# Przepływ potencjalny.
# Sprawozdanie

Paweł Lipiór

19 czerwca 2020

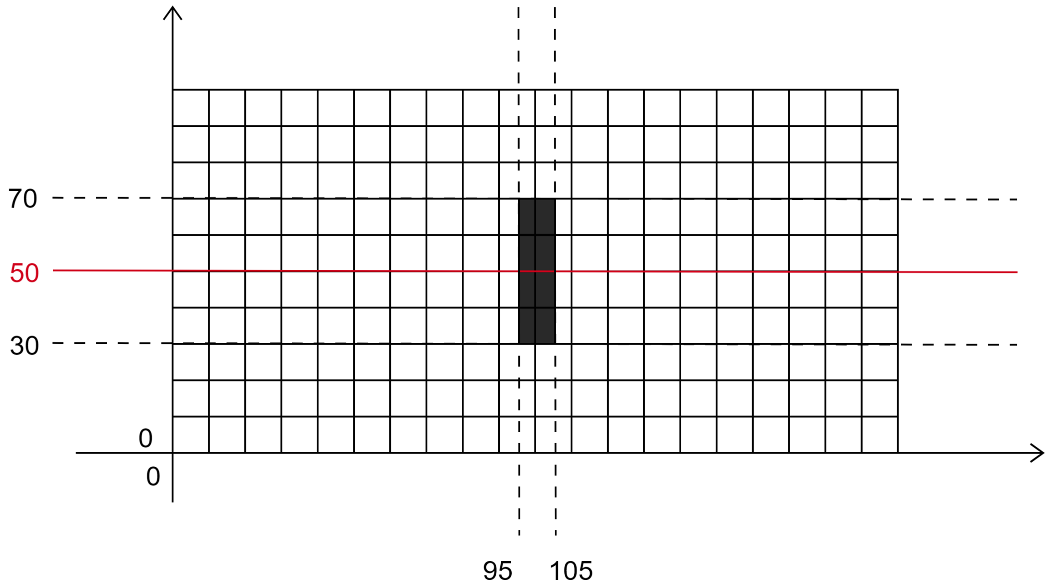
## 1 Wstęp

W trakcie trwania zajęć laboratoryjnych naszym zadaniem było praktyczne zastosowanie poznanych metod numerycznych. Tym razem tematem zajęć był przepływ potencjalny nielepkiej, nieściśliwej cieczy. W ramach projektu wykonano zadania:

- Wykonano procedurę relaksacji punktowej na siatce różnicowej w celu uzyskania funkcji strumienia przepływu cieczy. Zadano odpowiednie warunki brzegowe. Otrzymane metodą relaksacji rozwiązanie wyrysowano na wykresie konturowym wraz z zaznaczonymi liniami strumienia cieczy.
- Wykonano procedurę relaksacji punktowej na siatce różnicowej w celu uzyskania funkcji potencjału przepływu cieczy. Zadano odpowiednie warunki brzegowe. Otrzymane metodą relaksacji rozwiązanie wyrysowano na wykresie konturowym wraz z zaznaczonymi liniami stałego potencjału.

## 2 Zadany problem

Zadanym problemem obliczeniowym było zbadanie funkcji strumienia przepływu oraz potencjału przepływu nielepkiej i nieściśliwej cieczy opływającej przeszkodę. Sytuację opisaną przedstawiono na rysunku 1:




Rysunek 1: Siatka różnicowa służąca do opisu przepływającej cieczy. Nieruchoma szyna zajmuje obszar: $x \in [95, 106]$, $y \in [30, 70]$.

Bazując na rysunku 1 zauważamy, iż problem jest symetryczny więc będziemy go rozwiązywać dla obszaru powyżej osi symetrii układu.

# 3 Metoda obliczeń

Przepływająca ciecz jest nielepka, więc występuje funkcja $\phi(x, y)$ będąca funkcją potencjału przepływu. Jest ona zadana tak, iż:

$$\vec{v} = (u, v), \quad u = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}$$

Ponadto funkcja potencjału przepływu $\phi(x, y)$ spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2\phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

## 3.1 Funkcja strumienia przepływu

Wygodnym rozwiązaniem przepływu potencjalnego jest funkcja strumienia przepływu $\psi(x, y)$. Spełnia ona równanie Laplace'a:

$$\nabla^2\psi(x, y) = 0 \tag{2}$$

oraz definiuje rozkład prędkości:

$$\vec{v} = (u, v), \quad u = \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}$$

Równanie 2 rozwiązujemy na siatce $x \in [1, 201] \times y \in [50, 151]$ za pomocą metody relaksacji punktowej równania Laplace'a. Metoda ta jest opisana poniżej.

**Relaksacja punktowa funkcji strumienia przepływu**

Przepis na relaksację punktowa odbywa się w sposób następujący: w pętli po $i$ oraz $j$ liczymy nową wartość funkcji $\psi_{i,j}$ według przepisu:

$$\psi_{i,j} := \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{4}$$

W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy pełen obrót po pętli po $i$ oraz $j$.

Na brzegach obszaru ustawiamy warunki brzegowe Dirichlet'a:

- Górny brzeg: $\psi(x, y) = u_0 \cdot y$
- Lewy brzeg: $\psi(x, y) = u_0 \cdot y$
- Prawy brzeg: $\psi(x, y) = u_0 \cdot y$
- Dolny brzeg i brzeg przeszkody: $\psi(x, y) = \psi(1, 50)$

Wnętrze przeszkody wypełniamy wartościami $NaN$. Poza brzegiem i przeszkodą jako wartość początkową przyjjmujemy $\psi(sx, y) = 0$.

## 3.2 Funkcja potencjału przepływu

Przepływ potencjalny można opisać funkcją potencjału przepływu $\phi(x, y)$. Spełnia ona równanie Laplace'a 1.

Równanie 1 rozwiązujemy na siatce $x \in [1, 201] \times y \in [50, 151]$ za pomocą metody relaksacji punktowej równania Laplace'a. Metoda ta jest opisana poniżej.

**Relaksacja punktowa funkcji potencjału przepływu**

Przepis na relaksację punktowa odbywa się w sposób następujący: w pętli po $i$ oraz $j$ liczymy nową wartość funkcji $\phi_{i,j}$ według przepisu:

$$\phi_{i,j} := \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}}{4}$$

W powyższym przepisie jako jedną iterację rozumiemy pełen obrót po pętli po $i$ oraz $j$.

Na brzegach obszaru ustawiamy warunki brzegowe Dirichlet'a:

- Górny brzeg: $\phi(x, y) = u_0 \cdot y$
- Lewy brzeg: $\phi(x, y) = u_0 \cdot y$
- Prawy brzeg: $\phi(x, y) = u_0 \cdot y$

Na brzegu obszaru dolnego stosujemy warunki Neumann'a:

- Oś symetrii: $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 0$ co daje nam przepis: $\phi(x, 50) = \phi(x, 51)$ dla $x \in [1, 94] \cup [106, 201]$.

- Brzeg lewy i prawy przeszkody: $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = 0$ co daje nam przepis: $\phi(95, y) = \phi(94, y)$ oraz $\phi(105, y) = \phi(106, y)$ dla $y \in [50, 70]$.
- Brzeg górny przeszkody: $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = 0$ co daje nam przepis: $\phi(x, 70) = \phi(x, 71)$ dla $x \in (95, 105)$.
- Narożniki przeszkody:

$$\phi(95, 70) = \frac{\phi(94, 70) + \phi(95, 71)}{2}, \quad \phi(105, 70) = \frac{\phi(106, 70) + \phi(105, 71)}{2}$$

Warunki brzegu dolnego przepisujemy po każdej iteracji.

Wnętrze przeszkody wypełniamy wartościami $NaN$. Poza brzegiem i przeszkodą jako wartość początkową przyjmujemy $\psi(sx, y) = u_0 \cdot x$ co daje taki sam wynik jak przypadek bez przeszkody (nie zerujemy wartości, gdyż zastosowane rozwiązanie pozwala szybciej osiągnąć "stan zrelaksowany" funkcji $\phi(x, y)$).

# 4 Wykonanie zadań

Przystąpiono do wykonania zadań. W tym celu napisano własny program komputerowy realizujący zadane powyżej przepisy i korzystający z zadanych warunków początkowych i brzegowych na zdefiniowanej wcześniej siatce.

## 4.1 Warunki symulacji*

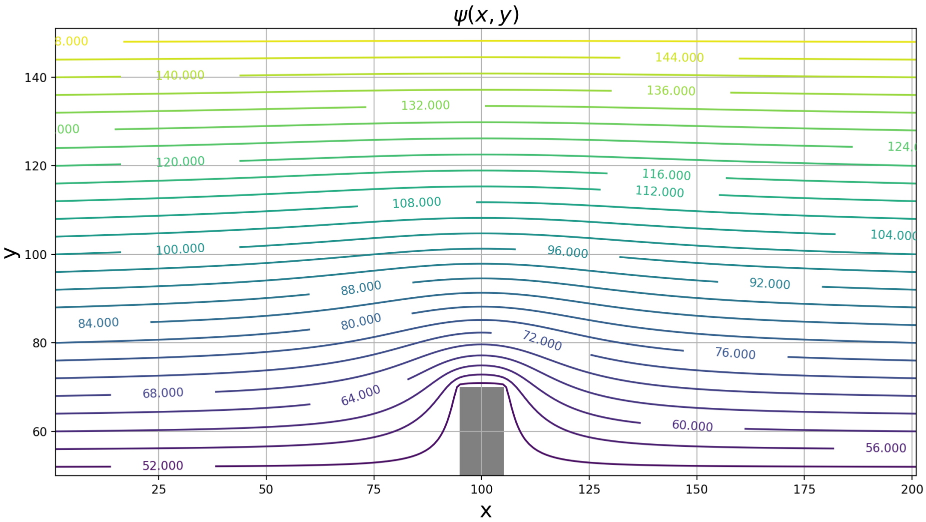
Zadano następujące warunki symulacji:

- Siatka $201 \times 102$, gdzie $x \in [1, 201]$ oraz $y \in [50, 151]$
- $dx = 1$
- $dy = 1$
- $u_0 = 1$

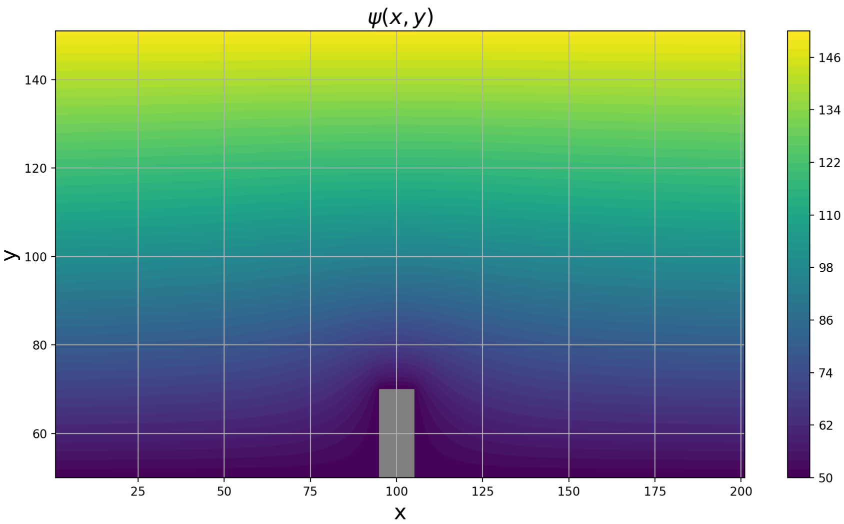
Następnie przystąpiono do rachunków:

## 4.2 Zadanie I

Przystąpiono do wykonania pierwszego zadania polegającym na wykorzystaniu relaksacji punktowej w celu znalezienia rozwiązania na funkcję $\psi(x, y)$ zadanej równaniem 2. Jako ilość iteracji relaksacji równania zadano $N = 10^4$ iteracji. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2 oraz 3.




Rysunek 2: Wykres konturowy przedstawiający linie przepływu strumienia cieczy.



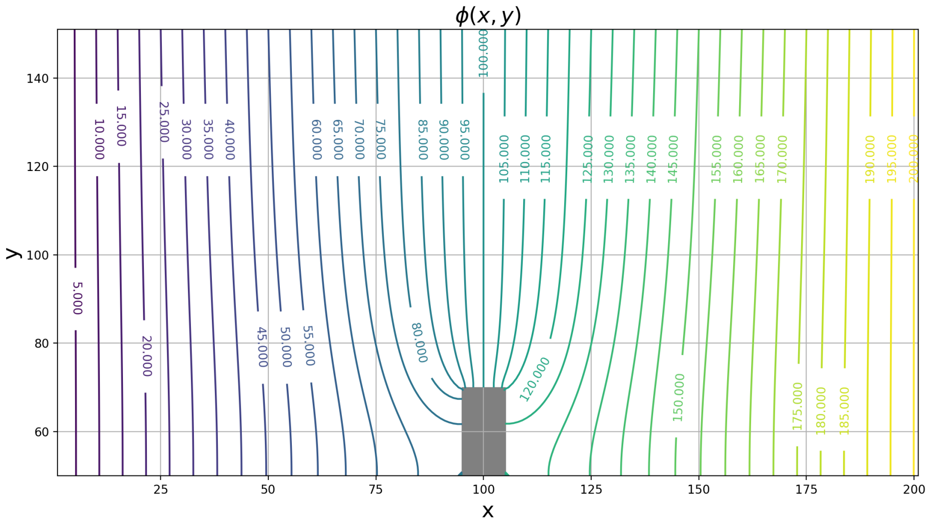

Rysunek 3: Wykres konturowy wypełniony przedstawiający linie przepływu strumienia cieczy wraz z stałymi poziomami wartości funkcji strumienia przepływu.

### Komentarz wyników

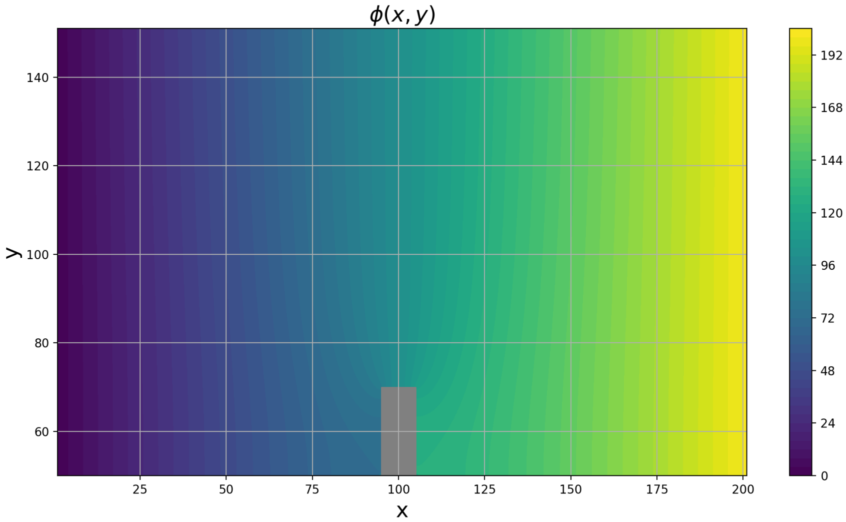
Zauważamy, iż daleko od przeszkody funkcja strumienia przepływu przyjmuje niemal stałe wartości na całej długości obszaru. W pobliżu przeszkody strumień opływa przeszkodę. Jednakże jednocześnie jest zachowana ciągłość strumienia cieczy. Ponadto, jak spodziewamy się po przepływie potencjalnym, nie powstają wiry i asymetrie.

### 4.3 Zadanie II

Przystąpiono do wykonania drugiego zadania polegającym na wykorzystaniu relaksacji punktowej w celu znalezienia rozwiązania na funkcję $\phi(x, y)$ zadanej równaniem 1. Jako ilość iteracji relaksacji równania zadano $N = 2 \cdot 10^4$ iteracji. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 4 oraz 5.




Rysunek 4: Wykres konturowy przedstawiający linie potencjału przepływu cieczy.




Rysunek 5: Wykres konturowy wypełniony przedstawiający linie potencjału przepływu cieczy wraz z stałymi poziomami wartości funkcji potencjału przepływu.

**Komentarz wyników**

Zauważamy, iż daleko od przeszkody funkcja potencjału przepływu przyjmuje niemal stałe wartości na całej szerokości obszaru, nie odczuwa obecności przeszkody. W pobliżu przeszkody linie potencjału nie są już równoległe do siebie.

# 5 Podsumowanie

W trakcie zajęć zapoznano się z przepływem potencjalnym nielepkiej, nieściśliwej cieczy. Zapoznano się z równaniami opisującymi przepływ takiej cieczy. Dokonano symulacji dla cieczy opływającej przeszkodę. Zbadano zachowanie funkcji strumienia przepływu cieczy oraz funkcji potencjału przepływu cieczy. Wykonano wykresy konturowe obrazujące linie strumienia cieczy oraz linie stałego potencjału przepływu cieczy. Wyciągnięto wnioski i nabyto umiejętności niezbędne do numerycznego rozwiązania równań na strumień przepływu cieczy oraz potencjał przepływu cieczy.

# 6 Źródła

1 - Instrukcja do laboratorium prof. dr hab. inż. B. Szafran "Przepływ potencjalny."

2 - Wykład prof. dr hab. inż. B. Szafran "Podstawowe równania hydrodynamiki."