



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

阵列信号处理 第九讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



最优波束形成的寻优准则

- 最大信干噪比 (MSINR) 准则
- 最小均方误差 (MMSE) 准则
- 最小噪声方差 (MNV) 或线性约束最小方差 (LCMV) 准则

统计最优波束形成是一种分析工具，为自适应波束形成的实现提供了理论依据。



1. 最大信干噪比 (MSINR) 准则

阵列接收信号为: $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_S(n) + \mathbf{x}_{I+N}(n) = \mathbf{a}(\theta_0)s(n) + \mathbf{x}_{I+N}(n)$

目标信号协方差矩阵:
$$\mathbf{R}_S = E[\mathbf{a}(\theta_0)s(n)s^*(n)\mathbf{a}^H(\theta_0)]$$
$$= \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_0)\mathbf{a}^H(\theta_0)$$

干扰 + 噪声协方差矩阵: $\mathbf{R}_{I+N} = E[\mathbf{x}_{I+N}\mathbf{x}_{I+N}^H]$

MSINR的目的是使阵列输出信干噪比最大, 即

$$\max_{\mathbf{w}} \text{SINR} = \max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}}$$



$$\max_{\mathbf{w}} \text{SINR} = \max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}}$$

将分母归一化，优化问题转化为

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w} \\ s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w} = 1 \end{cases}$$

利用拉格朗日乘子法，目标函数为 $L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{I} - \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w})$

求导等于零，可得 $\mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}$



$$\mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}$$

两边左侧各乘 \mathbf{w}^H ，得到 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}$

可得
$$\lambda = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_S \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}} = \text{SINR}$$

即特征值本身就是SINR，因此最优权矢量 \mathbf{w}_{opt} 是与最大特征值对应的特征向量。

$$\mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$$

即最优权矢量对应矩阵 $\mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{R}_S$ 特征分解后最大特征值对应特征向量。



$$\mathbf{R}_S \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}$$

取最大特征值 λ_{\max} 可得:

$$\mathbf{R}_S \mathbf{w}_{\text{opt}} = \lambda_{\max} \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

$$\Rightarrow \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{w}_{\text{opt}} = \lambda_{\max} \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

$$\Rightarrow \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_0) c = \lambda_{\max} \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$$

因此可得 MSINR准则下最优权矢量 $\mathbf{w}_{\text{opt-MSINR}} = \mu \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$



$$\mathbf{w}_{\text{opt-MSINR}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$$

$$y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$$

$$= \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{x}(n)$$

$$= \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \right] \left[\mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \mathbf{x}(n) \right]$$

$$= \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \right] \left[\mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \left(\mathbf{a}^H(\theta_0) s(n) + \mathbf{x}_{\text{I+N}}(n) \right) \right]$$

杂波或干扰数据白化？



$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) = \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \right] \left[\beta \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \mathbf{a}^H(\theta_0) + \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \mathbf{x}_{\text{I+N}}(n) \right] \\ &= \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \right] \left[\beta \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1/2} \mathbf{a}^H(\theta_0) + \tilde{\mathbf{x}}_{\text{I+N}}(n) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{\text{I+N}} &= E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{\text{I+N}}(n) \tilde{\mathbf{x}}_{\text{I+N}}^H(n) \right] = E \left[\mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{x}_{\text{I+N}}(n) \mathbf{x}_{\text{I+N}}^H(n) \mathbf{R}_x^{-1/2} \right] \\ &= \mathbf{R}_x^{-1/2} E \left[\mathbf{x}_{\text{I+N}} \mathbf{x}_{\text{I+N}}^H \right] \mathbf{R}_x^{-1/2} \\ &= \mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_x^{-1/2} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

干扰或杂波 白化



$= \mathbf{I}$



$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{a}(\theta_0) s(n) + \mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{x}_{\text{I+N}}(n) \\ &= \beta \mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{a}(\theta_0) + \tilde{\mathbf{x}}_{\text{I+N}}(n)\end{aligned}$$

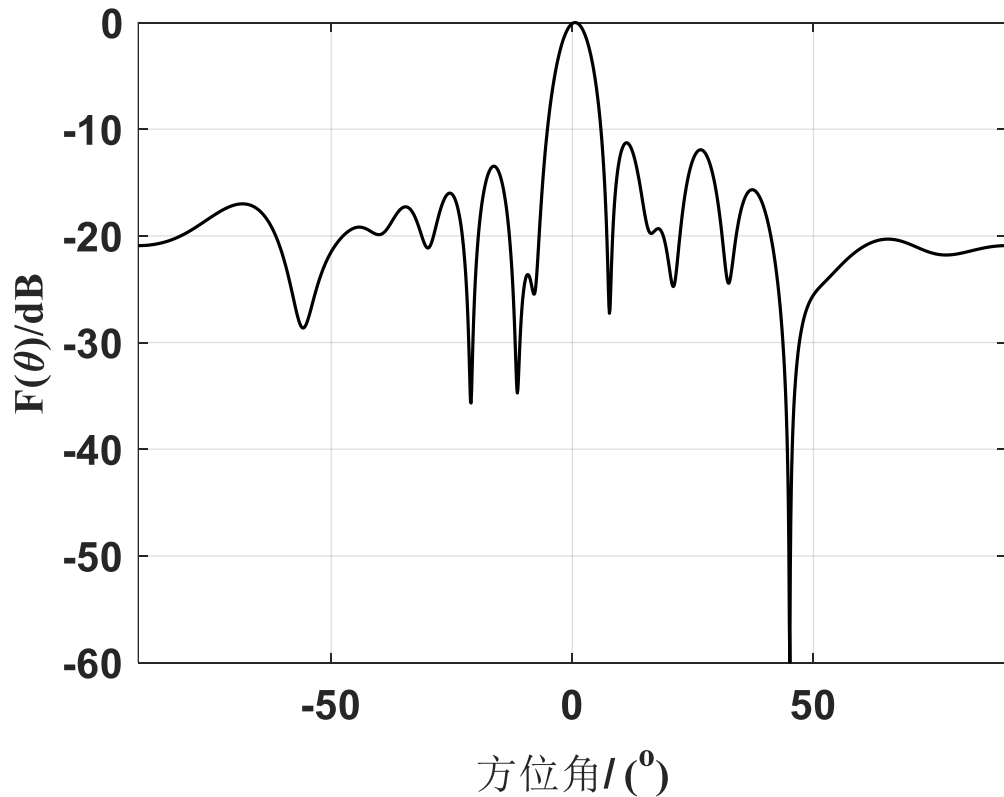
目标也发生变化 $= \beta \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) + \mathbf{n}(n)$ 干扰或杂波 白化

$$\begin{aligned}y(n) &= \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{x}(n) \\ &= \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_x^{-1/2} \right] \left[\mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{x}(n) \right] \\ &= \left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_x^{-1/2} \right] \left[\beta \mathbf{R}_x^{-1/2} \mathbf{a}(\theta_0) + \mathbf{n}(n) \right] \\ &= \beta \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_0) \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) + \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_0) \mathbf{n}(n)\end{aligned}$$

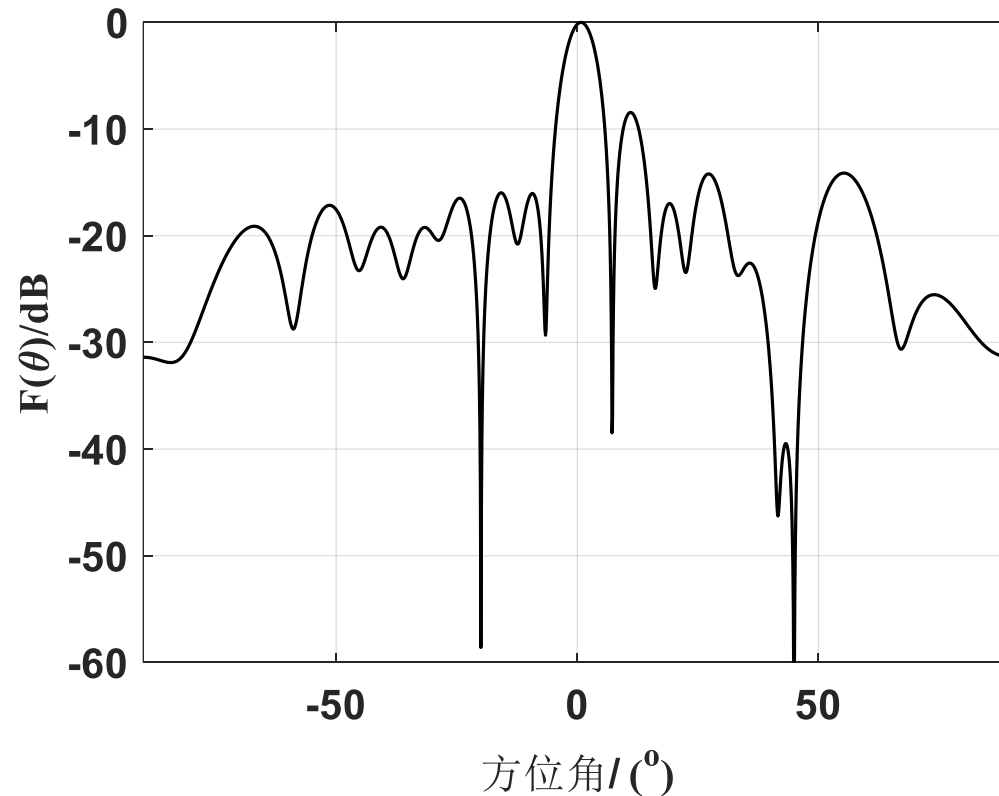


MSINR 准则自适应方向图

主波束方向（目标方向）： 0°



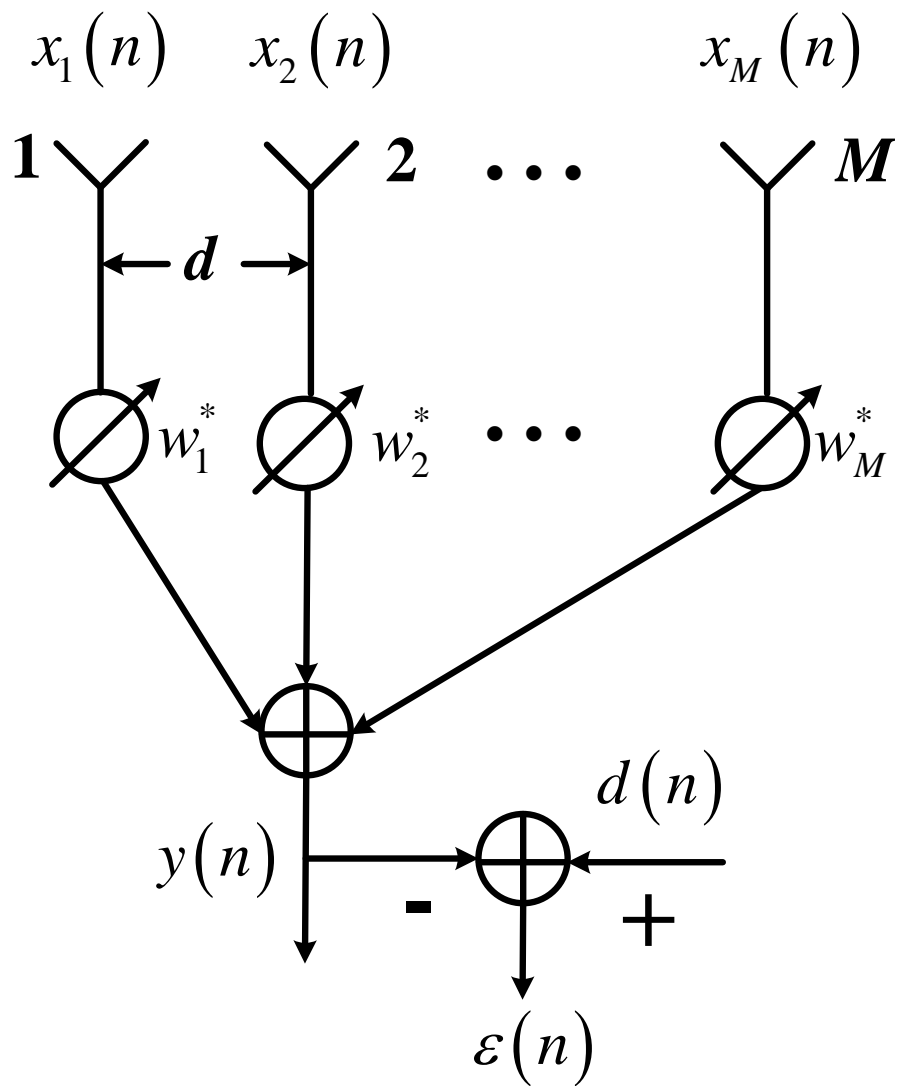
干扰方向： 45°



干扰方向： $[-20^\circ \ 45^\circ]$

2. 最小均方误差 (MMSE) 准则

- 利用参考信号求解自适应权矢量。
参考信号可根据期望信号产生的本地信号，也可以是接收的导引信号（如通信系统中导频信号）；
- 最优自适应权矢量的求取是使得参考信号与加权相加的阵列输出之差的均方值最小。





阵列输出信号： $y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$

令： $\sigma(\mathbf{w}) = E \left[|y(n) - d(n)|^2 \right] = E \left[|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) - d(n)|^2 \right]$

则目标为： $\min_{\mathbf{w}} \sigma(\mathbf{w})$

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{w}) &= E \left[|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) - d(n)|^2 \right] = E \left\{ \left[\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) - d(n) \right] \left[\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) - d(n) \right]^H \right\} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} + E \left[|d(n)|^2 \right] - \mathbf{w}^H \mathbf{r}_{xd} - \mathbf{r}_{xd}^H \mathbf{w} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{r}_{xd} = E \left[\mathbf{x}(n) d^*(n) \right]$ 是互相关矢量

$\mathbf{R}_x = E \left[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \right]$ 是自相关矩阵



对 \mathbf{w} 求导并令其为 0, 可得: $\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$

该解是**最优维纳解形式**, 更多被应用于**旁瓣相消处理**。

由公式可看出: 应用此方法仅需阵列**接收信号的自相关矩阵**和**接收信号与参考信号的互相关矢量**。

MMSE准则的应用:

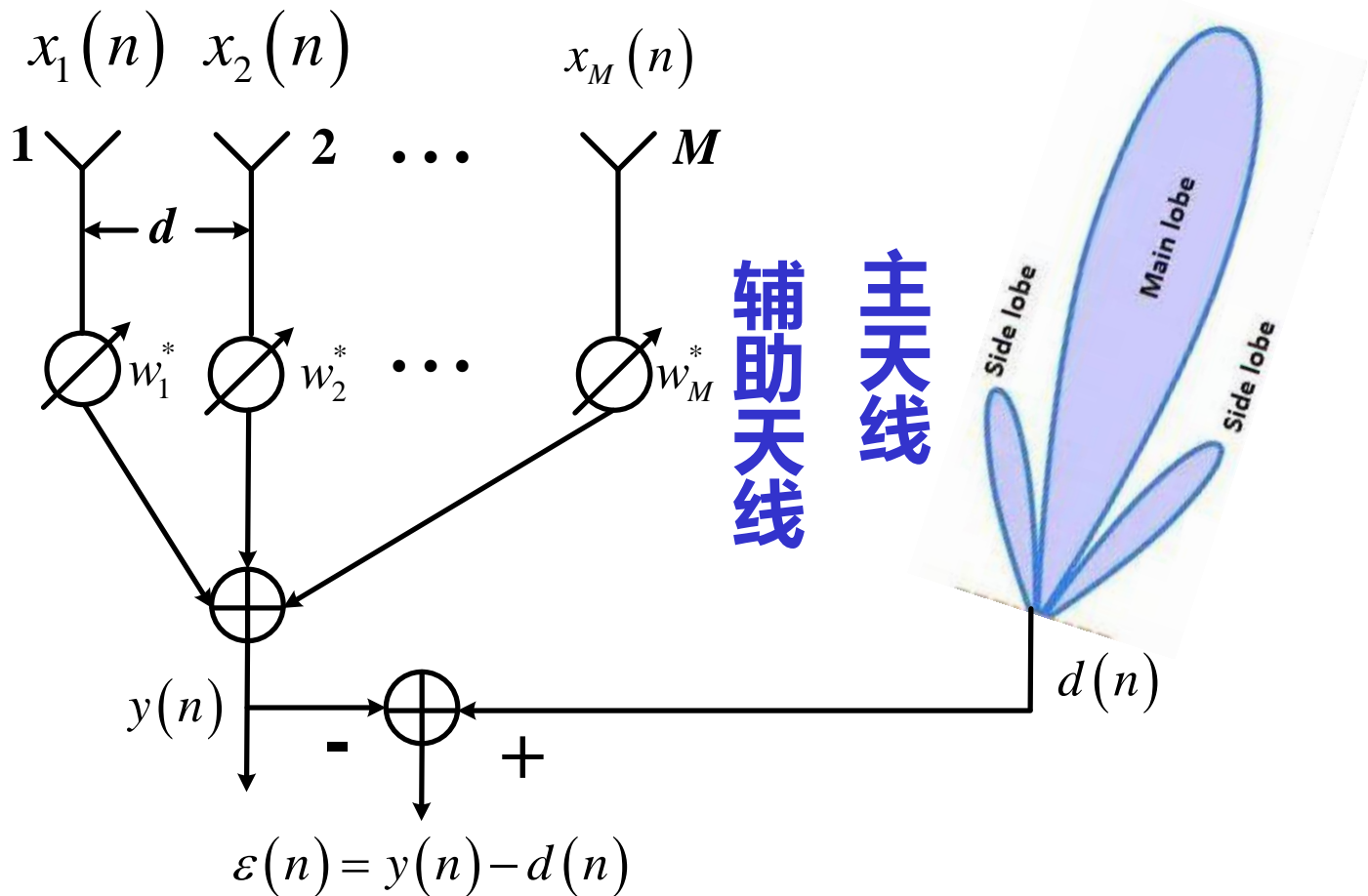
- 自适应均衡 (通信)
- 多通道均衡 (雷达)
- 自适应天线旁瓣相消 (SLC)

实例：天线旁瓣相消技术 (Antenna Sidelobe Canceler)

辅助天线：

增益小，选取与主天线旁瓣电平相当，无方向性，因此 $y(n)$ 仅为干扰信号。

权矢量： $\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$



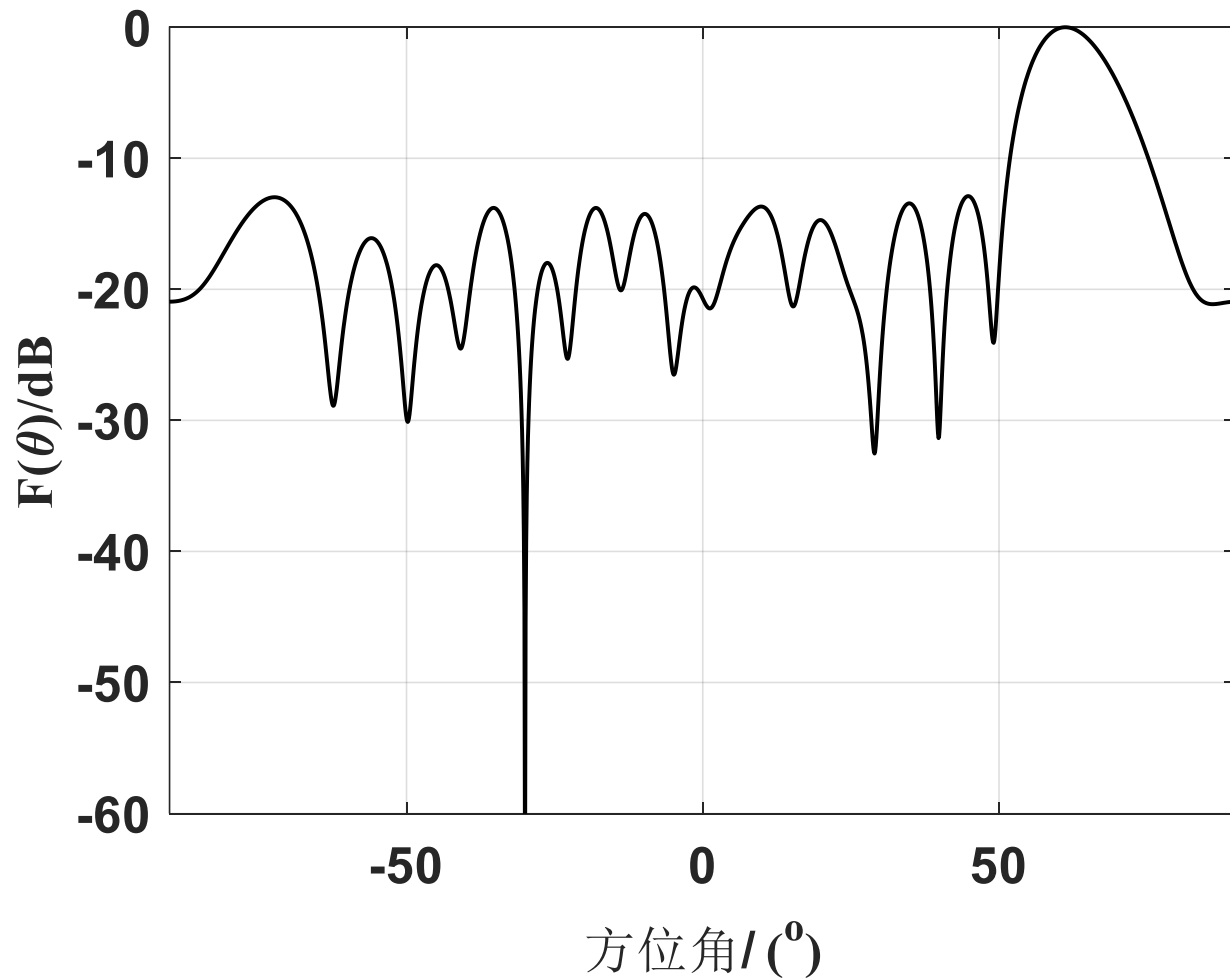
良好干扰抑制性能条件：主天线与辅助天线对接收干扰信号相关性较好。



MMSE 准则自适应方向图

目标方向: 60°

干扰方向: -30°





3. 线性约束最小方差 (LCMV) 准则

主要思想： 期望信号响应为常数前提下阵列输出功率最小。

阵列输出： $y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$

方差： $E\left[|y(n)|^2\right] = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}$ 即输出功率

导向矢量约束 $\mathbf{a}(\theta_0)$ **为目标信号导向矢量。**

优化函数为：
$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \end{cases} \quad 1 \text{ 可变为任意非零常数。}$$



解得： $\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$ μ 可变为任意非零常数。

如果固定： $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$ 则 $\mu = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} = 1$

式中 μ 的取值不影响 SNR 和方向图。

注：本准则要求波束形成的指向 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 已知，但不要求参考信号 $\mathbf{d}(n)$ 和信号与干扰的互相关矢量。



推广到约束多个方向：一般的线性约束最小方差法为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \boldsymbol{\beta}^H \end{cases} \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times L}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$$

解： $\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} \left(\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \boldsymbol{\beta}$

特例：当 $\mathbf{C} = \mathbf{a}(\theta_0)$ ，即约束单个方向，则 $\boldsymbol{\beta} = 1$ 。



实际应用:

当已知目标在 θ_0 方向，但也可能在 θ_0 附近，这时可令

$$\begin{cases} \mathbf{C} = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_0 + \Delta\theta), \mathbf{a}(\theta_0 - \Delta\theta)] \\ \boldsymbol{\beta} = [1, 1, 1]^T \end{cases}$$

可增加算法稳健性。

注：针对白噪声， \mathbf{R}_x 为单位阵，阵列输出为 $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{w}$ ，此时自适应滤波无能为力。换句话说，自适应滤波无法滤除白噪声。



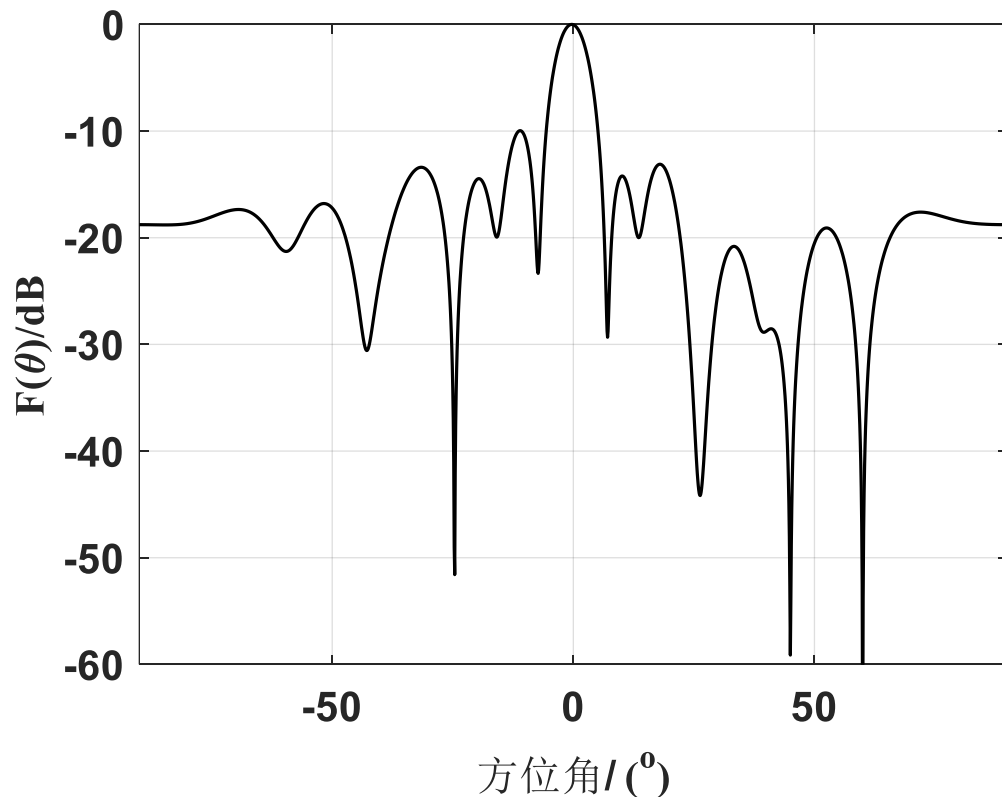
- 在实际工程中，阵列天线不可避免地存在各种误差。
- 文献 Error analysis of the optimal antenna array processors. *IEEE Trans. On AES*, 1986, 22(3):395-409. 对各种误差（如阵元误差、通道频率响应误差、阵元位置扰动误差、互耦等）的影响进行了综述。

基本结论：

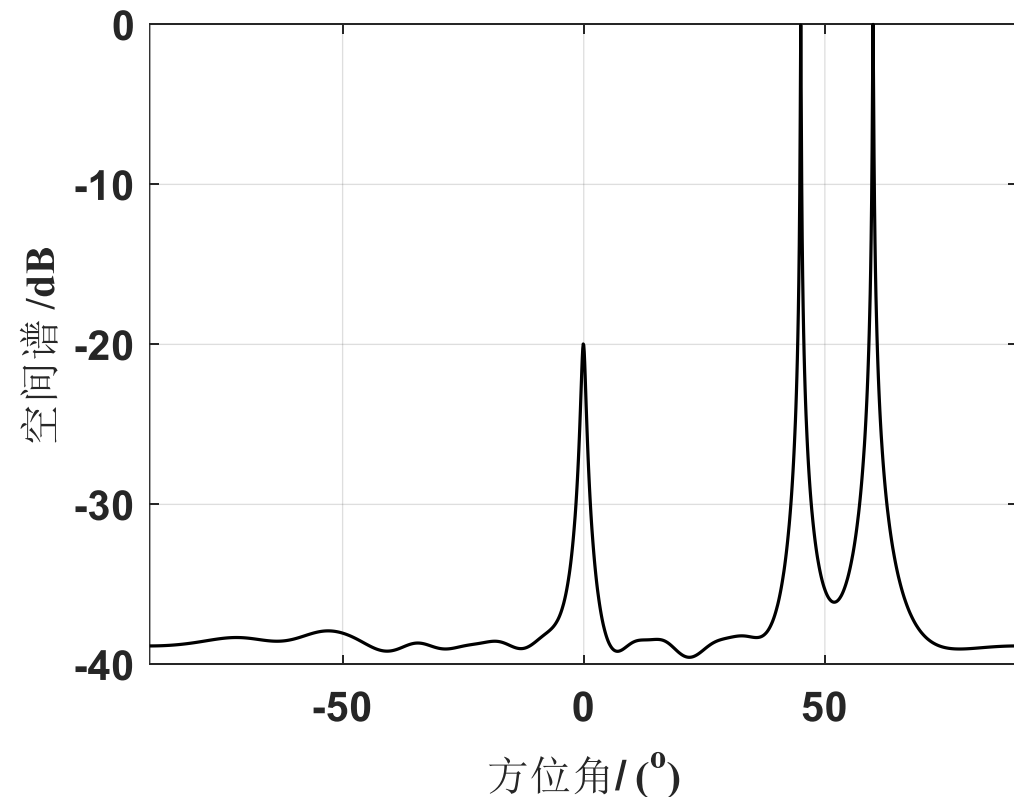
- 对于只利用**干扰 + 噪声**协方差矩阵求逆的自适应方法，幅相误差对自适应波束形成的影响不大；
- 对于利用**信号 + 干扰 + 噪声**协方差矩阵求逆的自适应方法，当信噪比较大时，虽然干扰零点位置变化不大，但是在信号方向上也可能形成零陷，导致信噪比严重下降。



LCMV准则，对应Capon方向图和Capon谱 目标方向： 0° 干扰方向： $[45^\circ \ 60^\circ]$



Capon自适应方向图

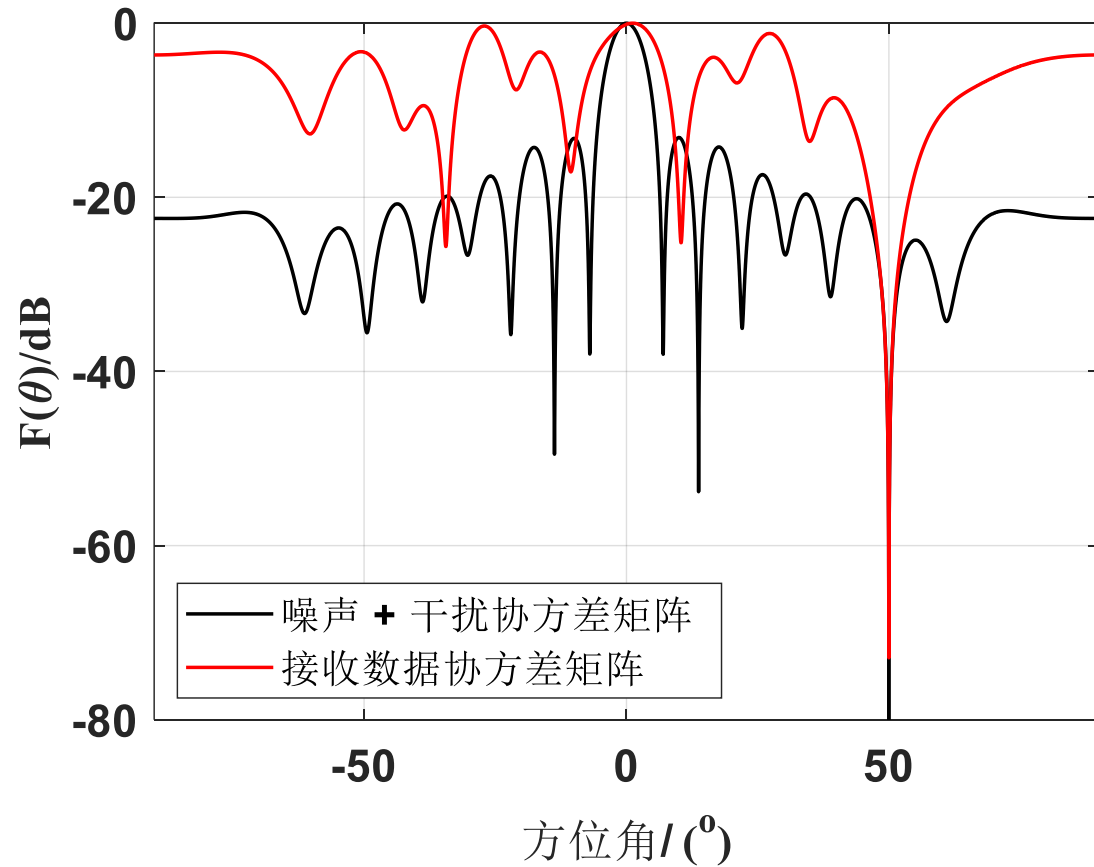


Capon功率谱

Capon法自适应方向图

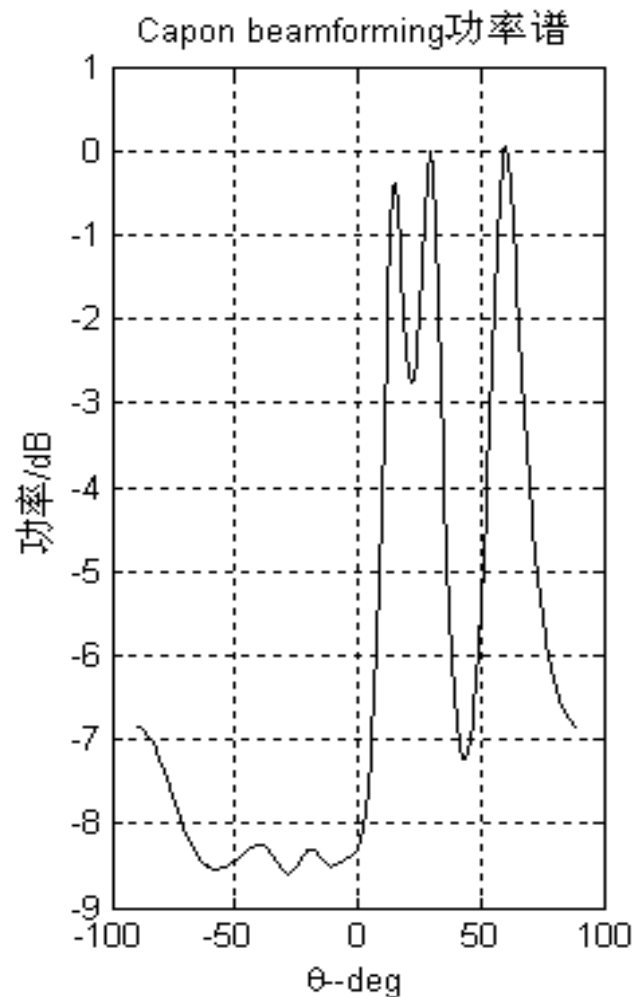
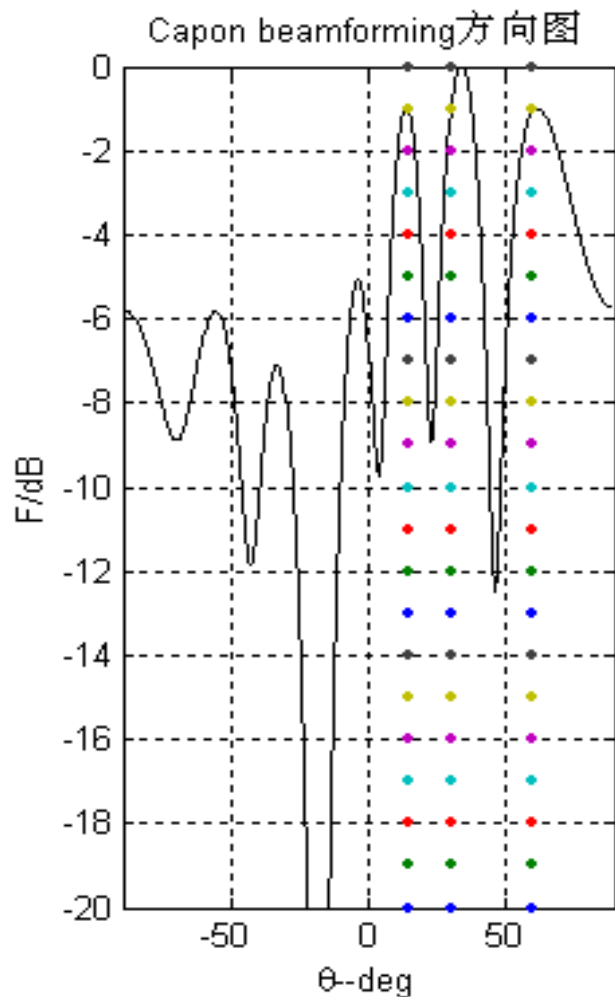
$$\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$$

- 当协方差矩阵含有目标信号时，发生目标相消现象，导致目标能量损失而无法被检测；
- 应采用干扰 + 噪声协方差矩阵形成自适应权值。





多约束波束形成，来波方向 0 20 50





4. 三个最优准则的内在关系

准则	解的表达式	所需已知条件
MSINR	$\mathbf{w}_{\text{opt-MSINR}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$	已知 $\mathbf{R}_{\text{I+N}}$
MMSE	$\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$	已知期望信号 $\mathbf{d}(n)$
LCMV	$\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$	已知期望信号方向 θ_0



MSINR 和 LCMV 准则的等效性

MSINR准则下最优权矢量: $\mathbf{w}_{\text{opt-MSINR}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

LCMV 准则下最优权矢量: $\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

注意: \mathbf{R}_x 中含有期望信号分量, 而 $\mathbf{R}_{\text{I+N}}$ 中不含期望信号分量, 仅为噪声分量。

即: $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_{\text{I+N}} = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) + \mathbf{R}_{\text{I+N}}$



由矩阵求逆引理： $\left(\mathbf{b}\mathbf{b}^H + \mathbf{A}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$ 假设 \mathbf{A} 可逆

所以： $\mathbf{R}_x^{-1} = \mathbf{R}_{I+N}^{-1} - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{I+N}^{-1}}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}$

可得： $\mathbf{w}_{\text{opt-LCMV}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

$$\begin{aligned} &= \mu \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \left[1 - \frac{\sigma_s^2 \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \mathbf{a}^H(\theta_0)}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \right] \\ &= \bar{\mu} \mathbf{R}_{I+N}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \rightarrow \mathbf{w}_{\text{opt-MSINR}} \end{aligned}$$



上式表明： 在精确的方向矢量约束条件和相关矩阵精确已知，且目标功率较小，MSINR 准则与 LCMV 准则等效。

如不满足： 应用 $\mathbf{R}_{\mathbf{I}+\mathbf{N}}$ 来计算权值，直接用 $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ 计算最优权值会导致信号相消。

最优波束形成方法中，降低旁瓣电平的方法是加窗处理。

$$\mathbf{a}_h(\theta_0) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{a}(\theta_0) \quad \mathbf{h} \text{ 为加窗矩阵。}$$

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{a}_h(\theta_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_h(\theta_0)$$



MMSE 准则与MSINR 和 LCMV 准则的等效性

MMSE 准则下最优权矢量: $\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$

若已知 $\mathbf{x}_{I+N}(n)$ 与 $d(n)$ 不相关, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{xd} &= E[\mathbf{x}(n)d^*(n)] \\ &= E[s(n)\mathbf{a}(\theta_0)d^*(n)] \\ &= E[s(n)d^*(n)]\mathbf{a}(\theta_0)\end{aligned}$$

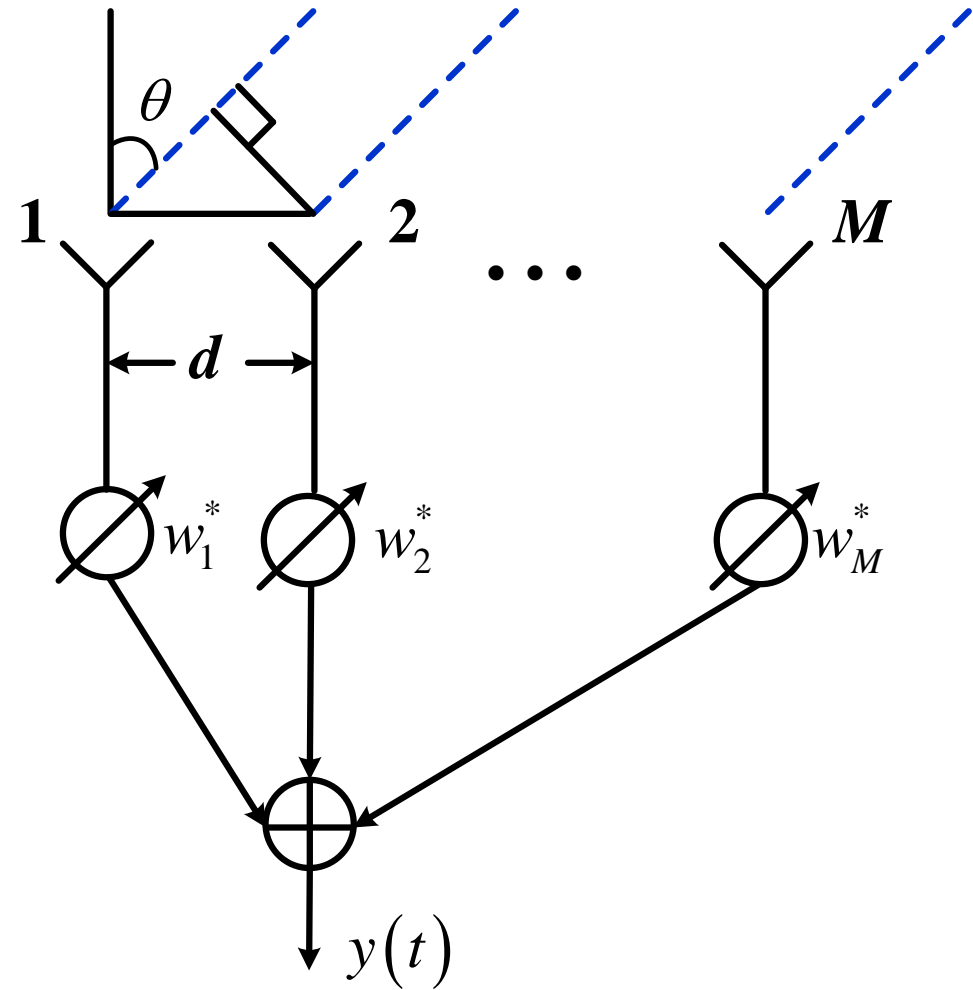
因此, $\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = E[s(n)d^*(n)]\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{a}(\theta_0) = \mu\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{a}(\theta_0) \quad \mu = E[s(n)d^*(n)]$

由此看出, 上述三个准则在一定条件下是等价的。

自适应波束形成小结:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$$

- 需已知二阶统计量 $\mathbf{R}_{\text{I+N}}$;
- 已知 $\mathbf{a}(\theta_0)$;
- 矩阵求逆运算量大, 有待于寻找快速算法。



阵列信号处理 第十讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



本次课内容

1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题



本次课内容

1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题



自适应旁瓣相消器 (Adaptive SideLobe Canceller, ASLC)

- 最早的自适应阵列实现形式是Howells提出旁瓣相消器，其利用 2 阵元系统，采用一个在期望信号方向为高增益的高方向性主天线（主通道）和一个低增益的全向辅助天线（辅助通道）。
- 只有 1 个自由度可利用，故只能对消一个副瓣干扰。

Howells P. Intermediate side-lobe canceller. US Patent, 3202990, Aug 24, 1965.



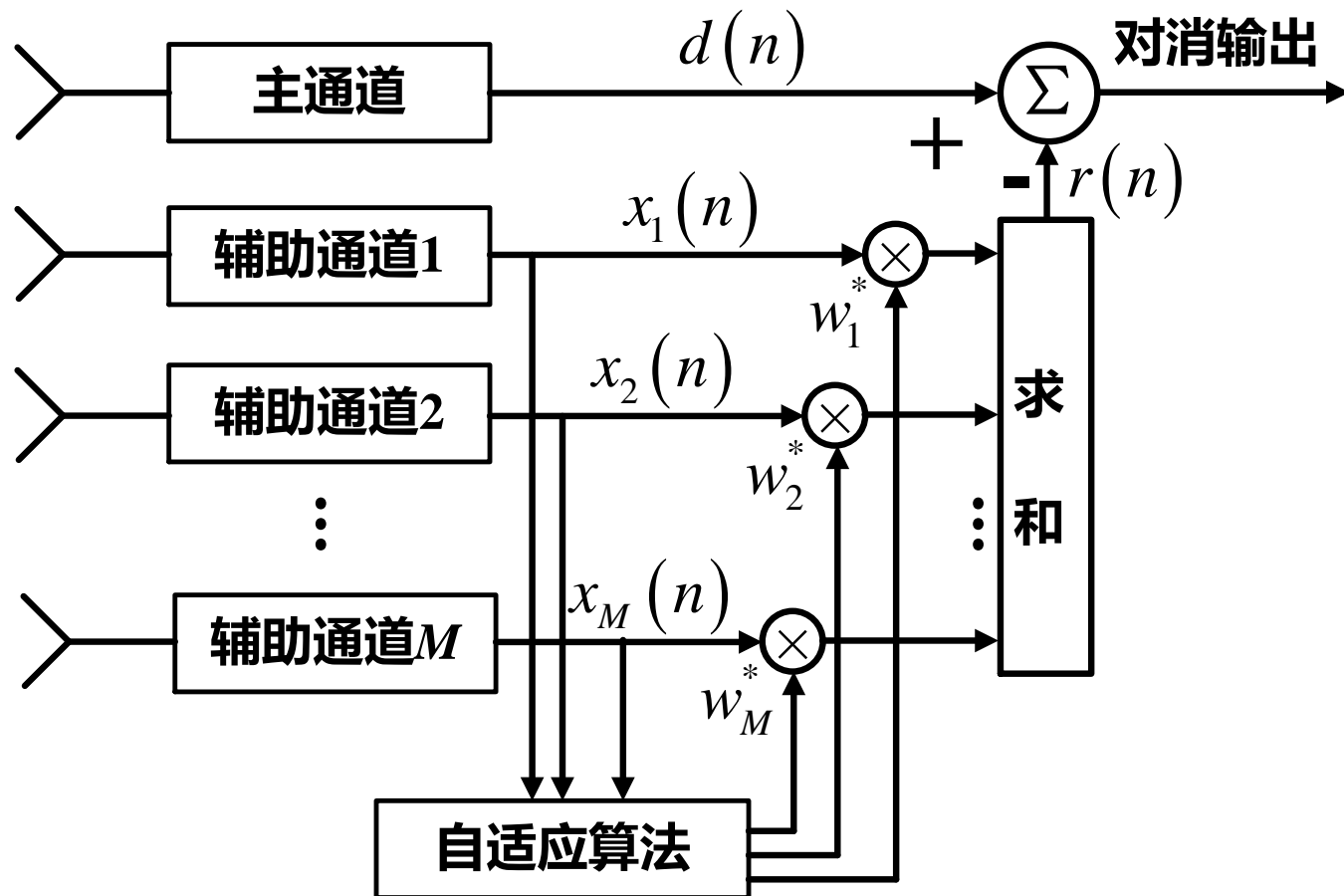
- 后来又发展到采用多个辅助天线以增加自由度抑制多个干扰，称为多旁瓣相消器（MSC）；
- 实际上，也可采用多个天线来合成主通道信号（如采用空间匹配滤波器），或通过静态方向图控制得到所需主通道天线方向图；辅助通道也可采用阵列合成；
- 无论旁瓣相消器采用何种结构形式，统称为自适应旁瓣相消器（简称旁瓣相消器）。

Applebaum S P, Chapman D J. Adaptive arrays with main beam constraints.
IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1976, 24(5): 650~662.

自适应旁瓣相消器基本原理

辅助天线约束：

辅助天线在期望信号方向的响应足够小，从而使得进入辅助通道的期望信号功率低于辅助阵元的噪声电平，否则会引起期望信号相消。



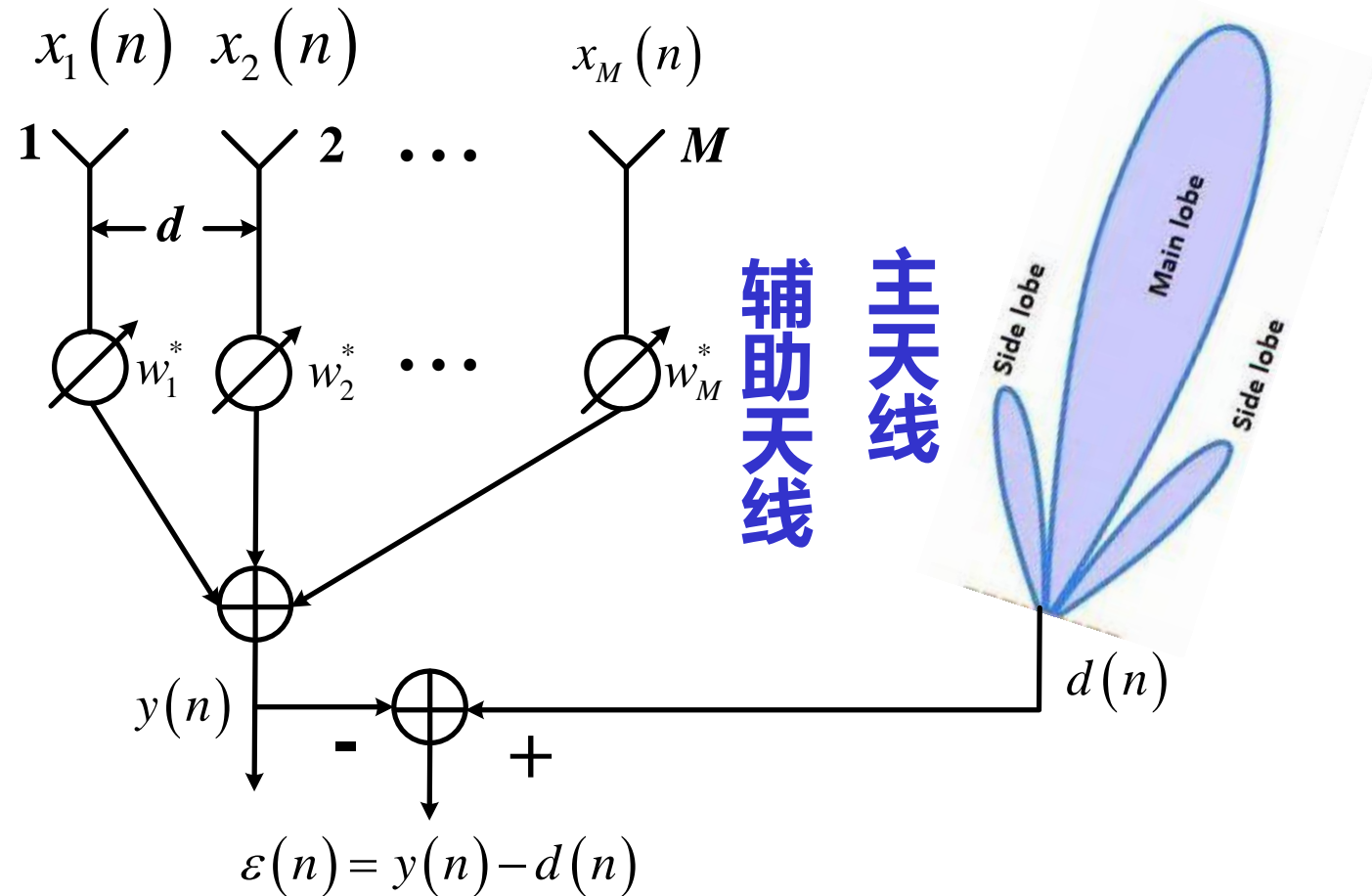
ASLC结构示意图

存在干扰情况：

当存在有源干扰时（假设干扰与期望信号不相关），最优权值使得各辅助通道加权后的合成输出对消掉主通道中的干扰，输出目标回波信号。

$$\mathbf{w}_{\text{opt-MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$$

$$y(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$$

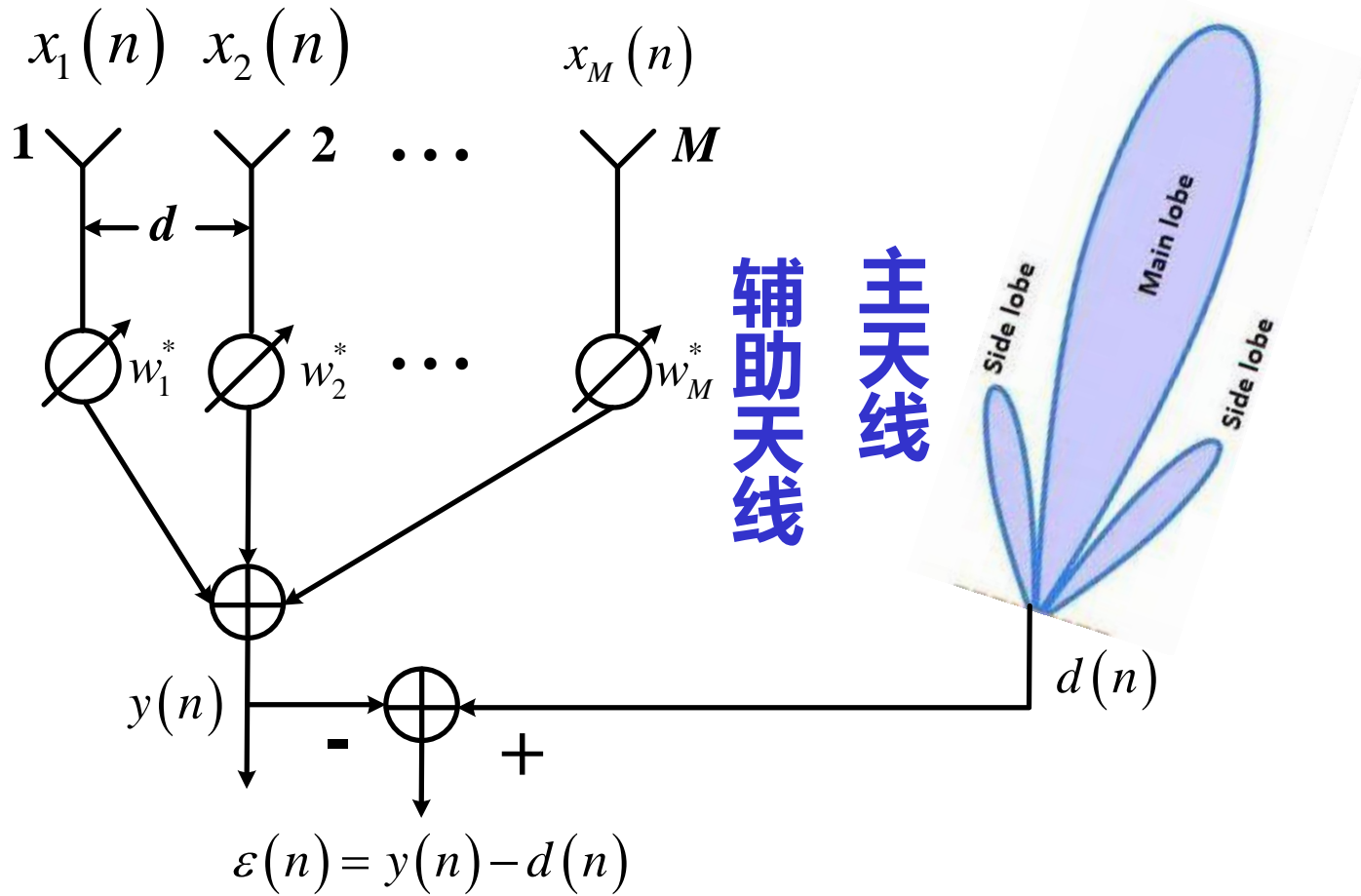


ASLC结构示意图

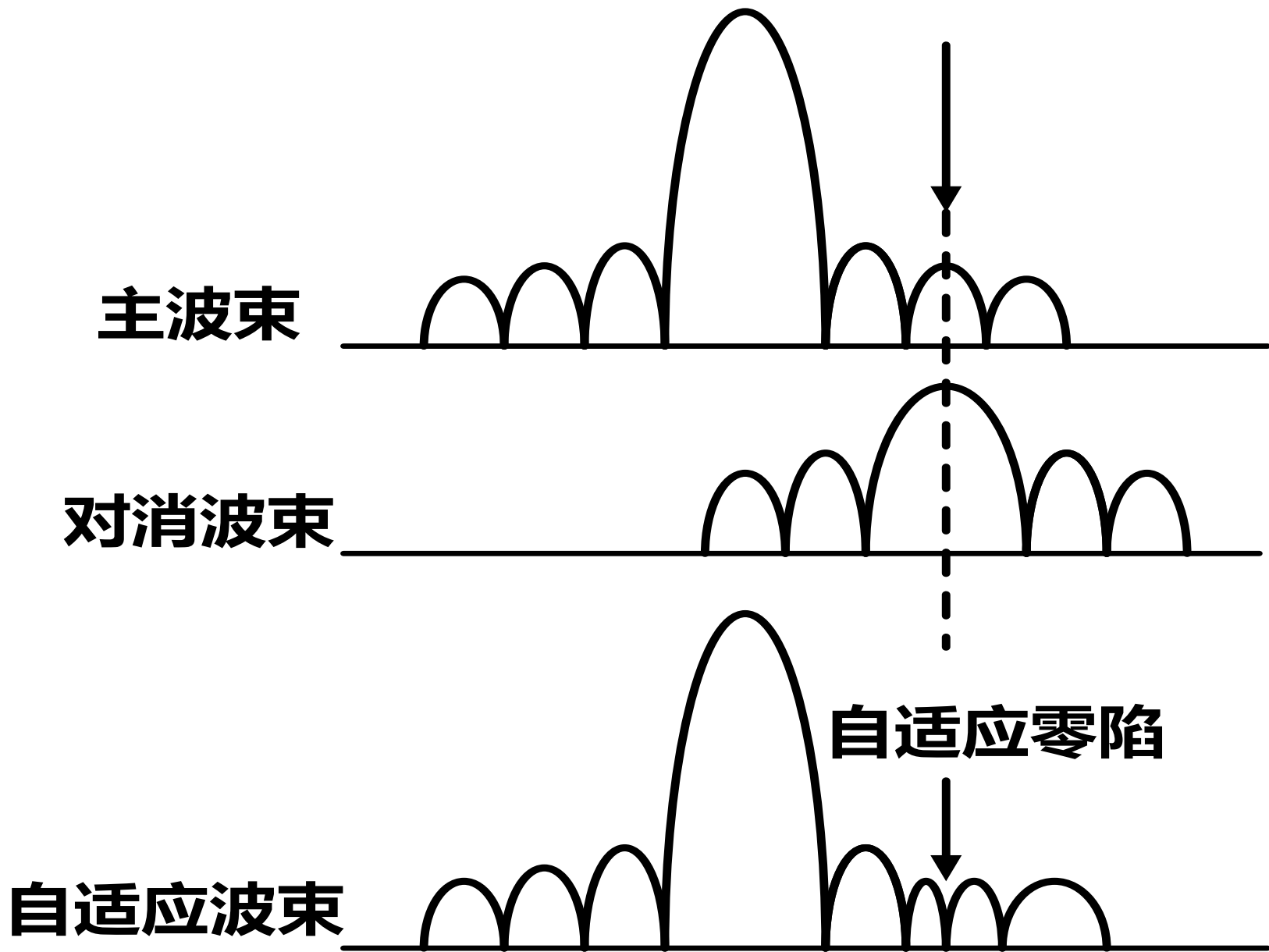
无干扰情况:

当无干扰时，由于辅助通道也接收不到目标回波信号（或很弱），则输出权值为零；主通道信号直通输出，进而进行后续目标检测处理。

$$y(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$$



ASLC结构示意图



简要推导自适应旁瓣相消自适应权矢量

设 $d(n)$ 为第 n 时刻主通道接收数据，且

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T$$

为第 n 时刻辅助通道接收数据，则

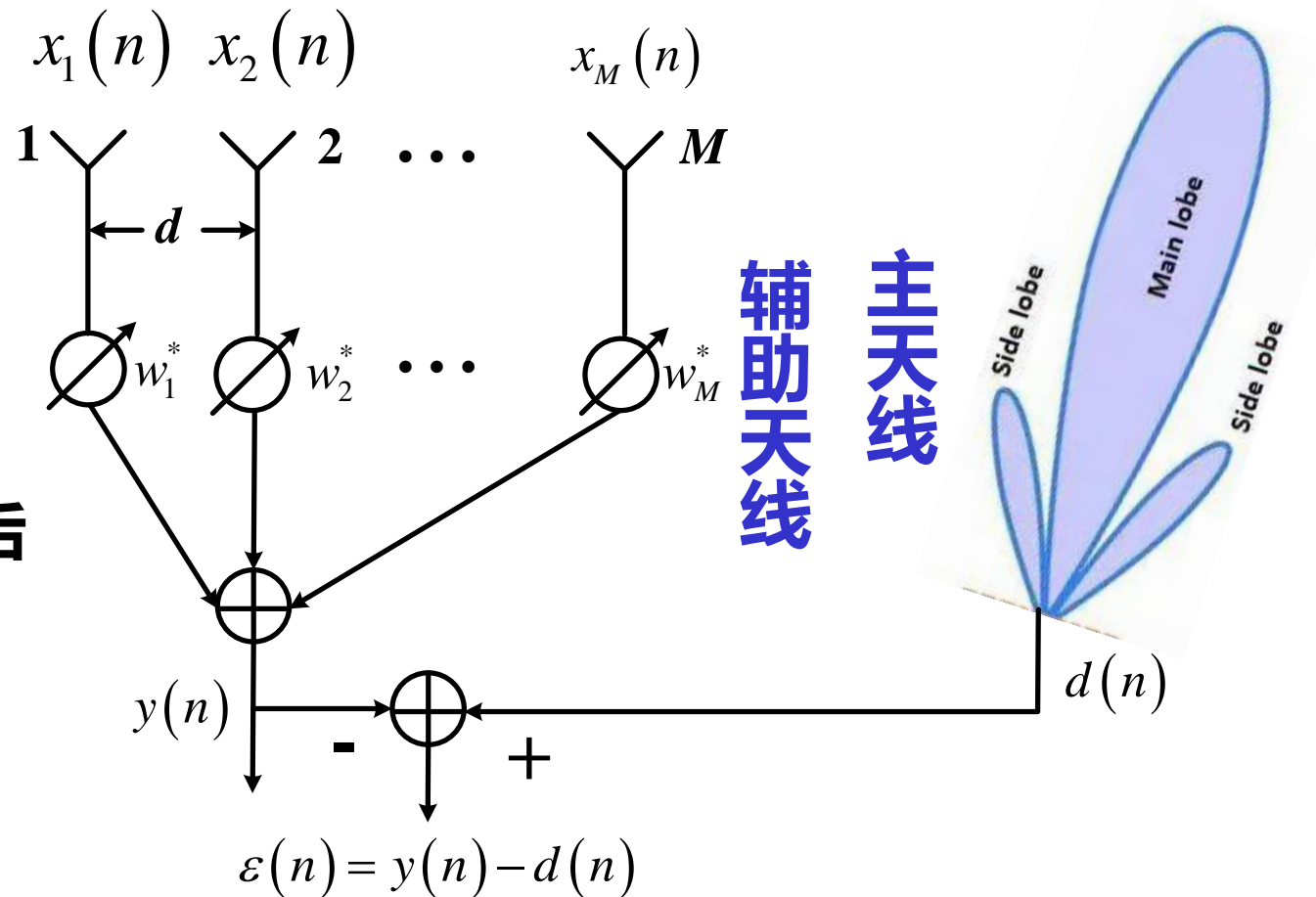
$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$$

表示最优权矢量。辅助通道信号经加权后与主通道信号求和，对消后输出

$$r(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$$

采样最小均方误差 (MMSE) 准则可得

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{xd}$$

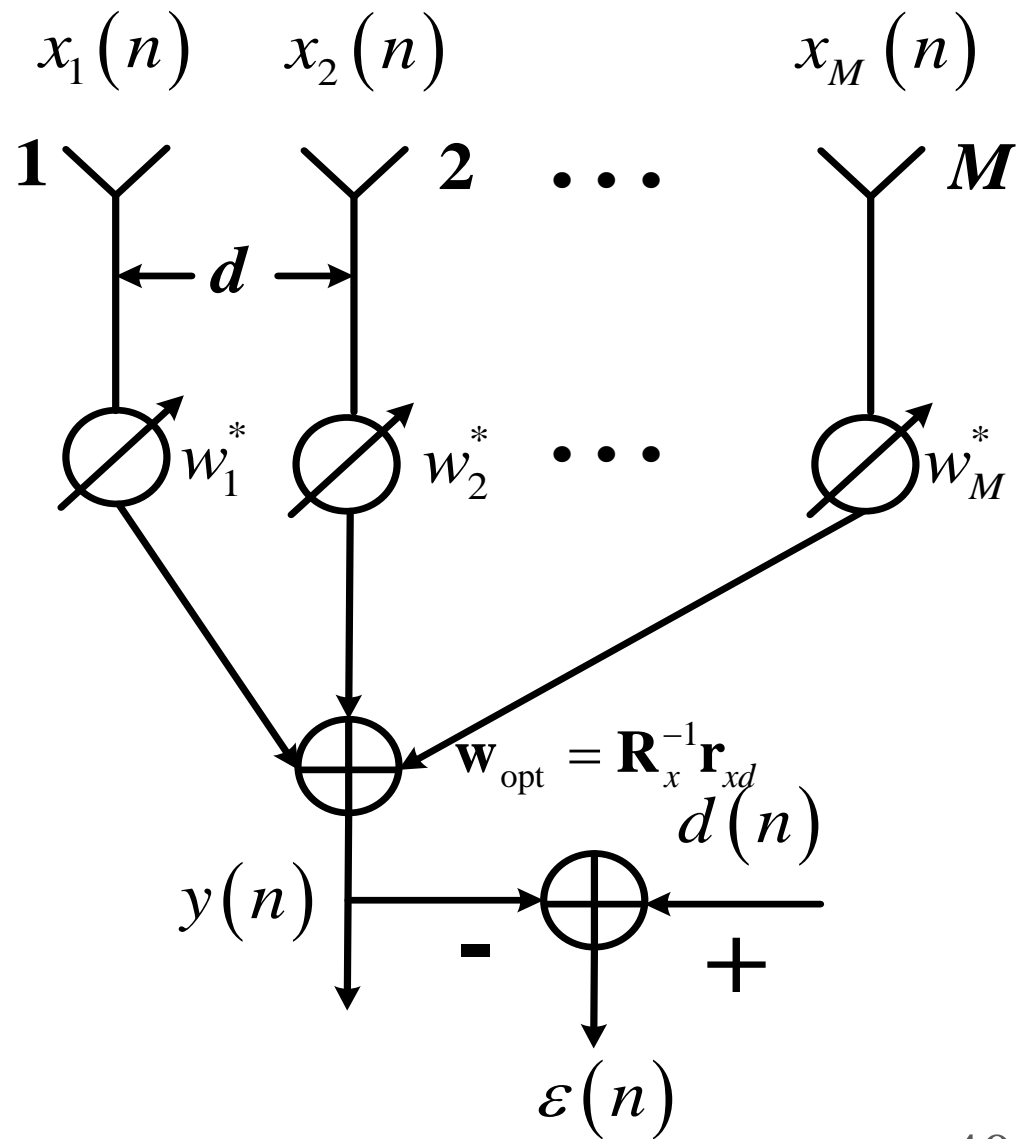


ASLC结构示意图



应用一：

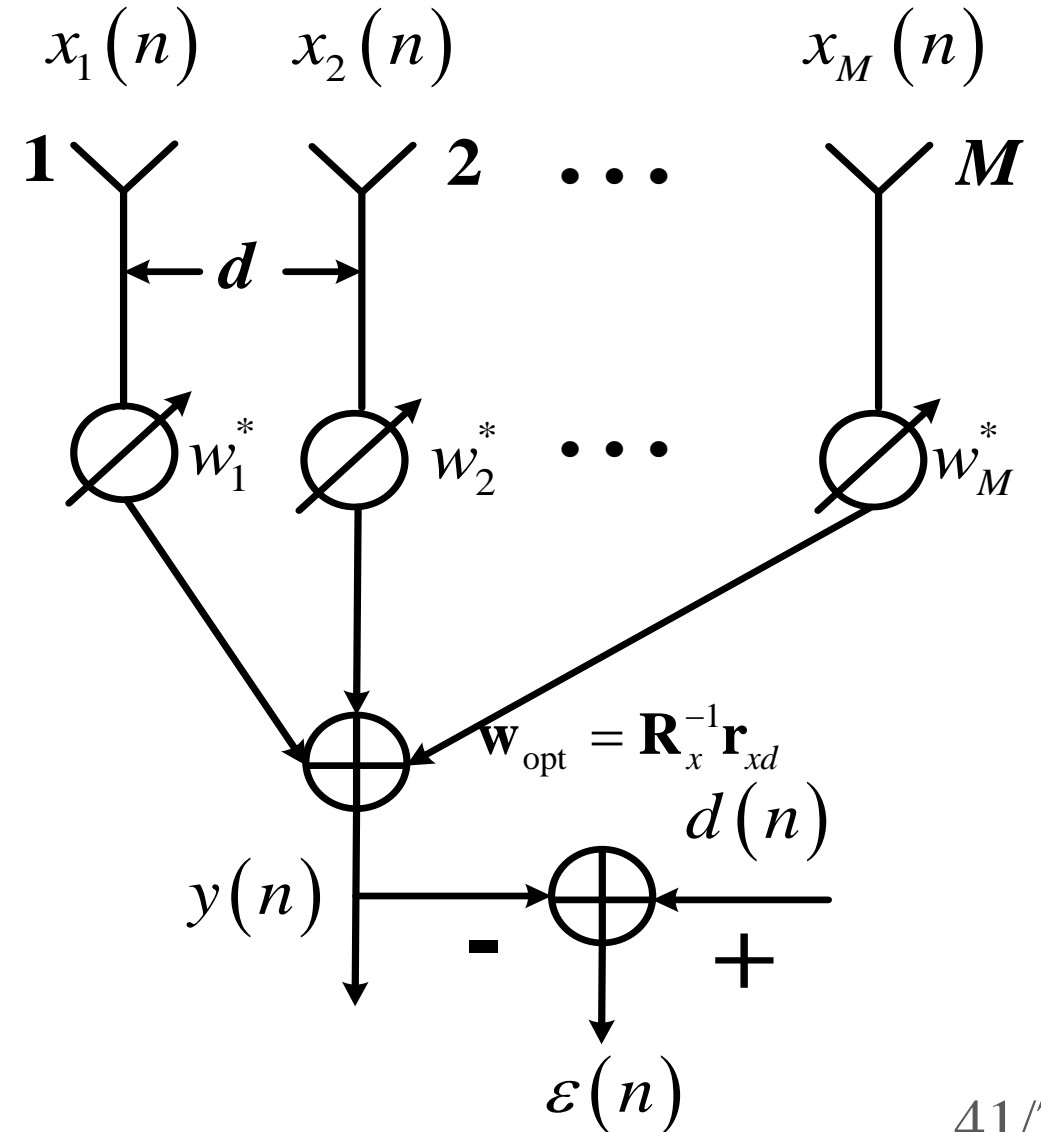
参考信号 $d(n)$ 是根据期望信号产生的本地参考信号，也可以是接收的导引信号（如通信系统中的导频信号），此参考信号应与阵列接收的干扰信号独立无关，否则无法实现自适应干扰抑制。





应用二：

主通道接收信号 $d(n)$ 则包含需要接收的有用信号和干扰，而辅助通道只有干扰，主通道信号和辅助通道进行自适应对消，对消输出即为需要的阵列处理输出。





自适应旁瓣相消器中的期望信号相消现象

1. 相关干扰引起期望信号相消（干扰与目标信号相关）

- 实际中，主通道所含期望信号和干扰总有一定相关性，这是因为干扰和期望信号同频才能被接收，因此总有部分频谱是重叠的。
- 频谱重叠越多，即期望信号和干扰的相关性越强，则期望信号相消越严重；
- 期望信号相对干扰越强，则期望信号被对消的比例越大；
- 期望信号强度相对干扰较弱时，旁瓣相消器可对消干扰，而期望信号被对消引起的损失不大。



2. 期望信号泄露引起相消（强目标信号泄露到辅助通道）

- 即使期望信号和干扰独立无关，当期望信号较强时仍然可能存在期望信号相消现象。

原因：尽管辅助天线在期望信号方向的响应较低，但由于期望信号强度可能很大，泄露到辅助通道的期望信号功率仍有可能超过噪声电平，导致自适应权中包含了期望信号对消分量，引起目标信号相消；

- 因此，ASLC适合于期望信号较弱（相对干扰）的场合，也可用于某段时间无期望信号的场合。

例如：利用脉冲雷达间歇期进行采样，而当期望信号存在时不采样，只加权接收；也可采用间歇发射的方式来实现，即每隔一定时间停止发射信号，只接收干扰，此时得到的辅助通道数据不含期望信号，由该数据计算自适应权矢量。



本次课内容

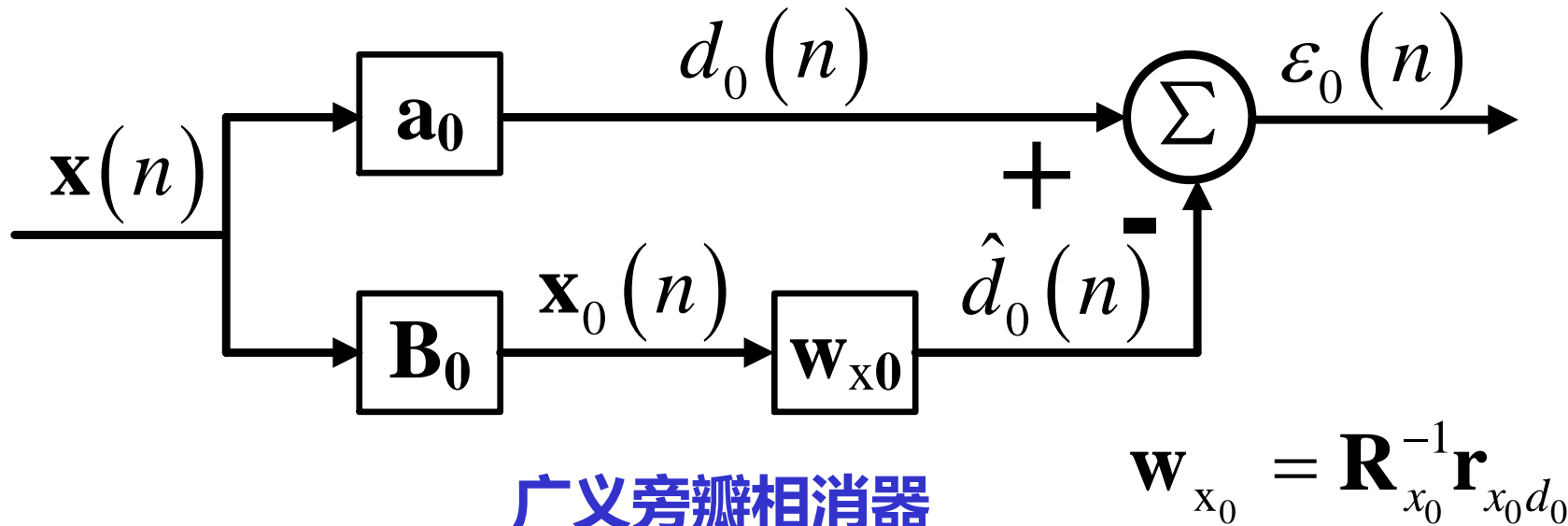
1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题



广义旁瓣相消器 (Generalized Sidelobe Canceler, GSC)

设阵列第 n 时刻接收数据为: $\mathbf{x}(n) = \mathbf{a}(\theta_0)s(n) + \mathbf{x}_I(n) + \mathbf{n}(n)$

自适应滤波后输出为: $y(n) = \varepsilon_0(n) = d_0(n) - \mathbf{w}_{x_0}^H \mathbf{x}_0(n)$



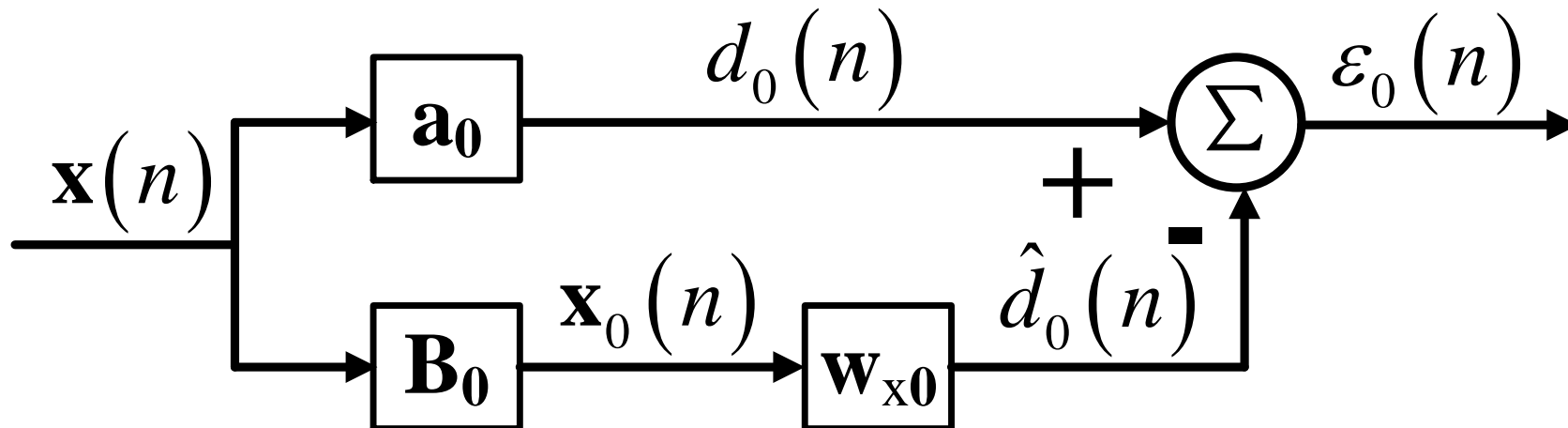


期望信号 $d_0(n) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{x}(n) = Ms(n) + \mathbf{a}^H(\theta_0) [\mathbf{x}_I(n) + \mathbf{n}(n)]$

干扰+噪声 $\mathbf{x}_0(n) = \mathbf{B}_0 \mathbf{x}(n)$ **自适应权矢量** $\mathbf{w}_{x_0}(n) = \mathbf{R}_{x_0}^{-1} \mathbf{r}_{x_0 d_0}$

其中, $\mathbf{r}_{x_0 d_0} = E[\mathbf{x}_0(n) d_0^*(n)]$, $\mathbf{R}_{x_0} = E[\mathbf{x}_0(n) \mathbf{x}_0^H(n)] = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{B}_0^H$

阻塞矩阵 $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{C}^{(M-1)M}$ **需满足条件:** $\mathbf{B}_0 \mathbf{a}(\theta_0) = \mathbf{0}$



广义旁瓣相消器



基本原理:

- 利用已知期望信号方向信息把阵列接收信号**变换为两个支路**;
- **上支路**经期望信号空间匹配滤波得到参考信号 $d_0(n)$, 其**含期望信号和干扰**;
- **下支路**经 $(M-1) \times M$ 行满秩阻塞矩阵 \mathbf{B}_0 阻塞掉期望信号, 则下支路中 $(M-1) \times 1$ 数据矢量 $\mathbf{x}_0(n)$ **只含干扰**;
- 上下支路中干扰信号相关并进行维纳滤波, 则上、下支路中的干扰可自适应抵消, 上支路中的期望信号被无失真地输出。

$$\varepsilon_0(n) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_{x_0}^H \mathbf{B}_0 \mathbf{x}(n) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{w}_{\text{GSC}} = \mathbf{a}(\theta_0) - \mathbf{B}_0^H \mathbf{w}_{x_0}$$



阻塞矩阵构建

M 阵元均匀线阵在期望信号方向 θ_0 的空间频率 $\sin\theta_0/\lambda$, 令 $u_s = d \sin\theta_0/\lambda$

则期望信号导向矢量可写为:

$$\mathbf{a}(\theta_0) = \left[1, e^{j2\pi u_s}, \dots, e^{j2\pi(M-1)u_s} \right]^T$$

构造 $M-1$ 个 u_k 值为:

$$u_m = u_s + \frac{m}{M}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

设对应的空间角度 θ_m 满足 $u_m = d \sin\theta_m/\lambda$, 对应的 $M-1$ 个方向向量为 $\mathbf{a}(\theta_m)$, 则

$$\mathbf{a}(\theta_m) = \left[1, e^{j2\pi u_m}, \dots, e^{j2\pi(M-1)u_m} \right]^T$$



$$\mathbf{a}(\theta_m) = \left[1, e^{j2\pi u_m}, \dots, e^{j2\pi(M-1)u_m} \right]^T \quad \mathbf{a}(\theta_0) = \left[1, e^{j2\pi u_s}, \dots, e^{j2\pi(M-1)u_s} \right]^T$$

$$\text{则 } \mathbf{a}^H(\theta_m) \mathbf{a}(\theta_0) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{j2\pi m/M} = \frac{1 - \left(e^{j2\pi m/M} \right)^M}{1 - e^{j2\pi m/M}} = \frac{1 - e^{j2\pi m}}{1 - e^{j2\pi m/M}} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

因此阻塞矩阵可构造为 $\mathbf{B} = \left[\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_{M-1}) \right]^H$

其作用是将数据中期望信号方向的信息阻塞掉，其他方向信息通过。



注:

- **GSC与 MVDR (Capon) 波束形成器等价 (证明略) ;**
- **GSC需对每个期望信号方向计算阻塞矩阵, 且需计算阻塞后的信号协方差矩阵和上、下支路的互相关向量, 因此计算量较大;**
- **而MVDR最优波束形成器的协方差矩阵和期望信号方向无关, 因此最优权矢量的计算较为简单。**



本次课内容

1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题

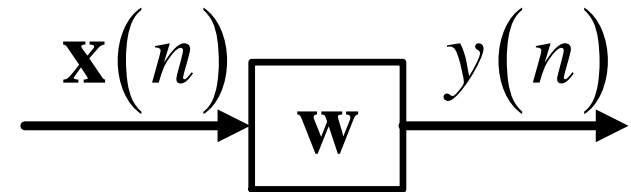


最小方差无失真响应 (Minimum Variance Distortionless Response, MVDR) 波束形成器

设阵列第 n 时刻接收数据为: $\mathbf{x}(n) = \mathbf{a}(\theta_0)s(n) + \mathbf{x}_I(n) + \mathbf{n}(n)$

自适应滤波后输出为: $y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)$

MVDR优化问题:
$$\begin{cases} \min E \left[|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)|^2 \right] \\ s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \end{cases}$$



MVDR最优权: $\mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \mu \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

自适应阵列处理的直接形式



本次课内容

1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题



4. 实际应用中需注意的一些问题

- a. **R 在实际工程中的估计所需快拍问题（收敛性）**
- b. **小快拍情况下算法稳健性提升技术（对角加载）**



a. \mathbf{R} 在实际工程中的估计所需快拍问题 (收敛性)

最优波束形成: $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

$\mathbf{R}_{\text{I+N}}$ 应不含目标信号, 而实际中则是用接收数据 $\mathbf{x}(n), n=1, 2, \dots, L$ 估计得到。

由估计理论: $\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$

该估计是最大似然无偏估计, 即 $\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) \rightarrow \mathbf{R}_{\text{I+N}}, L \rightarrow \infty$

那么, 对于平稳信号, 理论上 L 越大越合适。

然而, 在实际工程中, L 取多少合适?



分析:

$\mathbf{x}(n), n = 1, 2, \dots, L$ 是随机变量, 由此计算得到结果也是随机变量。

假设 $\mathbf{x}(n), n = 1, 2, \dots, L$ 独立且同服从高斯分布,

$$SINR = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}|} \quad \leftarrow \quad \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \quad \leftarrow \quad \hat{\mathbf{R}}_{I+N}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

$$\text{得到: } SINR(L) = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{R}_{I+N} \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0)|}$$



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) \rightarrow \mathbf{R}_{\text{I+N}}, L \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \text{SINR}(L) = \frac{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2}{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{R}_{\text{I+N}} \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|}$$

可得: $\text{SINR}(\infty) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

归一化信干噪比为: $\text{SINR}_0(L) = \frac{\text{SINR}(L)}{\text{SINR}(\infty)}$

$$= \frac{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2}{\left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \right] \left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{R}_{\text{I+N}} \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|}$$

令: $\rho = \frac{\text{SINR}(L)}{\text{SINR}(\infty)} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$ 是一个随机变量, 其概率密度函数为:



$$\rho(\rho \leq a) = \frac{L}{(M-2)!(L+1-M)!} \int_0^a (1-\mu)^{M-2} e^{L+1-M} d\mu$$

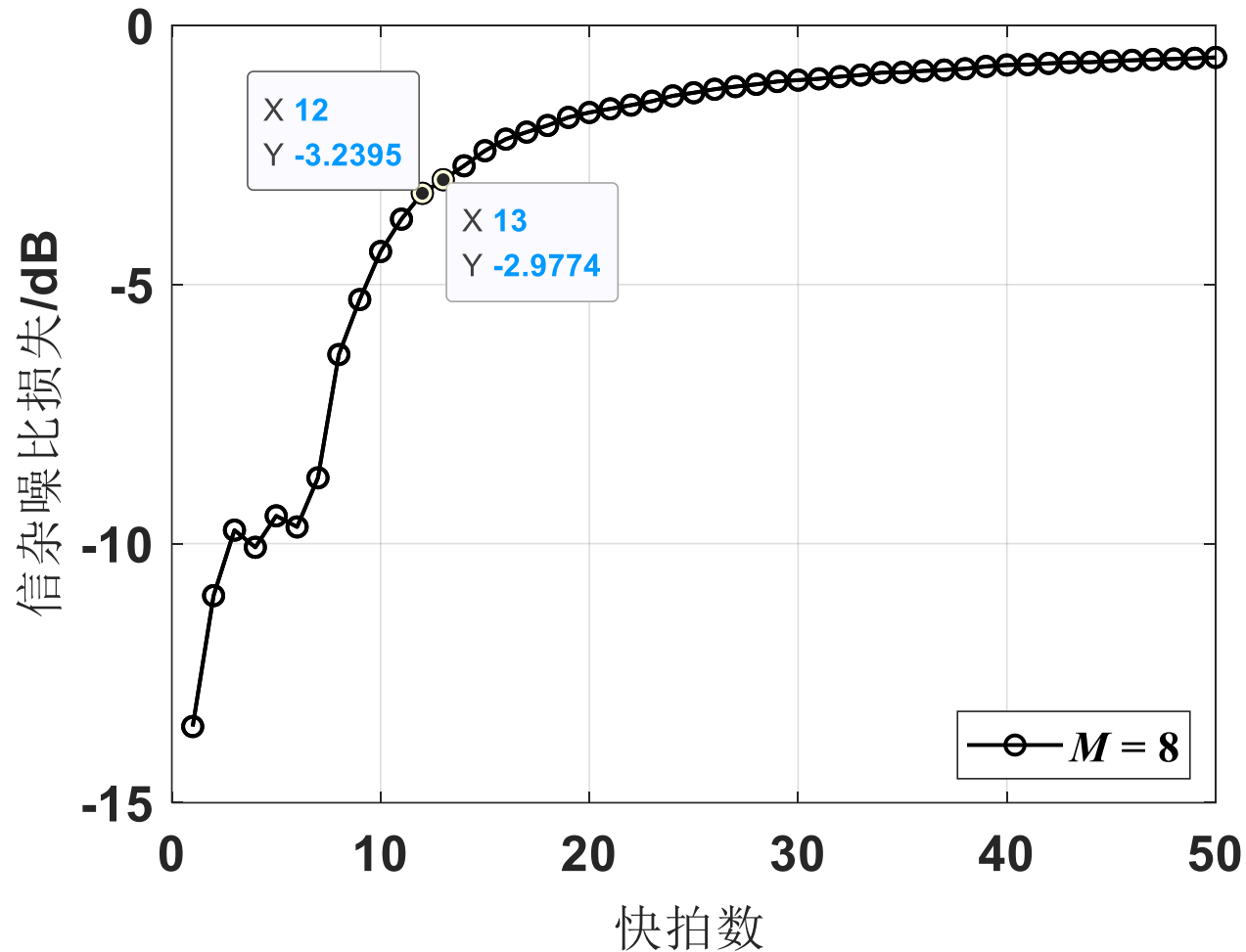
其中：

$$E[\rho] = \bar{\rho} = \frac{L+2-M}{L+1} \quad \text{var}(\rho) = \sigma_\rho = \frac{(L+2-M)(M-1)}{(L+1)^2(L+2)}$$

实际工程中，一般要求 $\bar{\rho} \geq 1/2$ ，解得 $L \geq 2M - 3$ ，即当估计协防差矩阵的快拍数 L 大于两倍系统自由度时 SINR性能损失不超过 3dB。

参考文献：

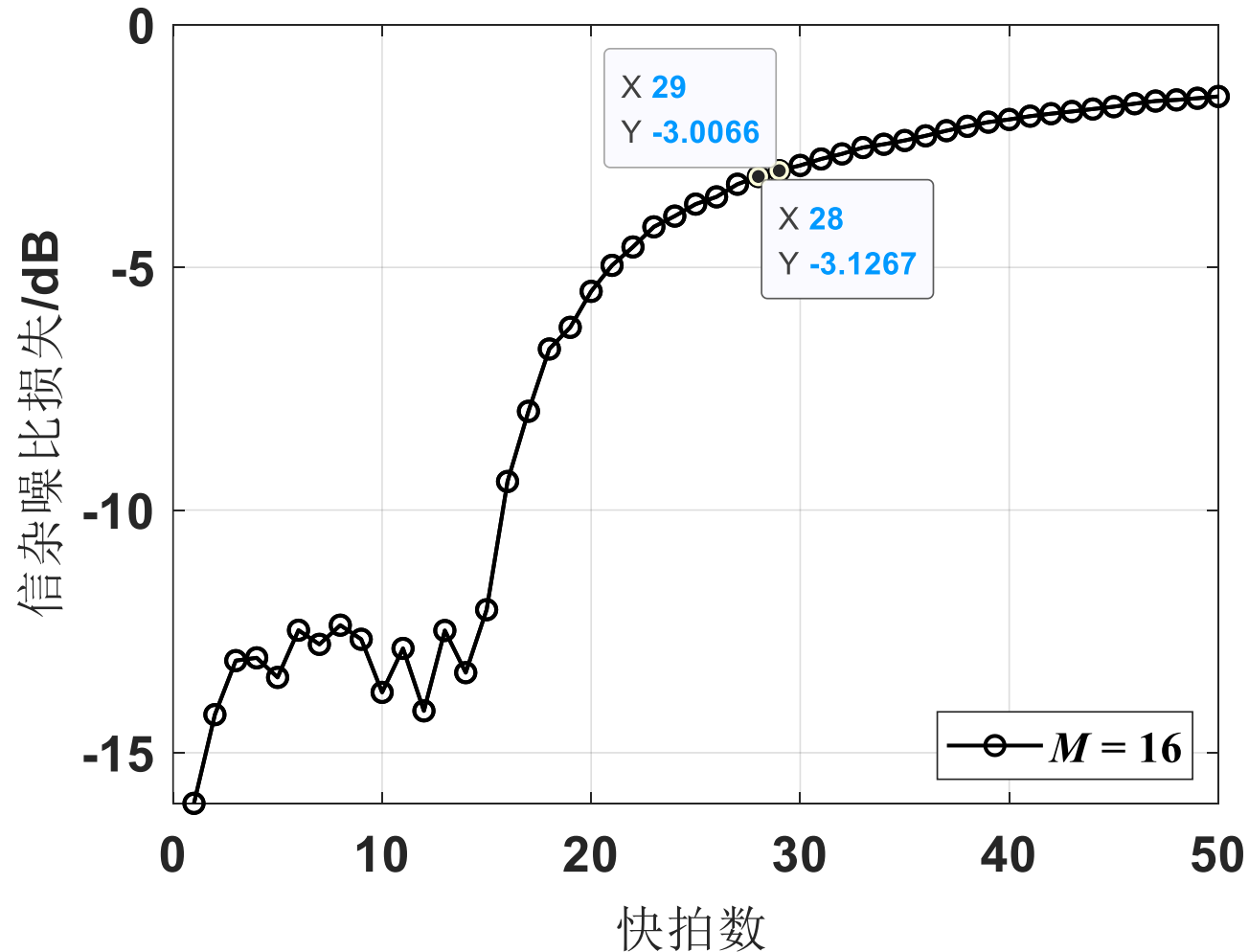
Reed I S. Rapid convergence rate in adaptive arrays. *IEEE Trans. on AES*, 10(6), 1974.



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

$$L \geq 2M - 3$$

输出信杂噪比损失与快拍数关系曲线（收敛曲线）



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

$$L \geq 2M - 3$$

输出信杂噪比损失与快拍数关系曲线（收敛曲线）



稳健波束形成：指即使在只有不精确期望信号导向矢量（由阵列误差导致）可利用时，仍旧能得到良好的输出信干噪比，而不产生信号相消现象。

几点说明：

1. 直接利用矩阵求逆得到最优权系数进行自适应波束形成的方法，统称为采样矩阵直接求逆（Sample Matrix Inversion, SMI）法，为开环算法。相应地，每次快拍单独计算权值的典型算法有最小均方（LMS）算法、差分最陡下降（DSD）算法和加速梯度（AG）算法等为闭环算法，即存在反馈。



2. 在阵列数据仅含干扰 + 噪声时，数据服从零均值、复高斯独立同分布，则SMI的收敛特性仅依赖于采样快拍数和阵元数；但当阵列接收数据中含有期望信号时，则严重影响输出 SINR 的收敛速度，且期望信号越大，收敛时间越长；
3. 研究表明，有限次快拍自适应波束形成中，当相关矩阵含有目标信号时，即使阵列流形精确已知，也会造成信干噪比下降；
4. 自适应波束畸变的原因：协方差矩阵特征值分散，小特征值及对应的特征向量扰动，并参与权值计算所致。解决办法为对角加载。



b. 协方差矩阵 R 对角加载 (Diagonal Loading) 技术

静态方向图 (Quiescent Pattern) : 期望方向空域导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 形成的方向图。

特征波束 (Eigenbeam) : 用 R 特征矢量作为权系数形成的波束。

自适应波束方向图: 可看作有静态方向图减去特征方向图

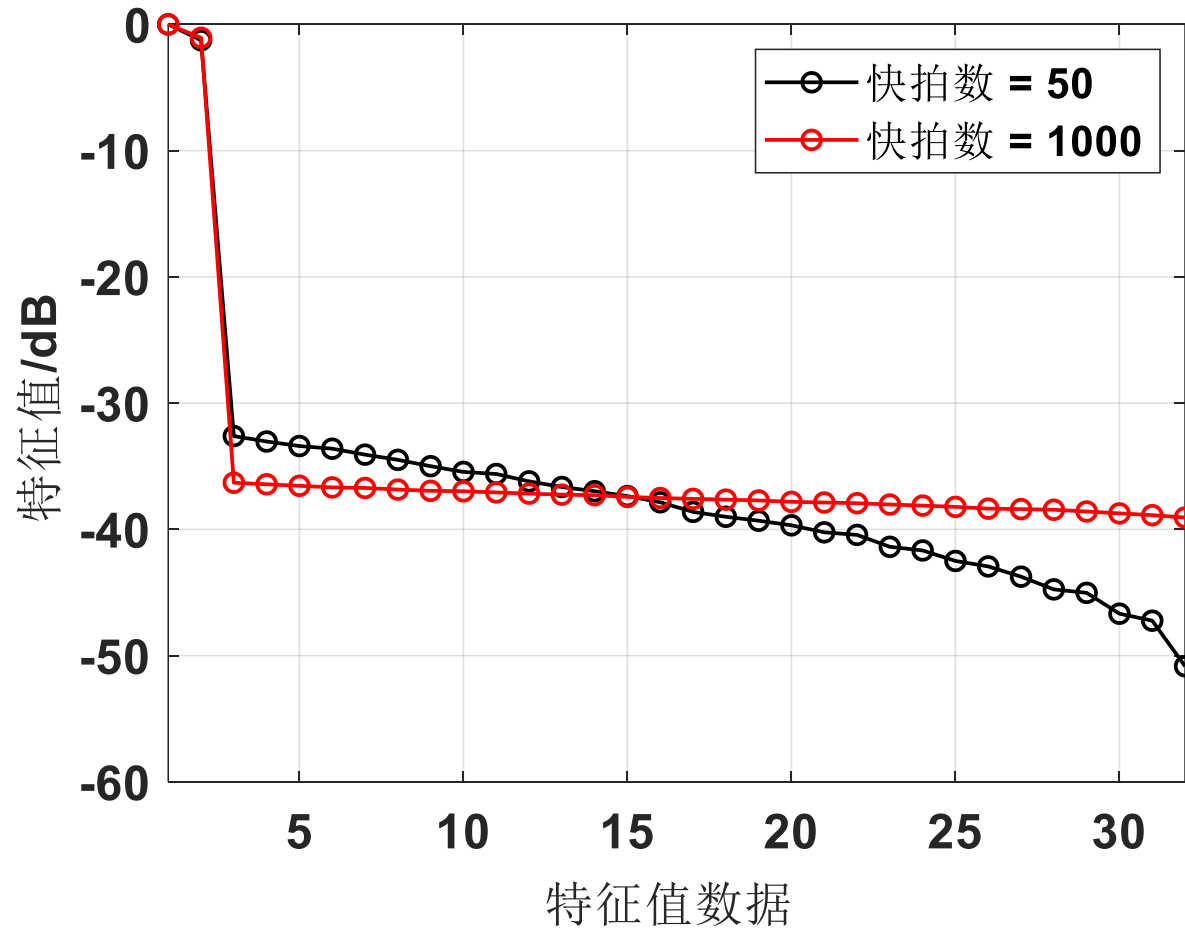
$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

参考文献

Monzingo R A and Miller T W. Introduction to adaptive arrays. New York: Wiley, 1980, 263.



- 2 个干扰源对应 2 个大特征值，其他小特征值对应噪声；
- 快拍数较少时，噪声特征值发散严重（红色曲线）；
- 快拍数较多时，噪声特征值发散不严重（黑色曲线）。



R 特征谱 ($M = 32$, 2 干扰)



$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

R 为 Hermitian 矩阵，因此所有特征值为实数，同时其特征波束正交。

$E_i(\theta)Q(\theta)$ 表征在特征波束对应方向形成零陷的深度。

理想情况下：

$$\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$$

- **当 λ_i 对应干扰时，近似为 1，表明在对应干扰方向完全形成零陷，零陷深度与干扰强度一致。**
- **当 λ_i 对应噪声时，近似为 0，表明在噪声方向并不能形成零陷。**



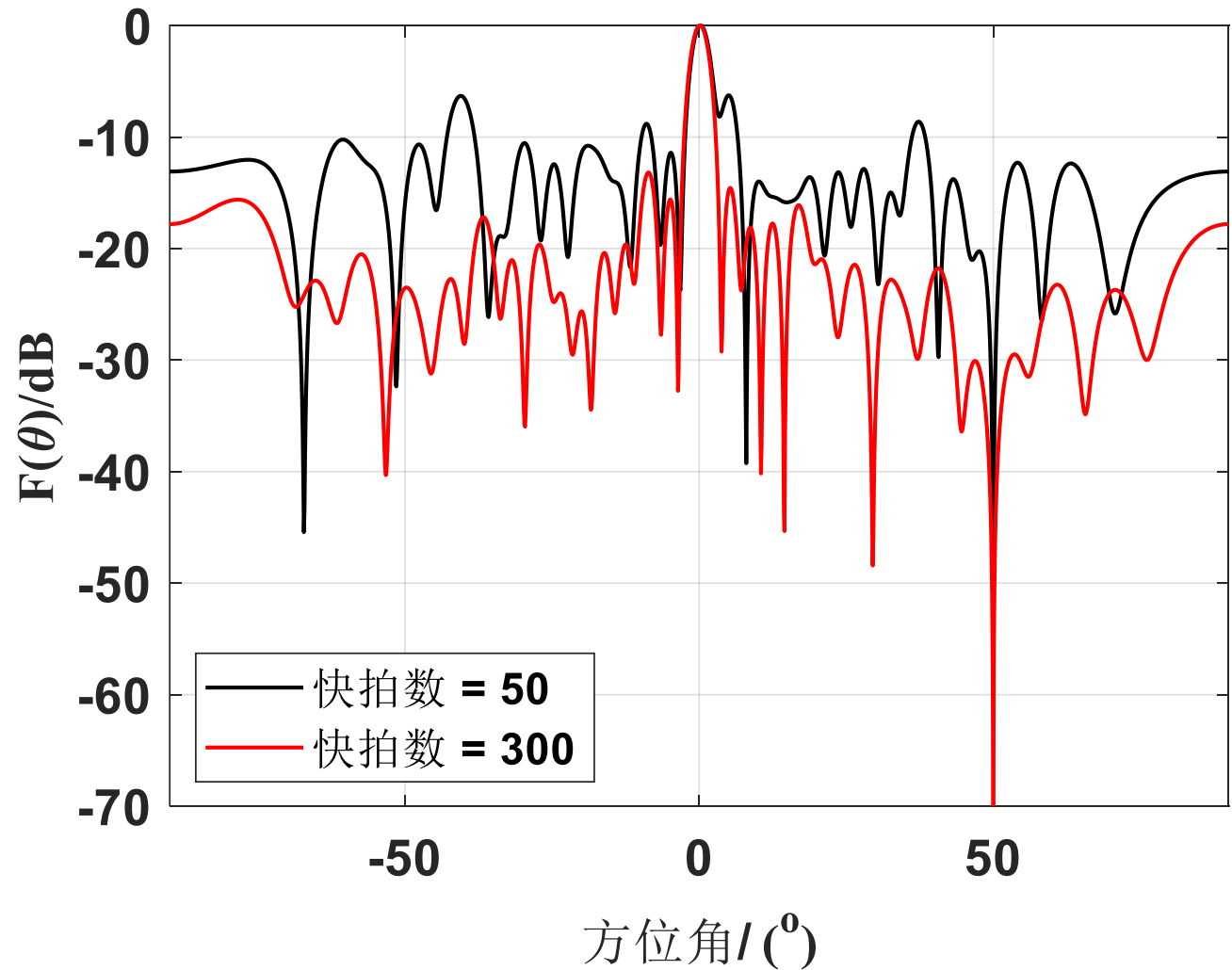
$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

- 当快拍数较多，即噪声对应小特征值较为“平坦”时， $\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$ 近似为零，因此自适应波束形状受噪声影响较小。
- 当快拍数较少，即噪声对应小特征值较为发散时， $\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$ 并不近似为 0，导致在一些随机噪声方向发生波形零陷，导致自适应波束发生畸变。



- 快拍数较少时，由于噪声特征值发散，导致自适应方向图发生畸变，表现为副瓣抬升以及零陷深度不够。

实际应用中快拍数往往不够，怎么办呢？



自适应方向图 ($M = 32$, 1 干扰位于 50°)



协方差矩阵 \mathbf{R} 对角加载 (Diagonal Loading) 技术

思路：降低小特征值的发散程度

回顾： $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H$ 其中： $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_M)$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M]$$

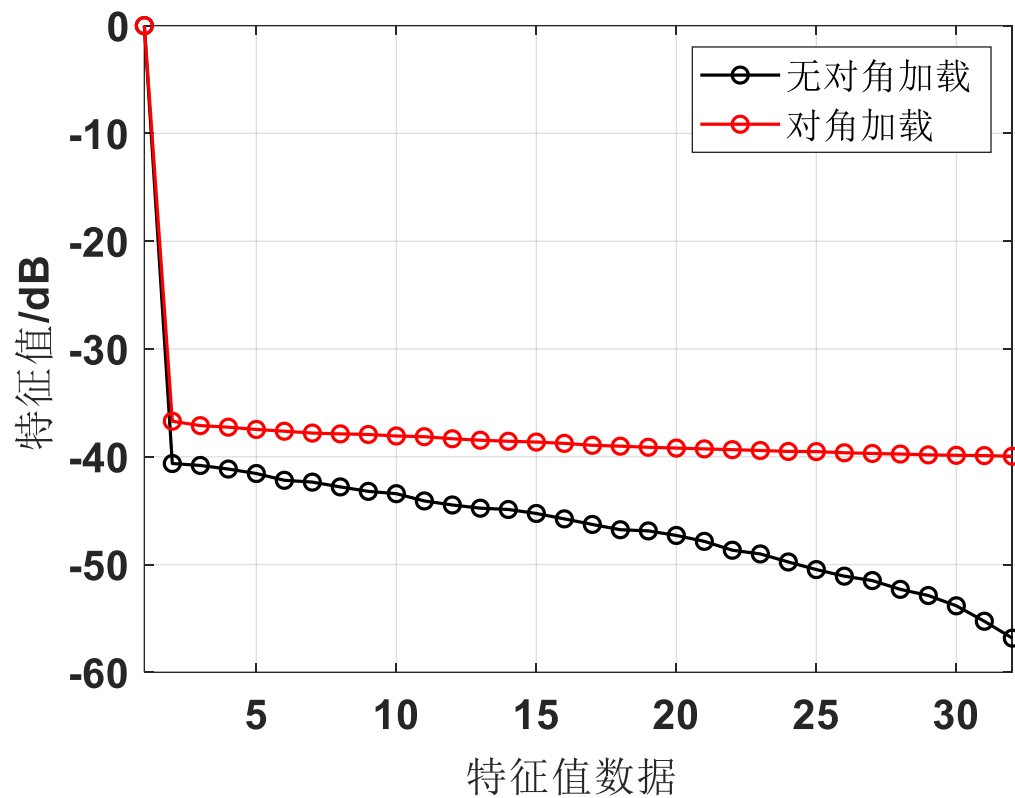
如果 \mathbf{R} 加上一个对角阵，强行将小特征值抬升至某一恒定电平，那么可期望解决其发散导致的自适应波形畸变问题。

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \sigma_L \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H + \sigma_L \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}(\mathbf{\Sigma} + \sigma_L \mathbf{I})\mathbf{U}^H$$

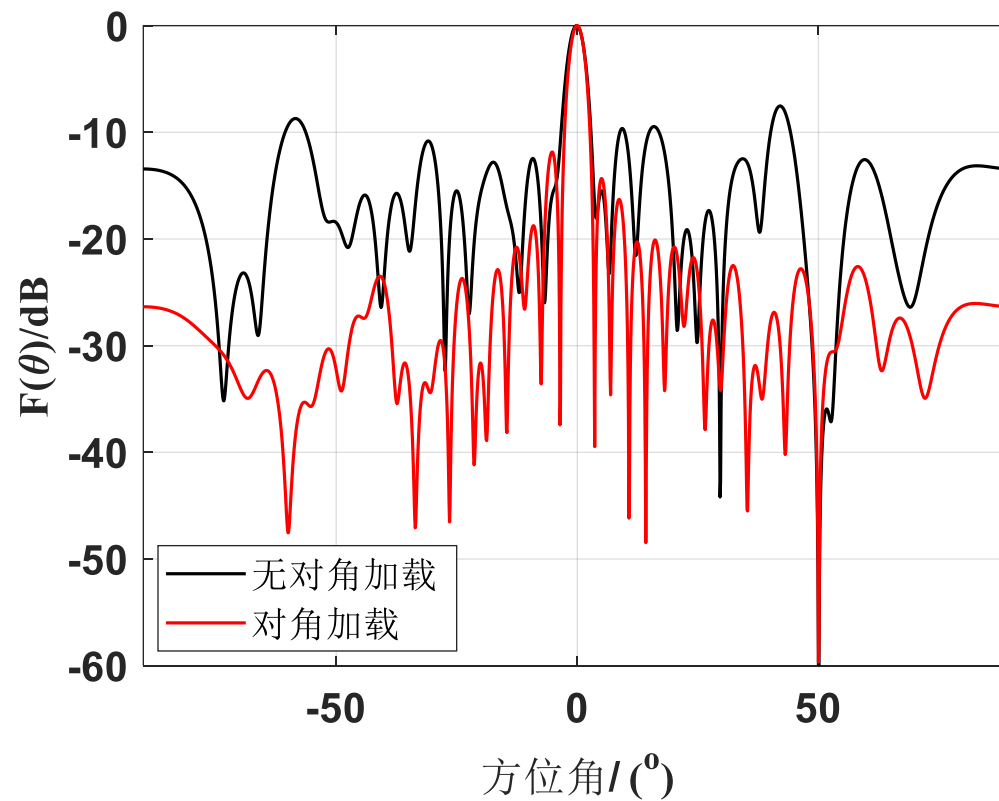


$M = 32$, 1 干扰位于 50°

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \sigma_L \mathbf{I}$$



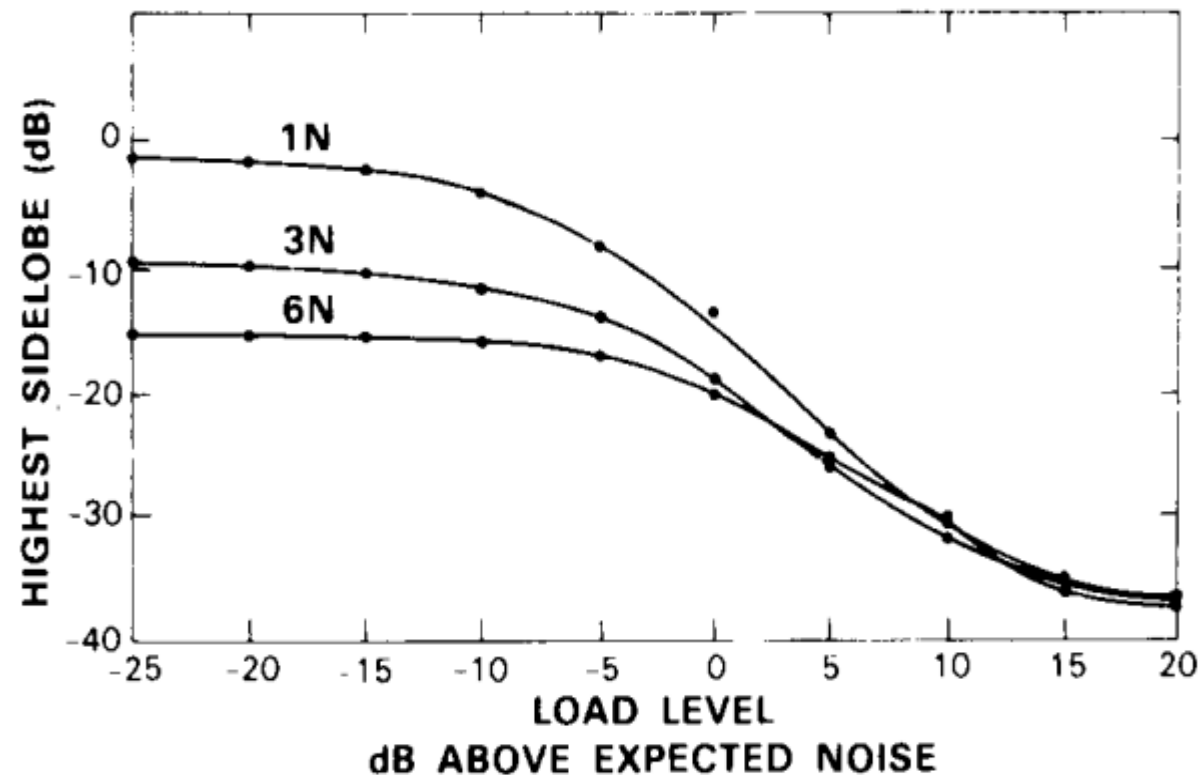
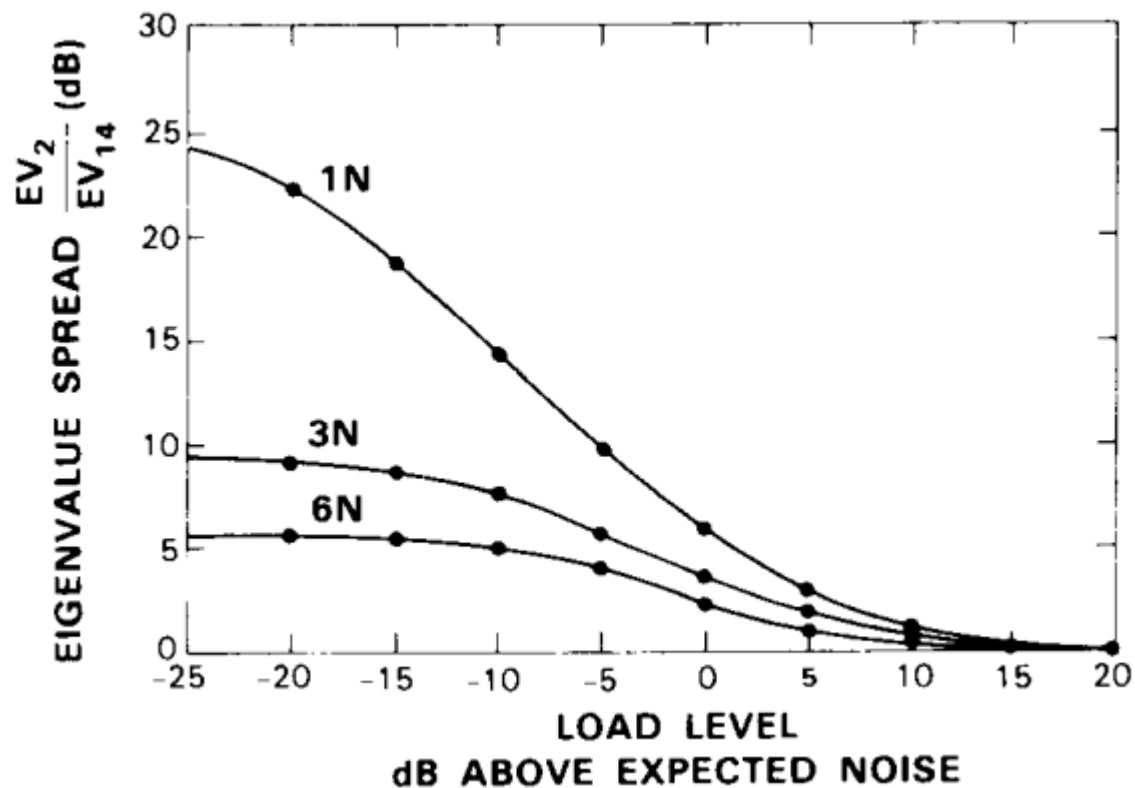
对角加载前后特征谱对比图



对角加载前后自适应方向图对比图



加载量 (Loading Level) 取多大合适呢?



结论：对角加载量取高于噪声电平12dB左右



作业:

根据MSINR准则仿真自适应波束形成算法，绘制自适应方向图，

重点分析:

- 1. 单个和多个副瓣干扰情况**
- 2. 干扰由主瓣进入情况**
- 3. 协方差矩阵 R 中含有目标信号情况**
- 4. 不同快拍数影响情况**