

Modelowanie pola elektrycznego i magnetycznego obracającej się naładowanej sfery

Paweł Lipiór

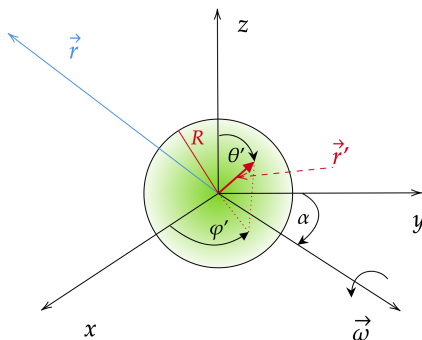
1 czerwca 2020

1 Wstęp

Tematem odbytych zajęć laboratoryjnych było zastosowanie komputerowych metod obliczeniowych do zamodelowania pola elektrycznego i magnetycznego obracającej się naładowanej sfery. W tym celu wykorzystano zasadę superpozycji w postaci rozwiązań numerycznych. Kolejno wyznaczono wykres konturowy potencjału elektrycznego oraz wykresy wektorowe pola elektrycznego i magnetycznego. Następnie dokonano analizy wygenerowanych rysunków i porównano otrzymane wyniki ze spodziewanymi rozwiązaniami.

2 Wstęp teoretyczny

Podczas trwania zajęć laboratoryjnych wykorzystano zasadę superpozycji do zamodelowania pola elektrycznego oraz pola magnetycznego obracającej się naładowanej sfery. Schemat poglądowy takiej sfery przedstawia rysunek. 1



Rysunek 1: Schemat naładowanej sfery. Środek sfery znajduje się w początku układu współrzędnych. Promień sfery wynosi R . Sfera obraca się z prędkością kątową ω wzdłuż osi w płaszczyźnie xy .

Na powierzchni sfery znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej σ . Środek sfery o promieniu R zaczepiony jest w środku układu współrzędnych. Sfera obraca się wzdłuż osi w płaszczyźnie xy z prędkością kątową $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, 0]$.

3 Realizacja zasady superpozycji metodami numerycznymi.

Gęstość ładunku na powierzchni sfery definiujemy za pomocą delty Diraca:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{R})$$

Ze względu na symetrię układu wprowadzamy współrzędne sferyczne:

$$\vec{r} \rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \cos \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \vec{R}' \rightarrow \begin{cases} R'_x = R \sin \theta' \sin \phi' \\ R'_y = R \sin \theta' \cos \phi' \\ R'_z = R \cos \theta' \end{cases}$$

Na powierzchni sfery wprowadzamy siatkę węzłów:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\pi}{N} \\ \Delta\phi &= \frac{2\pi}{M} \\ \theta &\rightarrow \theta_i = \Delta\theta \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \\ \phi &\rightarrow \phi_j = \Delta\phi \cdot j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

3.1 Potencjał pola elektrycznego

Korzystając z zasady superpozycji definiujemy potencjał pola elektrycznego w punkcie przestrzeni danym wektorem wodzącym \vec{r} :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\inf} dr' \frac{\sin \theta' r'^2 \sigma \delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sin \theta' R^2 \sigma}{|\vec{r} - \vec{R}'|} \quad (1) \end{aligned}$$

Całkowanie wyznaczono numerycznie korzystając z metody kwadratur oraz wzoru całkowego paraboli. Całkę 1 zastępujemy sumowaniem:

$$V(\vec{r}) = \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\phi}{3} \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|} \quad (2)$$

Współczynniki a_i oraz b_j określamy za pomocą formuły:

$$a_i \rightarrow \begin{cases} a_i = 1 & \text{dla } i = 0 \vee i = N \\ a_i = 4 & \text{i nieparzyste} \\ a_i = 2 & \text{i parzyste} \end{cases} \quad b_j \rightarrow \begin{cases} b_j = 1 & \text{dla } j = 0 \vee j = M \\ b_j = 4 & \text{j nieparzyste} \\ b_j = 2 & \text{j parzyste} \end{cases}$$

3.2 Natężenie pola elektrycznego

Korzystając z zasady superpozycji wyznaczamy natężenie pola elektrycznego w punkcie przestrzeni zadany wektorem wodzącym \vec{r} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R^2 \sigma \sin \theta' (\vec{r} - \vec{R}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^2} \quad (3)$$

Całkę 3 zastąpiono sumowaniem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\phi}{3} \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i (\vec{r} - \vec{R}'_{ij})}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \quad (4)$$

3.3 Indukcja pola magnetycznego

Naładowana obracająca się sfera generuje prąd, płynący prąd jest źródłem pola magnetycznego. Korzystając z zasady superpozycji wyznaczamy indukcję pola magnetycznego w punkcie przestrzeni zadany wektorem wodzącym \vec{r} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'$$

Gęstość prądu $\vec{j}(\vec{r}')$ wyznaczamy jako:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}' = \sigma \delta(\vec{r}' - \vec{R}) \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Wstawiamy gęstość prądu do równania na indukcję pola $\vec{B}(\vec{r})$ i całkujemy po zmiennej radialnej:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sigma R^2 \sin \theta' (\vec{r} - \vec{R}') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|^3} \quad (5)$$

Całkę 5 zastąpiono sumowaniem:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\Delta\theta}{3} \frac{\Delta\phi}{3} \frac{\sigma R^2 \mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_i b_j \frac{\sin \theta'_i (\vec{r} - \vec{R}'_{ij}) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \quad (6)$$

4 Przeprowadzenie obliczeń

Do sporządzenia modelu pola elektrycznego i magnetycznego obracającej się naładowanej kuli wykorzystano własnościowy program komputerowy wykorzystujący metodę opisaną w punkcie powyżej. Przyjęto następujące parametry symulacji:

- $\mu_0 = 1$
- $\epsilon_0 = 1$
- $R = 1$
- $\sigma = 1$
- $N = 201$

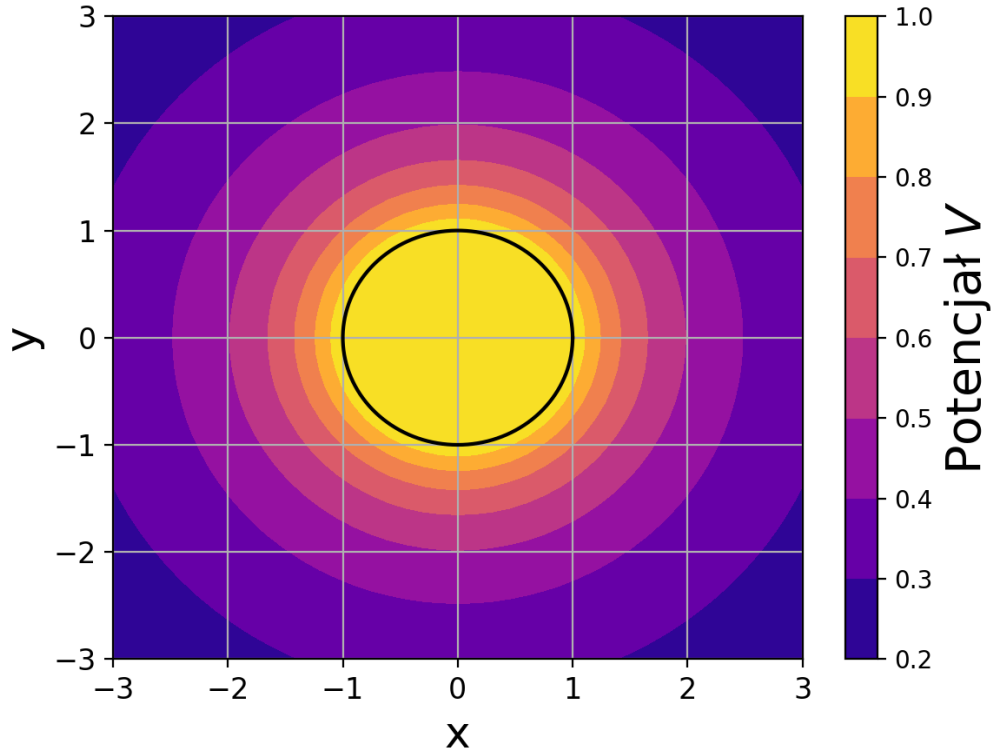
- $M = 201$
- $\Delta\theta = \frac{\pi}{N}$
- $\Delta\phi = \frac{2\pi}{M}$
- $\omega = 1$
- $\vec{\omega} = [\omega \sin \alpha, \omega \cos \alpha, 0]$

Ponadto zdefiniowano wektor wodzący $\vec{r} = [x, y, 0]$, gdzie $x \in [-L, L]$ oraz $y \in [-L, L]$ dla $L = 3.0$ wraz z krokiem $\Delta x = \Delta y = \frac{L}{K}$. Jako K przyjęto $K = 41$.

5 Wyniki symulacji

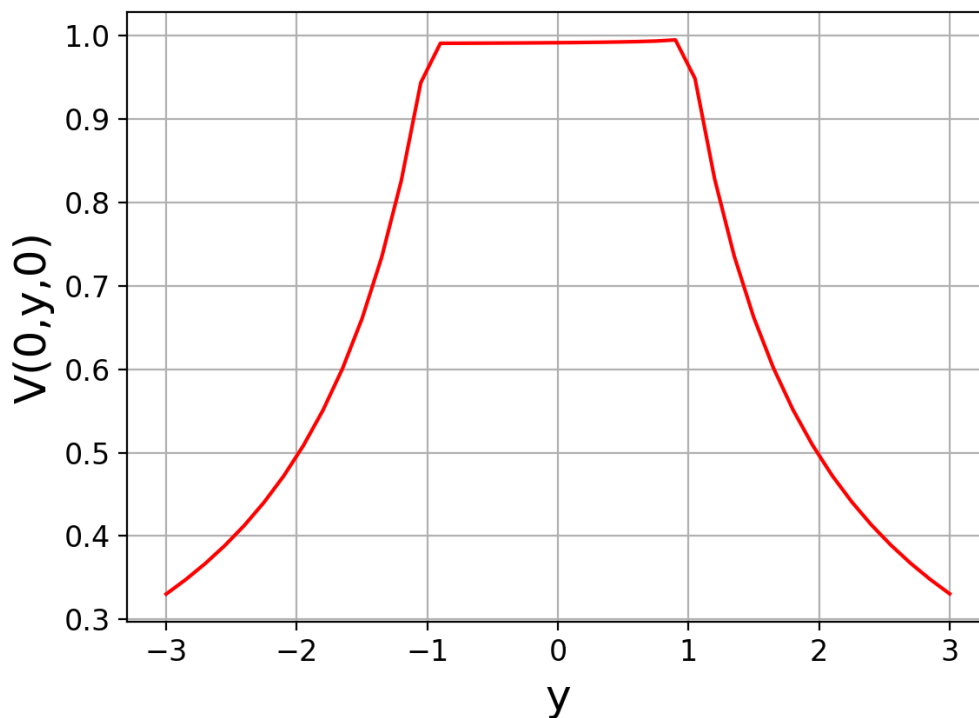
5.1 Potencjał pola

Za pomocą własnego programu komputerowego dokonano modelowania pola potencjalnego $V(\vec{r})$ generowanego przez obracającą się naładowaną sferę. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: Wykres konturowy pola potencjalnego generowanego przez naładowaną obracającą się sferę. Na wykresie zaznaczono także obrys powierzchni sfery w postaci okręgu o promieniu R .

Ponadto wygenerowano wykres przekroju potencjału $V(\vec{r})$ na powierzchni xz . Wykres $V(0, y, 0)$ przedstawiono na rysunku 3.

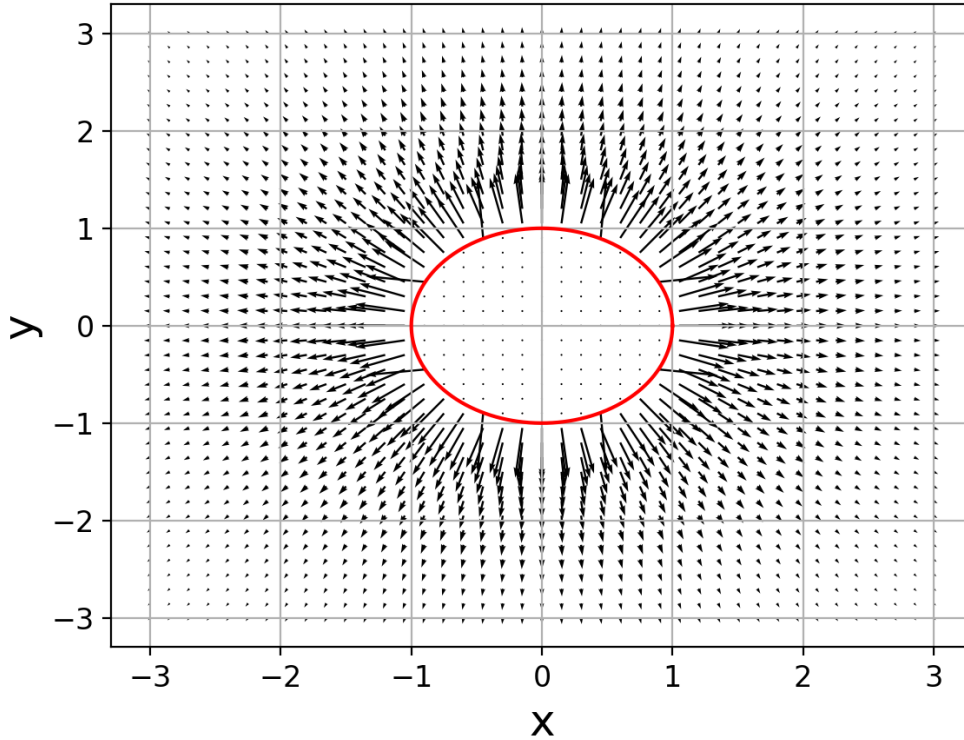


Rysunek 3: Wykres przekroju potencjału $V(0, y, 0)$ generowanego przez naładowaną obracającą się sferę.

Dokonując analizy wykresu 2 stwierdzamy, iż potencjał pola elektrycznego wewnątrz naładowanej sfery jest stały i wynosi $V = 1$. Poza obszarem wewnątrz sfery potencjał pola elektrycznego spada wraz z kwadratem odległości. Wykres 3 potwierdza te wnioski. Dla wartości $y \in [-1, 1]$ potencjał przyjmuje wartość stałą. Poza tym obszarem potencjał pola elektrycznego maleje jak $\frac{1}{y^2}$. Otrzymane wyniki są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Prawo Gaussa dla elektryczności stwierdza iż, dla obszaru ograniczonego powierzchnią Gaussa wewnątrz którego nie ma ładunku elektrycznego pole elektryczne zanika. Brak pola elektrycznego oznacza stały potencjał pola elektrycznego, co zaobserwowano na otrzymanych wykresach.

5.2 Pole elektryczne

Za pomocą własnego programu komputerowego dokonano modelowania pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r})$ generowanego przez obracającą się naładowaną sferę. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 4. Długości wektorów są proporcjonalne do wielkości natężenia pola elektrycznego w danym punkcie \vec{r} .

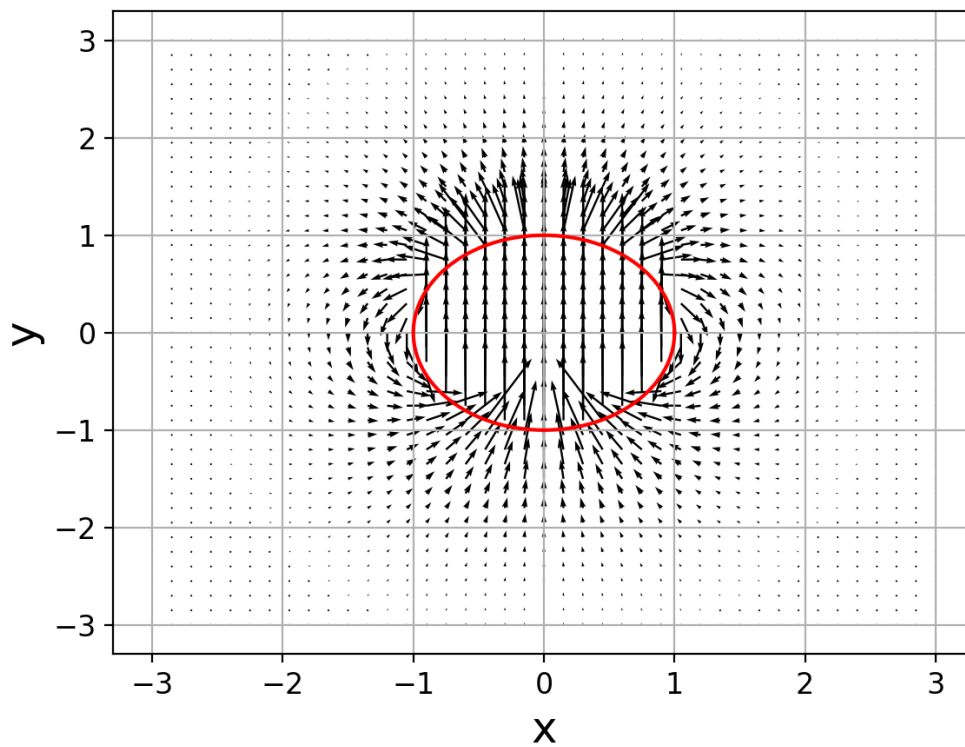


Rysunek 4: Wykres w postaci wektorów natężenia pola elektrycznego generowanego przez naładowaną obracającą się sferę. Na wykresie zaznaczono także obrys powierzchni sfery w postaci okręgu o promieniu R .

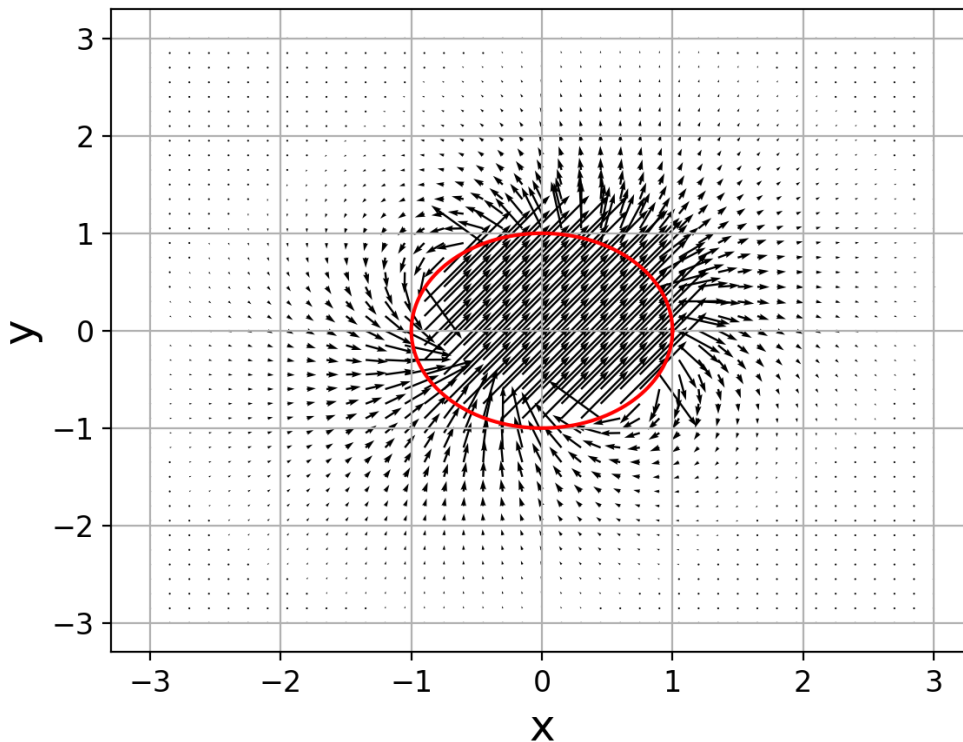
Dokonując analizy wykresu pola wektorowego 4 stwierdzamy, iż pole elektryczne generowane przez obracającą się naładowaną sferę zanika w obszarze ograniczonym naładowaną powierzchnią sfery. Poza nim pole rozchodzi się w sposób promienisty jak od ładunku punktowego. Otrzymane wyniki są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi na podstawie prawa Gaussa dla elektryczności, które głosi iż w obszarze ograniczonym przez powierzchnię Gaussa, gdzie nie występują ładunki elektryczne pole elektryczne zanika.

5.3 Pole magnetyczne

Za pomocą własnego programu komputerowego dokonano modelowania pola magnetycznego $\vec{B}(\vec{r})$ generowanego przez obracającą się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ naładowaną sferę. Oś obrotu sfery leży w płaszczyźnie xy i jest zadana poprzez kąt α . Symulacji dokonano dla wartości kąta $\alpha = 0$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach 5 oraz 6. Długości wektorów są proporcjonalne do wielkości indukcji pola magnetycznego w danym punkcie \vec{r} .



Rysunek 5: Wykres w postaci wektorów indukcji pola magnetycznego generowanego przez naładowaną obracającą się sferę dla $\alpha = 0$. Na wykresie zaznaczono także obrys powierzchni sfery w postaci okręgu o promieniu R .



Rysunek 6: Wykres w postaci wektorów indukcji pola magnetycznego generowanego przez naładowaną obracającą się sferę dla $\alpha = \frac{\pi i}{4}$. Na wykresie zaznaczono także obrys powierzchni sfery w postaci okręgu o promieniu R .

Analizując wykresy 5 oraz 6 dochodzimy do wniosku, iż obracając się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ naładowana powierzchniowo sfera generuje pole magnetyczne. Pole magnetyczne jest, tak jak zakładano, bez źródłowe, linie pola magnetycznego do którego styczne są wektory indukcji magnetycznej, są zamknięte. Pole magnetyczne generowane przez obracającą się naładowaną sferę przypomina to generowane przez magnes sztabkowy. Linie pola magnetycznego wewnątrz sfery są do siebie równoległe, co jest kolejnym potwierdzeniem iż wewnątrz sfery nie występuje pole elektryczne.

Rysunek 6 potwierdza iż, zmiana kąta osi obrotu sfery powoduje zmianę kąta skierowania wektora indukcji magnetycznej wewnątrz sfery. Wyniki te są zgodne z przewidywaniami.

6 Podsumowanie

W trakcie sporządzania projektu zapoznano się z zastosowaniem zasady superpozycji dla rachunków numerycznych.

Na powierzchni sfery zdefiniowano siatkę węzłów i za pomocą metody złożenia dwóch kwadra-

tur i metody całkowania parabolicznego wyznaczono numerycznie odpowiednie całki realizujące zasadę superpozycji.

Dokonano implementacji opisanych metod do własnościowego programu komputerowego. Za jego pomocą wygenerowano wykresy obrazujące rozkład pola potencjalnego, elektrycznego oraz magnetycznego generowanego przez obracającą się naładowaną sferę.

Dokonano analizy wygenerowanych wykresów i porównano je z przewidywaniami teoretycznymi.

Reasumując, wykonano wszystkie zapisane w instrukcji zadania i zdobyto umiejętności pozwalające na ich wykonanie.

7 Źródła

1. Instrukcja do zajęć laboratoryjnych "Projekt 6: modelowanie pola elektrycznego i magnetycznego obracającej się naładowanej sfery." dr hab inż. Tomasz Chwiej