2025 牛客 暑期多校训练营 1

quailty, Gromah, Little_Sheep_Yawn

AC.

牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM

概况

- 入门：E，G；
- 简单：K，L；
- 中等：B，H，I；
- 较难：A，C，F；
- 困难：D，J。

A - Rectangular Posters

题意

- 在 $W \times H$ 的矩形板里独立且均匀随机地放入 n 个矩形海报，其中第 i 张海报的规格是 $w_i \times h_i$。
- 要求海报完全在矩形板内，边界与矩形板边界平行，不能旋转或者翻转。
- 计算这 n 张海报的期望覆盖面积，答案对 $10^9 + 7$ 取模。
- $1 \leq n \leq 120$，$1 \leq w_i < W \leq 10^9$，$1 \leq h_i < H \leq 10^9$。

A - Rectangular Posters

题解

- 根据期望线性可加，可以考虑每个面元（或者说就是点）属于矩形并的概率，然后对面元积分。
- 对每个点再考虑反面，计算一个点不属于矩形并的概率，那么只要考虑这个点不被某个矩形包含的概率，然后将每个矩形的概率乘起来。
- 一个点 (x, y) 被矩形 (w_i, h_i) 包含等价于 x 方向和 y 方向都同时包含，其概率是 $\frac{\min\{W-w_i,x\}-\max\{0,x-w_i\}}{W-w_i} \cdot \frac{\min\{H-h_i,y\}-\max\{0,y-h_i\}}{H-h_i}$，不被矩形包含的概率就是 1 减去这个概率。

A - Rectangular Posters

题解（cont'd）

- 根据每个 $\min$ 和 $\max$ 内的大小关系，可以将 $[0, W] \times [0, H]$ 划分成大约 $4n^2$ 个区域。每个区域里的概率是一个形如 $\prod_{i=1}^{n}(c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy)$ 的二元多项式。如果观察到对称性，可以只对 $[0, W/2] \times [0, H/2]$ 进行积分，这样只要处理大约 n^2 个区域。
- 如果对每个区域分别处理，每个乘积项依次乘起来的复杂度是 $O(n^3)$，总复杂度达到 $O(n^5)$，难以通过。

A - Rectangular Posters

题解（cont'd）

- 考虑一行的区域一起处理，从一个区域到相邻区域的时候乘积项会有一些变化，部分乘积项会被移除，然后再新增一些乘积项，可以 $O(n^2)$ 实现单个乘积项的移除和新增，总共只有 $O(n)$ 次移除和新增，这样处理一行是 $O(n^3)$，总复杂度是 $O(n^4)$。
- 实现的时候需要注意常数，例如根据 x 和 y 的最高次项，只维护有效范围内的系数矩阵，相比于直接维护完整的 $(n+1)\times(n+1)$ 的系数矩阵，可以分析有 $1/4$ 的常数优化。

B - Binary Substrings 2

题意

- 给定 n 和 m，构造长为 n 的二进制字符串使得本质不同子串个数与 m 的相对误差不超过 0.2，或者判断无解。
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$，$n \le m \le M_n$，这里 M_n 表示长为 n 的二进制字符串中本质不同子串个数的最大可能值。多组数据的 n 之和不超过 2×10^5。

B - Binary Substrings 2

题解

- 由于不需要精确地构造，可以简单认为 M_n 是在 $n^2/2$ 左右。构造方式可能有很多，以下给出的是标程使用的构造方式。
- 一个很容易想到的构造方式是 k 个 0 后接 $n-k$ 个 1，这样能得到 $k(n-k)+n$ 个本质不同子串，具体值依次是 $n, 2n-1, 3n-4, \ldots$
- 这个构造的最大值在 $n^2/4$ 左右，可以覆盖到 $3n^2/10$ 左右，并且除了 n 和 $2n-1$ 之间有一段覆盖不到，其他相邻两个值之间都是完全覆盖的。
- 容易证明当 $n>1$ 时 $2n-1$ 是次小值，那么 $[n, 2n-1]$ 里可能会有一段无解，判掉即可。

B - Binary Substrings 2

题解（cont'd）

- 接下来考虑覆盖 $3n^2/10$ 左右到 $n^2/2$ 左右的部分。
- 考虑构造 t 段 0，每段长度都在 n/t 左右，第 i 段和第 $i+1$ 段之间用 i 个 1 分隔，这样跨过 1 的子串都本质不同，可以得到 $\frac{t-1}{2t}n^2$ 左右。
- t 从 3 取到 6 就基本够了，需要注意 n 比较小的时候可能有边界问题。
- 如果对估计值不够放心，可以使用后缀数据结构计算构造方案的精确值。

C - Clamped Sequence 2

题意

- 给定一个整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，以及一个权重序列 $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$，你需要回答 q 个查询。
- 每个查询给出一个正整数 d，你需要将序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 限制在一个范围 $[l, r]$ 内，使得 $0 \le r - l \le d$，并且最大化 $\sum_{i=1}^{n-1} w_i \times |a_i - a_{i+1}|$。
- $2 \le n \le 1\,000$，$1 \le q \le 10^6$。
- $-10^9 \le a_i \le 10^9$，$-10^6 \le w_i \le 10^6$，$1 \le d \le 2 \times 10^9$。

C - Clamped Sequence 2

题解

- 不妨设在一组查询中，当前的限制区间为 $[l, r]$，如果 l 和 r 都不是某个端点 a_i，那么此时区间向左平移一个单位对答案的贡献与向右平移一个单位的贡献互为相反数，总有一个是非负的，所以可以在使得答案不劣的前提下令 l 和 r 中至少有一个是某个端点 a_i。
- 不妨设 l 是某个 a_i，记 $Ans_l(r)$ 为左端点固定是 l，题述式子的值关于右端点 r 的函数，令 $a_k > a_j > a_i$，且 a_j, a_k 之间没有其他的端点值，那么 $Ans_l(r)$ 在 $[a_j, a_k]$ 这一段是一个线性函数。

AC.

C - Clamped Sequence 2

题解（cont'd）

- 考虑 l（或者 r）为端点值时，枚举 r（或者 l）所有的无端点值区间，并把该区间内的题述式子值的线性函数的 k 和 b 算出来，那么会有 $O(n^2)$ 个形如 (u,v,k,b) 的元组，记 $x=r-l$，当 $x\in[u,v]$ 时其值为 $kx+b$。
- 由于有负权重，可能存在 $k<0$，不一定在 $x=d$ 取到最大值，因此要取前缀最大值，一个简单的处理是当 $k\le 0$ 令 $k=0$ 以及 $v\to+\infty$。
- 对 x 建立线段树，每个节点包含一些完整覆盖节点对应值域的元组，对这些（事先排序好的）元组求半平面交，然后从小到大枚举该节点内的查询值并计算答案即可，复杂度是 $O((n^2+q)\log q)$。

D - LCM Challenge

题意

- 计算 LCM$(1, 2, 3, \ldots, n) \bmod p$。
- $1 \leq n < p < 10^{10}$，其中 p 是质数。

D - LCM Challenge

题解

- 考虑 LCM 的质因数分解，有 LCM$(1,2,3,\ldots,n)=\prod_{q\le n,\ q \text{ is prime}} q^{\lfloor \log_q n \rfloor}$。
- 当 $q>\sqrt{n}$ 时有 $\lfloor \log_q n \rfloor = 1$，那么只要计算出 $\prod_{q\le n,\ q \text{ is prime}} q$，再乘以 $\prod_{q\le \sqrt{n},\ q \text{ is prime}} q^{\lfloor \log_q n \rfloor - 1}$ 就能得到答案，计算后者的复杂度是 $O(\sqrt{n})$。

AC.

牛客竞赛 AC.NOWCODER.COM

D - LCM Challenge

题解（cont'd）

- 回顾埃氏筛的过程，记 $\leq \sqrt{n}$ 的质数从小到大是 $p_1, p_2, \ldots, p_c$，记 $S_{i,j}$ 为 $\leq j$ 的数中未被 $p_1, p_2, \ldots, p_i$ 筛去的数字集合，也就是 $S_{i,j}$ 由前 i 个质数里 $\leq j$ 的数字以及所有最小质因子 $> p_i$ 且本身 $\leq j$ 的数字构成。
- 假设现在已经用 $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ 筛过了，准备用 p_i 来筛，如果 $p_i^2 > j$ 那么已经没有数字会被筛去，否则这次会被筛掉的部分应该是 $S_{i-1,j}$ 里 p_i 的倍数（除去 p_i 本身），这些数字除以 p_i 之后恰好是 $S_{i-1,\lfloor j/p_i \rfloor}$ 里剔除了 $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ 之后的部分，也就是 $S_{i-1,\lfloor j/p_i \rfloor} - S_{i-1,p_{i-1}}$。

D - LCM Challenge

题解（cont'd）

- 记 $f_{i,j}$ 为 $S_{i,j}$ 中的数字个数，$g_{i,j}$ 为数字乘积，可以列出转移：

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_{i-1,j} - (f_{i-1,\lfloor j/p_i \rfloor} - f_{i-1,p_{i-1}}) & , \quad p_i^2 \le j; \\ f_{i-1,j} & , \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$g_{i,j} = \begin{cases} g_{i-1,j} \left(\dfrac{g_{i-1,\lfloor j/p_i \rfloor} \; p_i^{f_{i-1,\lfloor j/p_i \rfloor}}}{g_{i-1,p_{i-1}} \; p_i^{f_{i-1,p_{i-1}}}} \right)^{-1} & , \quad p_i^2 \le j; \\ g_{i-1,j} & , \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

D - LCM Challenge

题解（cont'd）

- 初始值 $f_{0,j} = j$，$g_{0,j} = j!$，最后 $g_{c,n}$ 即为所求的 $\prod_{q \le n,\ q \text{ is prime}} q$。
- 首先要预处理出所有 $g_{0,j} = j!$，实际上有效的 j 都形如 $\lfloor n/k \rfloor$，这里有两种预处理方法:
- 第一种方法是使用连续点值平移技巧预处理出每一段连续 $b = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个的乘积，做前缀积可以得到 $b!, (2b)!, \ldots, (b^2)!$。对于 $k \le n^{1/4}$ 利用前边预处理的结果再补上剩余的乘积项，对于 $k > n^{1/4}$ 则有 $n/k < n^{3/4}$，直接计算所有不超过 $n^{3/4}$ 的阶乘即可，复杂度是 $O(\sqrt{n} \log n + n^{3/4})$。

D - LCM Challenge

题解（cont’d）

- 第二种方法是每次从 $\lfloor n/(k+1)\rfloor!$ 扩展到 $\lfloor n/k\rfloor!$，需要补上 $n/k - n/(k+1) = O(n/k^2)$ 个乘积项，使用连续点值平移技巧可以在 $O(\sqrt{n}\log n/k)$ 的复杂度完成，这样推出所有 $\lfloor n/k\rfloor!$ 的复杂度是 $O(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\log n/k) = O(\sqrt{n}\log^2 n)$，但是由于常数较大，实际运行效率可能不如第一种方法。

D - LCM Challenge

题解（cont'd）

- 预处理初始值之后，使用数论分块的技巧维护这些状态，再使用滚动数组原地转移的技巧避免数组拷贝，可以做到 $O(n^{3/4}/\log n)$ 的转移次数，具体可以参考Min_25 筛计算质数点值的实现，但是这里每次转移的时候还需要计算逆元和质数幂。
- 由于本题是输入模数（非常量模数），如果使用高效的模乘算法，例如 Barrett 模乘算法（atcoder::dynamic_modint 使用了这一算法）或者 Montgomery 模乘算法，可能不需要进一步优化就能通过。

D - LCM Challenge

题解（cont'd）

- 实际上转移过程中的逆元和质数幂都可以进一步优化。
- 对于质数幂，观察到 p_i 的幂次不会超过 n/p_i，分块预处理幂次之后可以 $O(1)$ 计算，预处理复杂度是 $O(\sum_{i=1}^{c}\sqrt{n/p_i}) = O(n^{3/4}/\log n)$。
- 对于逆元，观察到 $g_{i,j}$ 的转移只有乘法和除法，可以同时维护 $g_{i,j}^{-1}$ 进行转移，质数幂的逆元也分块预处理。或者观察到 n 和 p 同阶，也可以使用 $O(p^{2/3}) - O(1)$ 的在线逆元算法。

E - Endless Ladders

题意

- 将所有可被表示为两个整数的平方差的正整数从小到大标号。
- 给定 a 和 b，计算 $|a^2 - b^2|$ 在上述数列中的标号。
- $1 \le a, b \le 10^9$，$a \ne b$，数据组数 $\le 10^4$。

AC.

E - Endless Ladders

题解

- 考虑哪些数字可以作为两个不同正整数的平方差:
- 1 不能被表示，形如 $2k+1$（$k>0$）的奇数可以表示为 $(k+1)^2-k^2$。
- 形如 $4k+2$（$k\geq 0$）的偶数都不能被表示。
- 4 不能被表示，形如 $4k$（$k\geq 2$）的偶数可以表示为 $(k+1)^2-(k-1)^2$。
- 综上所述，记 $d=|a^2-b^2|$，答案就是 $\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor+\max\left(\lfloor\frac{d}{4}\rfloor-1,0\right)$。

F - Flight Tracker 2

题意

- 给定球面两点 S 和 T，计算球面上满足 P 到 $S \to T$ 的球面最短路的距离不超过 d 的点 P 构成的区域的面积。
- 球的半径 $1 \le r \le 100$，距离参数 $1 \le d \le 1\,000$，要求相对误差不超过 10^{-4}，保证 $S \to T$ 的最短路唯一，数据组数 $\le 10^4$。

F - Flight Tracker 2

题解

- $S \to T$ 的最短路是球面上的线段（大圆劣弧），联想到二维平面上，距离线段不超过 d 的点集由一个宽度为 $2d$ 的矩形区域和两个半径为 d 的半圆区域构成。
- 球面上的情况也类似，矩形在球面上体现为一个带状区域，并且两个半圆区域可能相交。
- 使用数值积分方法有可能通过，以下给出公式计算的方法。

F - Flight Tracker 2

题解（cont'd）

- 根据 d 的大小分情况讨论：
- 如果 $d < \pi r/2$，两个半圆区域不相交，合起来是完整的球冠，利用球冠面积公式可以得到 $2\pi r^2(1-\cos(d/r))$，带状区域可以看成是整个球减去两个球冠之后再截取一段角度区间，可以得到 $2\,\mathsf{dis}(S,T)\ r\ \sin(d/r)$。
- 如果 $d \geq (\pi r - \mathsf{dis}(S,T))/2$，那么区域是整个球面，答案就是 $4\pi r^2$。

F - Flight Tracker 2

题解（cont'd）

- 对于剩下的情况，带状区域完全被 S 和 T 为中心的两个球冠覆盖，可以认为区域就是两个球冠的并集，其补集是两个球冠补集（还是球冠）的交集，答案就是 $4\pi r^2$ 减去两个球冠的交集面积。
- 两个球冠的交集面积的计算和二维平面上两个圆的交集面积的计算也比较类似，就是利用扇形面积减去三角形面积来计算弓形面积，要把平面上的计算在球面上实现，此处不展开公式推导，详请可以参考这个讨论。

G - Symmetry Intervals

题意

- 给定一个长度为 n 的字符串 S，你需要回答 q 个查询。
- 对于每个查询，给定一个字符串 T 和一个整数 a （$1 \le a \le n - |T| + 1$），你需要计算有多少个区间 $[u, v]$ （$1 \le u \le v \le |T|$）满足 $S_{a+x-1} = T_x$ 对每个 $x \in [u, v]$ 都成立。
- $1 \le n, q \le 10^5$，$1 \le |T| \le n$，$1 \le \sum |T| \le 10^6$。

G - Symmetry Intervals

题解

- 对于每次查询，可以求出一个长度为 $|T|$ 的 bool 数组 F，其中 $F_i = [S_{a+i-1} = T_i]$ $(i \in \{1, 2, \cdots, |T|\})$。然后每个 F_i 对答案的贡献就是从 F_i 开始往前 true 连续段的长度，即 $v = i$ 时合法的 u 的个数，边扫描边维护即可。
- 复杂度是 $O(n + \sum |T|)$。

H - Symmetry Intervals 2

题意

- 给一个长度为 n 的二进制字符串 S 和 q 个查询，查询有两种：
- 给定两个整数 l, r（$1 \le l \le r \le n$），翻转每个 $i \in [l, r]$ 的二进制位 S_i。
- 给定三个整数 l, a, b（$1 \le l \le n, 1 \le a, b \le n - l + 1$），计算有多少个区间 $[u, v]$（$1 \le u \le v \le l$）满足 $S_{a+x-1} = S_{b+x-1}$ 对每个 $x \in [u, v]$ 都成立。
- $1 \le n, q \le 10^6$，第 2 类查询个数不超过 $2\,500$。

H - Symmetry Intervals 2

题解

- 整体思路跟上一个题一样，只不过直接暴力是 $O(nq)$ 的，要考虑优化。
- 考虑定一个位数 b，预处理所有 b 个二进制位所构成的串的 (l, r, a) 信息，即从左往右有连续 l 个 1，从右往左有连续 r 个 1，这个串本身全 1 子串的个数是 a，这部分复杂度是 $O(2^b)$ 的。然后算答案的话就可以利用预处理的信息对每个块进行快速合并了。
- 这样就可以考虑按 b 分块来优化询问，复杂度可以降到 $O(\frac{nq}{b} + 2^b)$，但由于 n 和 q 都有 10^6，这个做法想要通过也会比较困难。

H - Symmetry Intervals 2

题解（cont'd）

- 考虑到第 2 类查询个数不超过 $2\,500$，所以核心在于把处理第 1 类查询的复杂度降下来，只需要打一下翻转标记，等到了处理第 2 种查询的时候再扫一遍就行，额外就是要处理一下部分翻转的块的这种边界情况。
- 记 q_2 为第 2 种查询的个数，那么复杂度是 $O(\frac{nq_2}{b} + q + 2^b)$。

I - Iron Bars Cutting

题意

- 有 n 根铁棒按照顺序焊接成一根长铁棒，其中第 i 根铁棒长度是 a_i，现在要将这根长铁棒重新切成 n 根。
- 每次可以选择一根铁棒，选取一个焊点将其切割成两根铁棒，记两根铁棒的长度分别为 l_1 和 l_2。这次切割的不平衡度定义为 $|l_1 - l_2|$，代价定义为 $\min\{l_1, l_2\} \times \lceil \log_2(l_1 + l_2) \rceil$。

I - Iron Bars Cutting

题意（cont'd）

- 要求 $n-1$ 次切割的不平衡度单调不降，并且最小化这 $n-1$ 次切割的总代价。对每个 $i=1,2,\ldots,n-1$ 计算第一次切割在第 i 和 $i+1$ 根铁棒之间的焊点时的最小总代价，或判断无解。
- $2 \le n \le 420$，多组数据的 n 之和不超过 420。

I - Iron Bars Cutting

题解

- 观察到切割的过程实际上构成了一棵区间树，在 $n-1$ 个非叶子节点上都记录下对应切割的不平衡度，那么当且仅当每个节点上记录的值都不小于非叶子的子节点上的值时，存在 $n-1$ 次切割的顺序满足不平衡度单调不降。
- 必要性显然，充分性考虑从根节点开始按照拓扑序每次取最小值即可。

I - Iron Bars Cutting

题解

- 记 $f_{l,r,m}$ 为将区间 $[l, r]$ 切割成 $[l, m]$ 和 $[m+1, r]$ 之后，将 $[l, r]$ 完全切割的最小代价，通过状态定义可以知道这次切割的不平衡度。
- 按照区间 $[l, r]$ 的长度从小到大转移，假设当前在考虑 $f_{l,r,m}$，朴素的转移是从 $[l, m]$ 和 $[m+1, r]$ 这两个区间里分别枚举切割的位置，复杂度是 $O(n^4)$，难以通过。
- 一个优化方式是将每个 $[l, r]$ 的 $f_{l,r,m}$ 序列按不平衡度排序然后做一个前缀最小值，就可以在 $[l, m]$ 和 $[m+1, r]$ 对应的序列里二分出最优转移，复杂度是 $O(n^3 \log n)$，注意一下常数就有可能通过。

I - Iron Bars Cutting

题解

- 利用长度都是正整数的性质可以进一步优化复杂度到 $O(n^3)$。
- 记 $g_{l,r,m}$ 为 $f_{l,r,m}$ 在 $[l, m]$ 的最优转移，$h_{l,r,m}$ 为 $f_{l,r,m}$ 在 $[m+1, r]$ 的最优转移，那么有 $f_{l,r,m} = g_{l,r,m} + h_{l,r,m} + \text{cost}(l, r, m)$。
- 假设已经对 $[l, r]$ 算出所有 $f_{l,r,m}$，就可以将 $[l, r]$ 作为某个区间 $[l, \tilde{r}]$（$\tilde{r} > r$）切割得到的左子区间，用 $f_{l,r,m}$ 来更新一系列 $g_{l,\tilde{r},r}$。

I - Iron Bars Cutting

题解

- 具体来说，当 $\tilde{r}$ 从 $r+1$ 开始增大时，将 $[l,\tilde{r}]$ 切割成 $[l,r]$ 和 $[r+1,\tilde{r}]$ 的不平衡度会先递减后递增，那么 $\tilde{r}$ 从分界点分别往两侧遍历时不平衡度就是递增的，对应 m 的可行范围也会不断往两侧扩大，记录一个最小值即可。
- 类似地可以完成 $f_{l,r,m}$ 到 $h_{\tilde{l},r,l-1}$ （$\tilde{l}<l$）的转移。
- 由于新开了辅助数组，可能会占用更多的空间，需要注意优化空间常数。

J - Museum Construction

题意

- 给一座 n 个房间的博物馆，房间之间通过双向走廊连接，房间和走廊的连接处有一扇门。如果一个房间 u 有 d_u 扇门，那么要将这 d_u 扇门按照 $1, 2, \ldots, d_u$ 标号。游览的时候，如果是从房间 u 出发，那么从标号为 1 的门离开房间 u。如果是从走廊通过标号为 i 的门进入房间 u，那么从标号为 $i \bmod d_u + 1$ 的门离开房间。现在要构造一种标号方式，使得不论从哪个房间开始游览，总能经过所有的走廊。
- $3 \le n \le 2 \times 10^5$，$1 \le d_u \le 3$。

J - Museum Construction

题解

- 每条走廊看成是两个方向的通道，那么走过一个通道之后，要走的下一个通道是唯一确定的，上一个通道也是唯一确定的，可以将这些通道连成很多个环。
- 那么首要目标是通过改变门标号来得到一个包含所有走廊的环（自然也经过所有房间），之后只要让每个房间第一次走出去的通道属于这个环。
- 不难发现改变只有一扇门或者两扇门的房间的门标号都不会影响环的连接方式，只有翻转三扇门的房间的门标号才会影响环的连接方式。

J - Museum Construction

题解（cont'd）

- 翻转三扇门的房间的门标号对环的连接方式的影响有两种情况:
  1. 连出去的三个通道分别属于三个不同的环，这是最理想的情况，翻转门标号会把三个环合并成一个环。合并之后三个通道会属于相同的环，再翻转门标号又会分开成三个环，当然是没必要这么做。
  2. 连出去的三个通道属于两个不同的环 C_1 和 C_2，一定有两个通道属于同一个环，不妨设为 C_1，翻转门标号之后 C_1 上从其中一个通道离开房间到再次回来房间的一段环会被接到 C_2 上。

J - Museum Construction

题解（cont'd）

- 先任取一个最长的环 C，从环上任意一个房间 u 开始:
  - 如果 u 属于前述第 1 种情况，翻转门标号，同时更新环的信息。
  - 否则如果 u 属于前述第 2 种情况，并且 C 对应第 2 种情况中的 C_2，也翻转门标号，同时更新环的信息。
  - 否则继续检查 C 上 u 的下一个节点，直到 C 上所有节点都不属于前述的两种情况。
- 由于 C 一直是最长的环，并且每次翻转门标号之后都会严格变长，上述过程一定会结束，使用链表维护环的信息可以做到复杂度 $O(n)$。

J - Museum Construction

题解（cont'd）

- 这时如果存在走廊不被 C 包含，总能找到一个这样的走廊 (u, v) 使得 C 经过房间 u，那么 u 必然有三扇门。这个走廊对应的两个方向的通道 $u \to v$ 和 $v \to u$ 必然属于同一个环 $\widetilde{C}$，否则当前 u 属于第 1 种情况，产生矛盾。此时由于 u 有三扇门，经过通道 $v \to u$ 进入 u 之后必然要从某个通道 $u \to w$（$w \neq v$）离开，这个通道也属于 $\widetilde{C}$，那么此时 u 属于第 2 种情况，并且 C 对应第 2 种情况中的 C_2，也产生矛盾。
- 更多详情和扩展可以参考这篇论文。

K - Museum Acceptance

题意

- 给一座 n 个房间的博物馆，房间之间通过双向走廊连接，房间和走廊的连接处有一扇门。如果一个房间 u 有 d_u 扇门，那么要将这 d_u 扇门按照 $1, 2, \ldots, d_u$ 标号。游览的时候，如果是从房间 u 出发，那么从标号为 1 的门离开房间 u。如果是从走廊通过标号为 i 的门进入房间 u，那么从标号为 $i \bmod d_u + 1$ 的门离开房间。现在给出了一种标号方式，要分别计算从每个房间开始游览，能经过多少个不同的走廊。
- $3 \leq n \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq d_u \leq 3$。

K - Museum Acceptance

题解

- 每条走廊看成是两个方向的通道，那么走过一个通道之后，要走的下一个通道是唯一确定的，上一个通道也是唯一确定的，可以将这些通道连成很多个环。
- 计算每一个环内有多少个不同的走廊，这样从每个房间开始游览时，根据第一次走出去的通道所在的环，就可以知道这次游览能经过多少个不同的走廊，复杂度 $O(n)$。

L - Numb Numbers

题意

- 给 n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，有 q 次查询，每次令 $a_p \leftarrow a_p + v$ 之后计算有多少个数严格小于其他 $n-1$ 个数之中的至少 $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 个。
- $3 \le n \le 2 \times 10^5$，$1 \le q \le 2 \times 10^5$，多组数据的 n 之和与 q 之和都不超过 5×10^5。

L - Numb Numbers

题解

- 维护所有数从小到大排序后的有序数列，找出第 $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 大值 x，答案就是 $< x$ 的数字个数。
- 维护的方法比较多，可以使用两个 std::map 分别维护较小的数和较大的数，也可以离线询问之后离散化可能出现的数字之后使用树状数组或者线段树维护，也可以直接使用平衡树（例如 __gnu_pbds ::tree）维护。
- 复杂度 $O((n+q)\log(n+q))$。

THANKS!

AC.NOWCODER.COM