📖 **proof**

待证命题

给定 n 组三维整数点坐标 (q_i, r_i, s_i)，满足对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $q_i + r_i + s_i = 0$。令 q', r', s' 分别是原始坐标序列 q, r, s 经过升序排序后得到的新序列。我们需要证明以下恒等式：

$$\min_{Q+R+S=0} \sum_{i=1}^{n} (|q_i - Q| + |r_i - R| + |s_i - S|) = \sum_{i=1}^{n} |q'_i + r'_i + s'_i|.$$

为方便起见，记

- **LHS**：$LHS = \min_{Q+R+S=0} \sum_{i=1}^{n} (|q_i - Q| + |r_i - R| + |s_i - S|)$；
- **RHS**：$RHS = \sum_{i=1}^{n} |q'_i + r'_i + s'_i|$。

证明

我们将分别证明 $LHS \geq RHS$ 与 $LHS \leq RHS$。

第一部分：证明 $LHS \geq RHS$

该部分无需关心最优的 (Q, R, S)，只需说明**任意**满足 $Q + R + S = 0$ 的三元组 (Q, R, S) 的成本都不小于 RHS。

1. **排序不变性**
   对于**固定**的 (Q, R, S)，

   $$\sum_{i=1}^{n} (|q_i - Q| + |r_i - R| + |s_i - S|)$$

   只与多重集 $\{q_i\}, \{r_i\}, \{s_i\}$ 有关，而与其次序无关。
   因此可以把 q, r, s 替换为排序后的 q', r', s'，仍有

   $$LHS = \min_{Q+R+S=0} \sum_{i=1}^{n} (|q'_i - Q| + |r'_i - R| + |s'_i - S|).$$

2. **引入 u_i**
   令

$$u_i := q_i' + r_i' + s_i', \qquad i = 1, \dots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum q_i + \sum r_i + \sum s_i = 0, \qquad RHS = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

3. **符号序列**
设 $\delta_i = \operatorname{sgn}(u_i)$，则

$$RHS = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta_i.$$

4. **代数变换与三角不等式**
对于任意满足 $Q + R + S = 0$ 的三元组，

$$\begin{aligned} RHS &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i (q_i' + r_i' + s_i') \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i (q_i' - Q + r_i' - R + s_i' - S) \qquad (\text{因为 } Q + R + S = 0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i (q_i' - Q) + \delta_i (r_i' - R) + \delta_i (s_i' - S). \end{aligned}$$

利用 $|\delta_i| \le 1$ 与三角不等式，

$$\begin{aligned} RHS &\le \sum_{i=1}^{n} |\delta_i||q_i' - Q| + |\delta_i||r_i' - R| + |\delta_i||s_i' - S| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |q_i' - Q| + |r_i' - R| + |s_i' - S|. \end{aligned}$$

该不等式对所有可行 (Q, R, S) 均成立，故对最小值也成立，即

$$RHS \le LHS.$$

第二部分：证明 $LHS \le RHS$

只需**构造**一个满足 $Q + R + S = 0$ 的三元组 $(\hat{Q}, \hat{R}, \hat{S})$，使得对应成本等于 RHS；因为 LHS 是最小值，自然有 $LHS \le \text{该成本} = RHS$。

1. **关键观察**
把 q, r, s 各自升序排序后，

$$u_i := q_i' + r_i' + s_i', \qquad i = 1, \dots, n$$

形成**非降**序列（因为 q', r', s' 均非降）。
因此符号序列

$$\delta_i := \operatorname{sgn}(u_i) \in \{-1, 0, 1\}$$

也是非降的——存在唯一整数 t 使得

$$\delta_1 = \cdots = \delta_t = -1, \quad \delta_{t+1} = \cdots = \delta_{t+z} = 0, \quad \delta_{t+z+1} = \cdots = \delta_n = 1$$

（其中 z 为 0 的个数，可为 0）。

2. **构造区间**
定义三条开区间

$$\begin{aligned} I_q &= (q_t',\ q_{t+1}'), \\ I_r &= (r_t',\ r_{t+1}'), \\ I_s &= (s_t',\ s_{t+1}') \end{aligned}$$

（边界情形：若 $t = 0$ 则左端点为 $-\infty$；若 $t = n$ 则右端点为 $+\infty$）。
对任意 $Q \in I_q, R \in I_r, S \in I_s$ 都有

$$\operatorname{sgn}(q_i' - Q) = \delta_i, \quad \operatorname{sgn}(r_i' - R) = \delta_i, \quad \operatorname{sgn}(s_i' - S) = \delta_i.$$

3. **利用区间相交构造可行解**
需找到 Q, R, S 同时满足

$$Q + R + S = 0, \qquad Q \in I_q,\ R \in I_r,\ S \in I_s.$$

等价于

$$Q \in I_q,\ R \in I_r, \quad \text{且} \quad S = -Q - R \in I_s,$$

即

$$Q + R \in -I_s = (-s_{t+1}',\ -s_t').$$

考察两个区间的和

$$I_q + I_r = (q_t' + r_t',\ q_{t+1}' + r_{t+1}').$$

因为 $u_t = q_t' + r_t' + s_t' < 0$（若 $t \ge 1$）且 $u_{t+1} \ge 0$（若 $t < n$），
有

$$q_t' + r_t' < -s_t', \qquad q_{t+1}' + r_{t+1}' \ge -s_{t+1}'.$$

于是区间 $I_q + I_r$ 与 $-I_s$ 必定相交，故存在

$$(Q,R)\in I_q\times I_r \quad \text{使} \quad Q+R\in -I_s.$$

取 $\hat{Q}=Q,\hat{R}=R,\hat{S}=-Q-R$ 即可。

4. **计算该解的代价**
   对如此构造的三元组，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(|q_i'-\hat{Q}|+|r_i'-\hat{R}|+|s_i'-\hat{S}|\right) &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i(q_i'-\hat{Q})+\delta_i(r_i'-\hat{R})+\delta_i(s_i'-\hat{S}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i u_i \;-\; (\hat{Q}+\hat{R}+\hat{S})\sum_{i=1}^{n}\delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}|u_i| = RHS.\end{aligned}$$

   因此

$$LHS\le RHS.$$

结论

结合第一部分与第二部分，得证

$$\min_{Q+R+S=0}\sum_{i=1}^{n}(|q_i-Q|+|r_i-R|+|s_i-S|)=\sum_{i=1}^{n}|q_i'+r_i'+s_i'|.$$