

Symulacja ruchu cząstki w polu magnetycznym

Paweł Lipiór

2 maja 2020

1 Wstęp

Tematem odbytych zajęć laboratoryjnych było zastosowanie komputerowych metod obliczeniowych do symulacji ruchu cząstki w jednorodnym polu magnetycznym. Zapoznano się z metodą RK4 służącą do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zebrane wyniki przedstawiono na wykresach. Zbadano rozwiązania dla różnych warunków początkowych.

2 Wstęp teoretyczny

2.0.1 Równania ruchu

Podczas zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było zapoznanie się z ruchem cząstki w jednorodnym polu magnetycznym.

Lagranżjan zdefiniowany we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{m} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Za jego pomocą po przejściu do współrzędnych cylindrycznych z osią z zgodną z kierunkiem pola \vec{B} otrzymujemy funkcję Hamiltona:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) - \frac{qB}{2m} p_\phi + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \quad (2)$$

Dzięki zapisaniu funkcji Hamiltona możemy w łatwy sposób wyodrębnić równania ruchu:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2} - \frac{qB}{2m} \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4m} \\ \dot{p}_\phi &= 0 \\ \dot{p}_z &= 0 \end{aligned}$$

Otrzymujemy układ równań różniczkowych drugiego rzędu.

Energia całkowita cząstki jest co do wartości równa Hamiltonianowi.

2.1 Współrzędne cylindryczne i kartezjańskie

W trakcie obliczeń posługujemy się cylindrycznym układem współrzędnych. Jeśli chcemy przejść do układu kartezjańskiego dokonujemy transformacji:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \cos \phi \\y &= r_0 \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

2.2 Warunki początkowe

Warunki początkowe stanowią o jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego. Możemy dostosować szczególne warunki brzegowe w zależności o przypadku, których chcemy zamodelować.

Szukamy rozwiązania ruchu cząstki po okręgu o promieniu r_0 i środku w punkcie początku układu współrzędnych.

w funkcji Hamiltona nie występuje współrzędna ϕ ale za to występuje stowarzyszony z nią pęd uogólniony. Stąd p_ϕ będzie całką ruchu:

$$\dot{p}_\phi = 0 \implies p_\phi = \text{const}$$

Jako iż $r_0 = \text{const}$ dostajemy dwa warunki:

$$\begin{aligned}\dot{r} = \frac{p_r}{m} = 0 &\implies p_r = 0 \\ \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^2} - \frac{q^2 B^2 r}{4m} = 0 &\implies p_\phi^2 = \frac{q^2 B^2 r^4}{4}\end{aligned}$$

Na podstawie warunku drugiego możemy określić p_ϕ :

$$p_\phi = \pm \frac{qBr^2}{2}$$

Z równania powyżej przyjmując pierwiastek dodatni i wstawiając do równania na $\dot{\phi}$ otrzymujemy $\dot{\phi} = 0$ co implikuje iż cząstka się nie porusza.

Z równania powyżej przyjmując pierwiastek ujemny i wstawiając do równania na $\dot{\phi}$ otrzymujemy $\dot{\phi} = -\frac{qB}{m}$ co implikuje iż cząstka porusza się w częstością cyklotronową $\omega_c = -\frac{qB}{m}$.

3 Metoda Rungego-Kutty 4-tego rzędu

Do rozwiązania układu równań ruchu można użyć metod numerycznych. Aby wyniki były zadowalającej jakości postanowiono użyć metody Rungego-Kutty czwartego rzędu. Cechuje się ona

błędem lokalnym na poziomie $O(\Delta t^5)$. Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{s}}{dt} &= f(t, \vec{s}) \\ \vec{k}_1 &= f(t_i, \vec{s}_i) \\ \vec{k}_2 &= f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_1}{2}) \\ \vec{k}_3 &= f(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_2}{2}) \\ \vec{k}_4 &= f(t_i + \Delta t, \vec{s}_i + \Delta t \vec{k}_3) \\ \vec{s}_{i+1} &= \vec{s}_i + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\end{aligned}$$

Podaną powyżej metodę zaimplementowano w programie komputerowym służącym do symulacji ruchu cząstki po powierzchni stożka w polu grawitacyjnym.

Jak można zauważyć metoda RK4 służy do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Ale możemy, w łatwy sposób, zamienić układ równań różniczkowych rzędu drugiego na układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Dokonujemy podstawienia:

$$\begin{aligned}s_0 &= r \\ s_1 &= \phi \\ s_2 &= z \\ s_3 &= p_r \\ s_4 &= p_\phi \\ s_5 &= p_z\end{aligned}$$

Następnie określamy ich pochodne:

$$\begin{aligned}\dot{s}_0 &= f(t_i, \vec{s}_i) = \frac{s_3}{m} \\ \dot{s}_1 &= f(t_i, \vec{s}_i) = \frac{s_4}{ms_0^2} - \frac{qB}{2m} \\ \dot{s}_2 &= f(t_i, \vec{s}_i) = \frac{s_5}{m} \\ \dot{s}_3 &= f(t_i, \vec{s}_i) = \frac{s_4^2}{ms_0^3} - \frac{q^2 B^2 s_0}{4m} \\ \dot{s}_4 &= f(t_i, \vec{s}_i) = 0 \\ \dot{s}_5 &= f(t_i, \vec{s}_i) = 0\end{aligned}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy numeryczną iteracją metody RK4 przyjmując zadane warunki początkowe.

4 Przeprowadzenie obliczeń

Do przeprowadzenia symulacji ruchu cząstki wykorzystano własny program obliczeniowy wykorzystujący opisaną powyżej metodę RK4. W obliczeniach przyjęto następujące warunki:

- $q = 1$
- $B = 1$
- $m = 1$
- $\omega_c = \frac{qB}{m}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$
- $N = 5000$ kroków czasowych
- $t_0 = 0$
- $\Delta t = 5 \cdot \frac{T}{N}$

Postanowiono wykonać symulację dla czterech różnych zestawów warunków początkowych. Stabilność energii cząstki w trakcie symulacji sprawdzono sporządzając wykres $E(t)$.

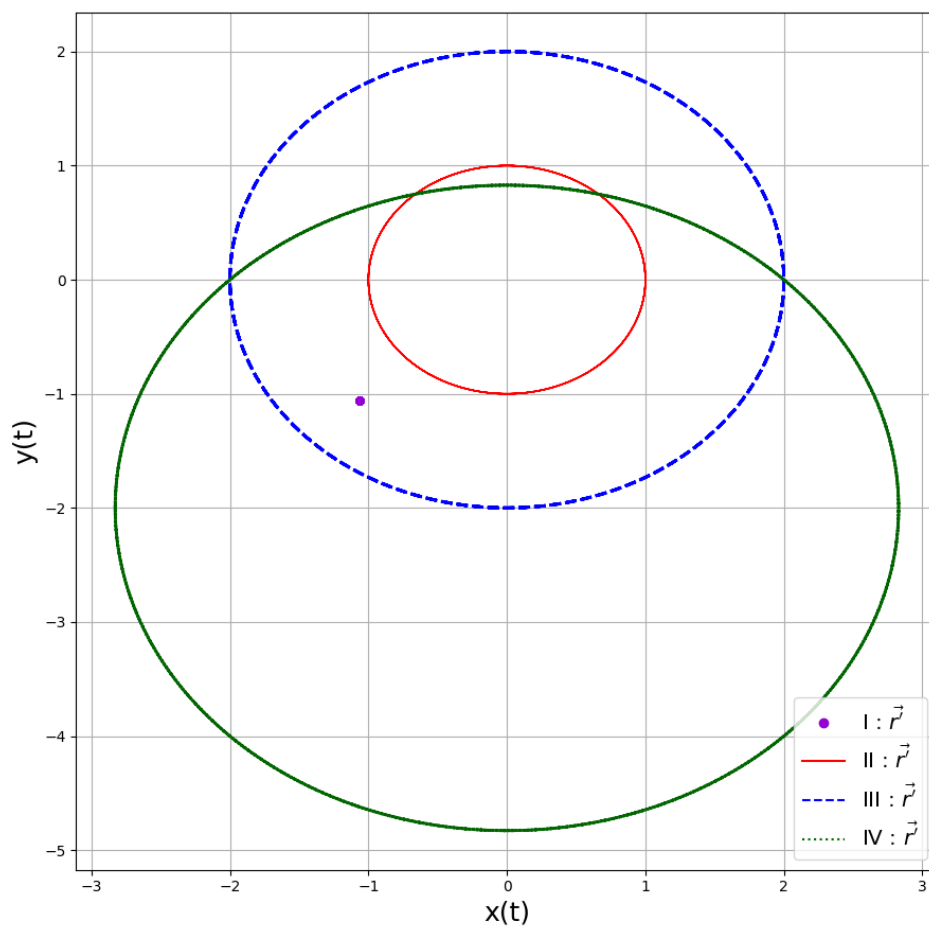
Ustalono warunki początkowe, które zapisano w tabeli 1.

Tabela 1: Tabela przedstawiająca warunki początkowe użyte w symulacji.

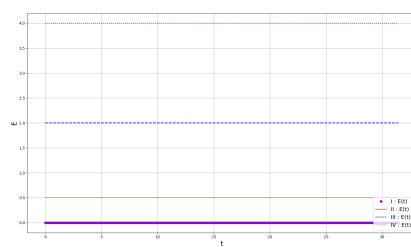
Symulacja	r_0	ϕ_0	z_0	p_{r0}	$p_{\phi 0}$	p_{z0}
I	1.5	1.25π	0	0	$\frac{qBr_0^2}{2}$	0
II	1	0	0	0	$-\frac{qBr_0^2}{2}$	0
III	2	0	0	0	$-\frac{qBr_0^2}{2}$	0
IV	2	0	0	2	$-\frac{qBr_0^2}{2}$	0

5 Wyniki symulacji

Przystąpiono do wykonania zadania. W tym celu za pomocą własnego programu komputerowego zawierającego metodę RK4 wygenerowano dane symulacyjne dla zadanych równań i warunków początkowych. Zebrane dane przedstawiono na wykresach na rysunku 1.

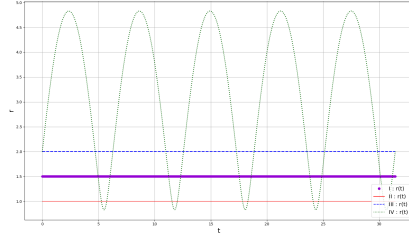


(a)

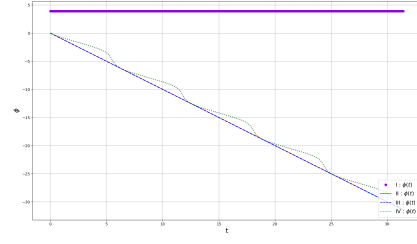


(b)

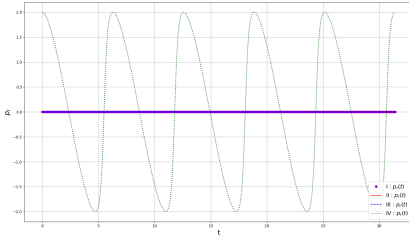
Rysunek 1: Wykresy obrazujące wyniki przeprowadzonej symulacji



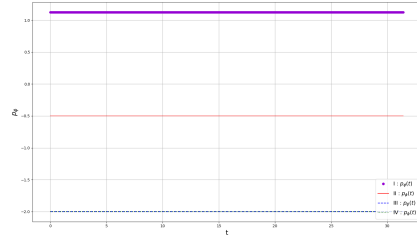
(c)



(d)



(e)



(f)

Rysunek 1: Wykresy obrazujące wyniki przeprowadzonej symulacji

Komentarz wyników

Przedstawione na wykresie 1a położenia cząstki w funkcji czasu jasno dowodzą, iż przyjęte dla poszczególnych przypadków I, II, III, IV warunki brzegowe zostały zdefiniowane poprawnie. Cząstki II i III krążą po okręgach ze środkiem w początku układu współrzędnych. Cząstka I nie porusza się, natomiast cząstka IV krąży po okręgu którego środkiem nie jest punkt $(0, 0)$.

Energia całkowita przedstawiona na rysunku 1b dla wszystkich cząstek nie zmienia się w czasie. Jest to dowód na potwierdzenie poprawności obliczeniowej symulacji. Cząstka I ma energię równą zero przez cały czas trwania symulacji ponieważ nie porusza się. Cząstka III ma 4 razy większą energię w porównaniu do cząstki II, przy czym cząstka III ma r_0 tylko 2 razy większe w porównaniu do cząstki II.

Wykres $r(t)$ zaprezentowany na rysunku 1c pokazuje iż cząstki I, II oraz III w trakcie ruchu zachowują stałą wartość r . Cząstka IV okresowo zmienia wartość r , ale jest to spowodowane punktem stałego odniesienia położenia cząstki względem punktu $(0, 0)$. Pęd uogólniony $p_r(t)$, zaprezentowany na wykresie 1e zachowuje się podobnie do $r(t)$ poza przesunięciem w fazie. Z założenia warunków początkowych ustaliliśmy, iż zmiana pędu p_r w czasie nie zachodzi, ale dla cząstki III zmiana ta podobnie jak dla $r(t)$ jest uzasadniona środkiem okręgu w położeniu innym niż $(0, 0)$.

Wykres $\phi(t)$ zaprezentowany na rysunku 1d pokazuje iż dla spoczywającej cząstki I nie zachodzi zmiana częstości, natomiast dla cząstek II i III poruszających się po okręgu w środku $(0, 0)$ częstość maleje liniowo. Dla cząstki IV obserwujemy zaś spadek, ale nie liniowy. Na wykresie

pojawiają się okresowo inne złożenia funkcji.

Wykres $p_\phi(t)$ zaprezentowany na rysunku 1d pokazuje iż pęd uogólniony, zgodnie z przyjętym założeniem jest stały.

6 Podsumowanie

W trakcie sporządzania projektu zapoznano się z modelem ruchu cząstki w jednorodnym polu magnetycznym. Używając współrzędnych cylindrycznych zapisano funkcję Hamiltona układu, która posłużyła to zapisania równań ruchu cząstki.

Rozważono wpływ warunków początkowych na wynik rozwiązania równań różniczkowych. Zaprezentowano kilka przypadków różnych warunków brzegowych implikujących różne rozwiązania równań.

Wykorzystano poznaną metodę numeryczną RK4 do rozwiązania układu równań różniczkowych. Zaimplementowaną ją we własnym programie obliczeniowym.

Wygenerowano wykresy ruchu cząstki oraz energii całkowitej cząstki. Po stwierdzeniu poprawnego działania metody dokonano analizy poszczególnych przypadków warunków początkowych.

Reasumując, wykonano wszystkie zapisane w instrukcji zadania i zdobyto umiejętności pozwalające na ich wykonanie.

7 Źródła

1. Instrukcja do zajęć laboratoryjnych "Projekt 3: ruch cząstki w polu magnetycznym." dr hab inż. Tomasz Chwiej
2. Instrukcja "Implementacja metody RK4." dr hab inż. Tomasz Chwiej