阵列信号处理 第五讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxxxxxxxx（同微信）

本次课内容

1. 最大似然（ML）法
2. 空间平滑法去相干

本次课内容

1. 最大似然（ML）法
2. 空间平滑法去相干

相关数学知识

概率（Probablity）和统计（Statistics）

概率问题： 已知一个模型和参数，如何去预测模型产生的结果。

比如： 研究如何养猪（模型是猪），选好了品种、喂养方式和猪棚环境等（选择参数），我想预测养出来的猪大概有多肥，肉质如何（预测结果）

✓ 概率是在已知模型的基础上，对其他样本数据进行预测。

统计问题：有一堆数据，利用这堆数据估计模型和参数。

比如：买了一堆肉，通过观察判断认定是猪肉（**确定模型**，实际工程中通过观察数据推测模型为高斯分布、指数分布等），然后进一步研究判定猪的品种、圈养猪还是网易猪等（**推测模型参数**）。

✓ **统计是在已知数据的前提下，进行模型的归纳与推断。**

Lary Wasserman 在《All of Statistics》的序言里有说过：

Statistics: Given the information in your hand, what is in the pails?

Probability: Given the information in the pail, what is in your hand?

似然（likelihood）函数

似然和概率意思相近。字典上的解释：

The likelihood of something happening is how likely it is to happen.

对于函数 $P\left(x\middle|\theta\right)$ ，x 表示具体数据，θ 表示模型的参数。

- 如果 θ 已知，x 未知，该函数为概率函数（probability function），表示对于不同观测数据 x 出现的概率；
- 如果 x 已知，θ 未知，该函数为似然函数（likelihood function），表示对于不同模型参数，出现 x 数据的概率。

最大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）

给定观测数据，评估模型参数！

例：统计全国人口身高。首先假设身高服从正态分布，但均值和方差未知。通过采样，获取部分人身高，然后利用**最大似然估计**来获取上述正态分布中均值和方差。

首先，假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为独立同分布采样，θ 为模型参数，f 为所采用模型，则在参数为θ 情况下采样发生的概率为：

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \middle| \theta\right) = f\left(x_1 \middle| \theta\right) \times f\left(x_2 \middle| \theta\right) \times \cdots \times f\left(x_n \middle| \theta\right)$$

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \middle| \theta\right) = f\left(x_1 \middle| \theta\right) \times f\left(x_2 \middle| \theta\right) \times \cdots \times f\left(x_n \middle| \theta\right)$$

此时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 已知， θ 未知，故似然函数定义为：

$$L\left(\theta \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \middle| \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_n \middle| \theta\right)$$

实际应用中，往往两边取对数，得到对数似然：

$$\ln L\left(\theta \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \ln\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(x_n \middle| \theta\right)\right]$$

所谓最大似然即为最大对数似然，即 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \arg\max_{\theta} L\left(\theta \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$

例题： 设 $x \sim N\left(\mu, \ \sigma^2\right)$ ，μ 和 σ 为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应样本，求 μ 和 σ 的最大似然估计。

解： x 的概率密度为 $f\left(x_i \middle| \mu, \ \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

其似然函数为 $\ln L\left(\mu, \ \sigma^2 \middle| x\right) = \ln\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$

取对数，得 $\ln L\left(\mu, \ \sigma^2 \middle| x\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2$

求偏导可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu} \ln L\left(\mu, \ \sigma^2 \middle| x\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L\left(\mu, \ \sigma^2 \middle| x\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \end{aligned}$$

高斯随机变量 $x \sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

高斯随机向量 $\mathbf{x} \sim N\left(\bar{\mathbf{x}},\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\right)$

$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}$ **为 x 自协方差矩阵**

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\right]$$

复高斯随机向量 $\mathbf{x} \sim CN\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}},\ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\right)$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^m \left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\right|} \exp\left[-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^{\mathrm{H}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})\right]$$

矩阵分析与应用

P41

最大似然法空间谱估计基本原理： $\mathbf{x}(n)=\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}(n)$

模型已知，即噪声为复平稳高斯白噪声，可得

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}=E\{\mathbf{x}(n)\}=\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}&=E\left\{\left[\mathbf{x}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right]\left[\mathbf{x}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{H}}\right\}\\&=E\left\{\left[\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right]\left[\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{H}}\right\}\\&=E\left\{\mathbf{n}(n)\mathbf{n}^{\mathrm{H}}(n)\right\}\\&=\sigma_{\mathrm{N}}^{2}\mathbf{I}\end{aligned}$$

矩阵分析与应用

P43

L 次采样（快拍）联合概率密度函数为　　γ 为所有参数集合

$$f\left\{\mathbf{x}(1),\mathbf{x}(2),\cdots,\mathbf{x}(L)|\gamma\right\}=\prod_{n=1}^{L}\frac{1}{\pi^{M}\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}\right|}\exp\left[-\left(\mathbf{x}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{x}}^{-1}\left(\mathbf{x}(n)-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right)\right]$$

$$=\prod_{n=1}^{L}\frac{1}{\left(\pi\sigma_{\mathrm{N}}^{2}\right)^{M}}\exp\left[-\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^{2}/\sigma_{\mathrm{N}}^{2}\right]$$

取对数　$$L\left[\theta,\sigma_{N}^{2},\mathbf{s}(n)\right]=\ln f\left\{\mathbf{x}(1),\mathbf{x}(2),\cdots,\mathbf{x}(L)|\gamma\right\}$$

$$=\ln\left\{\prod_{n=1}^{L}\frac{1}{\left(\pi\sigma_{\mathrm{N}}^{2}\right)^{M}}\exp\left[-\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^{2}/\sigma_{\mathrm{N}}^{2}\right]\right\}$$

$$=-ML\ln\sigma_{\mathrm{N}}^{2}-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{N}}^{2}}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^{2}$$

$$L\left[\theta,\sigma_N^2,\mathbf{s}(n)\right]=-ML\ln\sigma_{\mathrm{N}}^2-\frac{1}{\sigma_{\mathrm{N}}^2}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^2$$

先估计σ_N^2 使似然函数最大，得：

$$\hat{\sigma}_N^2=\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^2$$

代入原似然函数：

$$\max_{\theta,\ \mathbf{s}(n)}\left[-ML\ln\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^2\right]$$

先固定 θ 估计$\mathbf{s}(n)$

$$\hat{\mathbf{s}}(n)=\left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{x}(n)\quad n=1,2,\cdots,N$$

$$\max_{\theta,\ \mathbf{s}(n)}\left[-ML\ln\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n)\right|^{2}\right]$$

$$\hat{\mathbf{s}}(n)=\left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{x}(n)\quad n=1,2,\cdots,N$$

将$\hat{\mathbf{s}}(n)$代回似然函数，求关于 θ 的估计。

$$\min_{\theta}\left[\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\hat{\mathbf{s}}(n)\right|^{2}\right]$$

$$\min_{\theta}\left[\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{x}(n)\right|^{2}\right]$$

化简为：

$$\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{x}(n)-\mathbf{A}(\theta)\left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{x}(n)\right|^{2}$$

$$=\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x}(n)\right|^{2}$$

投影矩阵：$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}=\mathbf{A}(\theta)\left[\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{A}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)$

$$=\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\left|\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{x}(n)\right|^{2}$$

正交投影矩阵：$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}=\mathbf{I}-\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$

$$=\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(n)\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{x}(n)$$

$$=\frac{1}{ML}\sum_{n=1}^{L}tr\left[\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(n)\right]$$

$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}=tr\left(\mathbf{y}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\right)$ 向量内积-=矩阵的迹

$$=\frac{1}{M}tr\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\sum_{n=1}^{L}\frac{1}{L}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(n)\right]\right\}$$

$$\hat{\mathbf{R}}=\sum_{n=1}^{L}\frac{1}{L}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(n)\right]$$

$$=\frac{1}{M}tr\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right\}$$

因此，求 $\min_{\theta} tr\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}\hat{\mathbf{R}}\right\}$ 或 $\max_{\theta} tr\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}\right\}$

$$\theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_P\}$$

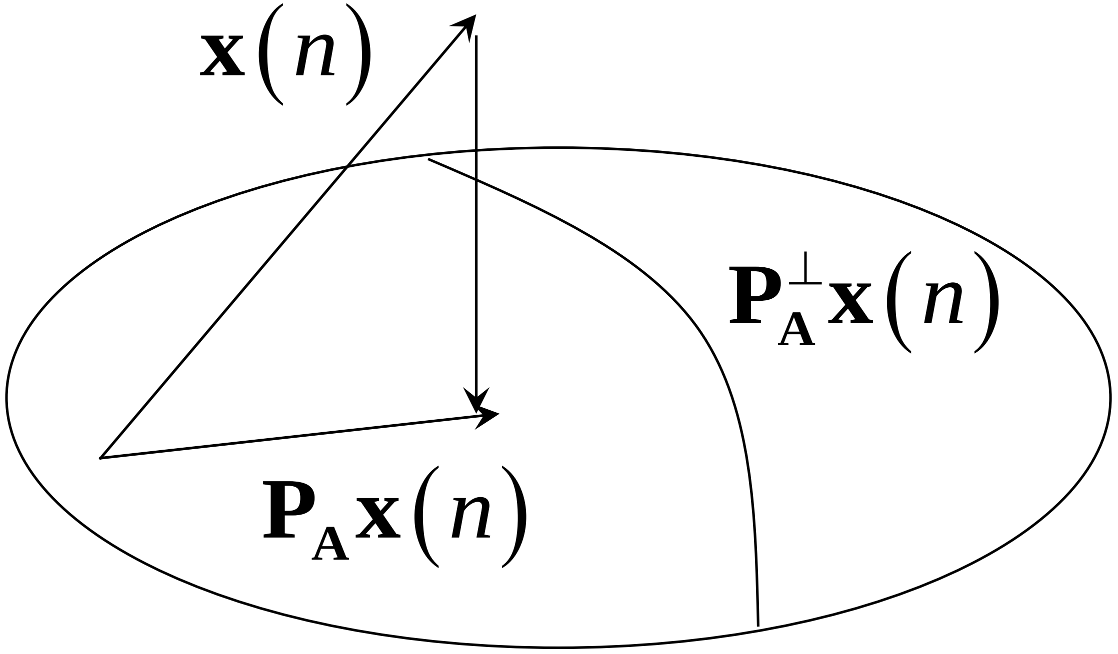
数学意义：P 维寻优

$$\hat{\mathbf{R}}=\sum_{n=1}^{L}\frac{1}{L}\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(n)\right]$$

物理意义：搜索 P 维信号子空间去拟合阵列数据 $\mathbf{x}(n)\quad n=1,2,\cdots,N$

使得投影误差最小

几何意义：



特例：单个信号源情况 $\mathbf{x}(n)=\mathbf{a}(\theta)\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}(n)$

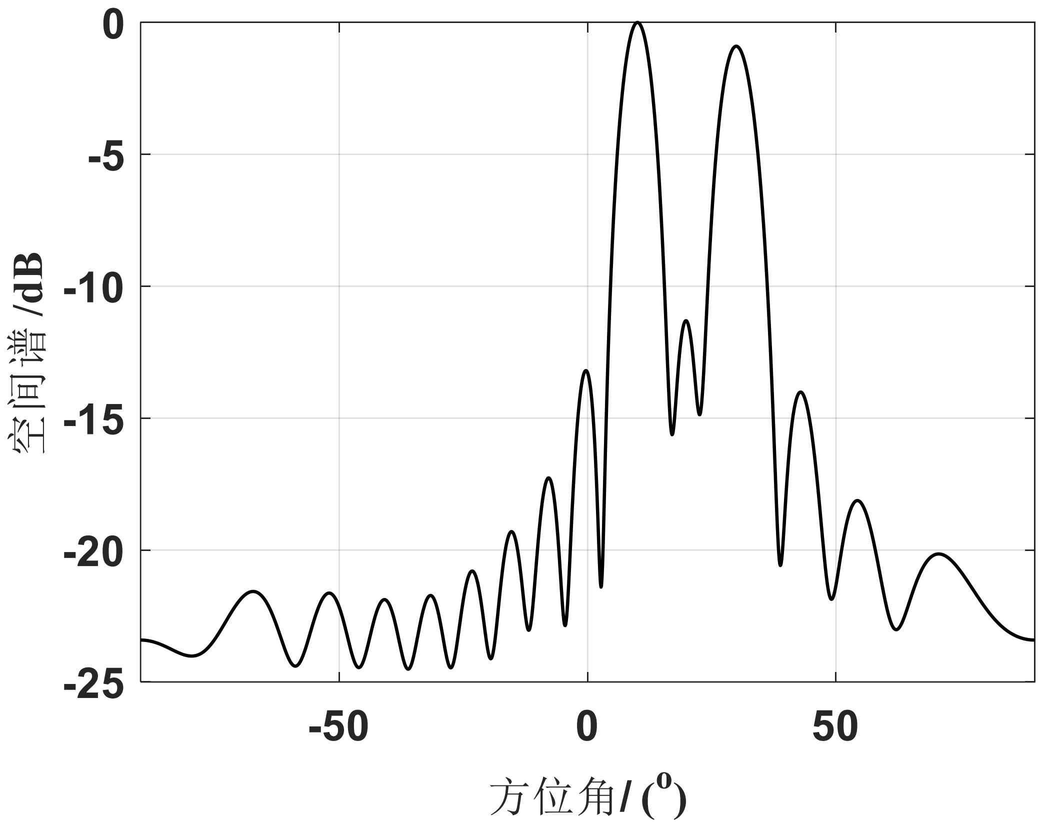
$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}}=\mathbf{a}(\theta)\left[\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{a}(\theta)\right]^{-1}\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)=\frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)}{\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\mathbf{a}(\theta)}$$

$$\max_{\theta}\left[tr\left(\mathbf{P}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}\right)\right]=\max_{\theta}\left[tr\left(\frac{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)}{M}\hat{\mathbf{R}}\right)\right]=\max_{\theta}\left[\frac{\mathbf{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta)}{M}\right]$$

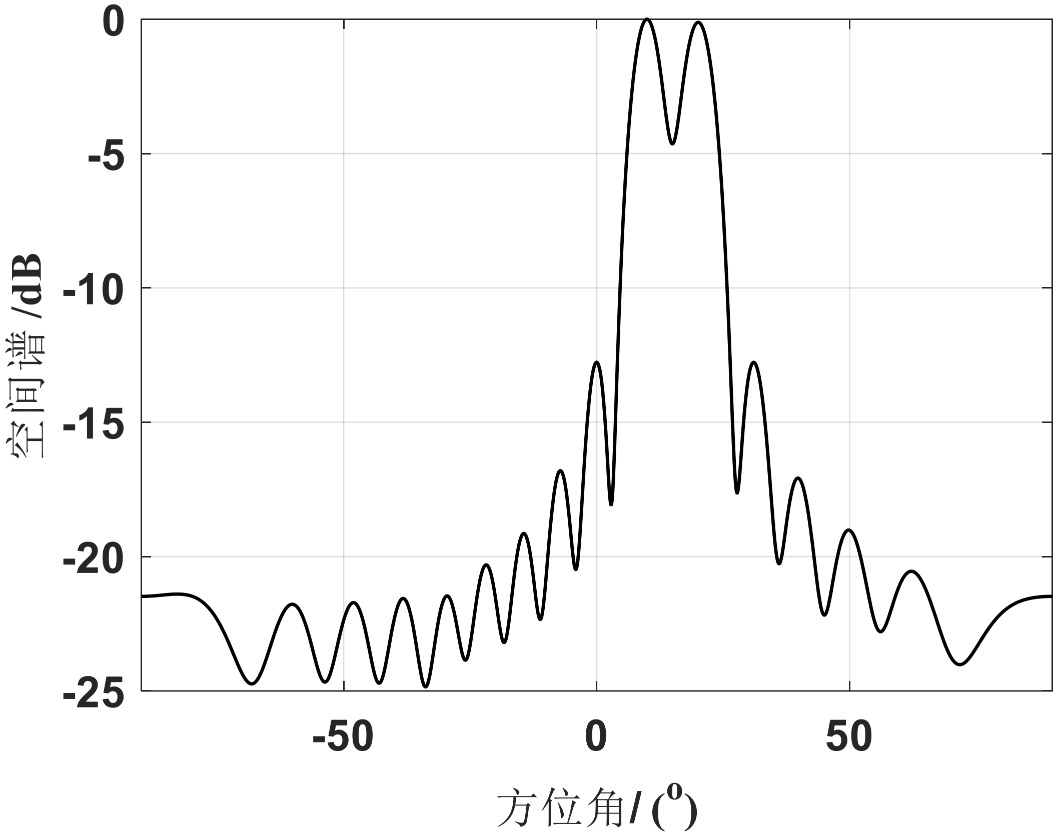
即常规波束扫描方法（CBF）

一般多信源时，ML法涉及多维优化问题，计算量很大。

最大似然方法（$M = 16$ / $d = \lambda/2$）



目标来向 [10º, 30º]



目标来向 [10º, 20º]

本次课内容

1. 最大似然（ML）法
2. 空间平滑法去相干

1. 相关性
2. 相干源问题
3. 空间平滑法
4. 空间平滑法去相关性能分析

高分辨空间谱估计多基于对阵列协方差特性的分析，阵列的协方差矩阵为：

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta) + \sigma_{\mathrm{N}}^{2}\mathbf{I}$$

- 若 S 由 P 个独立信源，则特征分解后可得到 P 个大特征值；
- 若 S 中部分信源相干，则特征分解后大特征值小于 P，即相干信号合并为一个信号，从而导致所估信源数目减少；
- 原因是某些相干源的特征矢量不正交于噪声子空间，在空间谱曲线上不出现峰值，因此导致谱估计的漏报。

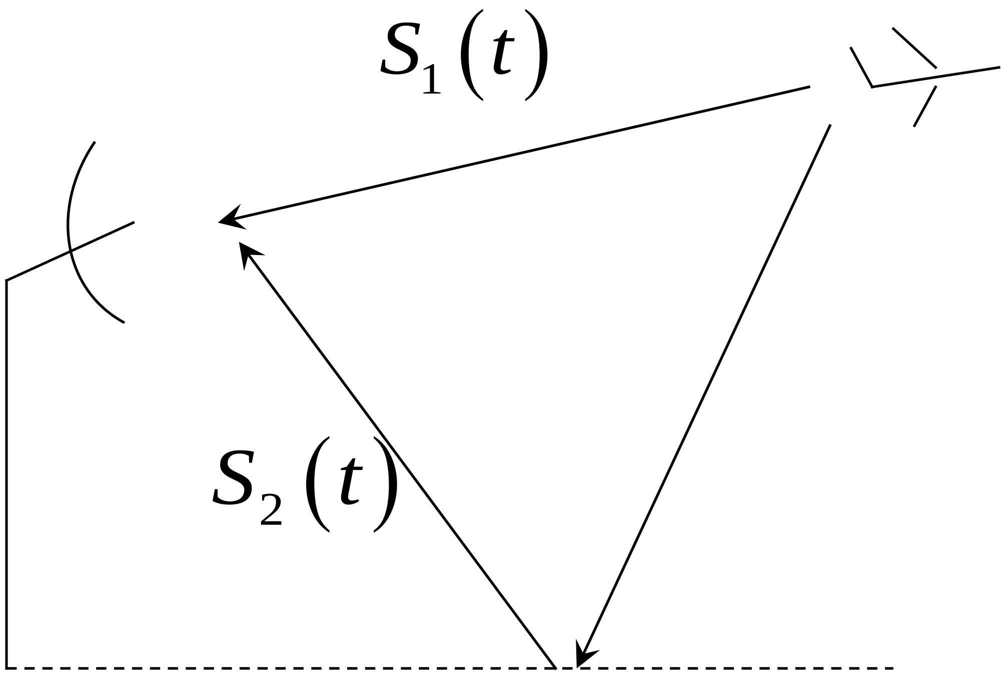
随机变量 x、y

相关系数 $\rho_{x,y} = E\left[xy^*\right] \Big/ \left\{\sqrt{E\left[|x|^2\right]}\sqrt{E\left[|y|^2\right]}\right\}$

- **若** $\rho_{x,y} = 1 \Leftrightarrow x = cy$**，其中 c 为常数；称 x 和 y 为完全相关或相干；**
- **若** $\rho_{x,y} = 0$**，称 x 和 y 不相关；**
- **若** $0 < \left|\rho_{x,y}\right| < 1$**，称 x 和 y 相关。**

例：多径传播

$$s_2(t) = ks_1(t-\tau)$$



如果是窄带信号

$$s_1(t-\tau) = s_1(t)e^{j\varphi}$$

此时，$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 相干。

对多径传播，各径分量间是否相干取决于信号带宽，当延迟时间 τ 大于相干时间 （$\tau_0 = 1/B$），则不相干。

1. 相关性
2. 相干源问题
3. 空间平滑法
4. 空间平滑法去相关性能分析

以 $P=2$ 为例

阵列信号 $$\mathbf{x}(n)=\mathbf{A}(\theta)\begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix}+\mathbf{n}(n)$$

阵列相关矩阵 $$\mathbf{R}=E\left[\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\right]=\mathbf{A}(\theta)E\begin{bmatrix} s_1 s_1^* & s_1 s_2^* \\ s_2 s_1^* & s_2 s_2^* \end{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)+\sigma_{\mathrm{N}}^2$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{S}}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}^*\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma}_1$: $\mathbf{S}_1$ 信号功率

$\boldsymbol{\sigma}_2$: $\mathbf{S}_2$ 信号功率

当 $|\rho_{12}|=1$，$\mathbf{R}_{\mathrm{S}}$ 秩为 1，**秩亏损。**

对任意 P，如果 P 个信源完全相关（相干），则 $\mathbf{R}_S=E\left[s(n)s^H(n)\right]$ **的秩为 1。**

$$\mathbf{x}(n)=\mathbf{a}(\theta_1)s_1(n)+\mathbf{a}(\theta_2)s_2(n)+\mathbf{n}(n)$$

当 $|\rho_{12}|=1$ **，即** $s_1(n)=cs_2(n)$

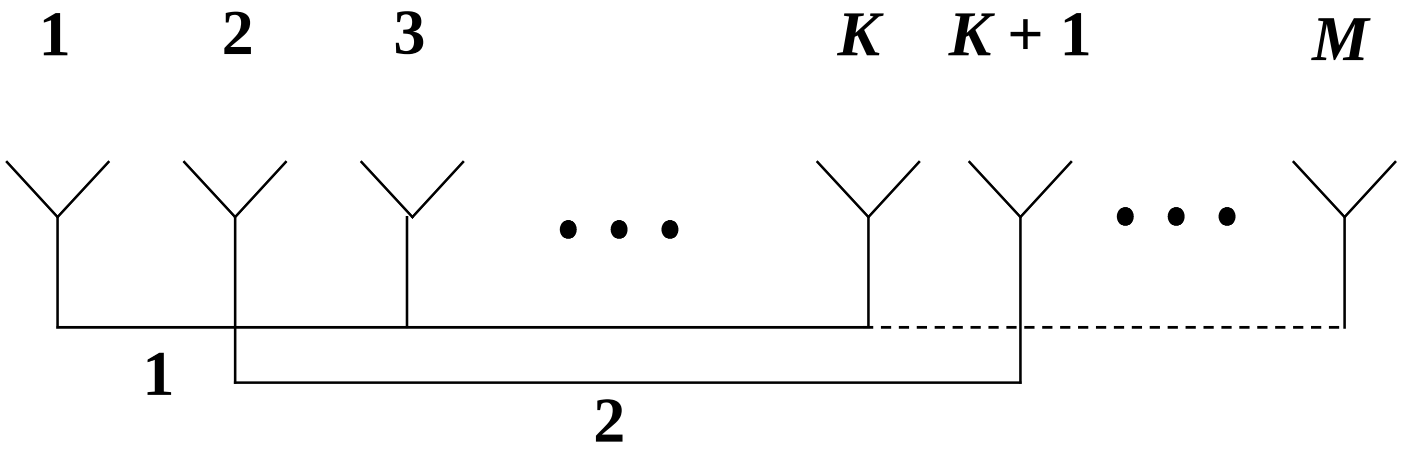
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n)&=c\mathbf{a}(\theta_1)s_2(n)+\mathbf{a}(\theta_2)s_2(n)+\mathbf{n}(n)\\&=\left[c\mathbf{a}(\theta_1)+\mathbf{a}(\theta_2)\right]s_2(n)+\mathbf{n}(n)\\&=\mathbf{b}s_2(n)+\mathbf{n}(n)\end{aligned}$$

b：称为广义阵列流形或广义导向矢量，不对应某个DOA。

若无噪声： $\mathbf{x}(n)\in span(\mathbf{b})$

1. 相关性
2. 相干源问题
3. 空间平滑法
4. 空间平滑法去相关性能分析

M 元等距线阵分成 L 个 K 元子阵 $\quad L = M - K + 1$



全阵时 $\quad \mathbf{x}(n) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n) + \mathbf{n}(n)$

其中导向矢量 $\quad \mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\pi\sin\theta} & \cdots & e^{j(M-1)\pi\sin\theta} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

第一个子阵： $\mathbf{x}_1(n)=\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}_1(n)$

其导向矢量: $\mathbf{a}_K(\theta)=\begin{bmatrix}1 & e^{j\pi\sin\theta} & \cdots & e^{j(K-1)\pi\sin\theta}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

第二个子阵: $\mathbf{x}_2(n)=\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{D}\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}_2(n)$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} e^{j\pi\sin\theta_1} & & 0 \\ & e^{j\pi\sin\theta_2} & \\ & & \\ 0 & & e^{j\pi\sin\theta_P} \end{bmatrix}_{P\times P}$$

第 L 个子阵：$\mathbf{x}_L(n)=\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{D}^{L-1}\mathbf{s}(n)+\mathbf{n}_L(n)$

$$\mathbf{D}^m\mathbf{s}(n)=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1(n)e^{j\pi m\sin\theta_1} & \mathbf{s}_2(n)e^{j\pi m\sin\theta_2} & \cdots & \mathbf{s}_P(n)e^{j\pi m\sin\theta_P}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

若 $\mathrm{s}_1(n)=c\mathrm{s}_2(n)$（相干源），则采用这种方法后破坏了相关性。

通过多个子阵，每个子阵相当于空间平移，多出的旋转因子归并到信号包括 $s_i(n)$ （不同信号由于方向不同，旋转因子不同），然后将各子阵数据在相关域平均。

第 1 个子阵： $\mathbf{x}_1(n) \Rightarrow \mathbf{R}_1 = E\left[\mathbf{x}_1(n)\mathbf{x}_1^{\mathrm{H}}(n)\right] = \mathbf{A}_K \mathbf{R}_{\mathrm{S}} \mathbf{A}_K^{\mathrm{H}} + \sigma_{\mathrm{N}}^2 \mathbf{I}$

第 2 个子阵： $\mathbf{x}_2(n) \Rightarrow \mathbf{R}_2 = E\left[\mathbf{x}_2(n)\mathbf{x}_2^{\mathrm{H}}(n)\right] = \mathbf{A}_K \mathbf{D} \mathbf{R}_{\mathrm{S}} \mathbf{D}^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_K^{\mathrm{H}} + \sigma_{\mathrm{N}}^2 \mathbf{I}$

第 L 个子阵： $\mathbf{x}_L(n) \Rightarrow \mathbf{R}_L = E\left[\mathbf{x}_L(n)\mathbf{x}_L^{\mathrm{H}}(n)\right] = \mathbf{A}_K \mathbf{D}^{(L-1)} \mathbf{R}_{\mathrm{S}} \mathbf{D}^{-(L-1)} \mathbf{A}_K^{\mathrm{H}} + \sigma_{\mathrm{N}}^2 \mathbf{I}$

空间平滑：

$$\tilde{\mathbf{R}}_L = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\mathbf{R}_i = \mathbf{A}_K\left[\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\mathbf{D}^{(i-1)}\mathbf{R}_{\mathrm{S}}\mathbf{D}^{-(i-1)}\right]\mathbf{A}_K^{\mathrm{H}} + \sigma_{\mathrm{N}}^2\mathbf{I}$$

$$= \mathbf{A}_K \tilde{\mathbf{R}}_{\mathrm{S}} \mathbf{A}_K^{\mathrm{H}} + \sigma_{\mathrm{N}}^2 \mathbf{I}$$

将该矩阵进行特征分解，得到特征矢量用于各类子空间类DOA估计方法。

可以严格证明：

$$\tilde{\mathbf{R}}_S = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\mathbf{D}^{(i-1)}\mathbf{R}_S\mathbf{D}^{-(i-1)}$$

如果 $\mathrm{R_S}$ 无全零行，对角阵 D 的对角元素不两两相等，则

$$rank\left(\tilde{\mathbf{R}}_S\right) \geq \min\left\{r+L-1, P\right\}$$

其中 r 是 $\mathrm{R_S}$ 的秩，P 是 $\mathrm{R_S}$ 的维数。

可见最坏情况下 $r = 1$，当 $L \geq P$， $rank\left(\tilde{\mathbf{R}}_S\right)=P$

直观上，平滑次数 L 越大越好，平滑去相关越好；

但是，此时 K 减小，分辨的信源数减小，从而造成孔径损失。

空间平滑法去相干

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}(\theta)E\begin{bmatrix} s_1 s_1^* & s_1 s_2^* \\ s_2 s_1^* & s_2 s_2^* \end{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\theta)+\sigma_{\mathrm{N}}^2$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{S1}}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}^*\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1\sigma_1 & \sigma_2\sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2\sigma_2 \end{bmatrix}$$

行列式为零

$$\mathbf{Ds}(n)=\left[\mathbf{s}_1(n)e^{j\pi\sin\theta_1}\quad \mathbf{s}_2(n)e^{j\pi\sin\theta_2}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{S2}}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & e^{j2\pi(\sin\theta_1-\sin\theta_2)}\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ e^{j2\pi(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}\rho_{12}^*\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

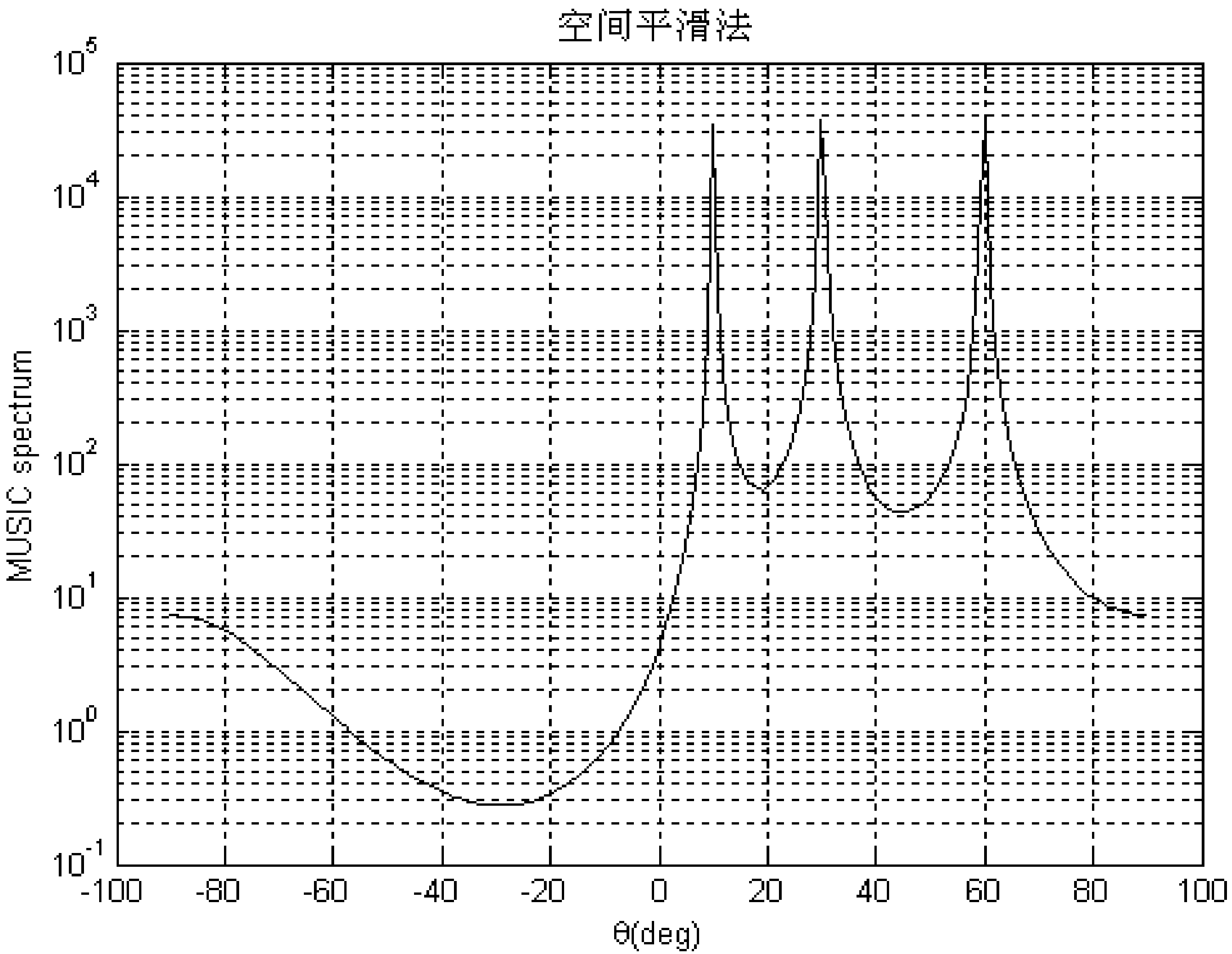
$$=\begin{bmatrix}\sigma_1\sigma_1 & e^{j2\pi(\sin\theta_1-\sin\theta_2)}\sigma_2\sigma_1\\ e^{j2\pi(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2\sigma_2\end{bmatrix}$$

行列式为零

$$\mathbf{R}_{S1}+\mathbf{R}_{S2}=\begin{bmatrix} 2\sigma_1\sigma_1 & \left(1+e^{j2\pi\left(\sin\theta_1-\sin\theta_2\right)}\right)\sigma_2\sigma_1 \\ \left(1+e^{j2\pi\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)}\right)\sigma_1\sigma_2 & 2\sigma_2\sigma_2 \end{bmatrix}$$

行列式不为零

空间平滑法



来波方向：10º，30º，60º

1. 相关性
2. 相干源问题
3. 空间平滑法
4. 空间平滑法去相关性能分析

相干源情况： $\mathbf{R}_S$ 不满秩，空间平滑得到的 $\tilde{\mathbf{R}}_S$ 满秩。

另一种极端情况： P 个不相关源，则$\mathbf{R}_S$ 的非对角元素均为零。

问题：在相干源情况下，空间平滑后$\tilde{\mathbf{R}}_S$的非对角元素的模的减小程度如何?

$$\tilde{\mathbf{R}}_S = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{D}^{(l-1)}\mathbf{R}_S\mathbf{D}^{-(l-1)}$$

其中，第 i 行 j 列的元素为：

空间平滑法去相关性能分析

$$\tilde{r}_{S}(i,j)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}r_{S}(i,j)e^{j(l-1)\pi\sin\theta_i}e^{-j(l-1)\pi\sin\theta_j}$$

$$=r_{S}(i,j)\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}e^{j(l-1)\pi\sin\theta_i}e^{-j(l-1)\pi\sin\theta_j}$$

$$=r_{S}(i,j)F(\theta_i,\theta_j)$$

$$\left|\tilde{r}_{S}(i,j)\right|=\left|r_{S}(i,j)\right|\left|F(\theta_i,\theta_j)\right|$$

空间平滑法去相关性能分析

$$\left|F\left(\theta_i,\theta_j\right)\right| = \left|\frac{\sin \pi L \dfrac{\sin\theta_i - \sin\theta_j}{2}}{L\sin \pi \dfrac{\sin\theta_i - \sin\theta_j}{2}}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\tilde{r}_{\mathrm{S}}(i,j)\right| \le \left|r_{\mathrm{S}}(i,j)\right|$$

- **当 $i=j$ 时，** $\left|\tilde{r}_{\mathrm{S}}(i,j)\right| = \left|r_{\mathrm{S}}(i,j)\right|$ **为对角元素；**
- **当 $i\neq j$ 时，** $\left|\tilde{r}_{\mathrm{S}}(i,j)\right| < \left|r_{\mathrm{S}}(i,j)\right|$ **非对角元素，减小了相关性；**

可知：去相关能力依赖于 L 和信源波达角的正弦差 $\left(\sin\theta_i - \sin\theta_j\right)$

空间平滑法去相关性能分析

1. L 越大去相关能力越强。

2. 当 $\Delta\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ 一定时，$\sin\theta_i - \sin\theta_j \approx \Delta\theta_{ij}\cos\theta_i$

- $\theta_i \rightarrow 0^{\circ}$ 时， $\sin\theta_i - \sin\theta_j$ 较大，去相关效果较好；
- $\theta_i \rightarrow 90^{\circ}$ 时， $\sin\theta_i - \sin\theta_j$ 较小，去相关效果不明显。

L 越大去相关能力越强。

M 元等距线阵 $L = M - K + 1$

M 固定： L 增大，则 K 减小，即子阵孔径减小，导致可分辨的信源个数减少。

改进方法： 在 M 和 K 固定情况下，设法提高平滑次数 L。正反向滑动子阵。