



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

阵列信号处理 第三讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



本次课内容

1. 空间谱估计概述
2. 常规波束形成 (CBF) 法
3. Capon法
4. 多重信号分类 (MUSIC) 法



本次课内容

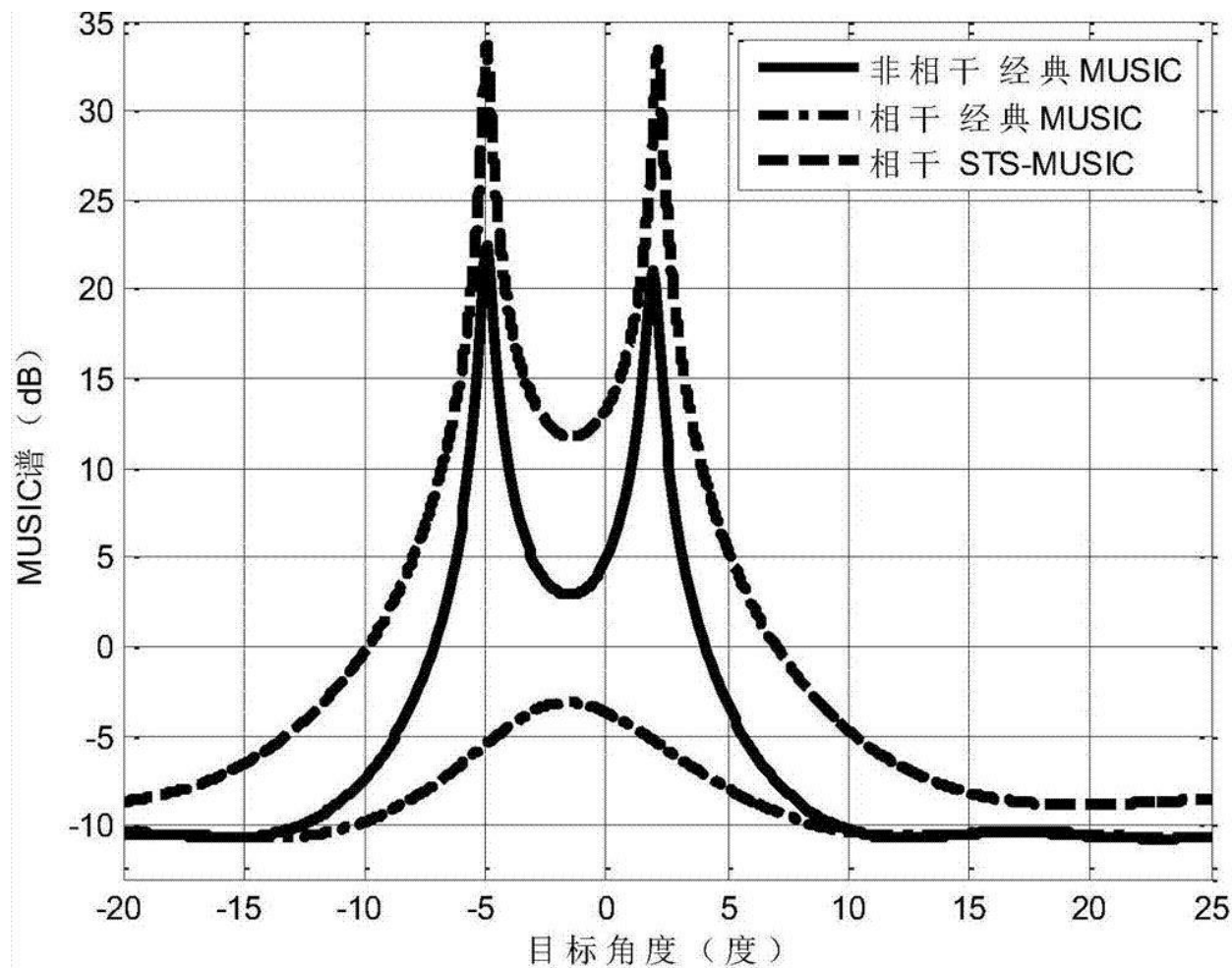
1. 空间谱估计概述
2. 常规波束形成 (CBF) 法
3. Capon法
4. 多重信号分类 (MUSIC) 法



1. 空间谱估计概述

空间谱估计：

利用电磁波信号来获取目标或信源对天线阵列的角度信息的方式，也称测向、波达方向估计（DOA）。主要应用于**雷达、通信、电子对抗和侦察**等领域。



MUSIC空间谱估计



空间谱估计发展脉络

二战时期：常规波束形成（CBF）。本质是时域傅里叶变换在空域直接应用，分辨力受限于瑞利限；

六十年代：Capon自适应波束形成（1969年）。本质将维纳（Wiener）滤波思想应用于空域处理；但未利用噪声统计特性，对分辨力提升有限；

八十年代：信号子空间类方法：多重信号分类（MUSIC）法（1986年）和旋转不变子空间（ESPRIT）法（1989年）；

九十年代：最大似然估计法（1990年）；

一零年代：压缩感知或稀疏恢复DOA方法（2006年～2015年）；

近五年：深度学习DOA方法。



连续时间阵列信号模型

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_2}{\lambda}} & & e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_P}{\lambda}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_2}{\lambda}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_P}{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_P(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad t \in [-\tau/2, \tau/2]$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$; $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times P}$; $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$; $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$



离散时间阵列信号模型

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_M(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_2}{\lambda}} & & e^{-j\frac{2\pi d \sin \theta_P}{\lambda}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_1}{\lambda}} & e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_2}{\lambda}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi(M-1)d \sin \theta_P}{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_P(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(n) \\ n_2(n) \\ \vdots \\ n_M(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n) + \mathbf{n}(n) \quad n = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\mathbf{x}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$; $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times P}$; $\mathbf{s}(n) \in \mathbb{C}^{P \times 1}$; $\mathbf{n}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$



本次课内容

1. 空间谱估计概述
2. 常规波束形成 (CBF) 法
3. Capon法
4. 多重信号分类 (MUSIC) 法



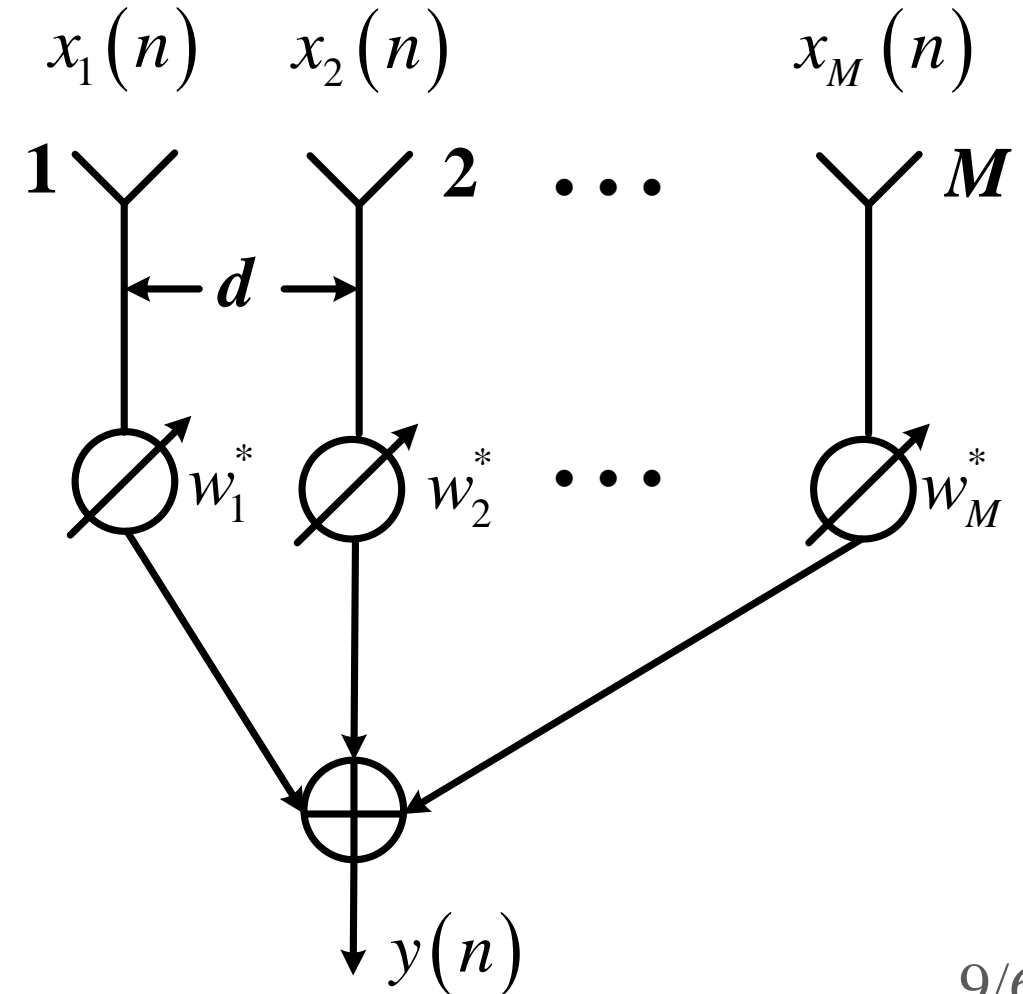
2. 常规波束形成法 (Conventional Beamforming, CBF)

各阵元权矢量

$$\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_M]^T$$

阵列输出

$$y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) = \sum_{m=1}^M w_m^* x_m(n)$$



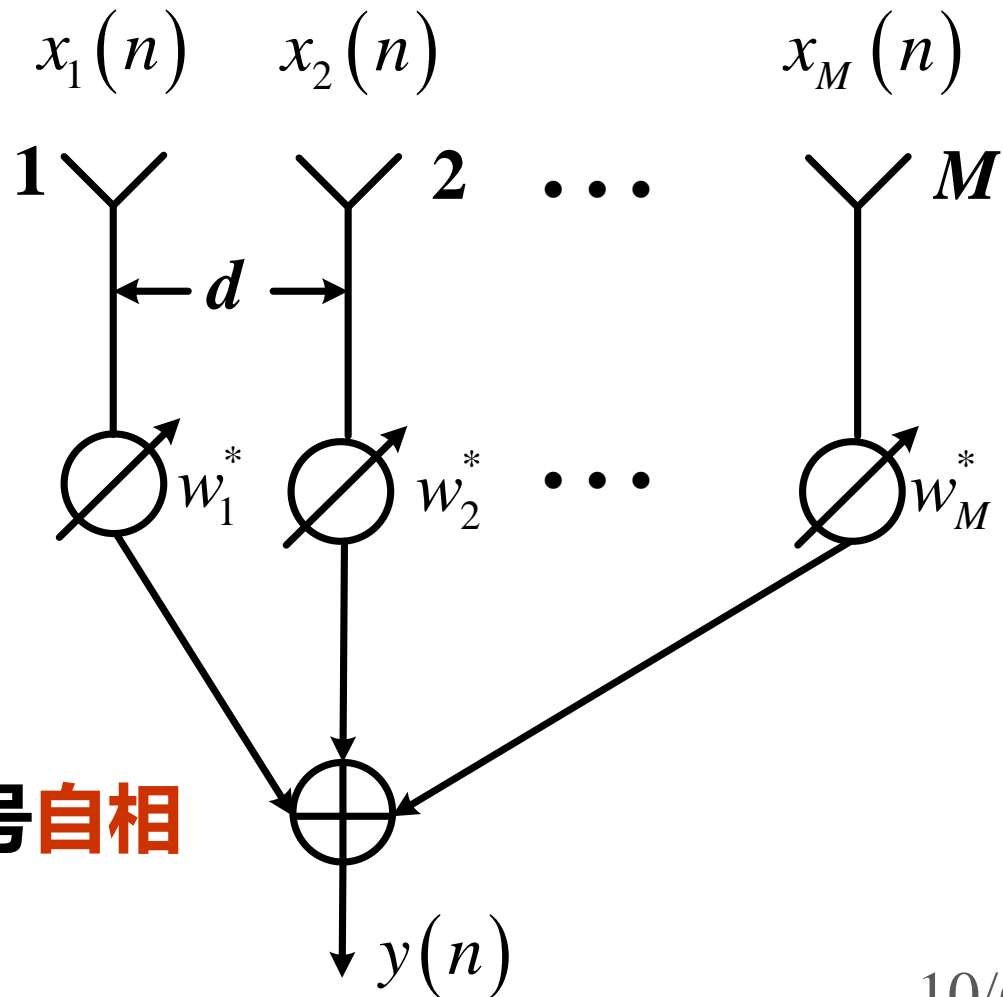


阵列输出 $y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) = \sum_{m=1}^M w_m^* x_m(n)$

阵列输出功率为

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}) &= E \left\{ |y(n)|^2 \right\} \\ &= \mathbf{w}^H E \left\{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \right\} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R} = E \left\{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \right\}$ 为阵列接收信号**自相关矩阵或**（数据标准化后的协方差矩阵）。





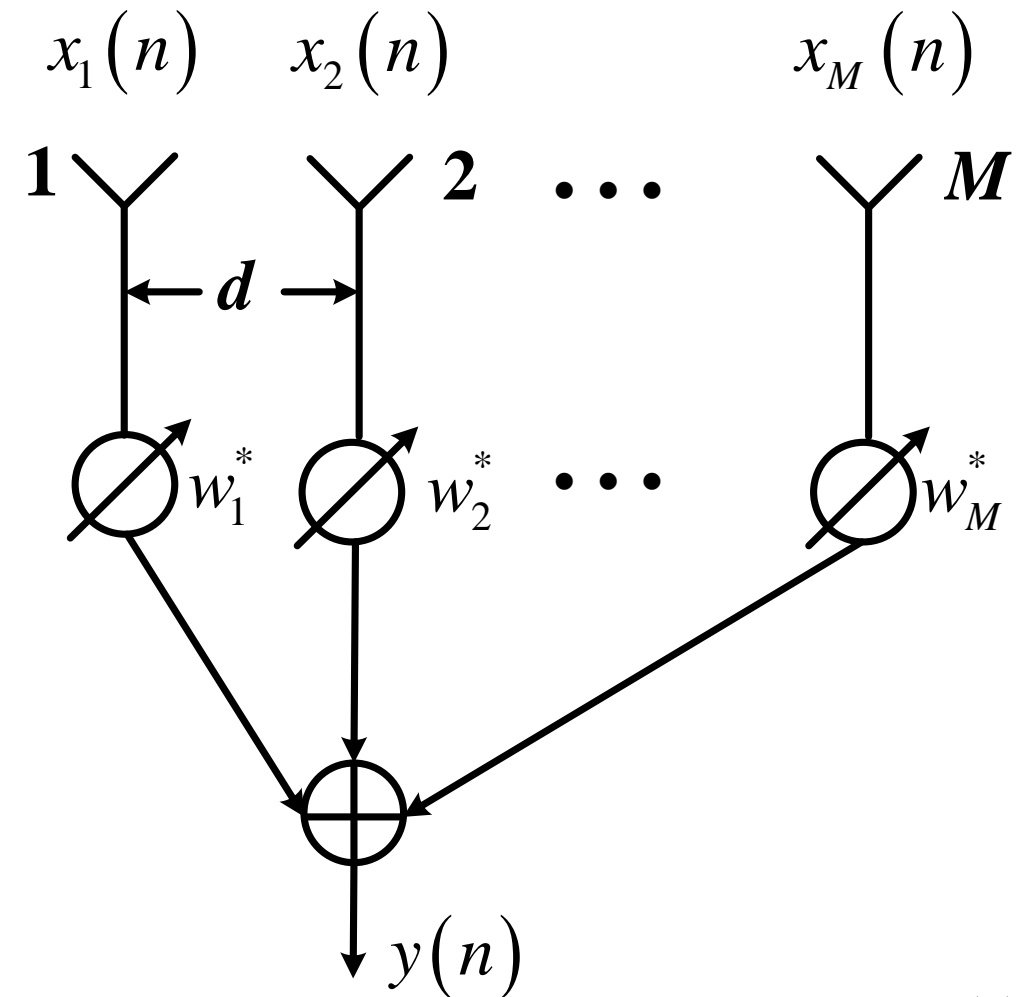
实际应用中:

$$\mathbf{R} = E \left\{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \right\}$$

未知, 可通过如下最大似然估计近似

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$$

其中, $\mathbf{x}(n)$ $n = 1, 2, \dots, N$ 为空域快拍
(snapshot)





阵列输出功率: $P(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H E \{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \} \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}$

当 $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\theta)$ 时, 即为常规波束形成 (CBF) 算法。且有

$$P(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta)$$

其中,

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi (M-1) d \sin \theta}{\lambda}} \end{bmatrix}^T$$

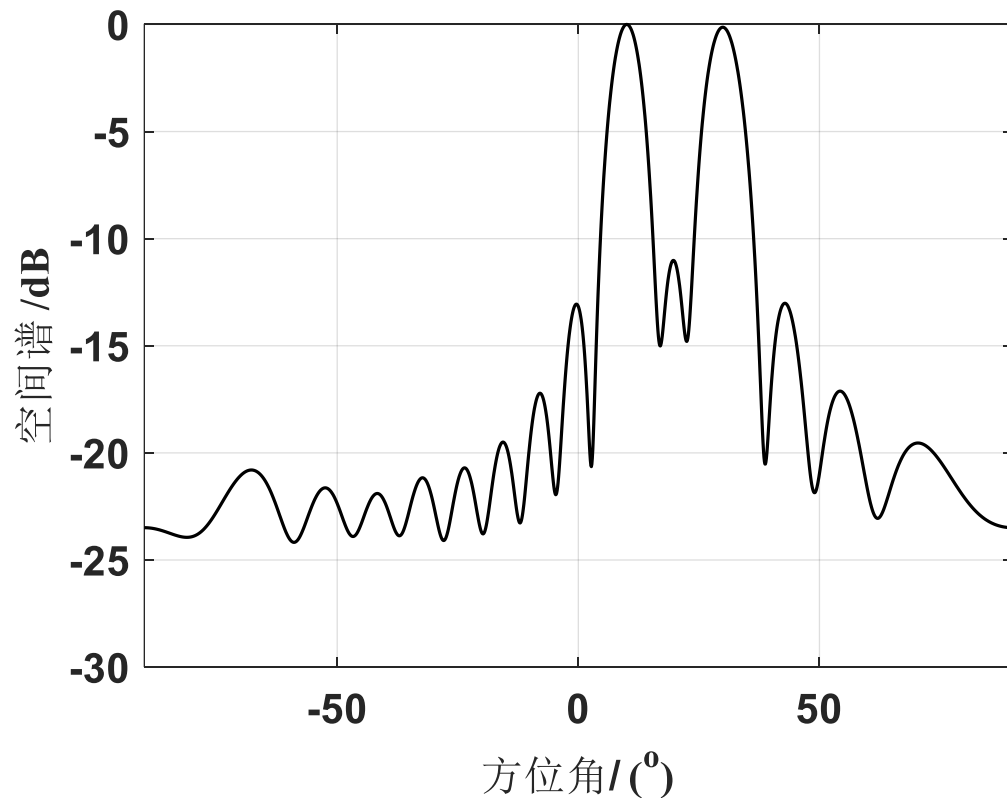
物理含义一: 对回波数据做空域傅里叶变换, 得到数据在各方向功率值;

物理含义二: 在各个角度做相参积累。

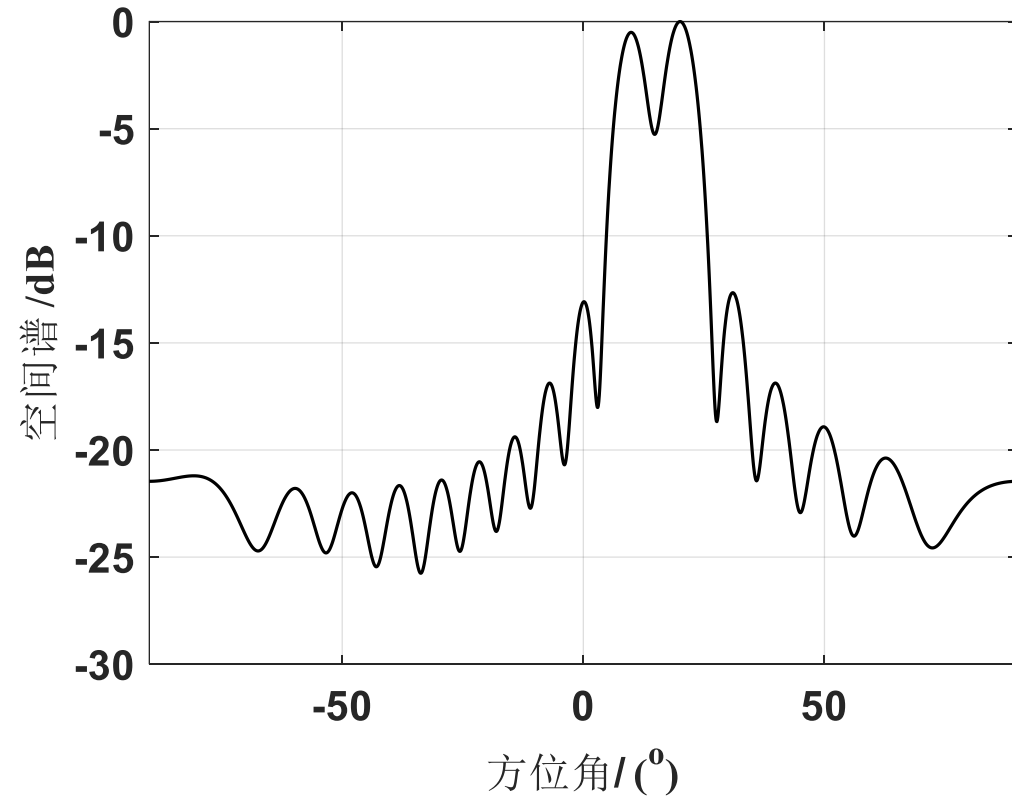


CBF 方法 ($M = 16 / d = \lambda/2$)

受限于瑞利限



目标来向 $[10^\circ, 30^\circ]$



目标来向 $[10^\circ, 20^\circ]$



本次课内容

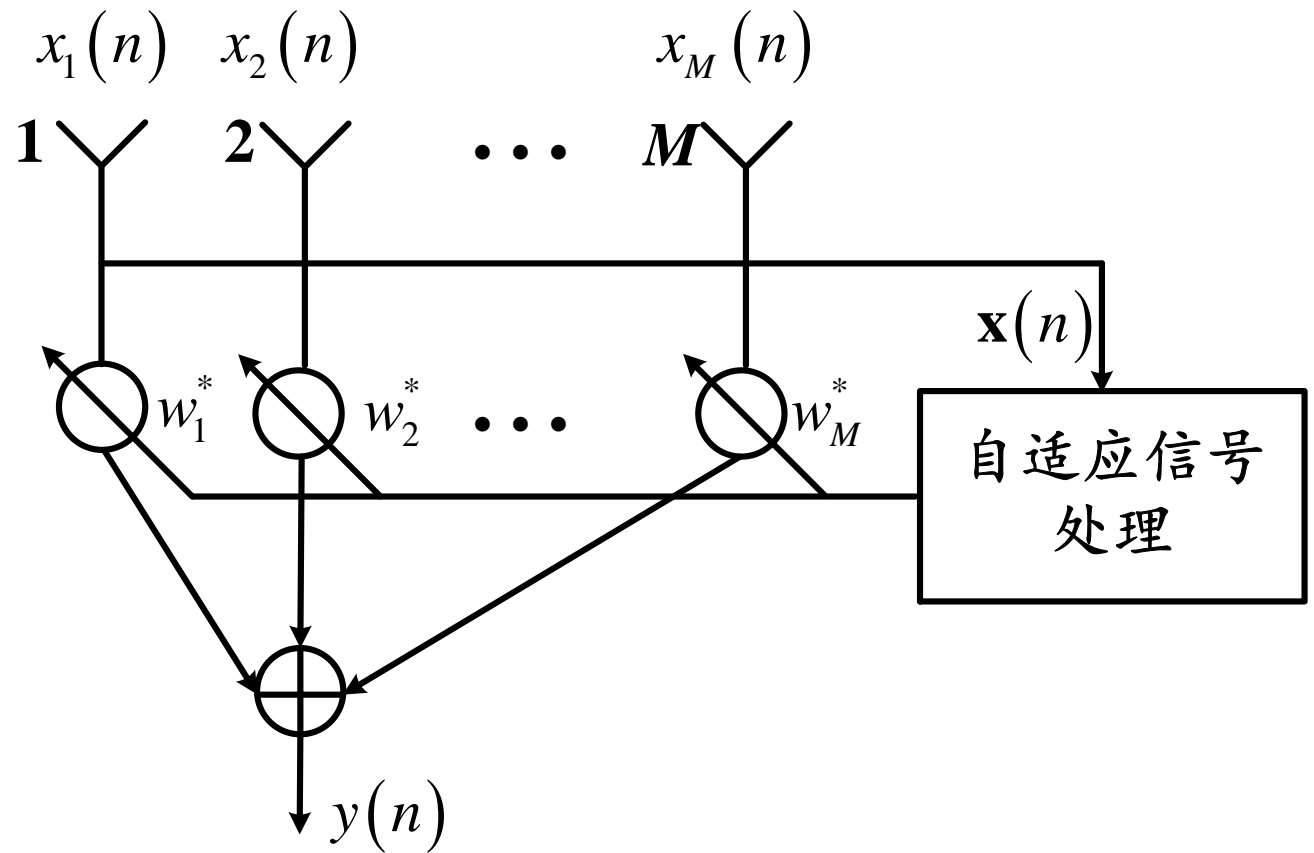
1. 空间谱估计概述
2. 常规波束形成 (CBF) 法
3. Capon法
4. 多重信号分类 (MUSIC) 法



3. Capon算法

自适应信号处理器：

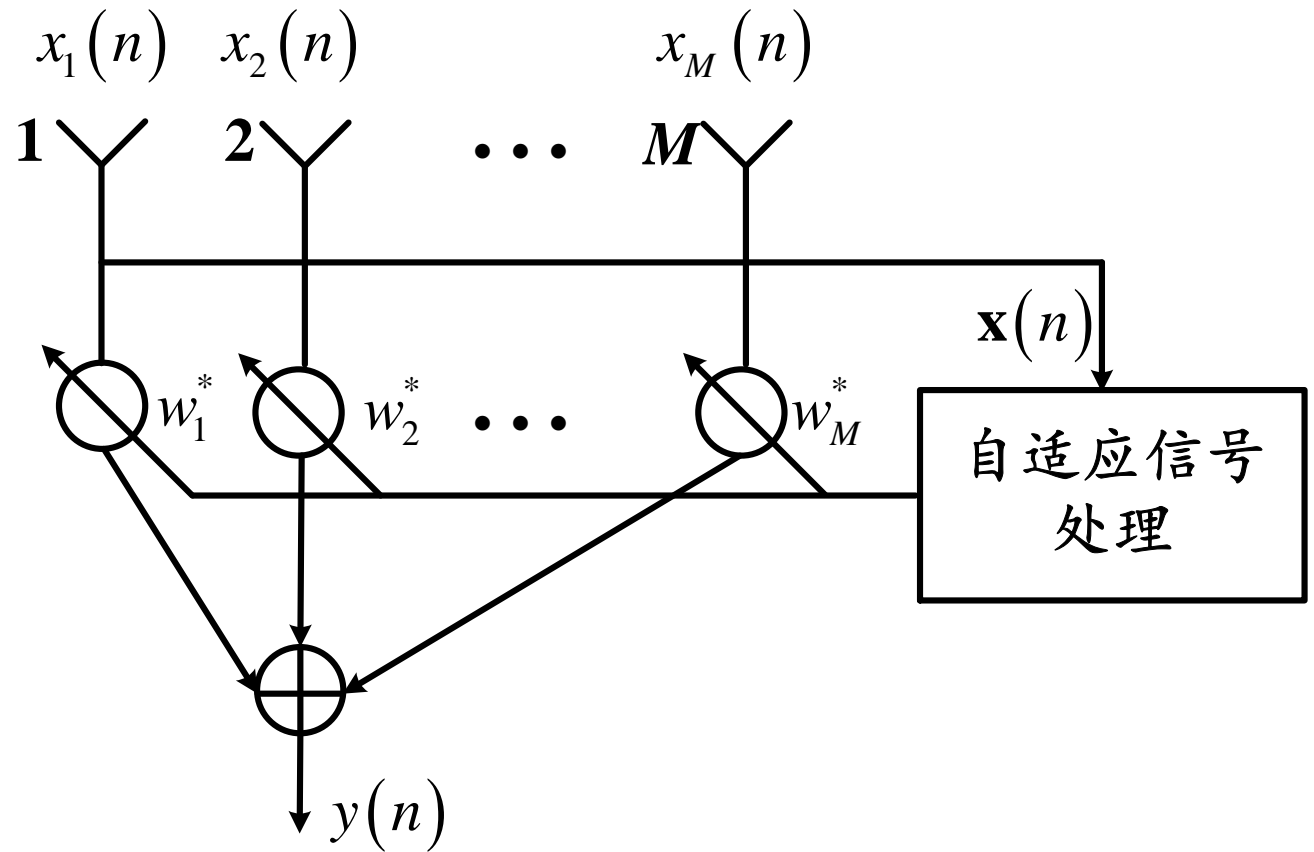
根据阵列输入信号及输出信号自适应形成权矢量，
不同权矢量可将形成的波束指向不同方向，对期望信号得到最大输出功率的方向即信号入射方向。



波束形成的最优权：

保证某确定方向 θ_d 信号能正确接收，而其他入射方向信号或干扰被完全抑制，即

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1 \end{cases}$$





数学知识：拉格朗日乘子法求解等式约束优化问题

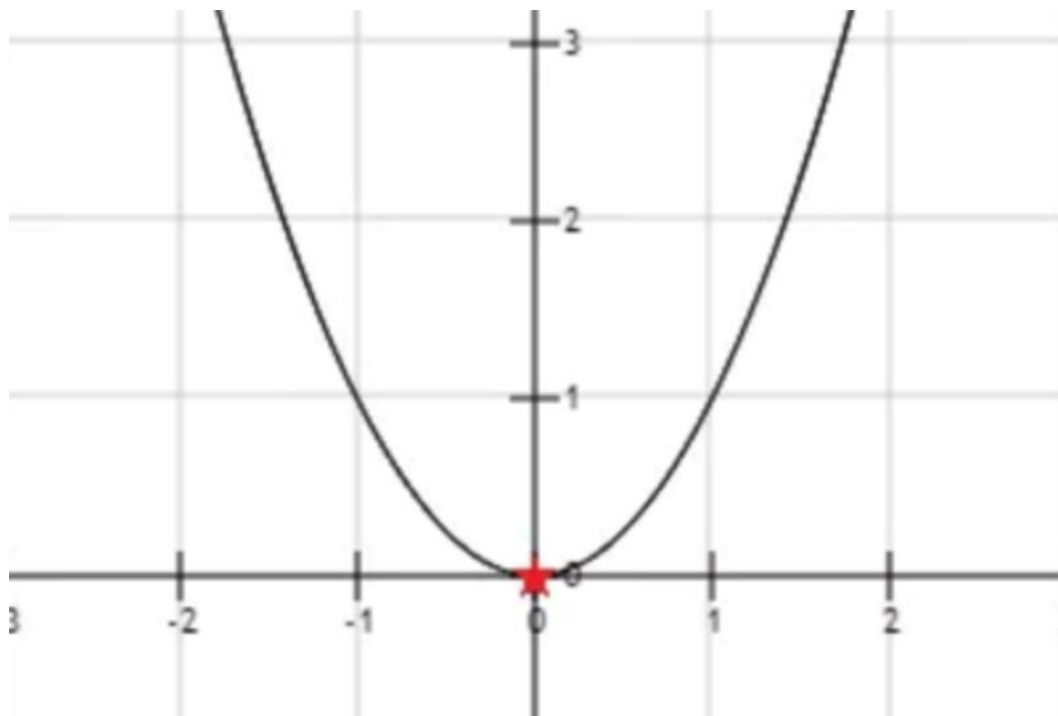
1. 无约束条件最优化问题：

$$\min_x f(x)$$

如果 $f(x)$ 是凸函数，通过求导数寻找极值。

如：

$$\min_x x^2$$





2. 等式约束条件最优化问题:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ s.t. \quad g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1 \end{cases}$$

前提: $f(x)$ 是凸函数, 可构造拉格朗日函数求解

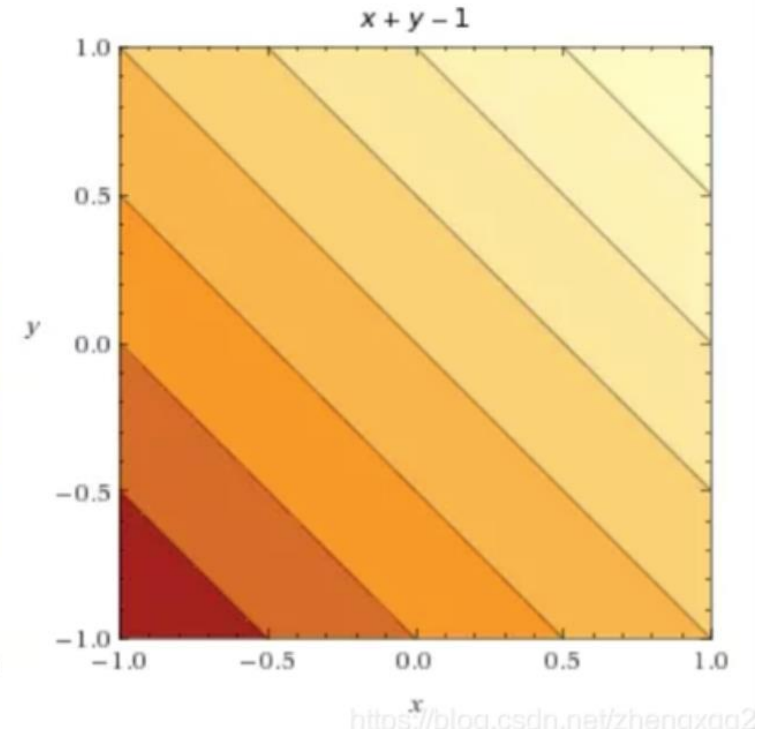
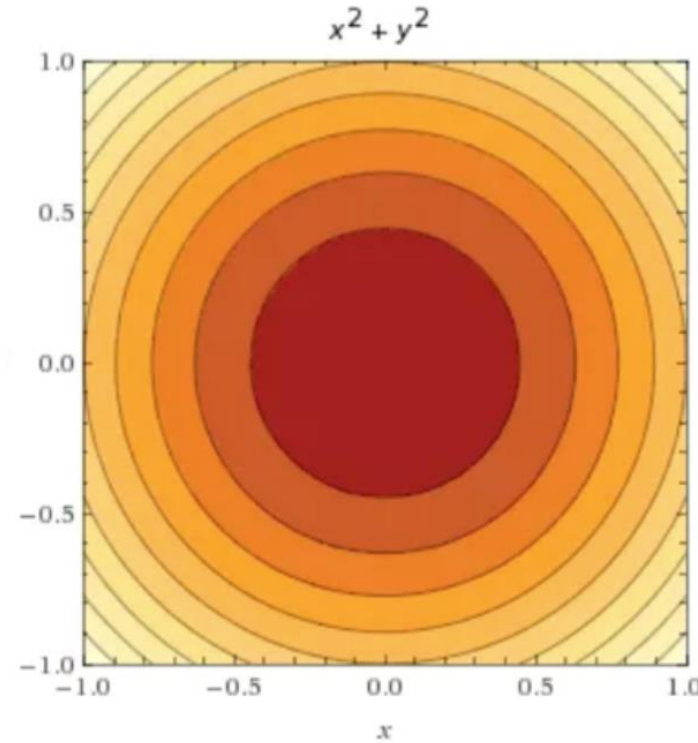
$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

拉格朗日乘子法物理含义：

$$\begin{cases} \min_{x,y} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.t. \quad g(x,y) = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

注意：

- 颜色越深的地方值越小
- 同一等高线上函数值相同





$$\begin{cases} \min_{x,y} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.t. \quad g(x,y) = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

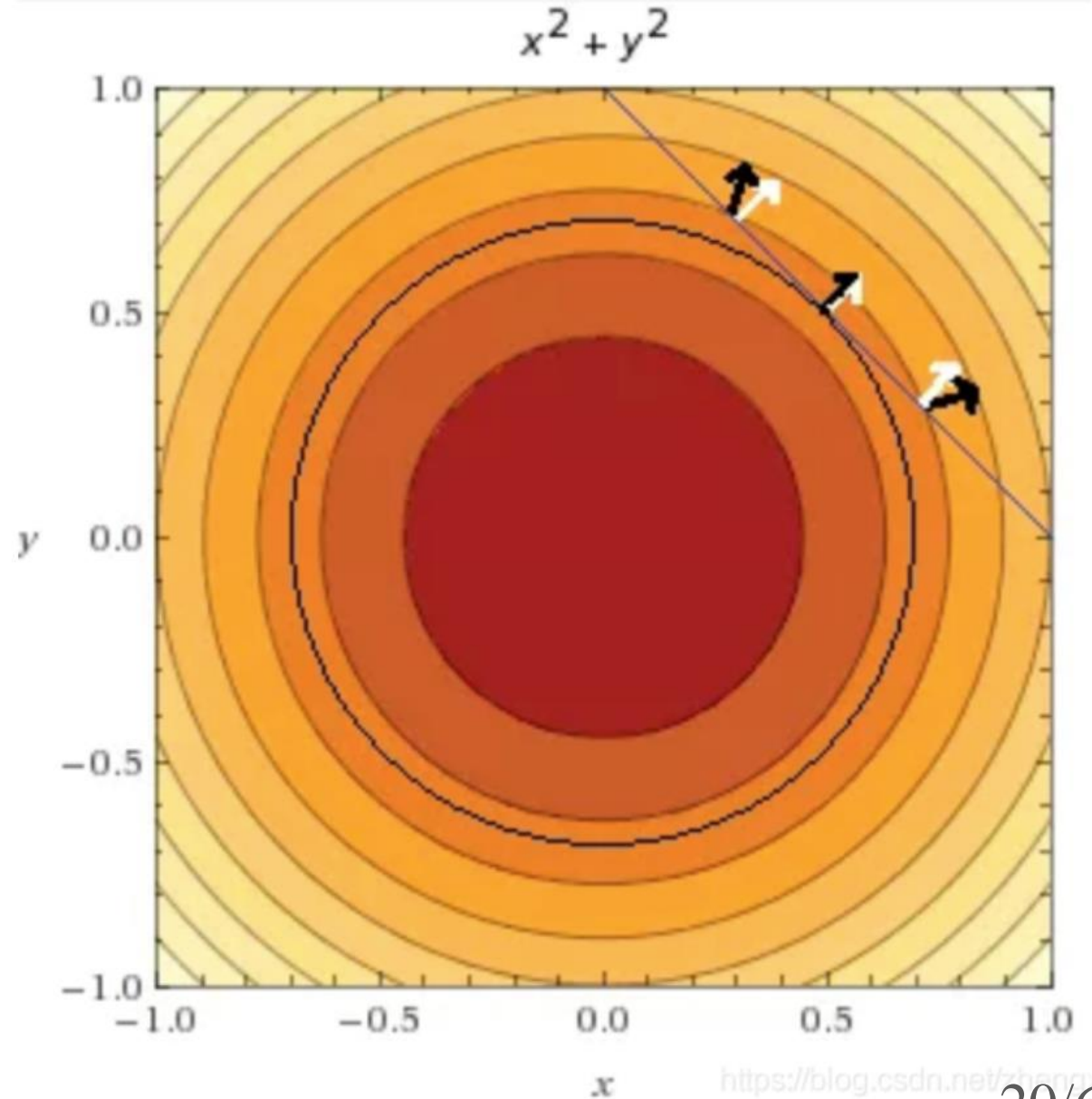
$f(x,y)$ 与 $g(x,y)=0$ 相切

或 $f(x,y)$ 梯度与 $g(x,y)$ 梯度平行

函数 $f(x,y)$ 得到最小值，即

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

其中， λ 叫作拉格朗日乘子。





$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

等价于

$$\nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} \min_{x, y} f(x, y) = x^2 + y^2 \\ s.t. \quad g(x, y) = x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

为求解该问题，定义函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

其梯度为

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y)$$



拉格朗日乘子法求解

$$L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - \lambda [\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) - 1]$$

对该目标函数中 \mathbf{w} 求偏导，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\partial \left\{ \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - \lambda [\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) - 1] \right\}}{\partial \mathbf{w}} \\ &= (\mathbf{R} + \mathbf{R}^H) \mathbf{w} - \lambda \mathbf{a}(\theta_d) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1 \end{cases}$$

矩阵求导数学知识补充：

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A}^H + \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^H \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}$$



$$\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = (\mathbf{R} + \mathbf{R}^H) \mathbf{w} - \lambda \mathbf{a}(\theta_d) = 0$$

➡ $(\mathbf{R} + \mathbf{R}^H) \mathbf{w} = \lambda \mathbf{a}(\theta_d)$

由于 \mathbf{R} 为厄米特 (Hermitian)

➡ $\mathbf{R} \mathbf{w} = \mu \mathbf{a}(\theta_d)$ ➡ $\mathbf{w} = \mu \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)$

\mathbf{w} 为Capon法最优权系数, μ 为常数, 用于归一化权系数。



$$\mathbf{w} = \mu \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d) \xrightarrow{\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1} \mu = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}$$

$$\rightarrow \mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}$$

此时，阵列输出功率为

$$P = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1}}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)} \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}$$



在实际应用中，事先不知道目标信号来向 θ_d ，因此只能通过扫描得到谱曲线

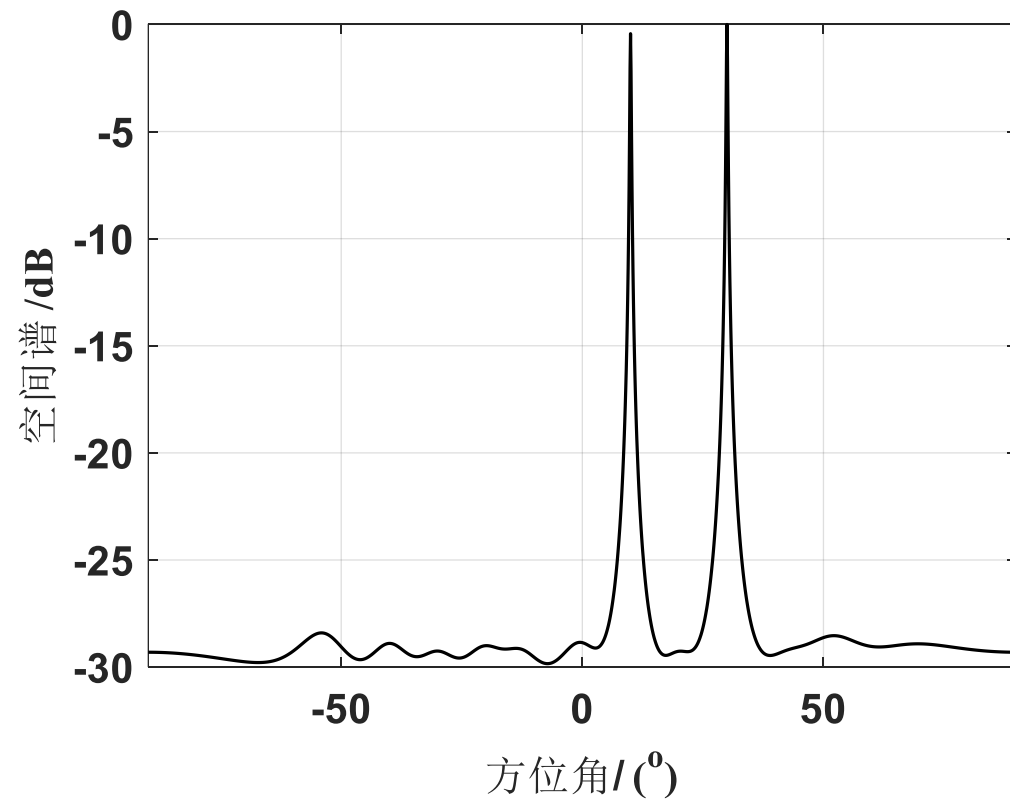
$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

该方法称为Capon法 或 最小方差无失真响应 (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR) 法

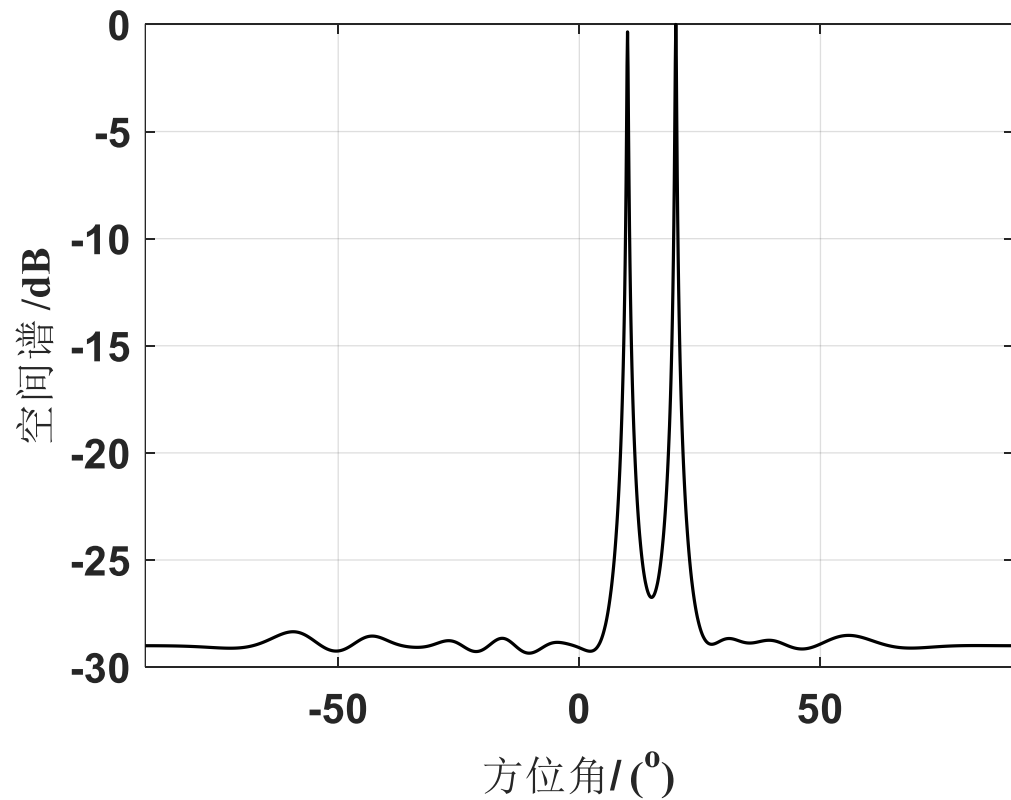
*Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis.
Proceedings of the IEEE, 1969, 57(8):1408-1418.*



Capon方法 ($M = 16 / d = \lambda/2$)



目标来向 $[10^\circ, 30^\circ]$



目标来向 $[10^\circ, 20^\circ]$



仿真实现：

1. 常规波束形成 (CBF) 法
2. Capon法



本次课内容

1. 空间谱估计概述
2. 常规波束形成 (CBF) 法
3. Capon法
4. 多重信号分类 (MUSIC) 法



3. 多重信号分类法 (Multiple Signal Classification, MUSIC)

- CBF、Capon法：均对阵列接收数据协方差矩阵直接进行处理；

$$P_{CBF}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta) \quad P_{Capon}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

- MUSIC法：将阵列接收数据协方差矩阵 \mathbf{R} 进行特征分解，得到相互正交的信号子空间和噪声子空间，然后利用该正交特性来估计信号的参数（入射方向及信号强度等）。



子空间数学知识

向量空间：以向量为元素的集合 V 称为向量空间。

闭合性：

若 $x \in V$ 和 $y \in V$ ，则 $x + y \in V$ ，即 V 在加法下闭合；

若 a_1 是一个标量， $y \in V$ ，则 $a_1 y \in V$ ，即 V 在标量乘法下闭合。

公理：

加法交换律、加法结合律、乘法结合律、乘法分配率等等



子空间定义

令 $V = \mathbb{C}^n$ 为 n 维复向量空间。考虑 m 个 n 维复向量的子集合，其中 $m < n$ 。

定义：

若 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ 是向量空间 V 的向量子集合，则 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 的所有线性组合的集合 W 称为由 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ 张成的子空间：

$$W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_m\mathbf{u}_m\}$$



子空间的基

令 W 是一向量空间。向量集合 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 称为 W 的一组基，若下列两个条件满足：

1. 子空间 W 由向量 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ 张成，即

$$W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$$

2. 向量集合 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是一线性无关的集合。



正交向量

向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 与向量 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ 正交，可表示为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta = 0$$

正交子空间： 两个子空间的任意两个向量正交。

构造正交子空间： 在空间 V 中找到两组矢量 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ 和，
 $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ 确保对任意 x_i 和 y_i 正交，那么 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ 张成的子空间必定和 $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ 张成的子空间正交。。



子空间投影定义

考虑向量空间的直和分解 $\mathbb{C}^n = S \oplus H$ 内的任意向量 $x \in \mathbb{C}^n$

若 $x = x_1 + x_2$ 满足 $x_1 \in S$ 和 $x_2 \in H$, 且 x_1 和 x_2 是唯一确定的, 则称映射 $Px = x_1$ 是向量 x 沿子空间 H 方向到子空间 S 的投影。

注：直和定义

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间, 如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$ 是唯一的, 则该和称为直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$ 。直和充要条件为 $V_1 \cap V_2 = 0$



投影算子：齐次线性算子 P 称为投影算子。

则存在唯一分解： $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x}$

正交投影算子：

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = (\mathbf{P}\mathbf{x})^H (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^H \mathbf{P}^H (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$$

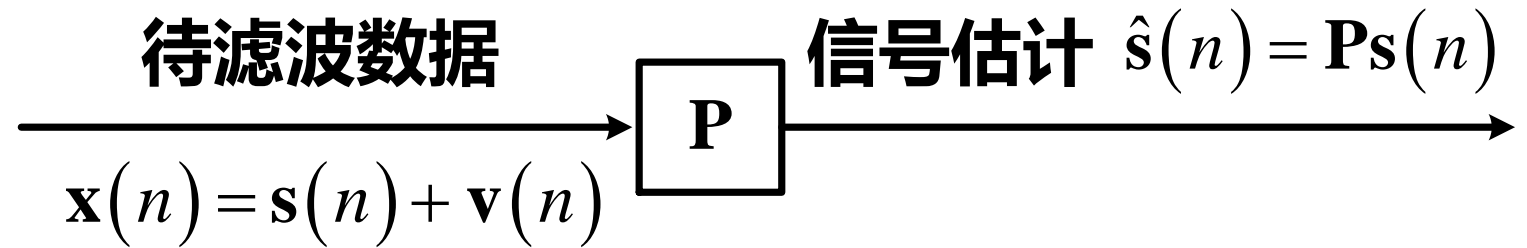


$$\mathbf{P}^H (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}^H \mathbf{P} = \mathbf{P}^H = \mathbf{P}$$

因此，当 P 为幂等矩阵及Hermitian矩阵时，映射 $P^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ 称为 P 的正交投影算子。



正交投影算子物理含义



1. 为保证信号通过滤波器后不发生“畸变”，投影算子 \mathbf{P} 必须为线性算子；
2. 当滤波器输出 $\hat{\mathbf{s}}$ 再次通过滤波器时，信号估计 $\hat{\mathbf{s}}$ 不应发生变化，这要求 $\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{s}}$ 必须得到满足。即投影算子 \mathbf{P} 必须为幂等算子；
3. 由于信号估计为 $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，因此 $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ 为滤波器估计误差。根据正交性原理，最优滤波器要求估计误差 $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ 应与期望响应的估计值 $\mathbf{P}\mathbf{x}$ 正交，即 $[\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}] \perp \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，因此正交投影算子必须满足 Hermitian 性。



投影矩阵构造方法

令 $m \times m$ 投影矩阵 \mathbf{P} 有 r 个特征值为 1, 另外 $m - r$ 个特征值为 0。

则投影矩阵可写为:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$$

考查任意一个 $m \times 1$ 向量 \mathbf{x} 的投影 $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, 则

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \left(\mathbf{x}^H \mathbf{u}_i \right)^H \mathbf{u}_i$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \left(\mathbf{x}^H \mathbf{u}_i \right)^H \mathbf{u}_i$$

1. 向量 \mathbf{x} 经 \mathbf{P} 投影后，向量 \mathbf{x} 与投影矩阵中具有特征值为 1 的特征向量相关部分 $\mathbf{x}^H \mathbf{u}_i \ (i = 1, 2, \dots, r)$ 在投影结果 $\mathbf{P}\mathbf{x}$ 中被完整保留。
2. 向量 \mathbf{x} 与投影矩阵 \mathbf{P} 中具有特征值 0 的特征向量相关部分 $\mathbf{x}^H \mathbf{u}_i \ (i = r + 1, r + 2, \dots, m)$ 倍投影矩阵全部对消，不出现在投影结果 $\mathbf{P}\mathbf{x}$ 中。

当矩阵 \mathbf{P} 是只有特征值 0 和 1 的幂等矩阵时，变化结果 $\mathbf{P}\mathbf{x}$ 是向量 \mathbf{x} 在 \mathbf{P} 那些具有特征值 1 的特征向量上的投影之叠加 $\left(\mathbf{x}^H \mathbf{u}_i \right)^H \mathbf{u}_i \ (i = 1, 2, \dots, r)$



酉矩阵定义

若 n 阶复矩阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{I}$

称 \mathbf{A} 为酉矩阵，记为 $\mathbf{A} \in U^{N \times N}$

酉矩阵性质

1. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H$
2. \mathbf{A}^{-1} 也是酉矩阵
3. $|\mathbf{A}| = 1$
4. 充分条件是它的 n 个向量是两两正交的单位向量。



MUSIC算法基本原理

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(n) + \mathbf{n}(n)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \\ &= E\{[\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}][\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}]^H\} \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\mathbf{A}^H + E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}; \quad \mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times P}$$

$$\mathbf{s}(n) \in \mathbb{C}^{P \times 1}; \quad \mathbf{n}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$$

由于信号和噪声相互独立，回波数据协方差矩阵可分解为与信号、噪声相关的两部分。



$\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$ 所以, \mathbf{R} 是赫米特 (Hermitian) 矩阵, 具备以下性质:

1. 所有特征值都是实数;
2. 不同特征值对应特征向量相互正交;
3. 可分解为 $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H$ 的形式

其中, $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M]$ 为由特征矢量组成的酉矩阵

特征值满足: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_P > \lambda_{P+1} = \cdots \lambda_M = \sigma^2$



因此, $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M] = [\mathbf{U}_S \quad \mathbf{U}_N]$ $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma}_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_P \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Sigma}_N = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & & & \\ & \lambda_{p+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_M \end{bmatrix}$$

显然, 当空间噪声为白噪声时, 还有: $\mathbf{\Sigma}_N = \sigma^2 \mathbf{I}_{(M-P) \times (M-P)}$



$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Sigma}_N \mathbf{U}_N^H$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}$$

两边乘以 \mathbf{U}_N

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{U}_N &= \mathbf{U}_S \mathbf{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_N + \mathbf{U}_N \mathbf{\Sigma}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{U}_N \\ &= 0 + \mathbf{U}_N \mathbf{\Sigma}_N \mathbf{I}_N \\ &= \sigma^2 \mathbf{U}_N \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{U}_N = \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{U}_N + \sigma^2 \mathbf{U}_N$$

可得

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{U}_N = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{U}_N^H \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{U}_N = 0$$



$$\mathbf{U}_N^H \mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{U}_N = \mathbf{0}$$

已知 \mathbf{Q} 非奇异时 $\mathbf{x}^H \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。因此有

$$\mathbf{A}^H \mathbf{U}_N = \mathbf{0}$$

已知 $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_P)]$ 可得

$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N = \mathbf{0}^T, \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_P$$

可见, 由目标导向矢量集合张成子空间与噪声子空间正交。

注: 当 \mathbf{R}_S 满秩, 即信源之间不相干时, 上式才成立。



$$\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N = \mathbf{0}^T, \quad \theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$$

改为标量形式，可定义为一种类似功率谱的函数

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)}$$

当 $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$ 时， $P(\theta)$ 取峰值，即可得到信号的波达方向。

Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. Proceedings of RADC Spectrum Estimation Workshop, Griffiss Air Force Base, NY, Oct. 3-5, 1979: 243-258.



因为 $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M] = [\mathbf{U}_S \quad \mathbf{U}_N]$

酉矩阵各列矢量正交

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^H = [\mathbf{U}_S \quad \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S^H \\ \mathbf{U}_N^H \end{bmatrix} = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{I}$$

即有 $\mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H = \mathbf{I} - \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$

因此 $P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)} \longleftrightarrow P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{a}(\theta)}$



$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)} \longleftrightarrow P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{a}(\theta)}$$

噪声子空间法

信号子空间法

模式识别: 次分量分析

(Minor Component Analysis, MCA)

主分量分析

(Principal Component Analysis, PCA)

注: $\mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H$ 视为信号子空间

$\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$ 视为噪声子空间

张贤达

矩阵分析与应用第二版

P504



性质 1: 协方差矩阵 \mathbf{R} 大特征值对应特征矢量张成的空间与入射信号导向矢量张成的空间是同一个空间，均为信号子空间；

$$\text{span} \{ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_P \} = \text{span} \{ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_P \}$$

性质 2: 信号子空间与噪声子空间正交；

性质 3: $\mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{M \times M}$

$$\mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{P \times P}; \mathbf{U}_N^H \mathbf{U}_N = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(M-P) \times (M-P)}$$



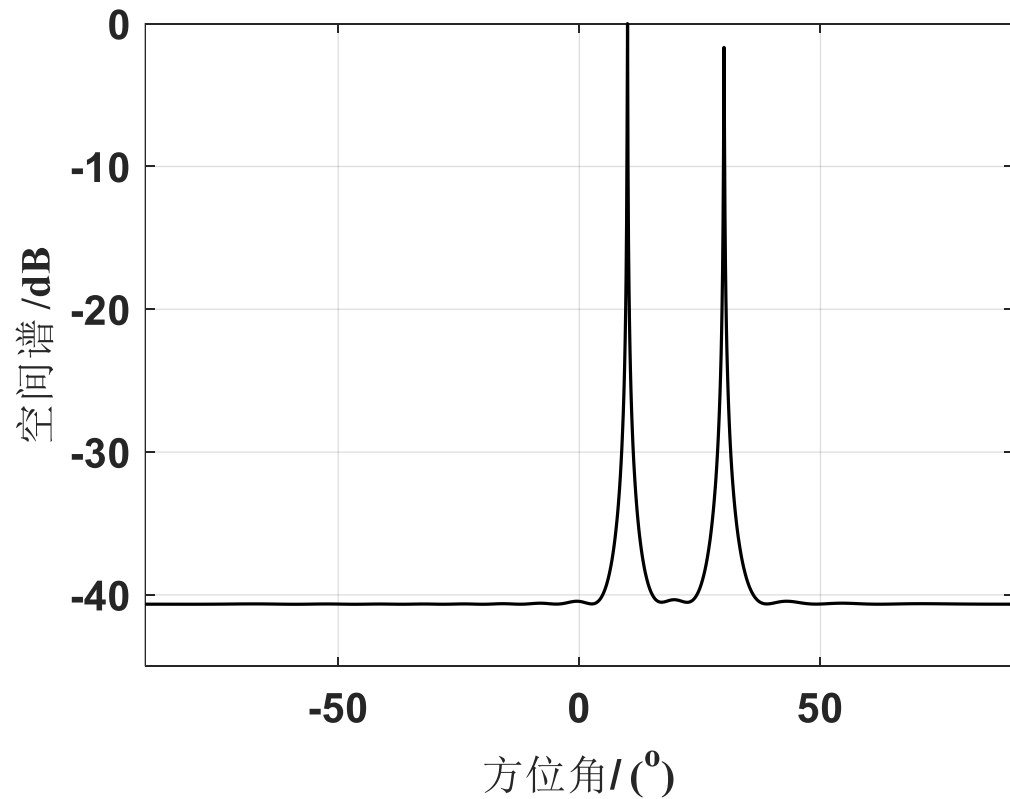
子空间法特点:

1. 无论信号子空间方法还是噪声子空间方法，均只需少数几个特征向量。如矩阵 R 大特征值个数比小特征值少，则使用维数较小的信号子空间方法更方便；反之，使用噪声子空间更方便；
2. 很多应用中，并不需要特征值，而只需知道矩阵的秩及特征向量；
3. 信号子空间 $U_S U_S^H$ 和噪声子空间 $U_N U_N^H$ 可以通过下式相互转换：

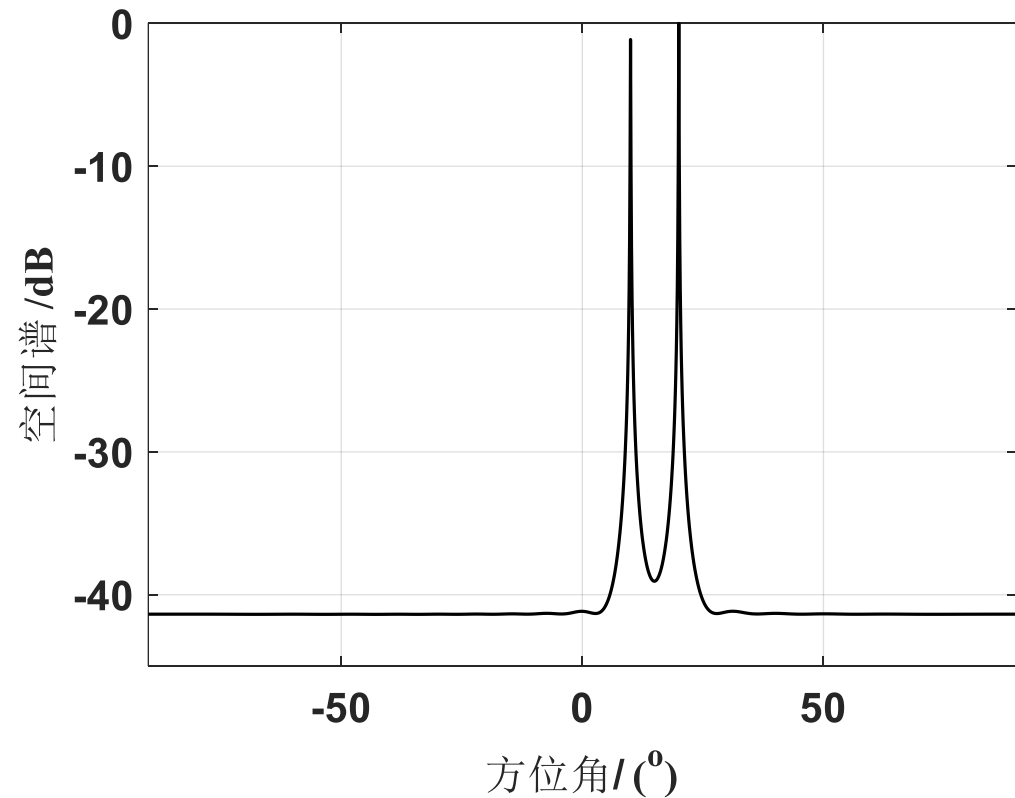
$$U_N U_N^H = I - U_S U_S^H$$



MUSIC 方法 ($M = 16 / d = \lambda/2$)



目标来向 $[10^\circ, 30^\circ]$



目标来向 $[10^\circ, 20^\circ]$



本次课算法小结:

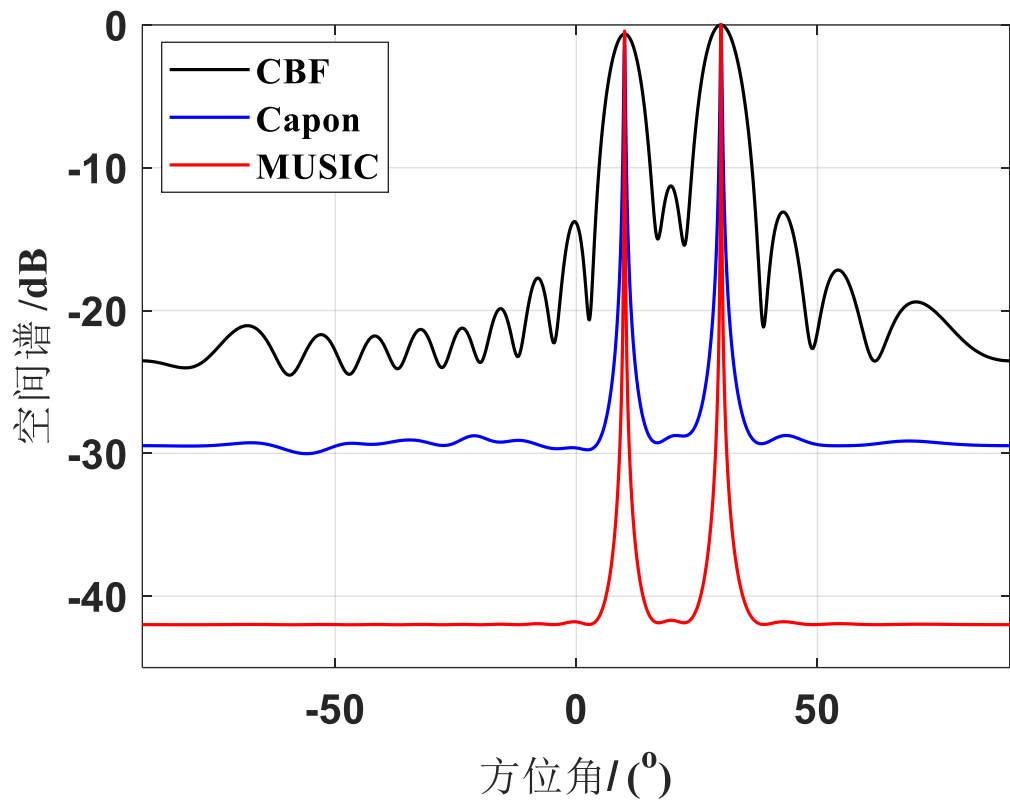
$$P_{CBF}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta)$$

$$P_{Capon}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

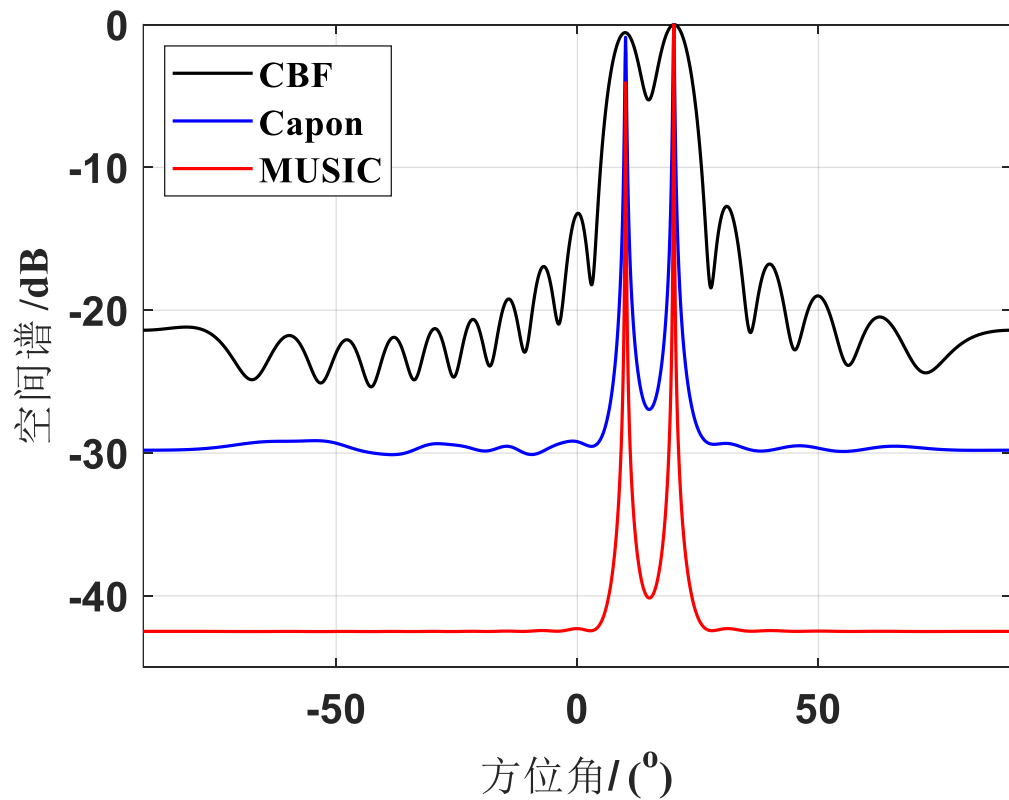
$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)} \quad \text{or} \quad P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{a}(\theta)}$$



CBF、Capon和MUSIC 方法分辨率比较 ($M = 16 / d = \lambda/2 / \text{SNR} = 20\text{dB}$)



目标来向 $[10^\circ, 30^\circ]$



目标来向 $[10^\circ, 20^\circ]$



Capon法与MUSIC法关系

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sigma_n^2 \sum_{i=P+1}^M \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= \sum_{i=1}^P \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=P+1}^M \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^P \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \frac{1}{\sigma_n^2} \left(I - \sum_{i=1}^P \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left(I - \sum_{i=1}^P \frac{\lambda_i - \sigma_n^2}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \end{aligned}$$



$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left(I - \sum_{i=1}^P \frac{\lambda_i - \sigma_n^2}{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right)$$

当 $SNR \rightarrow \infty$ $\lambda_i \gg \sigma_n^2$ ($i = 1, 2, \dots, P$)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &\approx \frac{1}{\sigma_n^2} \left(I - \sum_{i=1}^P \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=P+1}^M \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\sigma_n^2} \end{aligned}$$



$$\mathbf{R}^{-1} \approx \frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H}{\sigma_n^2}$$

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} = \frac{\sigma_n^2}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)}$$

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)}$$

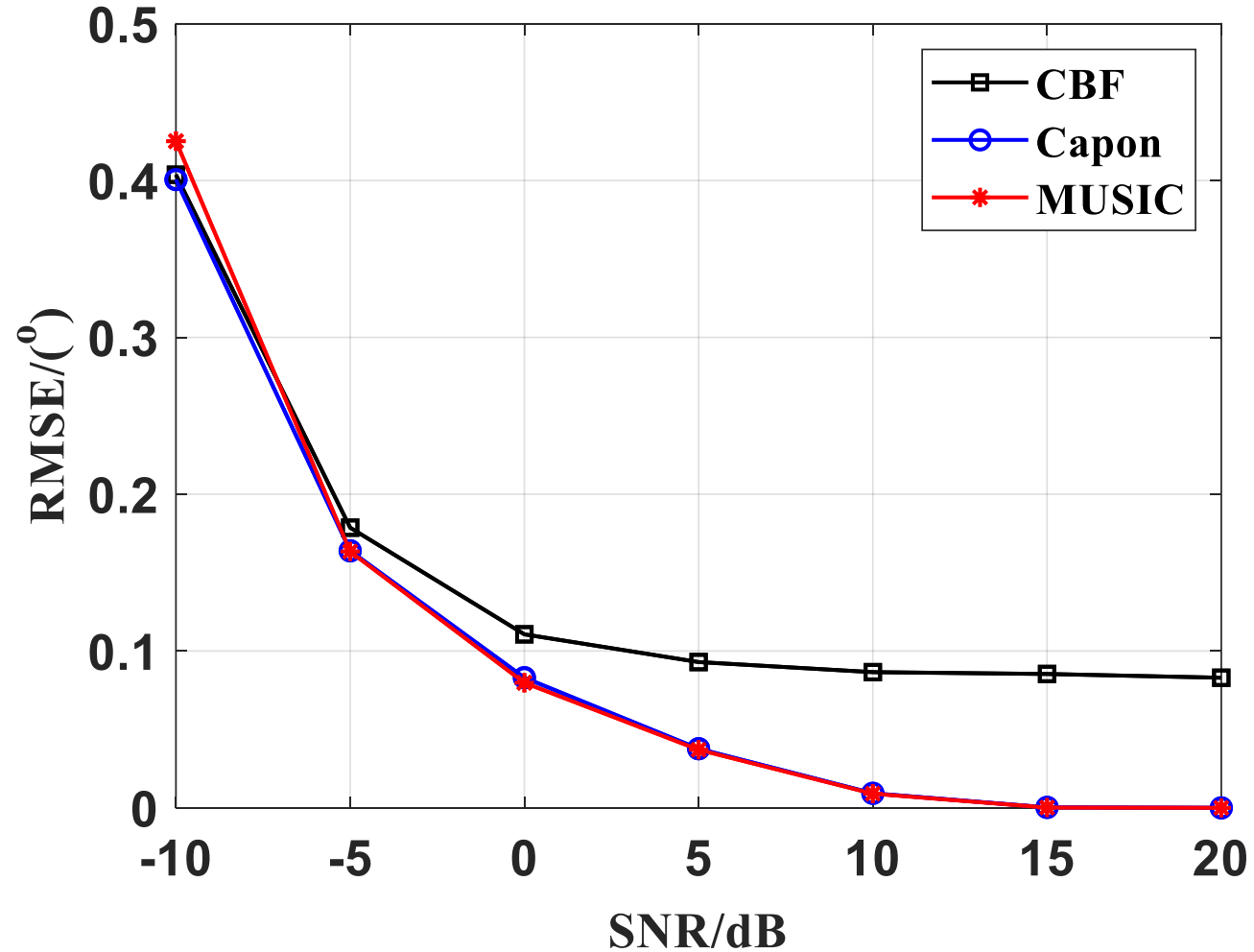


均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE)

$$\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}$$



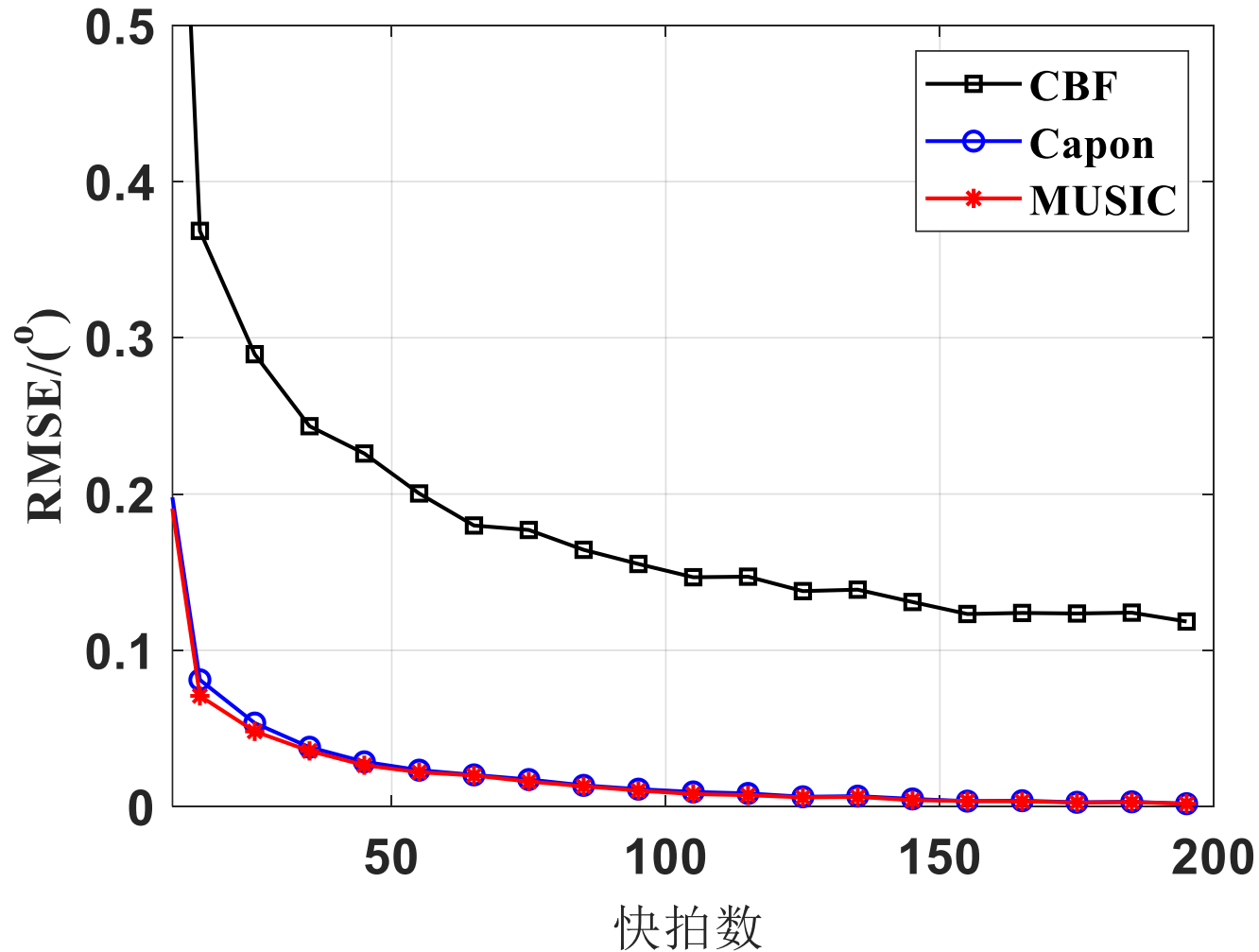
不同信噪比 (SNR) 情况下算法性能对比





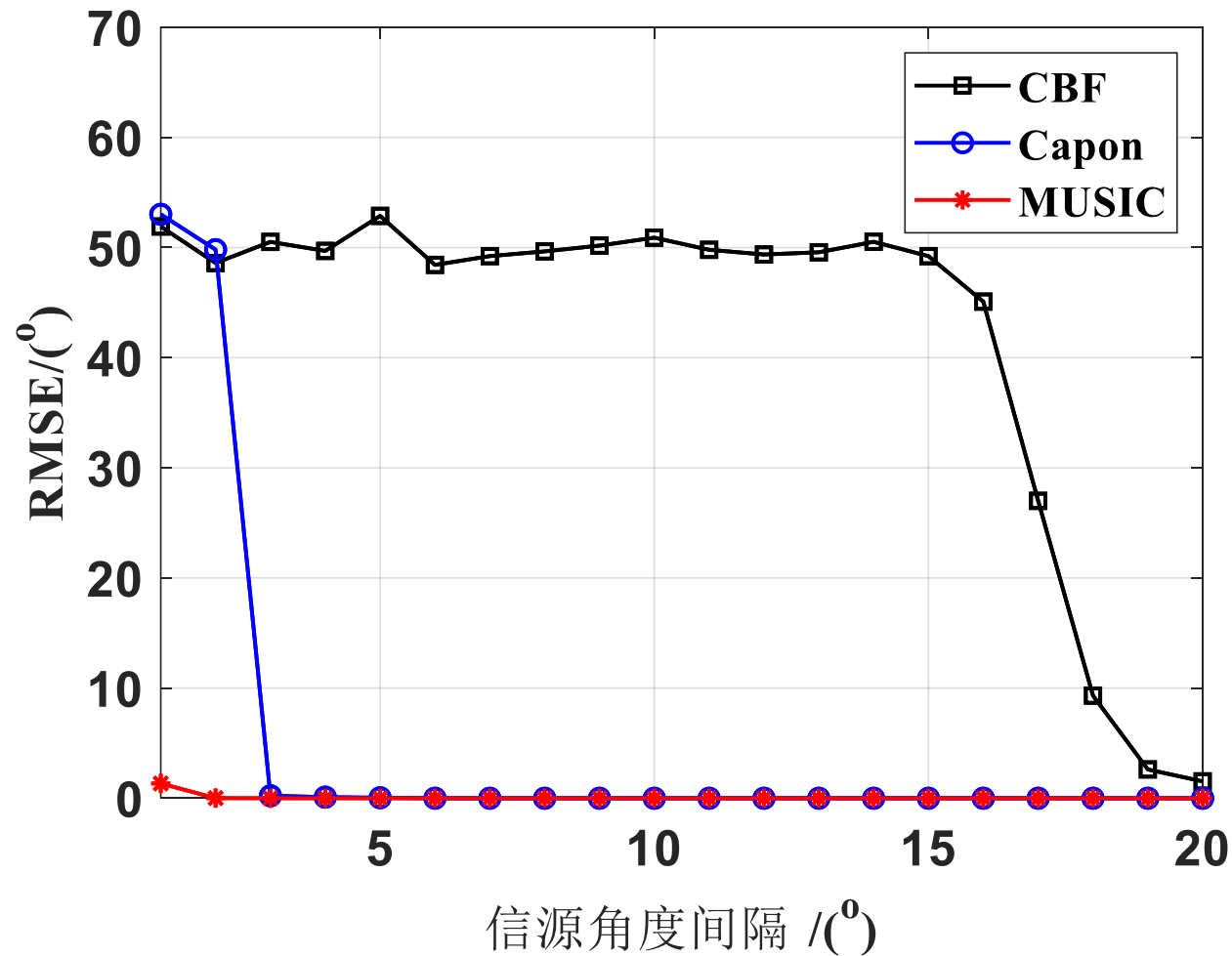
不同快拍数情况下算法性能对比

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$$





不同角度间隔情况下算法性能对比





Capon法和MUSIC法比较:

1. MUSIC算法分辨力高于Capon算法;
2. MUSIC算法由于需要预先估计信源个数, 因此算法稳健性差于Capon算法;
3. MUSIC算法谱峰反应了阵列导向矢量与噪声子空间的正交性, 与阵列真实输出功率无关; 而Capon谱峰反映了阵列真实输出功率, 与信噪比有关。