

Metody relaksacyjne rozwiązywania równania Poissona. Sprawozdanie

Paweł Lipiór

21 maja 2020

1 Wstęp

W trakcie trwania zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było praktyczne zastosowanie poznanych metod numerycznych. Tym razem tematem zajęć były metody relaksacyjne rozwiązywania równania Poissona, w szczególności dla potencjału elektrostatycznego. W trakcie zajęć zrealizowano zadania:

- Wykonano procedurę relaksacji punktowej na siatce gęstości ładunku. Zbadano zbieżność rozwiązań równania Poissona dla różnych wartości parametru ω . Sporządzono wykres zbieżności rozwiązania równania. Wybrano optymalny parametr ω . Przedstawiono rozwiązanie równania.
- W celu weryfikacji wyników dokonano odwrócenia równania Poissona. Sporządzono wykres siatki gęstości ładunku i porównano z wartością na wejściu w punkcie powyżej.
- Wykonano procedurę relaksacji globalnej na siatce gęstości ładunku. Zbadano zbieżność rozwiązań równania Poissona dla różnych wartości parametru ω . Sporządzono wykres zbieżności rozwiązania równania. Wybrano optymalny parametr ω . Porównano zbieżność rozwiązań dla relaksacji punktowej i globalnej dla optymalnych parametrów ω . Przedstawiono rozwiązanie równania. Sprawdzono poprawność rozwiązania poprzez odwrócenie równania Poissona.

2 Metoda obliczeń

Równanie Poissona przyjmuje postać:

$$\nabla^2 \phi = -\rho \quad (1)$$

gdzie ϕ to funkcja potencjału elektrostatycznego, a ρ gęstość ładunku.

Warunki początkowe i brzegowe

Przyjmujemy siatkę o wymiarach $(i, j) \in [-30, 30] \times [-30, 30]$, o gęstości równoważnej 1 tj. $\Delta x = \Delta y = 1$. Przyjmujemy, że brzeg siatki jest uziemiony tj. $\phi = 0$. Gęstość ładunku jest dana

rozkładem:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j} &= 1, & \text{dla } (i,j) \in [-10,10] \times [-10,10] \\ \rho_{i,j} &= 0, & \text{dla pozostałych punktów siatki}\end{aligned}$$

Relaksacja punktowa

Przepis na relaksację punktową odbywa się w sposób następujący: w pętli po i oraz j liczymy nową wartość potencjału $\phi_{i,j}$ według przepisu:

$$\phi_{i,j} := (1 - \omega)\phi_{i,j} + \omega \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{i,j}}{4}$$

gdzie ω jest parametrem. W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy pełen obrót po pętli po i oraz j .

Relaksacja globalna

Przepis na relaksację punktową odbywa się w sposób następujący: w pętli po i oraz j liczymy nową wartość potencjału $\phi_{i,j}$ według przepisu i zapisujemy go w nowej tablicy:

$$\phi'_{i,j} := (1 - \omega)\phi_{i,j} + \omega \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \rho_{i,j}}{4}$$

gdzie ω jest parametrem.

Następnie podstawiamy:

$$\phi_{i,j} := \phi'_{i,j}$$

W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy dwa pełne obroty po pętli po i oraz j . Dzieje się z uwagi na konieczność nadpisania tablicy po obliczeniu nowych wartości potencjału.

Całka działania

Jako wskaźnik zbieżności metody iteracyjnej posługujemy się wartością całki działania zdefiniowanej następująco:

$$a = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \phi \right\} dx dy$$

gdzie za pochodne przyjmujemy ilorazy różnicowe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} &\approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial y} &\approx \frac{\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1}}{2\Delta y}\end{aligned}$$

Sprawdzenie rozwiązania

W celu sprawdzenia poprawności rozwiązania dokonano odwrócenia równania Poissona:

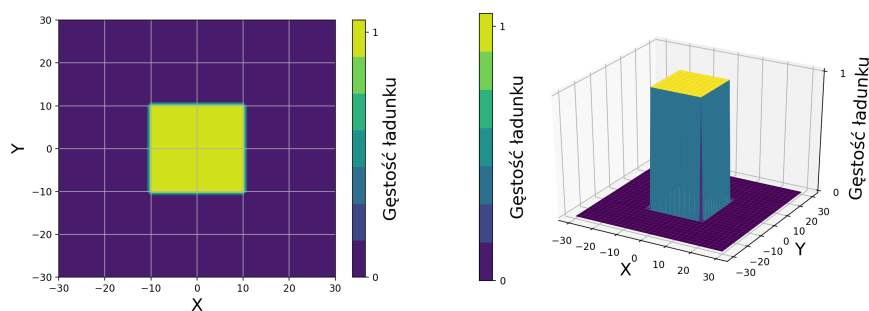
$$\rho = -\nabla^2 \phi \quad (2)$$

co w rachunku numerycznym przekłada się na przepis:

$$\rho_{i,j} = -\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j} - 4\phi_{i,j}}{\Delta x \Delta y}$$

3 Wykonanie zadań

Przystąpiono do wykonania zadań. W tym celu napisano własny program komputerowy realizujący zadane powyżej przepisy i korzystający z zadanych warunków początkowych i brzegowych na zdefiniowanej wcześniej siatce. Przed przystąpieniem do obliczeń postanowiono sporządzić wykresy rozkładu ładunku na siatce. Przedstawiono je na rysunkach 1a oraz 1b:



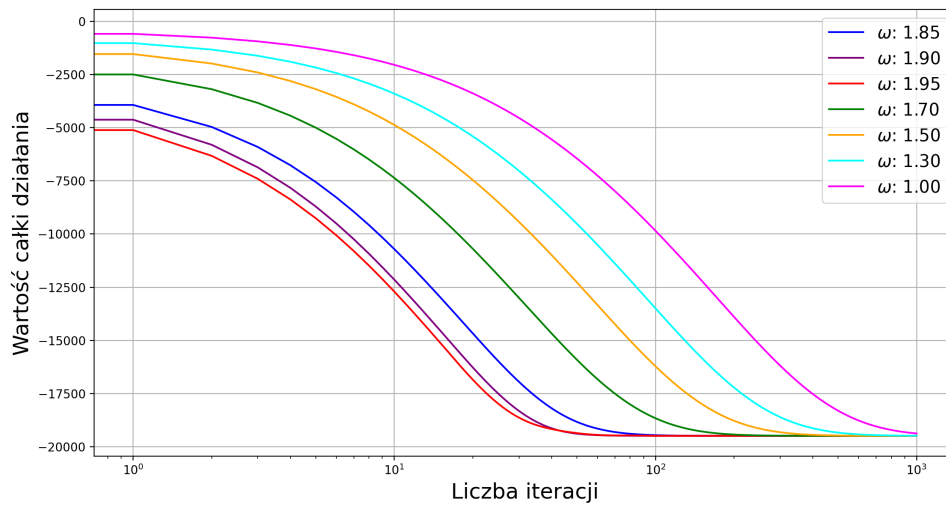
(a) Wykres konturowy rozkładu ładunku na siatce. (b) Wykres trójwymiarowy rozkładu ładunku na siatce.

Rysunek 1

Następnie przystąpiono do wykonywania rachunków.

3.1 Zadanie I

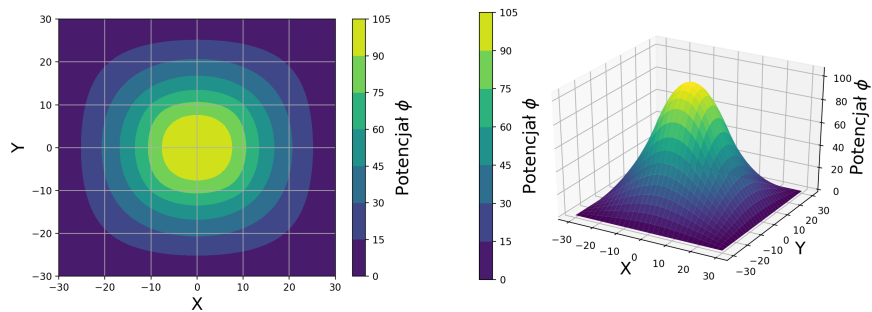
Przystąpiono do wykonania pierwszego zadania polegającym na wykorzystaniu relaksacji punktowej w celu znalezienia rozwiązania równania Poissona. W celu znalezienia optymalnej wartości ω dokonano kilku rachunków dla różnych wartości parametru ω . Doświadczalnie dowiedziono, iż dla $\omega > 2$ nie zachodzi zbieżność rozwiązania równania Poissona. w celu wybrania wartości optymalnej wybrano wartości parametru ω : $[1.85, 1.9, 1.95, 1.7, 1.5, 1.3, 1]$ i dla każdego z nich dokonano rachunku relaksacyjnego w pętli o iteracji na poziomie 10^3 razy. Wyniki tego porównania przedstawiono na rysunku 2:



Rysunek 2: Wykres zbieżności rozwiązania równania dla różnych wartości omega

Z wykresu 2 odczytujemy iż rachunek jest zbieżny najszybciej (dla najmniejszej liczby iteracji) dla parametru $\omega = 1.95$.

Dla takiej też wartości równanie zostało rozwiązane. Wyniki zaprezentowano na rysunkach 3a oraz 3b:

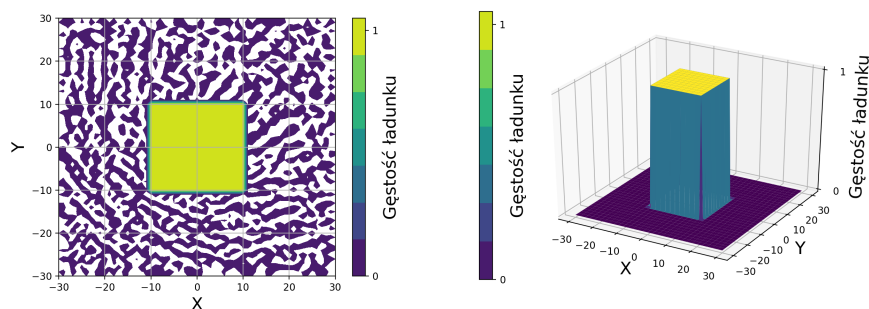


(a) Wykres konturowy rozkładu potencjału na siatce. (b) Wykres trójwymiarowy rozkładu potencjału na siatce.

Rysunek 3

3.2 Zadanie II

Przystąpiono do wykonania drugiego zadania, które polegało na sprawdzeniu poprawności rozwiązania zadania poprzedniego. W tym celu dokonano odwrócenia równania Poissona. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunkach 4a oraz 4b:



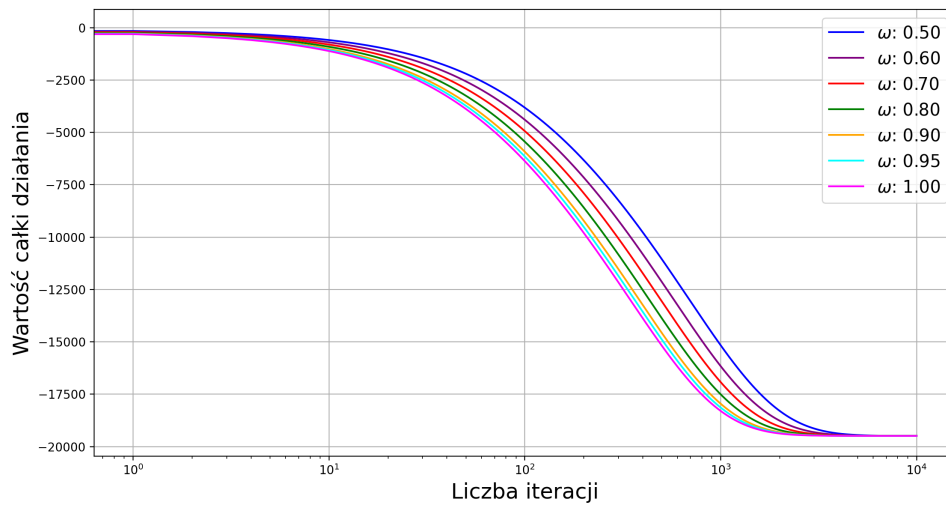
(a) Wykres konturowy rozkładu ładunku na siatce otrzymany poprzez odwrócenie dunksu na siatce otrzymany poprzez odwrócenie równania. (b) Wykres trójwymiarowy rozkładu ładunku na siatce otrzymany poprzez odwrócenie równania.

Rysunek 4

Dokonując porównania wyników uzyskanych z odwrócenia równania Poissona przedstawionych na rysunku 4 oraz warunków początkowych równania przedstawionych na rysunku 1 możemy stwierdzić iż rozwiązanie uzyskane w poprzednim zadaniu było poprawne. Wykresy są niemal identyczne. Jedyne na rysunku 4 punkty z zerową gęstością potencjału wykazują pewne anomalie (białe plamy na rysunku 4a).

3.3 Zadanie III

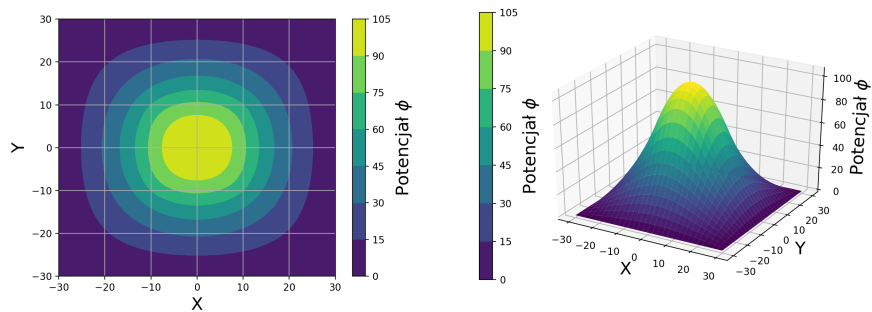
Przystąpiono do wykonania trzeciego zadania polegającym na wykorzystaniu relaksacji globalnej w celu znalezienia rozwiązania równania Poissona. W celu znalezienia optymalnej wartości ω dokonano kilku rachunków dla różnych wartości parametru ω . Doświadczalnie dowiedziono, iż dla $\omega > 1$ nie zachodzi zbieżność rozwiązania równania Poissona. w celu wybrania wartości optymalnej wybrano wartości parametru ω : $[0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 1]$ i dla każdego z nich dokonano rachunku relaksacyjnego w pętli o iteracji na poziomie 10^4 razy. Wyniki tego porównania przedstawiono na rysunku 5:



Rysunek 5: Wykres zbieżności rozwiązania równania dla różnych wartości omega

Z wykresu 5 odczytujemy iż rachunek jest zbieżny najszybciej (dla najmniejszej liczby iteracji) dla parametru $\omega = 1$.

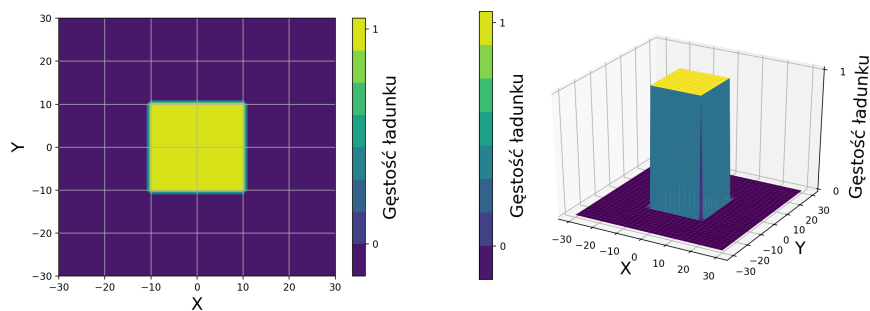
Dla takiej też wartości równanie zostało rozwiązane. Wyniki zaprezentowano na rysunkach 6a oraz 6b:



(a) Wykres konturowy rozkładu potencjału na siatce. (b) Wykres trójwymiarowy rozkładu potencjału na siatce.

Rysunek 6

Podobnie jak w zadaniu poprzednim dokonano weryfikacji poprawności rozwiązania równania Poissona poprzez jego odwrócenie. Wyniki tej operacji są zaprezentowane na rysunkach 7a oraz 7b:



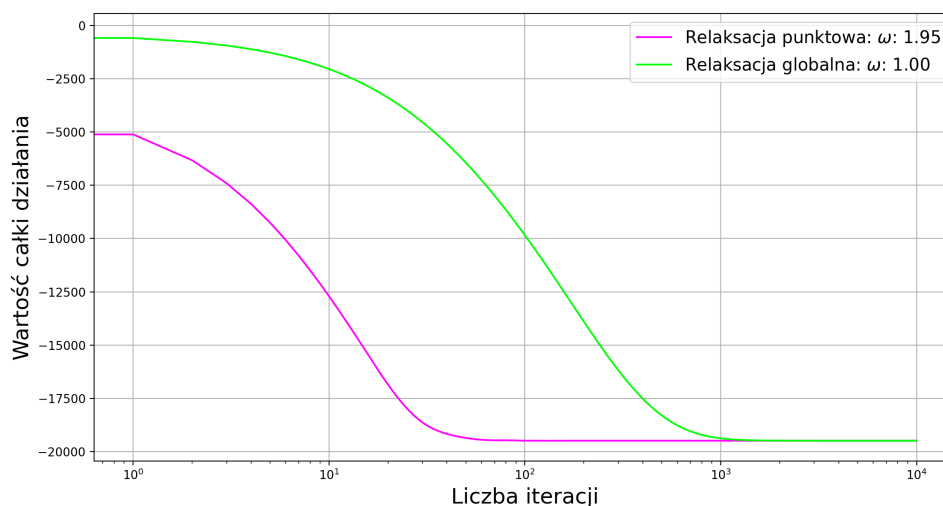
(a) Wykres konturowy rozkładu ładunku na siatce otrzymany poprzez odwrócenie równania. (b) Wykres trójwymiarowy rozkładu ładunku na siatce otrzymany poprzez odwrócenie równania.

Rysunek 7

Dokonując porównania wyników uzyskanych z odwrócenia równania Poissona przedstawionych na rysunku 7 oraz warunków początkowych równania przedstawionych na rysunku 1 możemy stwierdzić iż rozwiązanie uzyskane w poprzednim zadaniu było poprawne. Wykresy są niemal identyczne.

Porównanie szybkości zbieżności rachunku metodą relaksacji punktowej i globalnej

W celu dokonania porównania szybkości zbieżności rachunku metodą relaksacji punktowej i globalnej porównano szybkość zbieżności rachunku dla obu metod przyjmując optymalny dla nich parametr ω wyznaczony na podstawie rysunków 2 oraz 5. Dla każdego z nich dokonano rachunku relaksacyjnego odpowiednią metodą w pętli o iteracji na poziomie 10^4 razy. Wyniki tego porównania przedstawiono na rysunku 8:



Rysunek 8: Wykres porównawczy szybkości zbieżności rozwiązania dla obu metod relaksacyjnych.

Jak możemy odczytać z wykresu na rysunku 8 w tym przypadku metoda relaksacji punktowej osiąga zbieżność rozwiązania wyraźnie szybciej niż metoda relaksacji globalnej. Można zaryzykować stwierdzenie, iż tempo relaksacji punktowej jest dziesięciokrotnie szybsze niż relaksacji globalnej.

4 Podsumowanie

W trakcie zajęć zapoznano się z metodami relaksacji punktowej i globalnej równania Poissona. Zbadano zbieżność rozwiązań dla różnych wartości parametru ω i wybrano jego optymalną wartość. Zaprezentowano rozwiązanie równania, a następnie sprawdzono jego poprawność metodą odwrócenia równania. Dokonano porównania szybkości zbieżności rozwiązania obiema metodami. Wyciągnięto wnioski. Nabyto umiejętności związane z relaksacyjną metodą rozwiązywania równania Poissona.

5 Źródła

- 1 - Instrukcja do laboratorium prof. dr hab. inż. B. Szafran "Metody relaksacyjne dla równania Poissona."
- 2 - Wykład prof. dr hab. inż. B. Szafran "Równanie Poissona. Metody relaksacyjne. Metody wielosiatkowe."