Rozwiązywanie równań Newtona z automatyczną kontrolą błędu i doborem kroku czasowego.
Metoda jawnego schematu Eulera oraz metoda RK4
Sprawozdanie

Paweł Lipiór

3 kwietnia 2020

1 Wstęp

W trakcie trwania zajęć naszym zadaniem było zastosowanie w praktycznych obliczeniach poznanych metod numerycznych. W tym celu przystąpiliśmy do wykonania przydzielonych zadań obejmujących:

- Zastosowanie jawnego schematu Eulera do obliczenia toru komety.
- Rozwiązanie równań Newtona dla ruchu komety przy użyciu metody RK4.
- Automatyczny dobór kroku czasowego dla metody jawnego schematu Eulera.
- Automatyczny dobór kroku czasowego dla metody RK4.

Poruszanym problemem było ciało o parametrach ruchu zbliżonych do komety Halley'a.
Warunki początkowe:
$v_x(t=0) = 54600[\frac{m}{s}]$
$v_y(t=0) = 0[\frac{m}{s}]$
$x(t=0) = 0\,au$
$y(t=0) = 0.586\,au$

Stałe:
$G = 6.6741 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
$M = 1.989 \cdot 10^3 0\,kg$
$1au = 149\,597\,870\,700m$

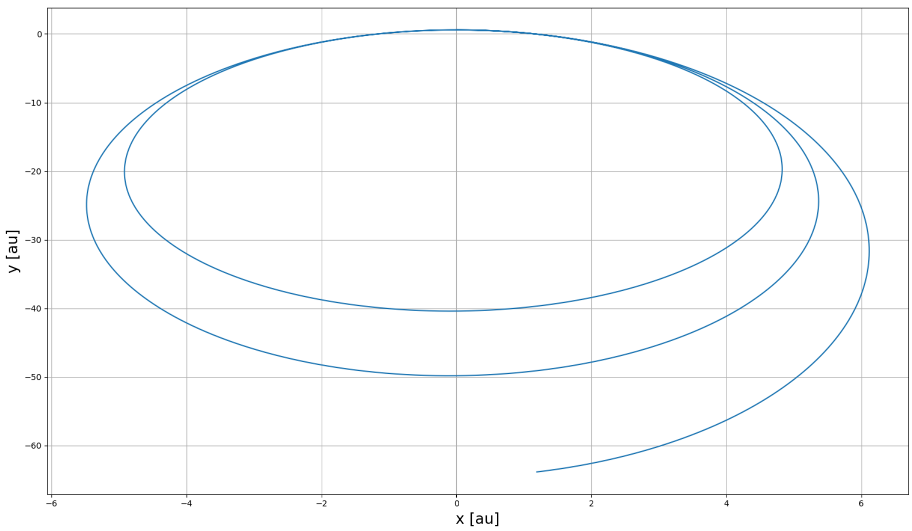
Za okres orbitalny wstępnie przyjęto $T = 100\,lat$. Ma to zastosowanie jedynie w celu nadania wszystkim obliczeniom takiego samego punktu końcowego.

Równania ruchu:

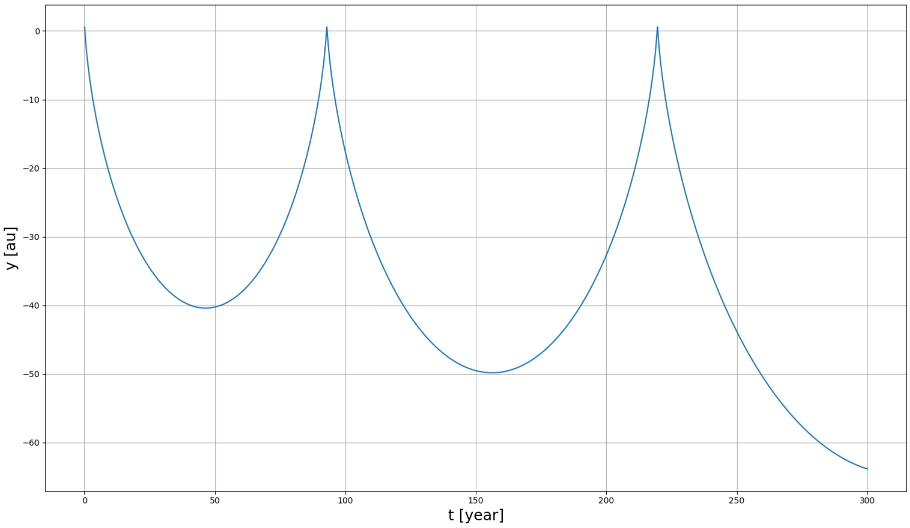
$$\frac{dx}{dt} = v_x$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -G\frac{M}{r^3}x = a_x$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -G\frac{M}{r^3}y = a_y$$

2 Jawny schemat Eulera

Wykorzystując jawny schemat Eulera dokonano obliczenia toru ruchu ciała opisanego powyżej.
Za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 1h$.
Obliczenia trwały: $t = 31.406594\,s$.
W celu zobrazowania uzyskanych wyników sporządzono wykresy: $y(x(t))$ oraz $y(t)$.



Rysunek 1: Wykres $y(x(t))$



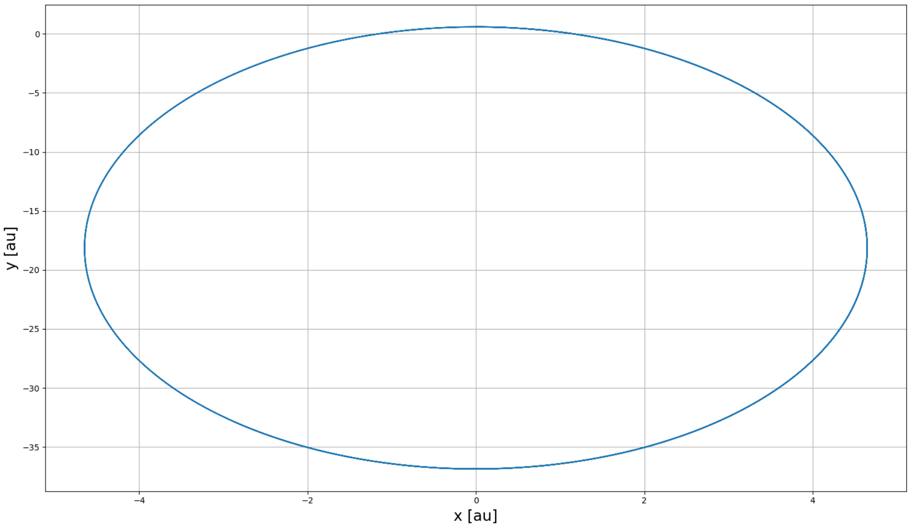
Rysunek 2: Wykres $y(t)$

Komentarz

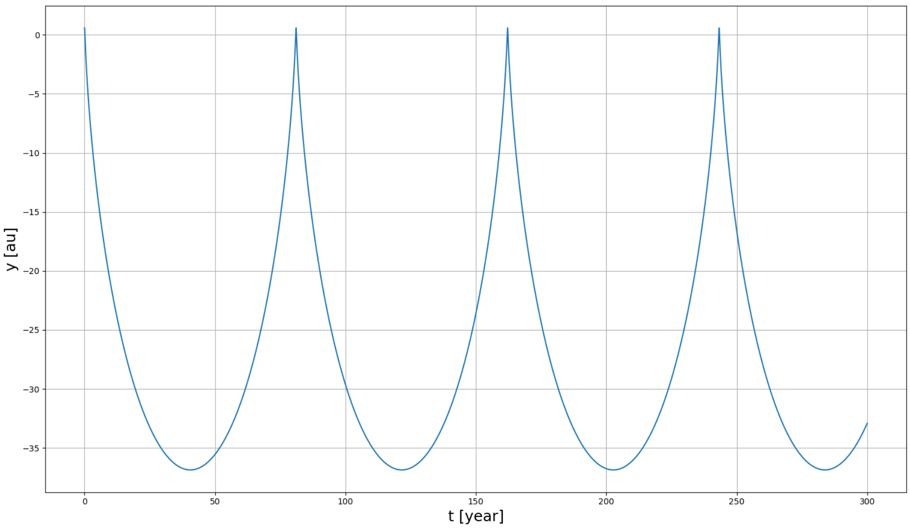
Powyższe wykresy pokazują iż dla tak dużego Δt jawny schemat Eulera nie daje zadowalających wyników. Z każdym okresem orbitalnym ciała oddala się ono od ustalonego toru ruchu. Popełnione błędy propagują się w czasie.

3 Metoda RK4

Wykorzystując metodę RK4 dokonano obliczenia toru ruchu ciała opisanego powyżej.
Za krok czasowy przyjęto $\Delta t = 1h$.
Obliczenia trwały: $t = 131.643545\, s$.
W celu zobrazowania uzyskanych wyników sporządzono wykresy: $y(x(t))$ oraz $y(t)$.



Rysunek 3: Wykres $y(x(t))$



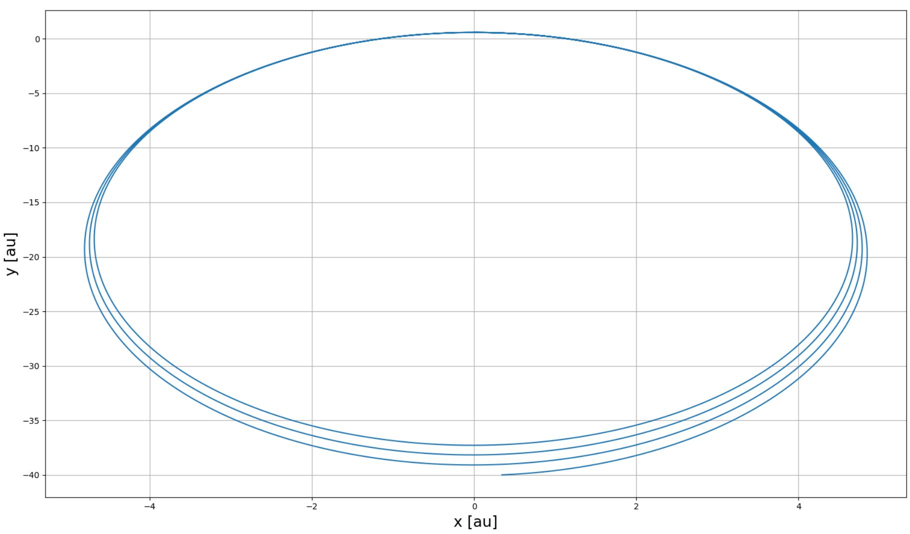
Rysunek 4: Wykres $y(t)$

Komentarz

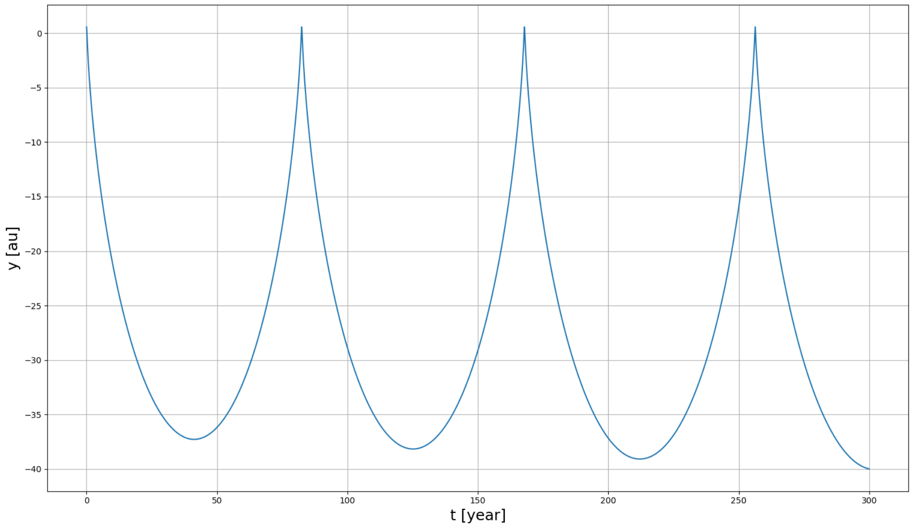
Powyższe wykresy pokazują iż dla przyjętego Δt metoda RK4 wydaje się zadowalająca. Analiza wykresów pokazuj iż tor ruchu ciała w każdym okresie orbitalnym pokrywa się z wcześniejszymi przebiegami, a przynajmniej błędy nie są łatwo zauważalne. Niestety sam czas obliczeń jest wielokrotnie dłuższy w porównaniu do poprzedniej metody.

4 Automatyczny krok czasowy - jawny schemat Eulera

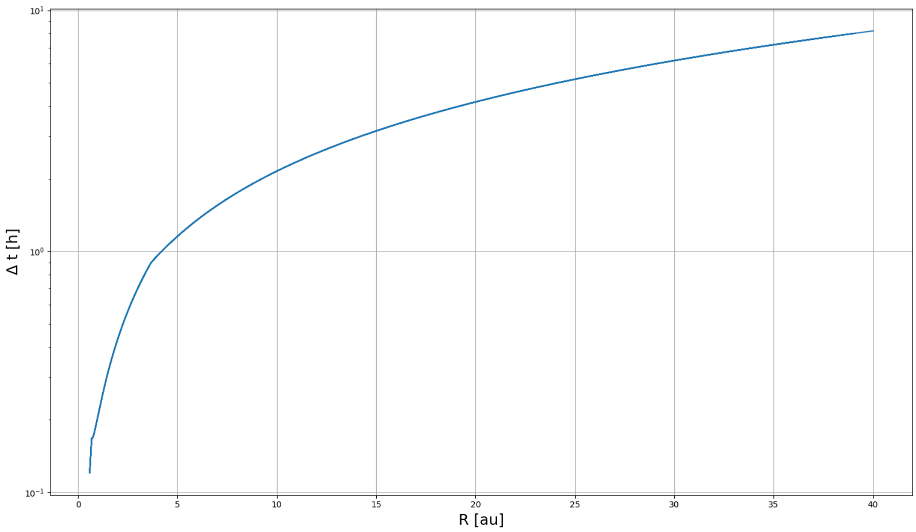
Wykorzystując jawny schemat Eulera dokonano obliczenia toru ruchu ciała opisanego powyżej korzystając dodatkowo z algorytmu do określenia kroku czasowego.
Za krok czasowy początkowo przyjęto $\Delta t = 1h$.
Za tolerancję błędu wyznaczenia toru przyjęto kolejno: $1000\,m$ oraz $100\,m$
Obliczenia trwały kolejno: $t_{1000} = 20.634950\,s$ oraz $t_{100} = 65.127048\,s$.
W celu zobrazowania uzyskanych wyników sporządzono wykresy: $y(x(t))$, $y(t)$ oraz $y(\Delta t)$.



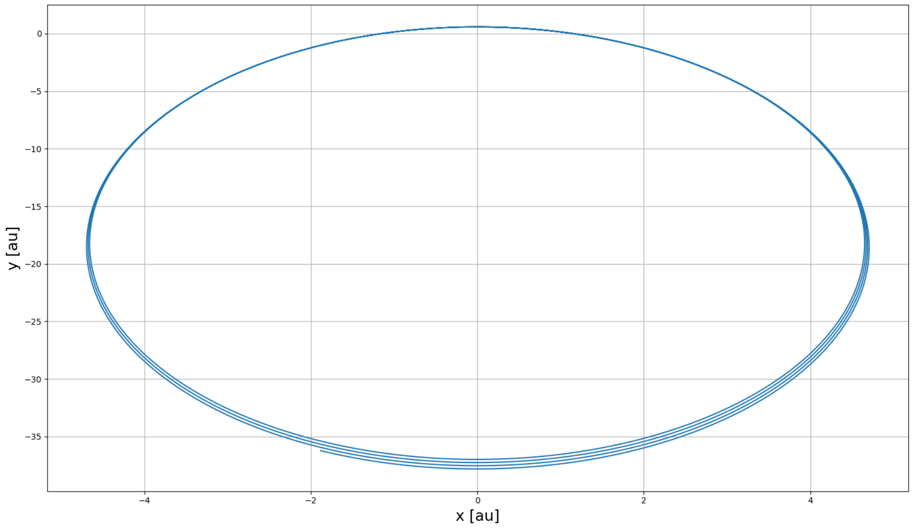
Rysunek 5: Wykres $y(x(t))$ dla tolerancji 1000 m



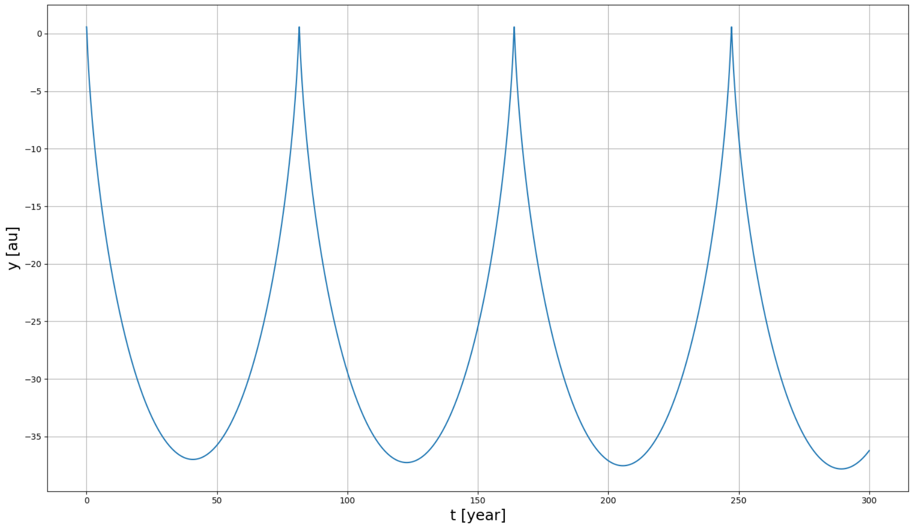
Rysunek 6: Wykres $y(t)$ dla tolerancji 1000 m



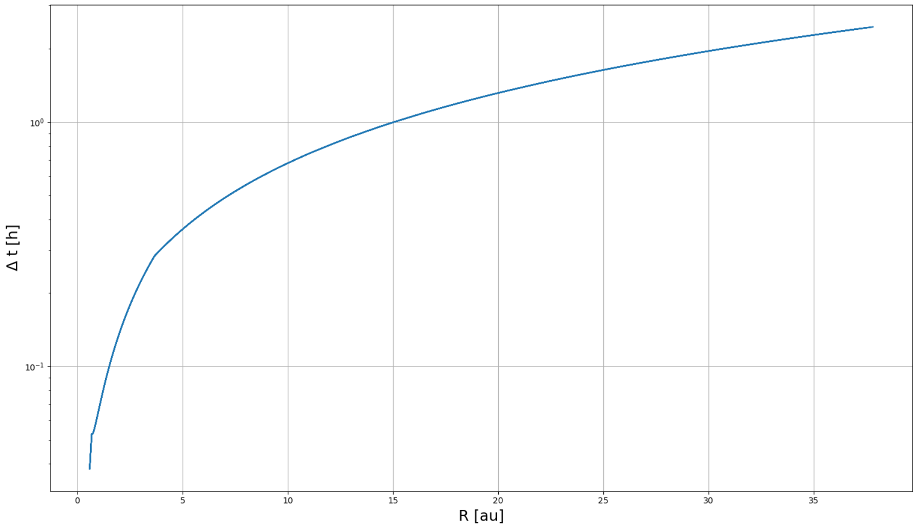
Rysunek 7: Wykres $y(\Delta t)$ dla tolerancji 1000 m



Rysunek 8: Wykres $y(x(t))$ dla tolerancji 100 m



Rysunek 9: Wykres $y(t)$ dla tolerancji 100 m



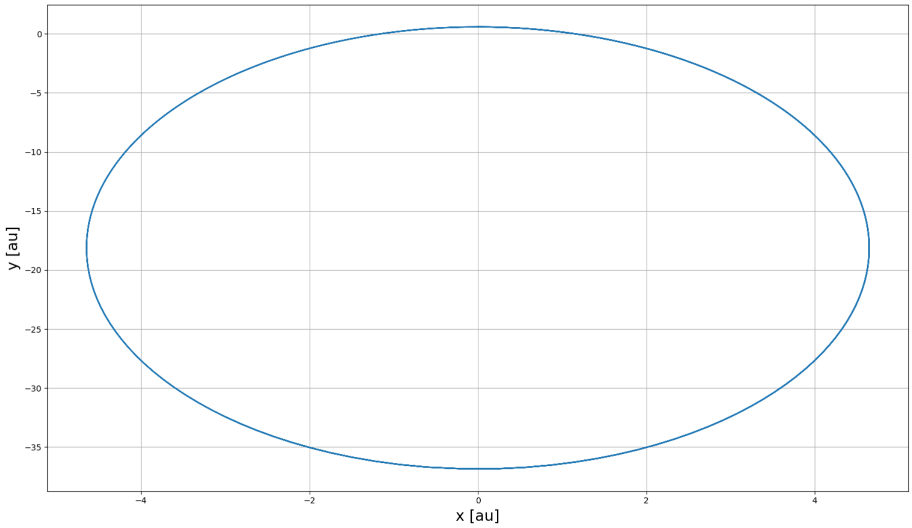
Rysunek 10: Wykres $y(\Delta t)$ dla tolerancji 100 m

Komentarz

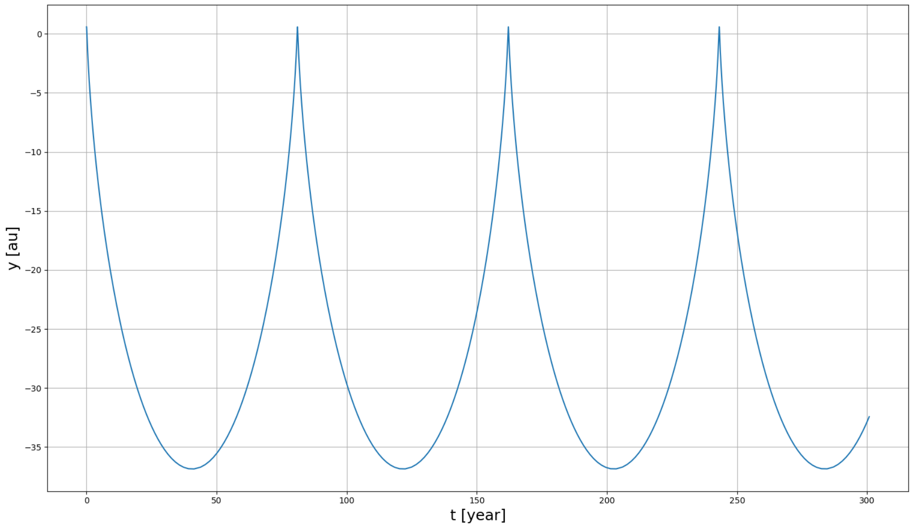
Powyższe wykresy pokazują iż zastosowanie automatycznego kroku czasowego dla jawnego schematu Eulera skutkuje polepszeniem jakości otrzymanych wyników. Skróceniu uległ też czas wykonywania obliczeń. Zauważono iż zastosowanie mniejszej tolerancji błędu wyznaczenia położenia ciała powoduje zmniejszenie obliczanych kroków czasowych.

5 Automatyczny krok czasowy - metoda RK4

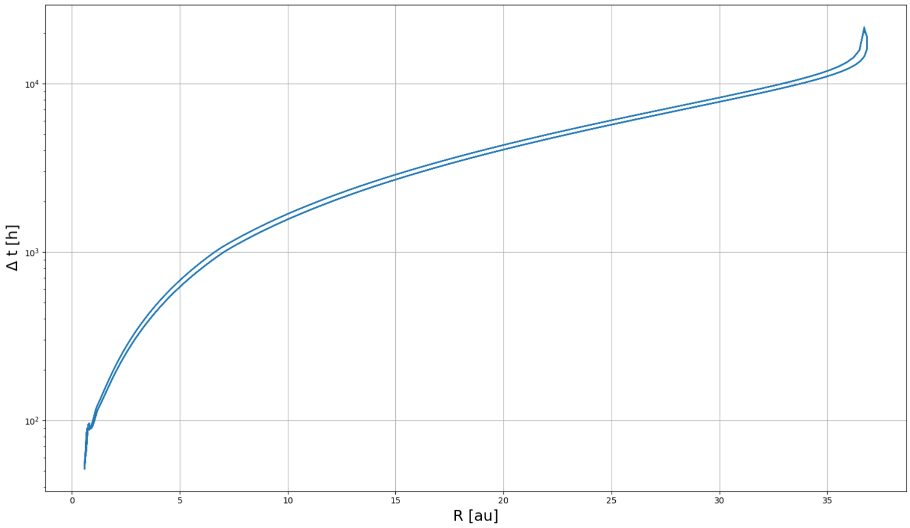
Wykorzystując metodę RK4 dokonano obliczenia toru ruchu ciała opisanego powyżej korzystając dodatkowo z algorytmu do określenia kroku czasowego.
Za krok czasowy początkowo przyjęto $\Delta t = 1h$.
Za tolerancję błędu wyznaczenia toru przyjęto kolejno: $1000\,m$, $100\,m$ oraz $1\,m$
Obliczenia trwały kolejno: $t_{1000} = 0.159316\,s$, $t_{100} = 0.253909\,s$ oraz $t_1 = 0.671793\,s$.
W celu zobrazowania uzyskanych wyników sporządzono wykresy: $y(x(t))$, $y(t)$ oraz $y(\Delta t)$.



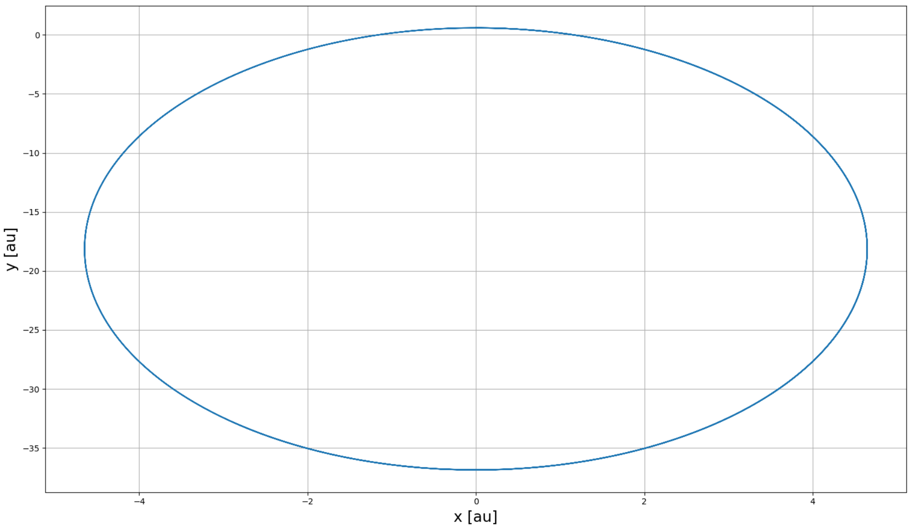
Rysunek 11: Wykres $y(x(t))$ dla tolerancji 1000 m



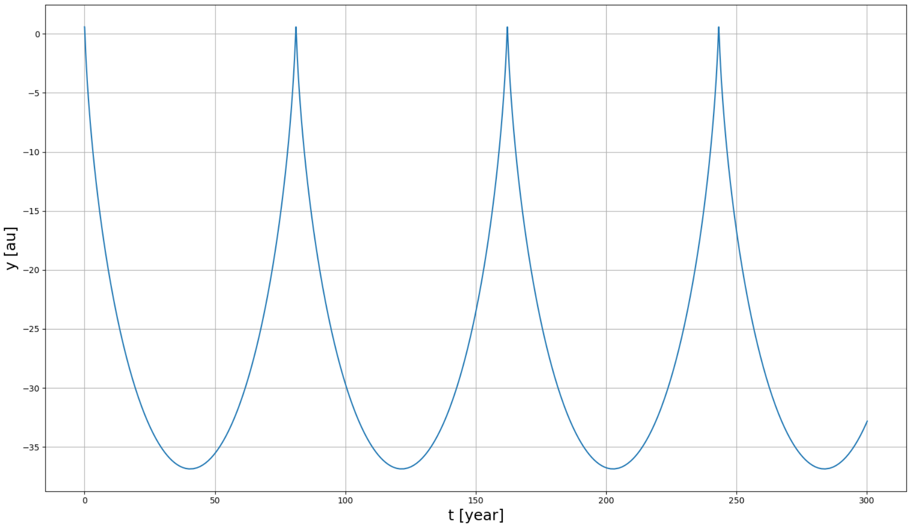
Rysunek 12: Wykres $y(t)$ dla tolerancji 1000 m



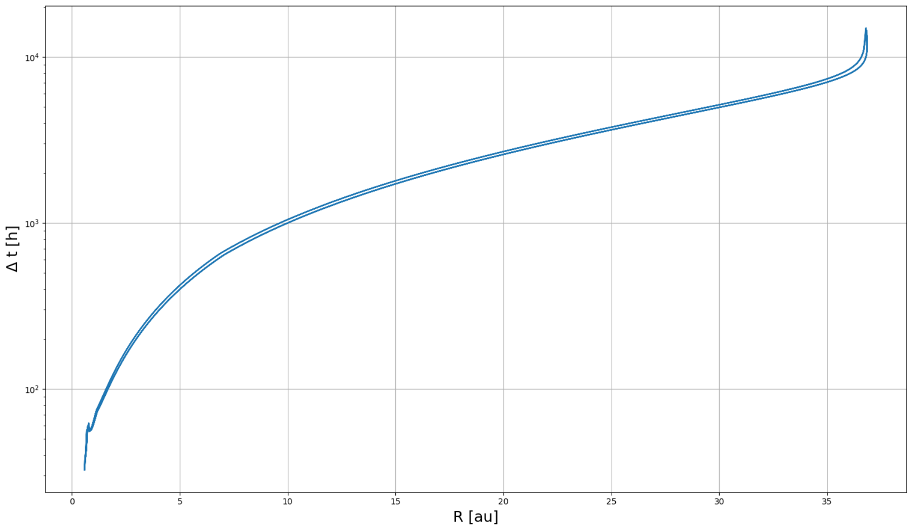
Rysunek 13: Wykres $y(\Delta t)$ dla tolerancji 1000 m



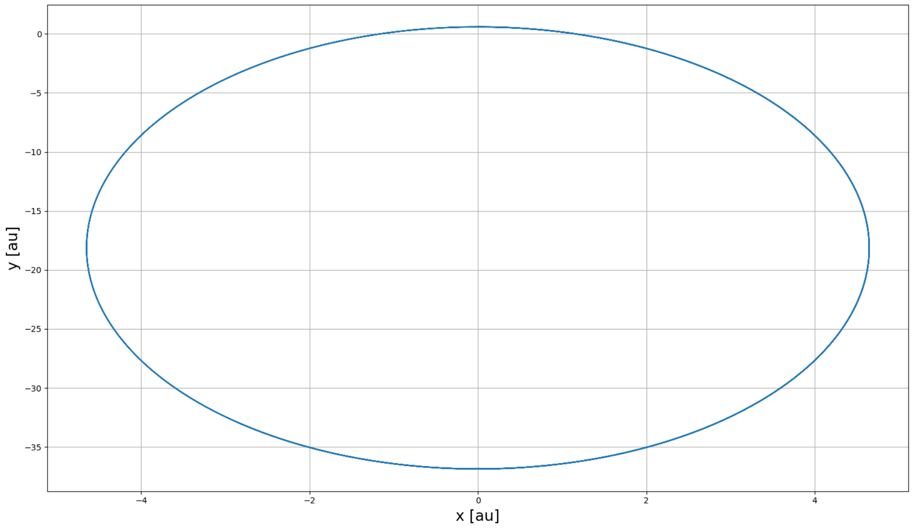
Rysunek 14: Wykres $y(x(t))$ dla tolerancji 100 m



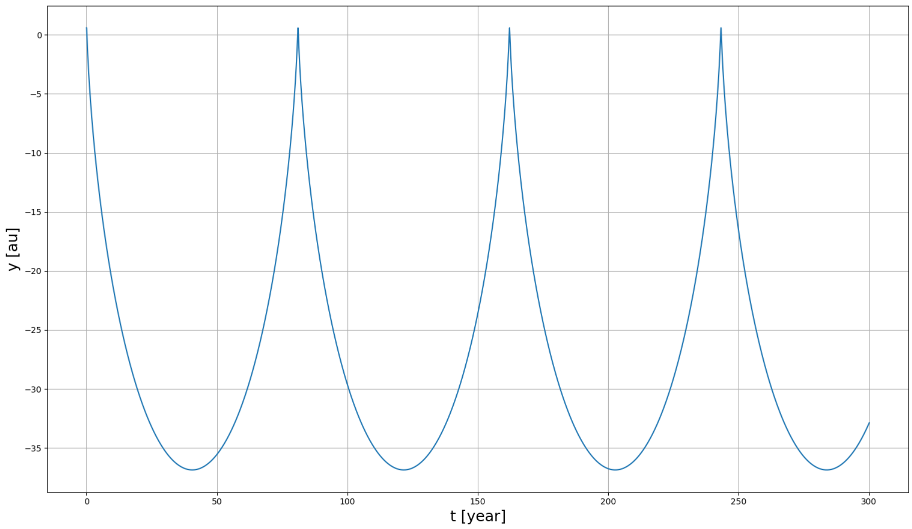
Rysunek 15: Wykres $y(t)$ dla tolerancji 100 m



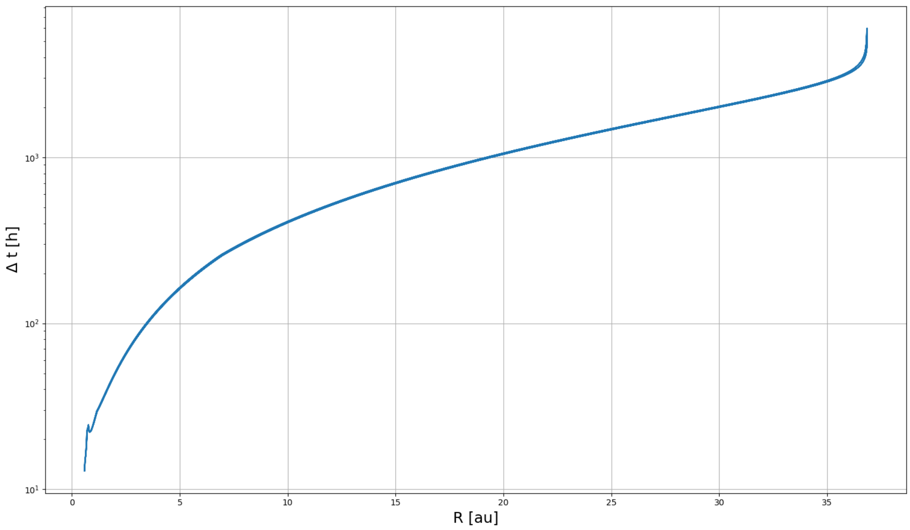
Rysunek 16: Wykres $y(\Delta t)$ dla tolerancji 100 m



Rysunek 17: Wykres $y(x(t))$ dla tolerancji 1 m



Rysunek 18: Wykres $y(t)$ dla tolerancji 1 m



Rysunek 19: Wykres $y(\Delta t)$ dla tolerancji 1 m

Komentarz

Powyższe wykresy pokazują iż zastosowanie automatycznego kroku czasowego dla metody RK4 skutkuje polepszeniem jakości otrzymanych wyników. Znaczneu skróceniu uległ też czas wykonywania obliczeń przez co metoda RK4 staje się wydajna, a wyniki są wysokiej jakości. Zauważono iż zastosowanie mniejszej tolerancji błędu wyznaczenia położenia ciała powoduje zmniejszenie obliczanych kroków czasowych.

6 Wnioski

Dokonując obliczeń za pomocą jawnego schematu Eulera a następnie za pomocą metody RK4 dokonano porównania obu metod.

Metoda jawnego schematu Eulera jest prostsza w implementacji, a przez to i szybsza w kalkulacjach. Niestety jakość wyników pozostawia wiele do życzenia. Wyniki można poprawić jedynie zmniejszając krok czasowy, co jednak drastycznie zwiększa długość obliczeń i nie zawsze daje spodziewane korzyści.

Metoda RK4 jest znacznie trudniejsza w implementacji i obliczenia zajmują więcej czasu. Jednak jakość otrzymanych wyników jest zdecydowanie lepsza w porównaniu do metody jawnego schematu Eulera.

Zastosowanie algorytmu automatycznego wyznaczania kroku czasowego jest dodatkową trudnością zaimplementowaną w programie. Jednak jakość wyników ulega poprawie a czas wykonywania obliczeń ulega skróceniu. Szczególnie dobrze widoczne jest to w przypadku metody RK4 gdzie dzięki zastosowaniu tego mechanizmu czas wykonywania programu skrócił się ponad 1000 - krotnie. Udowadnia to iż metoda RK4 z pewnością może być niezwykle wydajna nie tracąc na jakości otrzymywanych wyników.