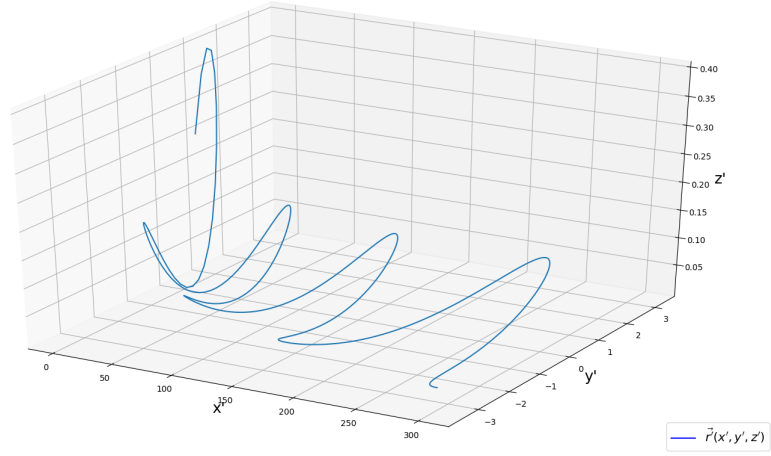


(a) Rzut  $y'(x')$  na płaszczyznę  $Oz'$



(b) Rzut  $z'(x')$  na płaszczyznę  $Oy'$

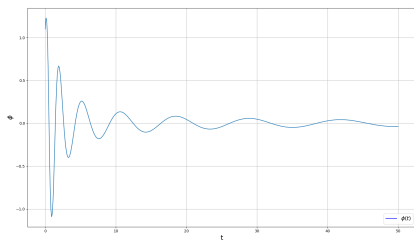
Rysunek 12: Rzuty ruchu cząstki w układzie  $\mathcal{O}'$  na płaszczyzny.



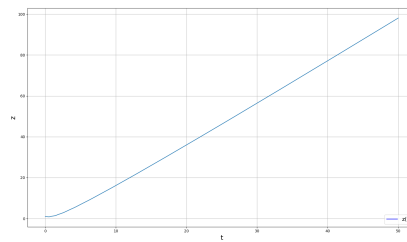
Rysunek 13: Wykres toru ruchu cząstki  $\vec{r}'(x', y', z')$

#### Przypadek IV

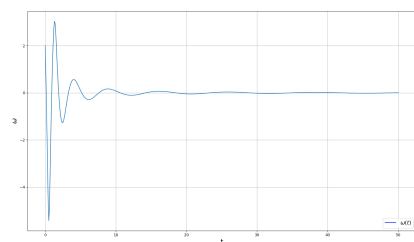
Warunki początkowe:  $\phi_0 = 1.1$   $z_0 = 1.0$   $\dot{\phi}_0 = 2$   $\dot{z}_0 = 0$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach: 14, 15 oraz 16.



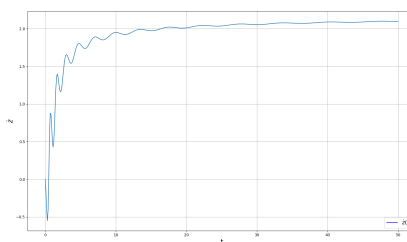
(a) Wykres  $\phi(t)$



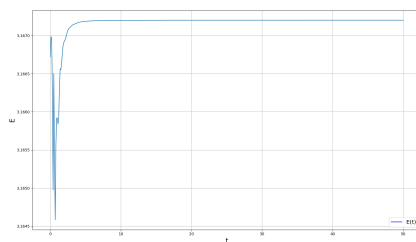
(b) Wykres  $z(t)$



(c) Wykres  $\omega(t)$

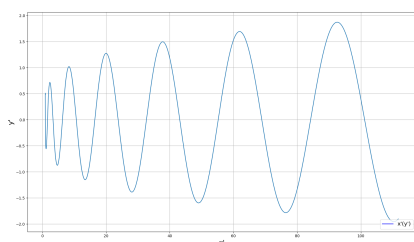


(d) Wykres  $\dot{z}(t)$

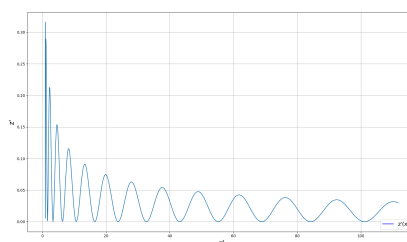


(e) Wykres  $E(t)$

Rysunek 14: Wykresy ruchu i energii całkowitej cząstki.

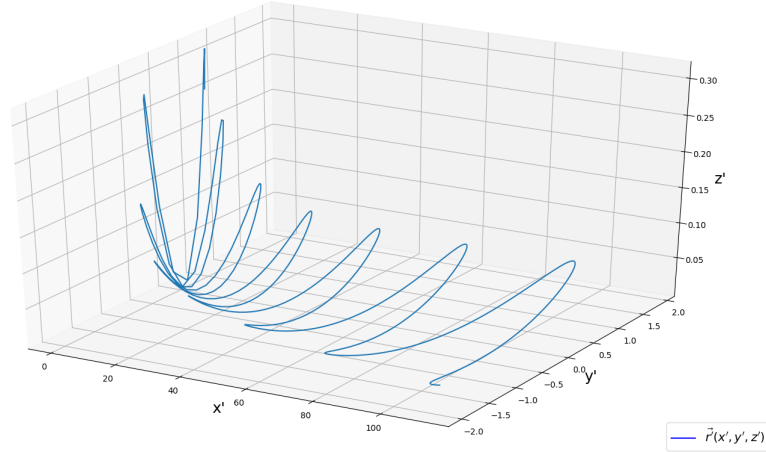


(a) Rzut  $y'(x')$  na płaszczyznę  $Oz'$



(b) Rzut  $z'(x')$  na płaszczyznę  $Oy'$

Rysunek 15: Rzuty ruchu cząstki w układzie  $\mathcal{O}'$  na płaszczyzny.



Rysunek 16: Wykres toru ruchu cząstki  $\vec{r}'(x', y', z')$

## Komentarz wyników

Zmiana warunków początkowych powoduje zmianę energii całkowitej cząstki. Ponieważ energia cząstki jest zachowana w trakcie ruchu to od warunków początkowych silnie zależy opis ruchu cząstki.

Zmniejszenie wartości  $z_0$  powoduje zauważalne na rysunku 7 mniejsze wychylenie w osiach  $Oz'$  oraz  $Oy'$  w porównaniu do rysunku 4. Zauważamy także iż krzywe w osi  $Ox'$  są gęściej upakowane w porównaniu do rysunku 4. Energia cząstki spadła w porównaniu do rysunku 4.

Zwiększenie wartości  $\phi_0$  powoduje zauważalne na rysunku 10 większe wychylenie w osiach  $Oz'$  oraz  $Oy'$  w porównaniu do rysunku 4. Zauważamy także iż krzywe w osi  $Ox'$  są rzadziej upakowane w porównaniu do rysunku 4. Energia cząstki wzrosła w porównaniu do rysunku 4.

Zwiększenie wartości  $\dot{z}_0$  powoduje zauważalne na rysunku 13 większe wychylenie w osiach  $Oz'$  oraz  $Oy'$  w porównaniu do rysunku 4. Dostrzegamy iż tor ruchu początkowo biegnie w kierunku przeciwnym do przyłożonego przyspieszenia, ale po kilku chwilach czasowych zawraca w kierunku przyłożonego przyspieszenia. Zauważamy także iż krzywe w osi  $Ox'$  są rzadziej upakowane w porównaniu do rysunku 4. Energia cząstki wzrosła w porównaniu do rysunku 4.

Zwiększenie wartości  $\dot{\phi}_0$  powoduje zauważalne na rysunku 10 większe wychylenie w osiach  $Oz'$  oraz  $Oy'$  w porównaniu do rysunku 4. Zauważamy także iż krzywe w osi  $Ox'$  są rzadziej upakowane w porównaniu do rysunku 4. Energia cząstki wzrosła w porównaniu do rysunku 4.

## 6 Podsumowanie

W trakcie sporządzania projektu zapoznano się z modelem ruchu cząstki w polu grawitacyjnym po powierzchni stożka. Zapisano równania ruchu i wzór na energię całkowitą posługując się współrzędnymi walcowymi. Wprowadzono układ odniesienia laboratoryjny uzyskany za pomocą obrotu układu współrzędnych związanego ze stożkiem.

Wykorzystano poznaną metodę numeryczną RK4 do rozwiązania układu równań różniczkowych drugiego rzędu. Zaimplementowaną ją we własnym programie obliczeniowym.

Wygenerowano wykresy ruchu cząstki oraz energii całkowitej cząstki. Po stwierdzeniu poprawnego działania metody sporządzono wykres i rzuty toru ruchu cząstki w układzie odniesienia laboratoryjnym.

Postanowiono zbadać zachowanie cząstki dla różnych warunków początkowych. Powtórzono proces generacji danych i wykresów. Dokonano analizy otrzymanych wykresów. Wyciągnięto wnioski.

Reasumując, wykonano wszystkie zapisane w instrukcji zadania i zdobyto umiejętności pozwalające na ich wykonanie.

## 7 Źródła

1. Instrukcja do zajęć laboratoryjnych "Projekt 2: symulacja ruchu cząstki w układzie z więzami." dr hab inż. Tomasz Chwiej
2. Instrukcja "Implementacja metody RK4." dr hab inż. Tomasz Chwiej