Równanie falowe dla struny
Prędkościowy schemat Verleta
Sprawozdanie

Paweł Lipiór

24 kwietnia 2020

1 Wstęp.

W trakcie trwania zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było praktyczne zastosowanie poznanych metod numerycznych. Tym razem tematem zajęć było równanie falowe struny. W trakcie zajęć zrealizowano zadania:

- Zastosowano prędkościowy schemat Verleta dla struny o zadanych sztywnych i luźnych warunkach brzegowych.
- Zastosowano prędkościowy schemat Verleta dla struny o zadanych sztywnych warunkach brzegowych o tłumieniu proporcjonalnym do prędkości struny.
- Zastosowano prędkościowy schemat Verleta dla struny o zadanych sztywnych warunkach brzegowych o tłumieniu. proporcjonalnym do prędkości struny wraz z siłą wymuszającą
- Zbadano zależność średniej energii stanu ustalonego struny od częstości wymuszenia. Zbadano powstające rezonanse.

Równanie falowe struny jest opisane równaniem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdzie $u(x,t)$ oznacza wychylenie z położenia równowagi w chwili t. Przyjmujemy $c = 1$.

Równanie 1 rozwiążemy metodą różnic skończonych. Dzielimy strunę na N fragmentów, każdy o długości Δx. Korzystamy z prędkościowego schematu Verleta:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x,t) + \Delta t\, v(x,t) + \frac{1}{2} a(x,t) \Delta t^2 \tag{2}$$

$$v(x, t + \Delta t) = v(x,t) + \frac{\Delta t}{2} [a(x, t + \Delta t) + a(x,t)] \tag{3}$$

Przyspieszenie $a(x,t) = \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2}$ liczymy korzystając z ilorazu różnicowego drugiej pochodnej:

$$a(x,t) = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x) - 2\, u(x,t)}{\Delta x^2} \tag{4}$$

2 Równanie falowe struny.

Ustalono następujące parametry symulacji:

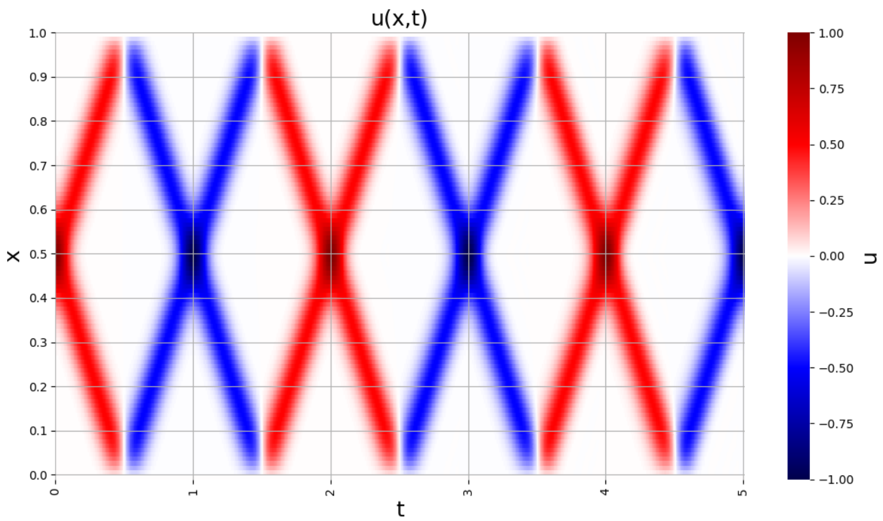
- Strunę podzielono na N = 101 fragmentów
- Δx = 0.01
- $x \in [0, 1]$
- $\Delta t = 0.005$
- $t \in [0, 5]$
- $u_0(x) = exp(-100(x - 0.5)^2)$
- $v_0(x) = 0$

2.1 Sztywne warunki brzegowe.

Ustawiono sztywne warunki brzegowe, tj:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych

Komentarz

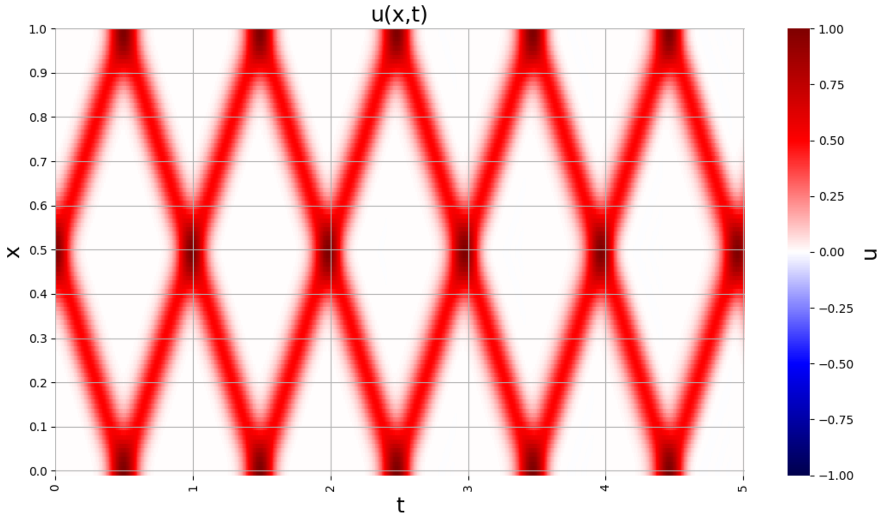
Dla fali przedstawionej na rysunku 1 zachodzi odbicie ze zmianą fazy. Fala nadchodzi górą, powraca zaś do stanu początkowego dołem.

2.2 Luźne warunki brzegowe.

Ustawiono sztywne warunki brzegowe, tj:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=1} = 0$$

Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: Wykres u(x,t) dla luźnych warunków brzegowych

Komentarz

Dla fali przedstawionej na rysunku 2 zachodzi odbicie bez zmiany fazy. Fala nadchodzi górą, powraca zaś do stanu początkowego także górą.

3 Drgania tłumione.

Wprowadzamy tłumienie proporcjonalne do prędkości struny. Modyfikujemy wzór 1 zastępując go:

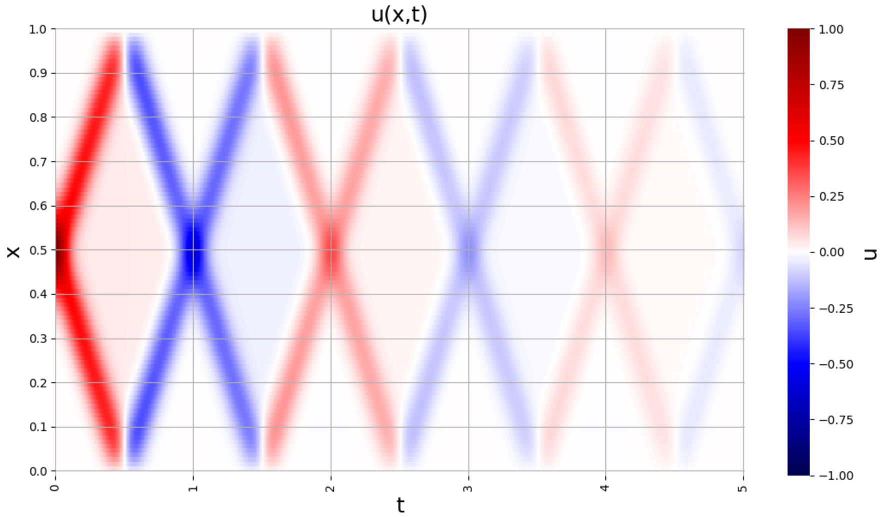
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

Modyfikujemy schemat Verleta:

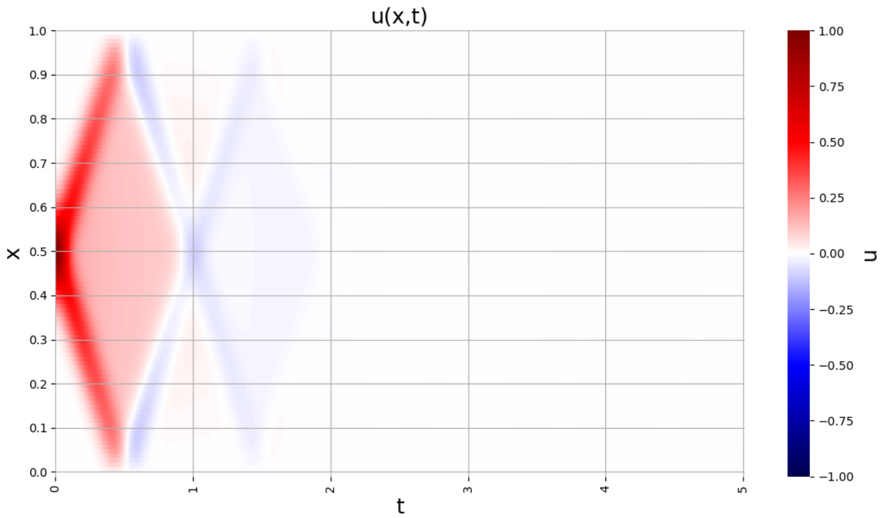
$$a_\beta(x,t) = \frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x) - 2\,u(x,t)}{\Delta x^2} - 2\beta\, v(x,t) \tag{6}$$

$$v(x, t+\Delta t) = \Big[v(x,t) + \frac{\Delta t}{2}[a(x, t+\Delta t) + a_\beta(x,t)]\Big]/(1+\beta\Delta t) \tag{7}$$

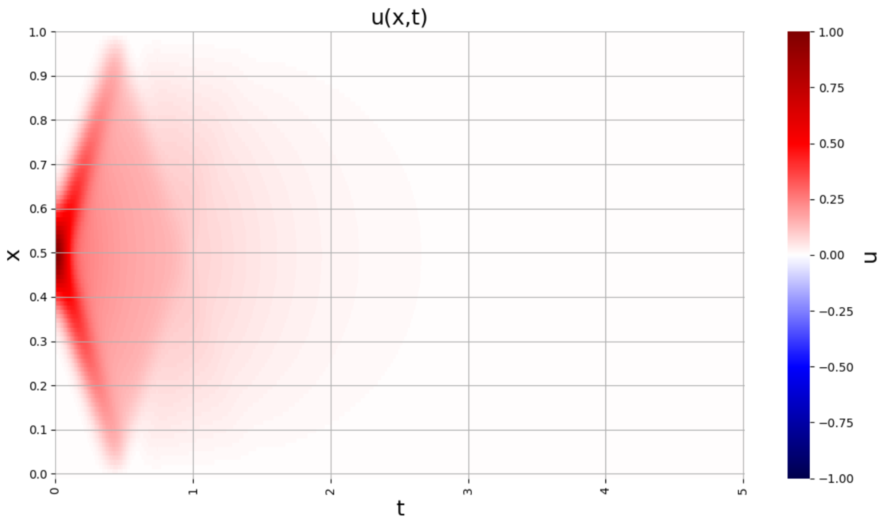
Przyjęto warunki symulacji jak w punkcie poprzednim. Zastosowano sztywne warunki brzegowe. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach 3, 4 oraz 5.



Rysunek 3: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 0.5$



Rysunek 4: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 2$



Rysunek 5: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 4$

Komentarz

Zgodnie z oczekiwaniami zauważamy iż wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia β fale wygaszane są szybciej aż dochodzi do stanu prawie całkowitego wygaszenia.

4 Drgania wymuszone.

Dodajemy do równania 5 dodatkowe przyspieszenie a_F związane z siłą wymuszającą F.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x,t) \tag{8}$$

Siłę F przykładamy w jednym punkcie struny:

$$a_F(x,t) = \begin{cases} \cos \omega t \text{ dla } x = x_0 \\ 0 \text{ dla } x \neq x_0 \end{cases}$$

Modyfikujemy przepis na $v(x, t + \Delta t)$:

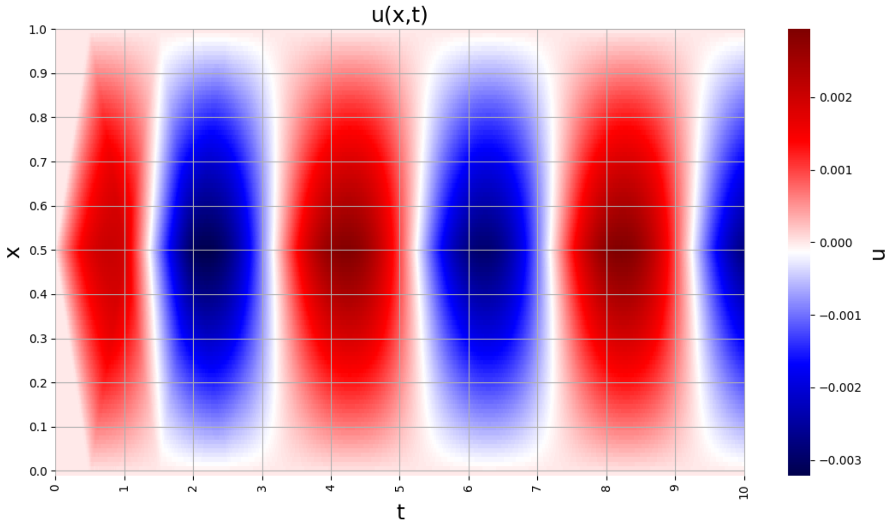
$$v(x,t+\Delta t) = \Big[v(x,t) + \frac{\Delta t}{2} [a(x,t+\Delta t) + a_\beta(x,t) + a_F(x,t+\Delta t) + a_F(x,t)] \Big] / (1 + \beta \Delta t) \tag{9}$$

Ustalono następujące parametry symulacji:

- $t \in [0, 10]$
- $x_0 = \frac{1}{2}$
- $\beta = 1$
- $\omega = \frac{\pi}{2}$

- $u_0(x) = 0$
- $v_0(x) = 0$

Ustawiono sztywne warunki brzegowe. Zebrane dane przedstawiono na rysunku 6.

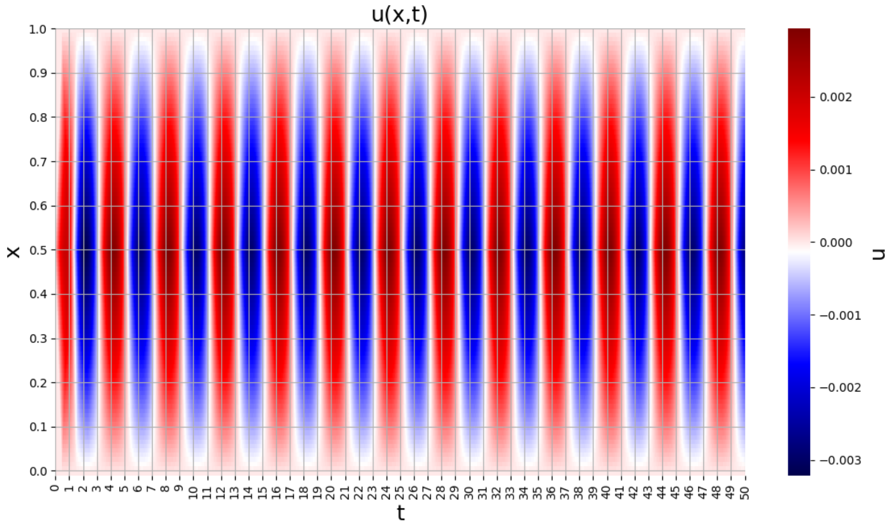


Rysunek 6: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 1$ oraz $\omega = \frac{\pi}{2}$

Komentarz

Na rysunku 6 zauważamy jak struna zaczyna drgać coraz mocniej aż w końcu wymuszenie osiąga stan równowagi z tłumieniem.

W celu wyznaczenie okresu drgań struny po przejściu struny w stan ustalony dokonano symulacji na większym przedziale czasowym $t \in [0, 50]$. Wyniki przedstawiono na rysunku 7.



Rysunek 7: Wykres u(x,t) dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 1$ oraz $\omega = \frac{\pi}{2}$

Na podstawie zamieszczonego rysunku możemy stwierdzić iż okres drgań takiej struny po przejściu w stan ustalony wynosi $T \simeq 4$.

5 Energia struny. Rezonanse.

Energia struny zadana jest wzorem:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_k} v^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{10}$$

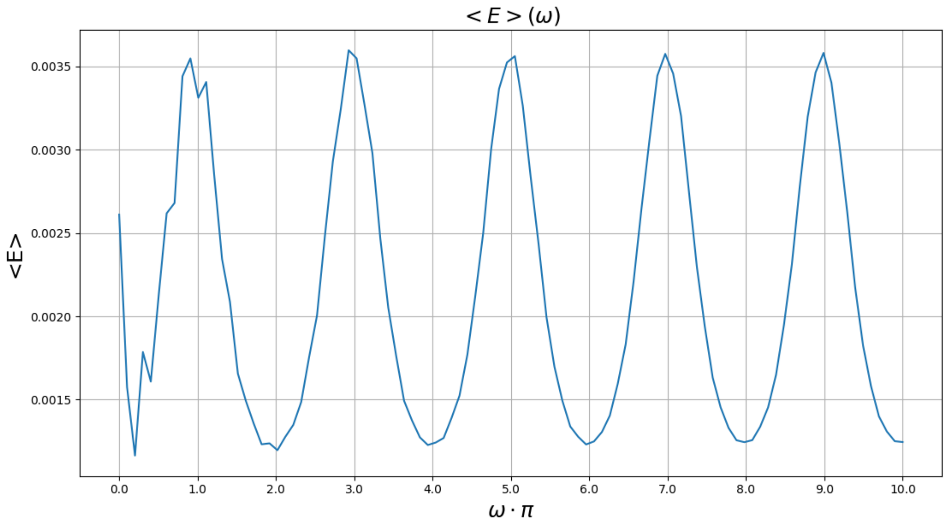
Energia średnia może być wyrażona jako:

$$< E >= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt$$

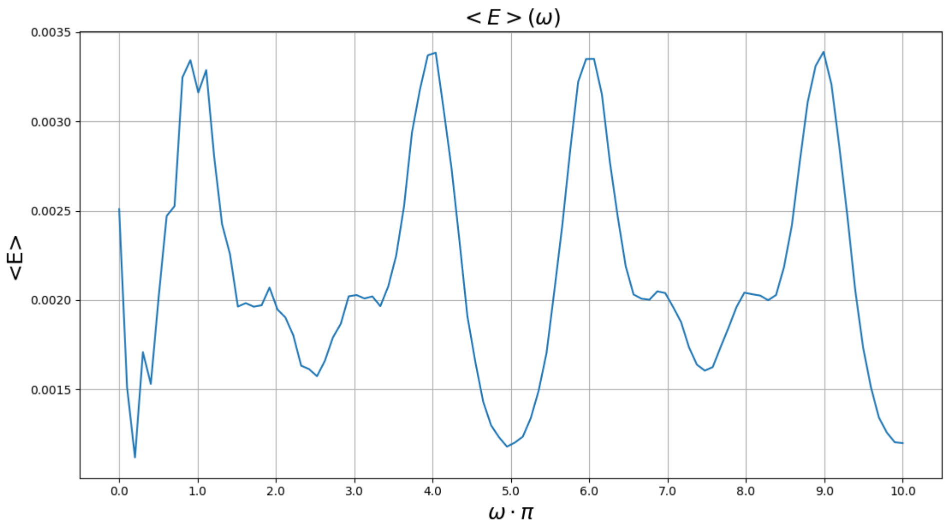
Przyjęto warunki jak w poprzednim podpunkcie. Ustawiono parametry symulacji:

- $t_1 = 16$
- $t_2 = 20$
- $\omega \in [0, 10\pi]$
- $N_\omega = 100$ - liczba kroków na przedział
- $\beta = 1$
- $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.4$, $x_0 = 0.25$

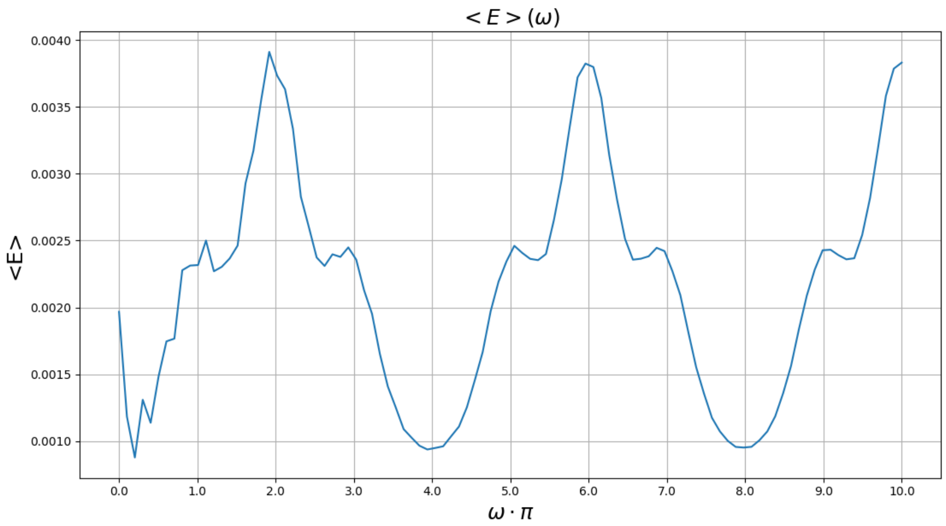
Wyniki symulacji dla różnych x_0 przedstawiają rysunki: 8, 9 oraz 10.



Rysunek 8: Wykres $< E > (\omega)$ dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 1$ oraz $x_0 = 0.5$



Rysunek 9: Wykres $< E > (\omega)$ dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 1$ oraz $x_0 = 0.4$



Rysunek 10: Wykres $< E > (\omega)$ dla sztywnych warunków brzegowych dla tłumienia $\beta = 1$ oraz $x_0 = 0.25$

Komentarz

Na rysunku 8 zauważamy iż rezonanse następują dla częstości własnych drgań tłumionych $\omega_n \approx n\pi$, ale tylko dla n nieparzystych. Aby rezonanse następowały dla n parzystych należy przesunąć punkt przyłożenia siły z $x_0 = 0.5$ do punktu $x_1 = 0.5$.

Jakość otrzymanych danych

Jakość otrzymanych wykresów przedstawia wiele do życzenia. Możliwe iż jest to spowodowane zbyt małą ilością punktów w przedziale $\omega \in [0, 10\pi]$.

6 Podsumowanie

W trakcie zajęć zapoznano się z prędkościowym schematem Verleta. Zastosowano go do symulacji struny, zarówno ze sztywnymi jak i luźnymi warunkami brzegowymi. Następnie wykorzystano poznaną metodę do rozszerzenia symulacji o tłumienie drgań. Kolejno do symulacji dodano siłę wymuszającą. Ostatecznie zbadano zależność średniej energii stanów ustalonych oraz zbadano rezonanse zachodzące w strunie.

7 Źródła

1 - Instrukcja do laboratorium prof. dr hab. inż. B. Szafran "Równanie falowe dla struny"

2 - Wykład prof. dr hab. inż. B. Szafran "Równanie struny"