

# Symulacja ruchu wahadła matematycznego o stałej długości

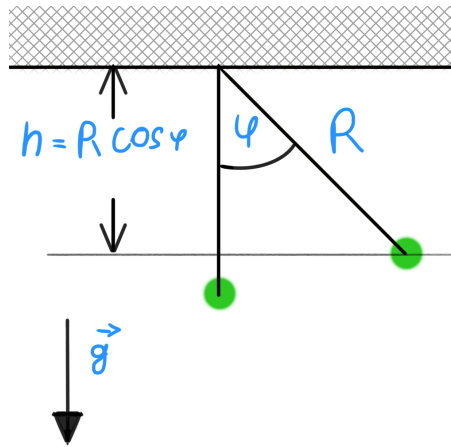
Paweł Lipiór

17 kwietnia 2020

## 1 Wstęp

Tematem odbytych zajęć laboratoryjnych było zastosowanie komputerowych metod obliczeniowych do symulacji ruchu wahadła matematycznego o stałej długości. Zapoznano się z metodą RK4 służącą do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zebrane wyniki przedstawiono na wykresach. Porównano także, dla małych kątów, wyniki rozwiązania analitycznego i numerycznego.

## 2 Wstęp teoretyczny



Rysunek 1: Rysunek przedstawiający model wahadła matematycznego

Podczas pierwszych zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było zapoznanie się z modelem wahadła matematycznego ze stałą długością. Model takiego wahadła przedstawia rysunek 1.

Równanie ruchu wahadła opisuje wzór:

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{R} \sin \phi(t) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$\phi(t)$  - kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi w chwili  $t$

$g$  - przyspieszenie ziemskie

$R$  - długość wahadła

Zaś energia wahadła dana jest wzorem:

$$E(t) = U(t) + T(t) = -mgR \cos \phi(t) + \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2(t) \quad (2)$$

gdzie:

$E(t)$  - energia całkowita układu w chwili  $t$

$U(t)$  - energia potencjalna układu w chwili  $t$

$T(t)$  - energia kinetyczna układu w chwili  $t$

Równanie ruchu 1 jest równaniem różniczkowym jednorodnym nieliniowym drugiego rzędu. Równania różniczkowe liniowe są trudne a czasami niemożliwe do rozwiązania metodami analitycznymi. Dla małej amplitudy kąta  $\phi \simeq 4$  możemy skorzystać z rozwinięcia funkcji sinus w szereg Taylora i przybliżyć funkcję sinus jej argumentem:

$$\sin \phi \approx \phi$$

Dzięki temu równanie 1 upraszcza się do postaci liniowej:

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} + \frac{g}{R} \phi(t) = 0 \quad (3)$$

Równanie 3 jest już możliwe do rozwiązania prostymi metodami. Finalnie otrzymujemy wzór:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t + \theta \quad (4)$$

gdzie:

$\phi_0$  - amplituda drgań

$\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}$  częstość kołowa drgań

$\theta$  - faza początkowa drgań

### 3 Metoda Rungego-Kutty 4-tego rzędu

Do rozwiązania równania 1 można użyć metod numerycznych. Aby wyniki były zadowalającej jakości postanowiono użyć metody Rungego-Kutty czwartego rzędu. Cechuje się ona błędem lokalnym na poziomie  $O(\Delta t^5)$ . Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= f(t, \vec{s}) \\ \vec{k}_1 &= f(t_i, \vec{s}_i) \\ \vec{k}_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_1}{2}\right) \\ \vec{k}_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \vec{s}_i + \frac{\Delta t \vec{k}_2}{2}\right) \\ \vec{k}_4 &= f(t_i + \Delta t, \vec{s}_i + \Delta t \vec{k}_3) \\ \vec{s}_{i+1} &= \vec{s}_i + \frac{\Delta t}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \end{aligned}$$

Podaną powyżej metodę zaimplementowano w programie komputerowym służącym do symulacji ruchu wahadła matematycznego o stałej długości.

Jak można zauważyć metoda RK4 służy do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Ale możemy, w łatwy sposób, zamienić równanie 1 różniczkowe rzędu drugiego na układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= v_\phi \\ \dot{v}_\phi &= -\frac{g}{R} \sin \phi \end{aligned}$$

Otrzymany układ równań rozwiązujemy numeryczną iteracją metody RK4 przyjmując zadane warunki początkowe.

## 4 Przeprowadzenie obliczeń

Do przeprowadzenia symulacji ruchu wahadła wykorzystano własny program obliczeniowy wykorzystujący opisaną powyżej metodę RK4. W obliczeniach przyjęto następujące warunki:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$R = 1 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0.01 \text{ s}$$

$$N = 1000 \text{ kroków czasowych}$$

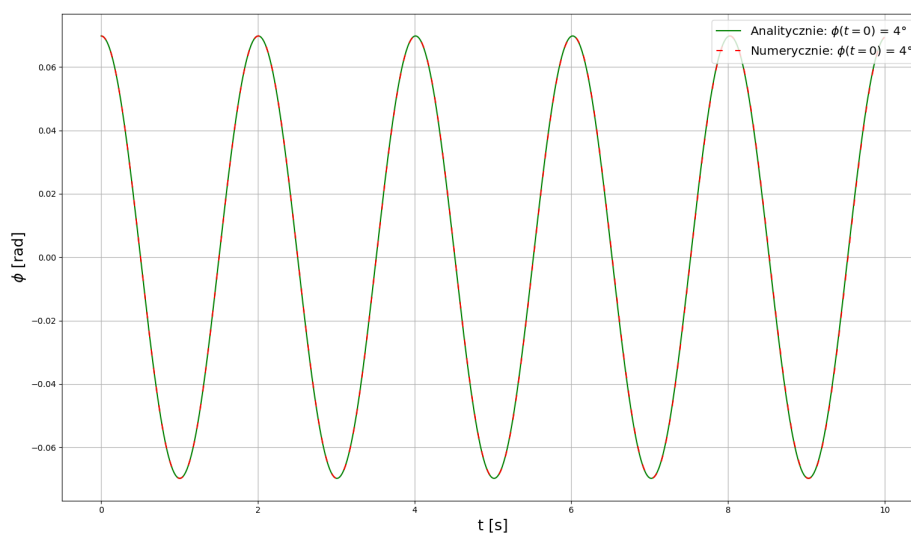
$$v_\phi(t = 0) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Wychylenie z położenia równowagi  $\phi(t = 0)$  podawano jako parametr programu. Podawano go w stopniach lecz obliczeń dokonywano dopiero po przeliczeniu na radiany.

## 5 Wyniki obliczeń

### 5.1 Zadanie 1

W pierwszym kroku wykonywania zadania postanowiono porównać wyniki otrzymane za pomocą metody numerycznej oraz równania uzyskanego analitycznie. W tym celu jako wychylenie z położenia równowagi  $\phi(t = 0)$  przyjęto  $4^\circ$ . Wyniki uzyskane z pomocą obu metod przedstawiono na rysunku 2.

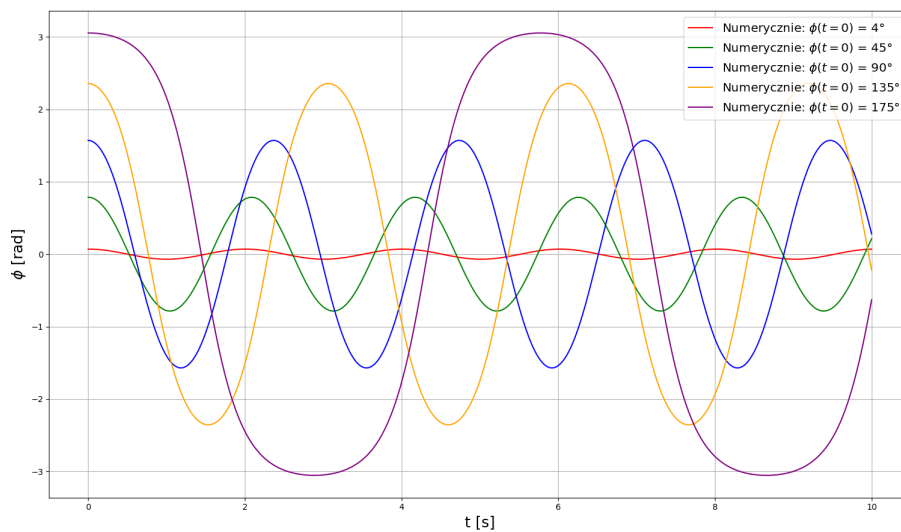


Rysunek 2: Wykres przedstawiający zależność wychylenia  $\phi(t)$  dla metody RK4 oraz rozwiązania analitycznego

Analizując dane na rysunku 2 możemy zauważyć iż wyniki uzyskane za pomocą metody numerycznej RK4 jak i rozwiązania analitycznego pokrywają się. Wnioskujemy stąd iż, pomijając niedokładności związane z przyjętym wcześniej uproszczeniem rozwiązania równania 1, metoda RK4 daje jakościowo bardzo dobre wyniki. Stąd można użyć jej do rozwiązywania kolejnych problemów numerycznych.

## 5.2 Zadanie 2

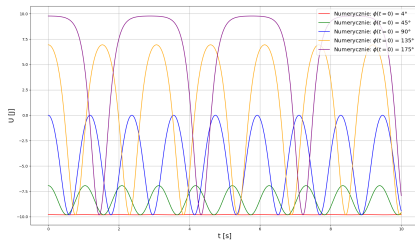
W kolejnej części zadania postanowiono wykorzystać przedstawioną wyżej metodę RK4 do symulacji ruchu wahadła matematycznego dla kolejnych wartości wychyleń z położenia równowagi  $\phi(t = 0)$ :  $4^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  i  $175^\circ$ . Zadane wartości wprowadzono do programu, a zebrane dane przedstawiono na wykresach poniżej.



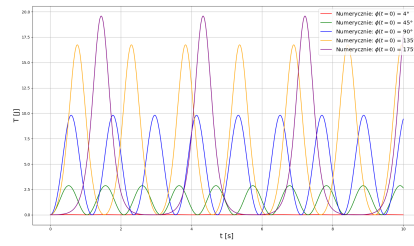
Rysunek 3: Wykres przedstawiający zależność wychylenia z położenia równowagi  $\phi(t)$  dla różnych  $\phi(t = 0)$

Analizując rysunek 3 zauważamy iż większe początkowe wychylenie z położenia równowagi skutkuje większą amplitudą drgań. Na wykresie zauważamy ograniczoną liczbę pełnych okresów drgań, ale pomimo tego możemy stwierdzić iż drgania nie gasną. Nie zadaliśmy żadnych oporów ruchu, a symulacja to potwierdza. Zauważamy jednak iż okres drgań zmienia się wraz ze zmianą początkowego wychylenia z położenia równowagi. Zostanie to zbadane w dalszej części zadania.

Kolejno wykorzystując wzór 3 oraz zebrane dane wykonano wykresy energii kinetycznej, potencjalnej oraz całkowitej wahadła.

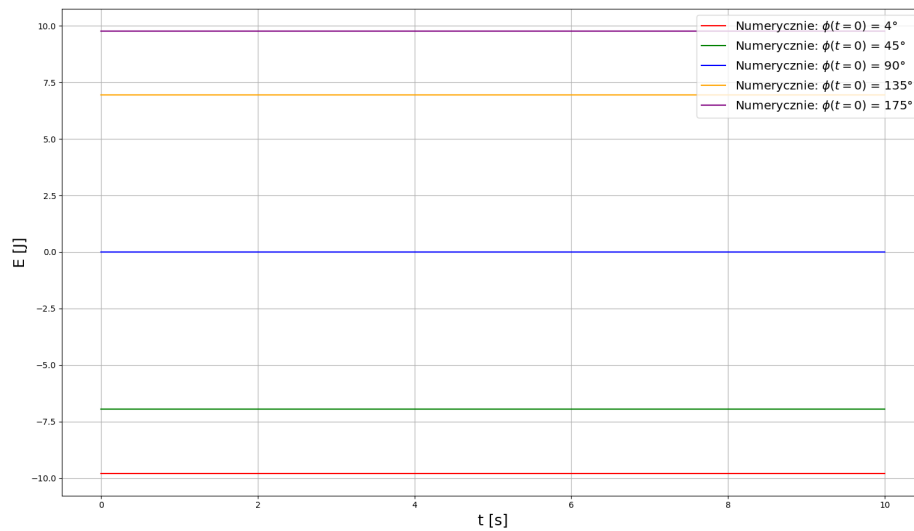


(a) Wykres  $U(t)$



(b) Wykres  $T(t)$

Rysunek 4: Wykresy przedstawiające zależność energii potencjalnej i kinetycznej układu w funkcji czasu dla różnych  $\phi(t=0)$

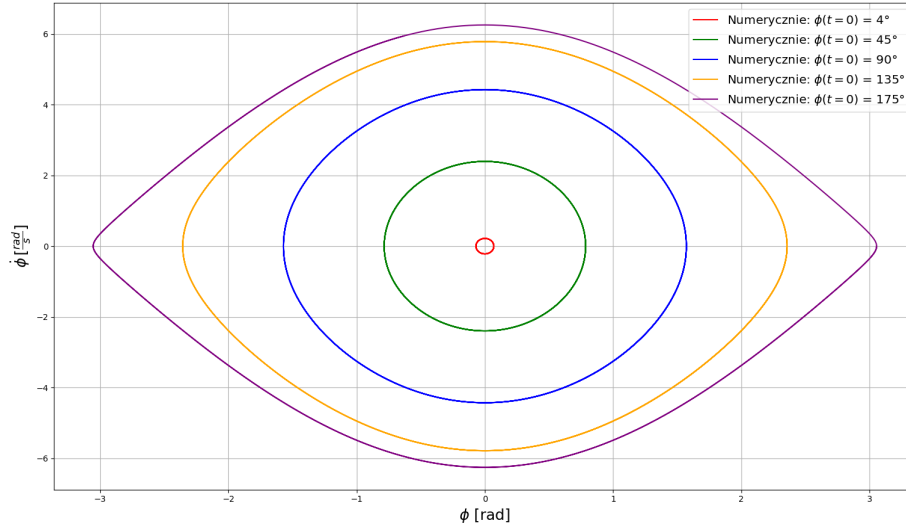


Rysunek 5: Wykres przedstawiający zależność energii całkowitej układu  $E(t)$  dla różnych  $\phi(t=0)$

Analizując wykresy na rysunku 4 dochodzimy do wniosku iż układ nie traci ani energii kinetycznej ani energii potencjalnej. Oznacza to iż metoda numeryczna jest dobrej jakości i popełniane błędy nie wpływają poważnie na zaburzenie wyników.

Wykres 5 pokazuje iż energia całkowita układu jest zachowana co odpowiada przyjętym założeniom i zasadzie zachowania energii mechanicznej. Zauważamy też iż wychylenie początkowe ze stanu równowagi  $\phi(t=0)$  ma wpływ na energię całkowitą układu.

Kolejno wykorzystując zebrane dane postanowiono sporządzić wykres fazowy  $Z(t) = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$ . Wykres przedstawiono na rysunku 6.

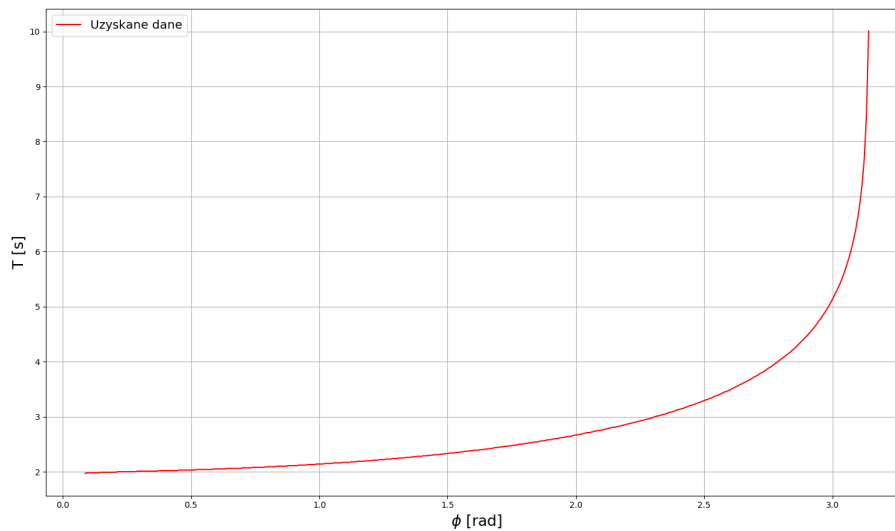


Rysunek 6: Wykres fazowy  $\vec{Z}(t) = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$  dla różnych  $\phi(t=0)$

Przedstawiony na rysunku 6 wykres fazowy przedstawia mody drgań dla poszczególnych początkowych wychyleń z położenia równowagi  $\phi(t=0)$  a przez to różnych energii. Krzywe przedstawione na rysunku są zamknięte przez co zauważamy iż wahadło wykonuje drgania. Energia wahadła jest na tyle mała iż drgania utrzymują się w danej wnęce potencjału.

### 5.3 Zadanie 3

W kolejnej części zadania postanowiono zbadać zależność długości okresu drgań od początkowego wychYLENIA z położenia równowagi  $\phi(t=0)$ . Dla małych wychyleń przyjęto warunki ruchu harmonicznego, którego cechą charakterystyczną jest niezależność długości okresu od wychYLENIA początkowego. Ale w ogólności model wahadła matematycznego nie jest opisywany ruchem harmonicznym. W celu zbadania tego zjawiska wykorzystano dane symulacyjne z metody RK4. Obliczenia przeprowadzono na zakresie od  $5^\circ$  do  $\sim 180^\circ$ . Wyniki przedstawiono na wykresie 7.



Rysunek 7: Wykres zależności długości okresu  $T$  od  $\phi(t = 0)$

Analizując rysunek 7 zauważamy iż rzeczywiście dla małych kątów krzywa narasta bardzo powoli, jednak dla wychyleń zbliżających się do kąta półpełnego stromizna krzywej gwałtownie rośnie.

## 6 Podsumowanie

Podsumowując w trakcie wykonywania zadań z tego laboratorium zapoznano się z modelem wahadła matematycznego ze stałą długością. Poznano równanie 1 opisujące ruch wahadła matematycznego. Stosując przybliżenie dla małych kątów rozwiązano równanie 1 analitycznie uzyskując wzór 4.

Następnie poznano metodę RK4 służącą do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Zaimplementowano ją w programie komputerowym własnego autorstwa. Następnie zamieniono równanie 1 na układ RRZ pierwszego rzędu.

Kolejno korzystając z programu komputerowego oraz wzoru 4 wraz z metodą RK4 dokonano sprawdzenia jakości wyników zwracanych przez zastosowaną metodę numeryczną. Po stwierdzeniu poprawności uzyskanych wyników przystąpiono do kolejnych części ćwiczenia.

Następnie dla różnych zadanych wartości  $\phi(t = 0)$  sporządzono wykresy:

- Wychylenia z położenia równowagi od czasu:  $\phi(t)$  - rysunek 3
- Energi potencjalnej, kinetycznej i całkowitej układu od czasu - rysunki 4 oraz 5
- Wykres fazowy  $Z(t) = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$  - rysunek 6

Analiza zebranych danych pokazała iż zastosowana metoda daje zadowalającej jakości wyniki. Energia układu jest zachowana i nie zmienia się na skutek propagującego błędu numerycznego. Obserwacja wykresów pokazała m. in. iż okres zależy od początkowego wychylenia z położenia równowagi oraz iż energia wahadła nie pozwala drganiom opuścić zadanej wnęki potencjału (wahadło wykonuje wahnięcia, kulka nie zatacza okręgów).

Kolejno postanowiono zbadać zależność okresu drgań wahadła od początkowego wychylenia z położenia równowagi. Wyniki przedstawiono na rysunku 7. Stwierdzono iż w rzeczywistości założenie harmonicznego drgań wahadła matematycznego jest właściwe jedynie dla małych początkowych wychyleń z położenia równowagi. Z kolei dla dużych amplitud, zdążających do  $180^\circ$  krzywa rośnie bardzo stromo, niemal pionowo.

Reasumując wykonano wszystkie wymagane w ramach ćwiczenia zadania i zdobyto niezbędne umiejętności pozwalające na ich wykonanie.