Symulacja ruchu wahadła matematycznego o stałej długości

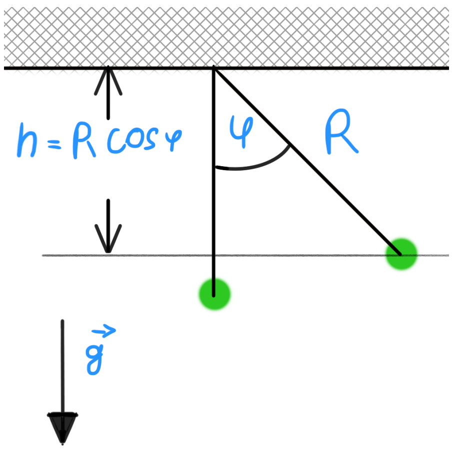
Paweł Lipiór

17 kwietnia 2020

1 Wstęp

Tematem odbytych zajęć laboratoryjnych było zastosowanie komputerowych metod obliczeniowych do symulacji ruchu wahadła matematycznego o stałej długości. Zapoznano się z metodą RK4 służącą do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zebrane wyniki przedstawiono na wykresach. Porównano także, dla małych kątów, wyniki rozwiązania analitycznego i numerycznego.

2 Wstęp teoretyczny



Rysunek 1: Rysunek przedstawiający model wahadła matematycznego

Podczas pierwszych zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było zapoznanie się z modelem wahadła matematycznego ze stałą długością. Model takiego wahadła przedstawia rysunek 1.
Równanie ruchu wahadła opisuje wzór:

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\phi(t) = 0 \tag{1}$$

gdzie:

$\phi(t)$ - kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi w chwili t
g - przyspieszenie ziemskie
R - długość wahadła

Zaś energia wahadła dana jest wzorem:

$$E(t) = U(t) + T(t) = -mgR\cos\phi(t) + \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2(t) \tag{2}$$

gdzie:

$E(t)$ - energia całkowita układu w chwili t
$U(t)$ - energia potencjalna układu w chwili t
$T(t)$ - energia kinetyczna układu w chwili t

Równanie ruchu 1 jest równaniem różniczkowym jednorodnym nieliniowym drugiego rzędu. Równania różniczkowe liniowe są trudne a czasami niemożliwe do rozwiązania metodami analitycznymi. Dla małej amplitudy kąta $\phi \simeq 4$ możemy skorzystać z rozwinięcia funkcji sinus w szereg Taylora i przybliżyć funkcję sinus jej argumentem:

$$\sin\phi \approx \phi$$

Dzięki temu równanie 1 upraszcza się do postaci liniowej:

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\phi(t) = 0 \tag{3}$$

Równanie 3 jest już możliwe do rozwiązania prostymi metodami. Finalnie otrzymujemy wzór:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin\omega t + \theta \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
&\phi_0 \text{ - amplituda drgań}\\
&\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}\text{częstość kołowa drgań}\\
&\theta \text{ - faza początkowa drgań}
\end{aligned}$$

3 Metoda Rungego-Kutty 4-tego rzędu

Do rozwiązania równania 1 można użyć metod numerycznych. Aby wyniki były zadowalającej jakości postanowiono użyć metody Rungego-Kutty czwartego rzędu. Cechuje się ona błędem lokalnym na poziomie $O(\Delta t^5)$. Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{s}}{dt} = f(t, \vec{s})\\
&\vec{k_1} = f(t_i, \vec{s_i})\\
&\vec{k_2} = f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s_i} + \frac{\Delta t k_1}{2})\\
&\vec{k_3} = f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s_i} + \frac{\Delta t k_2}{2})\\
&\vec{k_4} = f(t_i + \Delta t, \vec{s_i} + \Delta t k_3)\\
&s_(\vec{i+1}) = \vec{s_i} + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k_1} + 2\vec{k_2} + 2\vec{k_3} + \vec{k_4})
\end{aligned}$$

Podaną powyżej metodę zaimplementowano w programie komputerowym służącym do symulacji ruchu wahadła matematycznego o stałej długości.
Jak można zauważyć metoda RK4 służy do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Ale możemy, w łatwy sposób ,zamienić równanie 1 różniczkowe rzędu drugiego na układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= v_\phi\\
\dot{v_\phi} &= -\frac{g}{R}\sin\phi
\end{aligned}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy numeryczną iteracją metody RK4 przyjmując zadane warunki początkowe.

4 Przeprowadzenie obliczeń

Do przeprowadzenia symulacji ruchu wahadła wykorzystano własny program obliczeniowy wykorzystujący opisaną powyżej metodę RK4. W obliczeniach przyjęto następujące warunki:

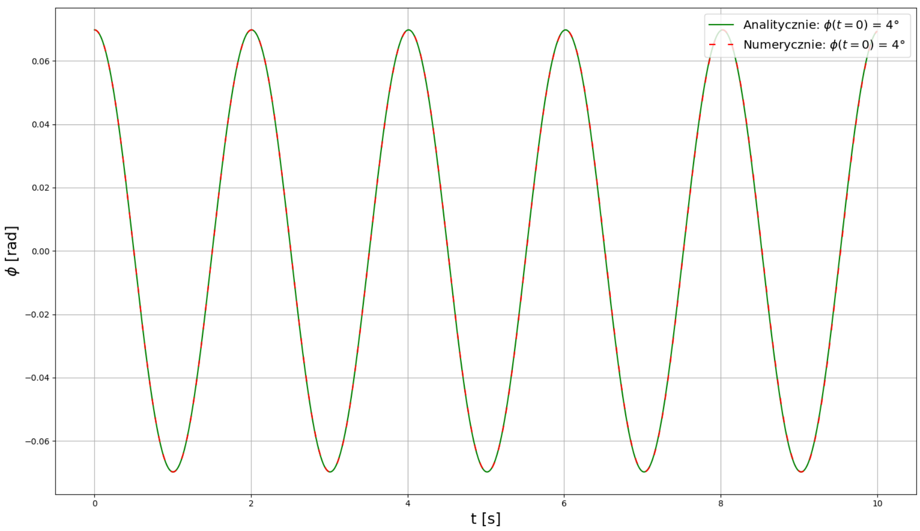
$$m = 1\,\mathrm{kg}$$
$$g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$R = 1\,\mathrm{m}$$
$$\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$$
$$N = 1000 \text{ kroków czasowych}$$
$$v_\phi(t=0) = 0\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Wychylenie z położenia równowagi $\phi(t = 0)$ podawano jako parametr programu. Podawano go w stopniach lecz obliczeń dokonywano dopiero po przeliczeniu na radiany.

5 Wyniki obliczeń

5.1 Zadanie 1

W pierwszym kroku wykonywania zadania postanowiono porównać wyniki otrzymane za pomocą metody numerycznej oraz równania uzyskanego analitycznie. W tym celu jako wychylenie z położenia równowagi $\phi(t = 0)$ przyjęto 4°. Wyniki uzyskane z pomocą obu metod przedstawiono na rysunku 2.

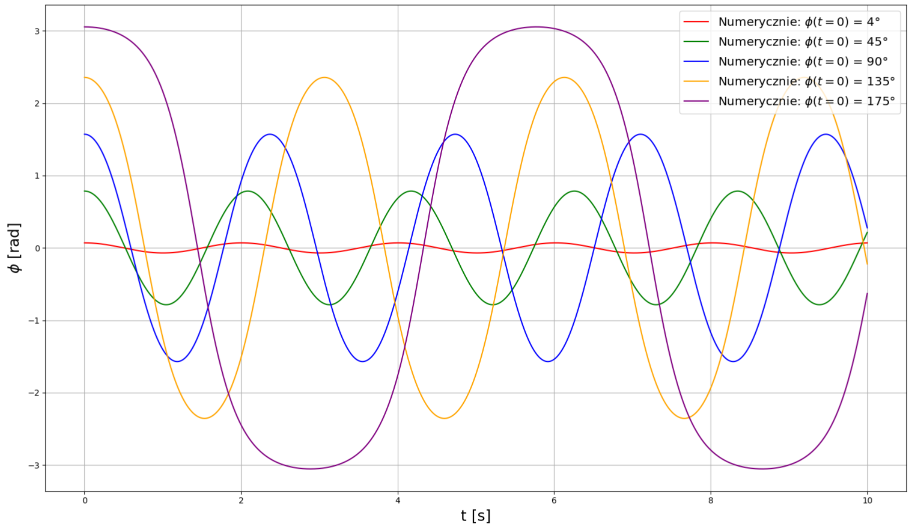


Rysunek 2: Wykres przedstawiający zależność wychylenia $\phi(t)$ dla metody RK4 oraz rozwiązania analitycznego

Analizując dane na rysunku 2 możemy zauważyć iż wyniki uzyskane za pomocą metody numerycznej RK4 jak i rozwiązania analitycznego pokrywają się. Wnioskujemy stąd iż, pomijając niedokładności związane z przyjętym wcześniej uproszczeniem rozwiązania równania 1, metoda RK4 daje jakościowo bardzo dobre wyniki. Stąd można użyć jej do rozwiązania kolejnych problemów numerycznych.

5.2 Zadanie 2

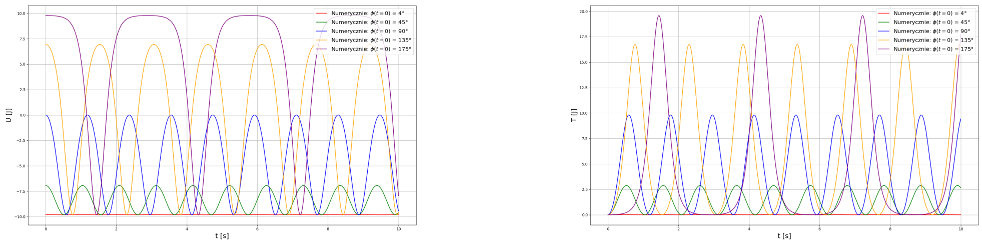
W kolejnej części zadania postanowiono wykorzystać przedstawioną wyżej metodę RK4 do symulacji ruchu wahadła matematycznego dla kolejnych wartości wychyleń z położenia równowagi $\phi(t = 0)$: 4°, 45°, 90°, 135° i 175°. Zadane wartości wprowadzono do programu, a zebrane dane przedstawiono na wykresach poniżej.



Rysunek 3: Wykres przedstawiający zależność wychylenia z położenia równowagi $\phi(t)$ dla różnych $\phi(t = 0)$

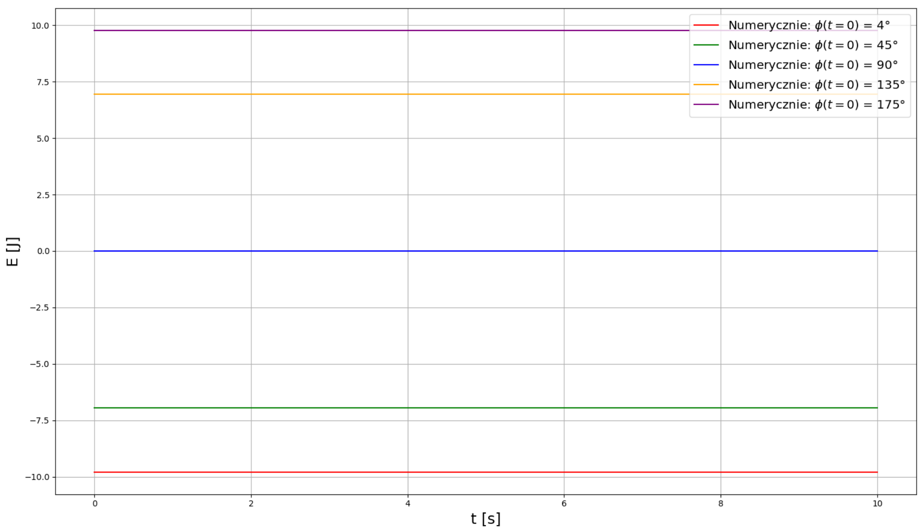
Analizując rysunek 3 zauważamy iż większe początkowe wychylenie z położenia równowagi skutkuje większą amplitudą drgań. Na wykresie zauważamy ograniczoną liczbę pełnych okresów drgań, ale pomimo tego możemy stwierdzić iż drgania nie gasną. Nie zadaliśmy żadnych oporów ruchu, a symulacja to potwierdza. Zauważamy jednak iż okres drgań zmienia się wraz ze zmianą początkowego wychylenia z położenia równowagi. Zostanie to zbadane w dalszej części zadania.

Kolejno wykorzystując wzór 3 oraz zebrane dane wykonano wykresy energii kinetycznej, potencjalnej oraz całkowitej wahadła.



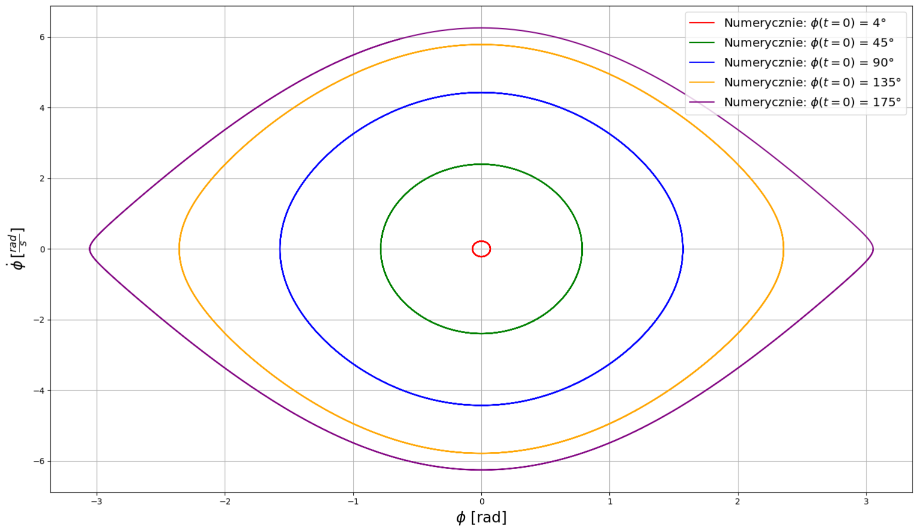
(a) Wykres $U(t)$ (b) Wykres $T(t)$

Rysunek 4: Wykresy przedstawiające zależność energii potencjalnej i kinetycznej układu w funkcji czasu dla różnych $\phi(t = 0)$



Rysunek 5: Wykres przedstawiający zależność energii całkowitej układu $E(t)$ dla różnych $\phi(t = 0)$

Analizując wykresy na rysunku 4 dochodzimy do wniosku iż układ nie traci ani energii kinetycznej ani energii potencjalnej. Oznacza to iż metoda numeryczna jest dobrej jakości i popełniane błędy nie wpływają poważnie na zaburzenie wyników.
Wykres 5 pokazuje iż energia całkowita układu jest zachowana co odpowiada przyjętym założeniom i zasadzie zachowania energii mechanicznej. Zauważamy też iż wychylenie początkowe ze stanu równowagi $\phi(t = 0)$ ma wpływ na energię całkowitą układu.
Kolejno wykorzystując zebrane dane postanowiono sporządzić wykres fazowy $\vec{Z(t)} = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$. Wykres przedstawiono na rysunku 6.

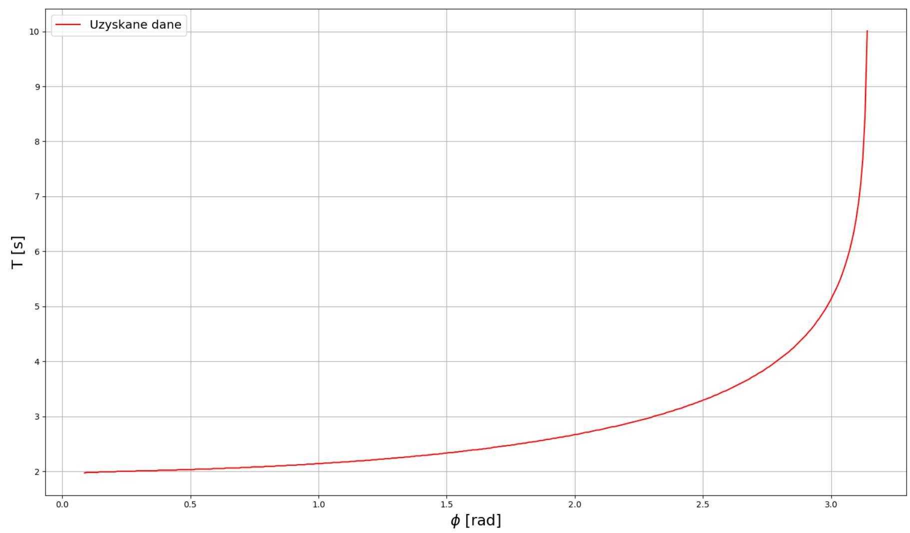


Rysunek 6: Wykres fazowy $\vec{Z(t)} = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$ dla różnych $\phi(t = 0)$

Przedstawiony na rysunku 6 wykres fazowy przedstawia mody drgań dla poszczególnych początkowych wychyleń z położenia równowagi $\phi(t = 0)$ a przez to różnych energii. Krzywe przedstawione na rysunku są zamknięte przez co zauważamy iż wahadło wykonuje drgania. Energia wahadła jest na tyle mała iż drgania utrzymują się w danej wnęce potencjału.

5.3 Zadanie 3

W kolejnej części zadania postanowiono zbadać zależność długości okresu drgań od początkowego wychylenia z położenia równowagi $\phi(t = 0)$. Dla małych wychyleń przyjęto warunki ruchu harmonicznego, którego cechą charakterystyczną jest niezależność długości okresu od wychylenia początkowego. Ale w ogólności model wahadła matematycznego nie jest opisywany ruchem harmonicznym. W celu zbadania tego zjawiska wykorzystano dane symulacyjne z metody RK4. Obliczenia przeprowadzono na zakresie od 5° do ∼180°. Wyniki przedstawiono na wykresie 7.



Rysunek 7: Wykres zależności długości okresu T od $\phi(t = 0)$

Analizując rysunek 7 zauważamy iż rzeczywiście dla małych kątów krzywa narasta bardzo powoli, jednak dla wychyleń zbliżających się do kąta półpełnego stromizna krzywej gwałtownie rośnie.

6 Podsumowanie

Podsumowując w trakcie wykonywania zadań z tego laboratorium zapoznano się z modelem wahadła matematycznego ze stałą długością. Poznano równanie 1 opisujące ruch wahadła matematycznego. Stosując przybliżenie dla małych kątów rozwiązano równanie 1 analitycznie uzyskując wzór 4.
Następnie poznano metodę RK4 służącą do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Zaimplementowano ją w programie komputerowym własnego autorstwa. Następnie zamieniono równanie 1 na układ RRZ pierwszego rzędu.
Kolejno korzystając z programu komputerowego oraz wzoru 4 wraz z metodą RK4 dokonano sprawdzenia jakości wyników zwracanych przez zastosowaną metodę numeryczną. Po stwierdzeniu poprawności uzyskanych wyników przystąpiono do kolejnych części ćwiczenia.
Następnie dla różnych zadanych wartości $\phi(t = 0)$ sporządzono wykresy:

- Wychylenia z położenia równowagi od czasu: $\phi(t)$ - rysunek 3
- Energi potencjalnej, kinetycznej i całkowitej układu od czasu - rysunki 4 oraz 5
- Wykres fazowy $\vec{Z(t)} = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$ - rysunek 6

Analiza zebranych danych pokazała iż zastosowana metoda daje zadowalającej jakości wyniki. Energia układu jest zachowana i nie zmienia się na skutek propagującego błędu numerycznego. Obserwacja wykresów pokazała m. in. iż okres zależy od początkowego wychylenia z położenia równowagi oraz iż energia wahadła nie pozwala drganiom opuścić zadanej wnęki potencjału (wahadło wykonuje wahnięcia, kulka nie zatacza okręgów).

Kolejno postanowiono zbadać zależność okresu drgań wahadła od początkowego wychylenia z położenia równowagi. Wyniki przedstawiono na rysunku 7. Stwierdzono iż w rzeczywistości założenie harmoniczności drgań wahadła matematycznego jest właściwe jedynie dla małych początkowych wychyleń z położenia równowagi. Z kolei dla dużych amplitud, zdążających do 180° krzywa rośnie bardzo stromo, niemal pionowo.
Reasumując wykonano wszystkie wymagane w ramach ćwiczenia zadania i zdobyto niezbędne umiejętności pozwalające na ich wykonanie.