Metody relaksacyjne rozwiązywania równania Poissona. Sprawozdanie

Paweł Lipiór

21 maja 2020

1 Wstęp

W trakcie trwania zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było praktyczne zastosowanie poznanych metod numerycznych. Tym razem tematem zajęć były metody relaksacyjne rozwiązywania równania Poissona, w szczególności dla potencjału elektrostatycznego. W trakcie zajęć zrealizowano zadania:

- Wykonano procedurę relaksacji punktowej na siatce gęstości ładunku. Zbadano zbieżność rozwiązań równania Poissona dla różnych wartości parametru ω. Sporządzono wykres zbieżności rozwiązania równania. Wybrano optymalny parametr ω. Przedstawiono rozwiązanie równania.
- W celu weryfikacji wyników dokonano odwrócenia równania Poissona. Sporządzono wykres siatki gęstości ładunku i porównano z wartością na wejściu w punkcie powyżej.
- Wykonano procedurę relaksacji globalnej na siatce gęstości ładunku. Zbadano zbieżność rozwiązań równania Poissona dla różnych wartości parametru ω. Sporządzono wykres zbieżności rozwiązania równania. Wybrano optymalny parametr ω. Porównano zbieżność rozwiązań dla relaksacji punktowej i globalej dla optymalnych parametrów ω. Przedstawiono rozwiązanie równania. Sprawdzono poprawność rozwiązania poprzez odwrócenie równania Poissona.

2 Metoda obliczeń

Równanie Poissona przyjmuje postać:

$$\nabla^2 \phi = -\rho \tag{1}$$

gdzie ϕ to funkcja potencjału elektrostatycznego, a ρ gęstość ładunku.

Warunki początkowe i brzegowe

Przyjmujemy siatkę o wymiarach $(i, j) \in [-30, 30] \times [-30, 30]$, o gęstości równoważnej 1 tj. $\Delta x = \Delta y = 1$. Przyjmujemy, że brzeg siatki jest uziemiony tj. $\phi = 0$. Gęstość ładunku jest dana rozkładem:

$$\rho_{i,j} = 1, \quad \text{dla } (i,j) \in [-10,10] \times [-10,10]$$
$$\rho_{i,j} = 0, \quad \text{dla pozostałych punktów siatki}$$

Relaksacja punktowa

Przepis na relaksację punktowa odbywa się w sposób następujący: w pętli po i oraz j liczymy nową wartość potencjału $\phi_{i,j}$ według przepisu:

$$\phi_{i,j} := (1-\omega)\phi_{i,j} + \omega \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{i,j} dxdy}{4}$$

gdzie ω jest parametrem. W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy pełen obrót po pętli po i oraz j.

Relaksacja globalna

Przepis na relaksację punktowa odbywa się w sposób następujący: w pętli po i oraz j liczymy nową wartość potencjału $\phi_{i,j}$ według przepisu i zapisujemy go w nowej tablicy:

$$\phi'_{i,j} := (1-\omega)\phi_{i,j} + \omega \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{i,j} dxdy}{4}$$

gdzie ω jest parametrem.
Następnie podstawiamy:

$$\phi_{i,j} := \phi'_{i,j}$$

W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy dwa pełne obroty po pętli po i oraz j. Dzieje się z uwagi na konieczność nadpisania tablicy po obliczeniu nowych wartości potencjału.

Całka działania

Jako wskaźnik zbieżności metody iteracyjnej posługujemy się wartością całki działania zdefiniowanej następująco:

$$a = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho\phi \right\} dxdy$$

gdzie za pochodne przyjmiemy ilorazy różnicowe:

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$
$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

Sprawdzenie rozwiązania

W celu sprawdzenia poprawności rozwiązania dokonano odwrócenia równania Poissona:

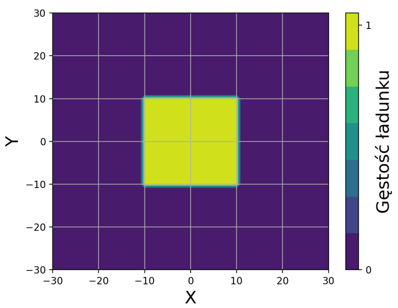
$$\rho = -\nabla^2 \phi \tag{2}$$

co w rachunku numerycznym przekłada się na przepis:

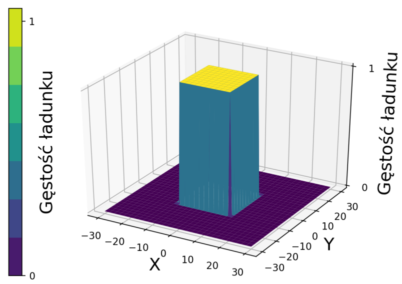
$$\rho_{i,j} = -\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j} - 4\phi_{i,j}}{\Delta x \Delta y}$$

3 Wykonanie zadań

Przystąpiono do wykonania zadań. W tym celu napisano własny program komputerowy realizujący zadane powyżej przepisy i korzystający z zadanych warunków początkowych i brzegowych na zdefiniowanej wcześniej siatce. Przed przystąpieniem do obliczeń postanowiono sporządzić wykresy rozkładu ładunku na siatce. Przedstawiono je na rysunkach 1a oraz 1b:



(a) Wykres konturowy rozkładu ładunku na siatce.



(b) Wykres konturowy rozkładu ładunku na siatce.

3.1 Zadanie 1

Przystąpiono do wykonania pierwszego zadania

4 Podsumowanie

5 Źródła

1 - Instrukcja do laboratorium prof. dr hab. inż. B. Szafran "Metody relaksacyjne dla równania Poissona."

2 - Wykład prof. dr hab. inż. B. Szafran "Równanie Poissona. Metody relaksacyjne. Metody wielosiatkowe."