



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

阵列信号处理 第九讲续

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



本次课内容

1. 自适应旁瓣相消器
2. 广义旁瓣相消器
3. 最小方差无失真响应波束形成器
4. 实际应用中需注意的一些问题



4. 实际应用中需注意的一些问题

- a. 实际工程中的估计R 所需快拍问题 (**收敛性**)
- b. 小快拍情况下算法稳健性提升技术 (**对角加载**)



a. 实际工程中的估计 \mathbf{R} 所需快拍问题（收敛性）

最优波束形成： $\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

$\mathbf{R}_{\text{I+N}}$ 应不含目标信号，而实际中则是用接收数据 $\mathbf{x}(n), n = 1, 2, \dots, L$ 估计得到。

由估计理论： $\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$

该估计是最大似然无偏估计，即 $\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) \rightarrow \mathbf{R}_{\text{I+N}}, L \rightarrow \infty$

那么，对于平稳信号，理论上 L 越大越合适。

然而，在实际工程中， L 取多少合适？



分析:

$\mathbf{x}(n), n = 1, 2, \dots, L$ 是随机变量, 由此计算得到结果也是随机变量。

假设 $\mathbf{x}(n), n = 1, 2, \dots, L$ 独立且同服从高斯分布,

$$SINR = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{|\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{I+N} \mathbf{w}|} \quad \leftarrow \quad \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mu \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \quad \leftarrow \quad \hat{\mathbf{R}}_{I+N}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

得到:
$$SINR(L) = \frac{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{|\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{R}_{I+N} \hat{\mathbf{R}}_{I+N}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0)|}$$



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) \rightarrow \mathbf{R}_{\text{I+N}}, L \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \text{SINR}(L) = \frac{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2}{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{R}_{\text{I+N}} \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|}$$

可得: $\text{SINR}(\infty) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)$

归一化信干噪比为:

$$\text{SINR}_0(L) = \frac{\text{SINR}(L)}{\text{SINR}(\infty)} = \frac{\left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|^2}{\left[\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{\text{I+N}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \right] \left| \mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{R}_{\text{I+N}} \hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}^{-1}(L) \mathbf{a}(\theta_0) \right|}$$

令: $\rho = \frac{\text{SINR}(L)}{\text{SINR}(\infty)} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$ 是一个随机变量, 其概率密度函数为:



$$\rho(\rho \leq a) = \frac{L}{(M-2)!(L+1-M)!} \int_0^a (1-\mu)^{M-2} e^{L+1-M} d\mu$$

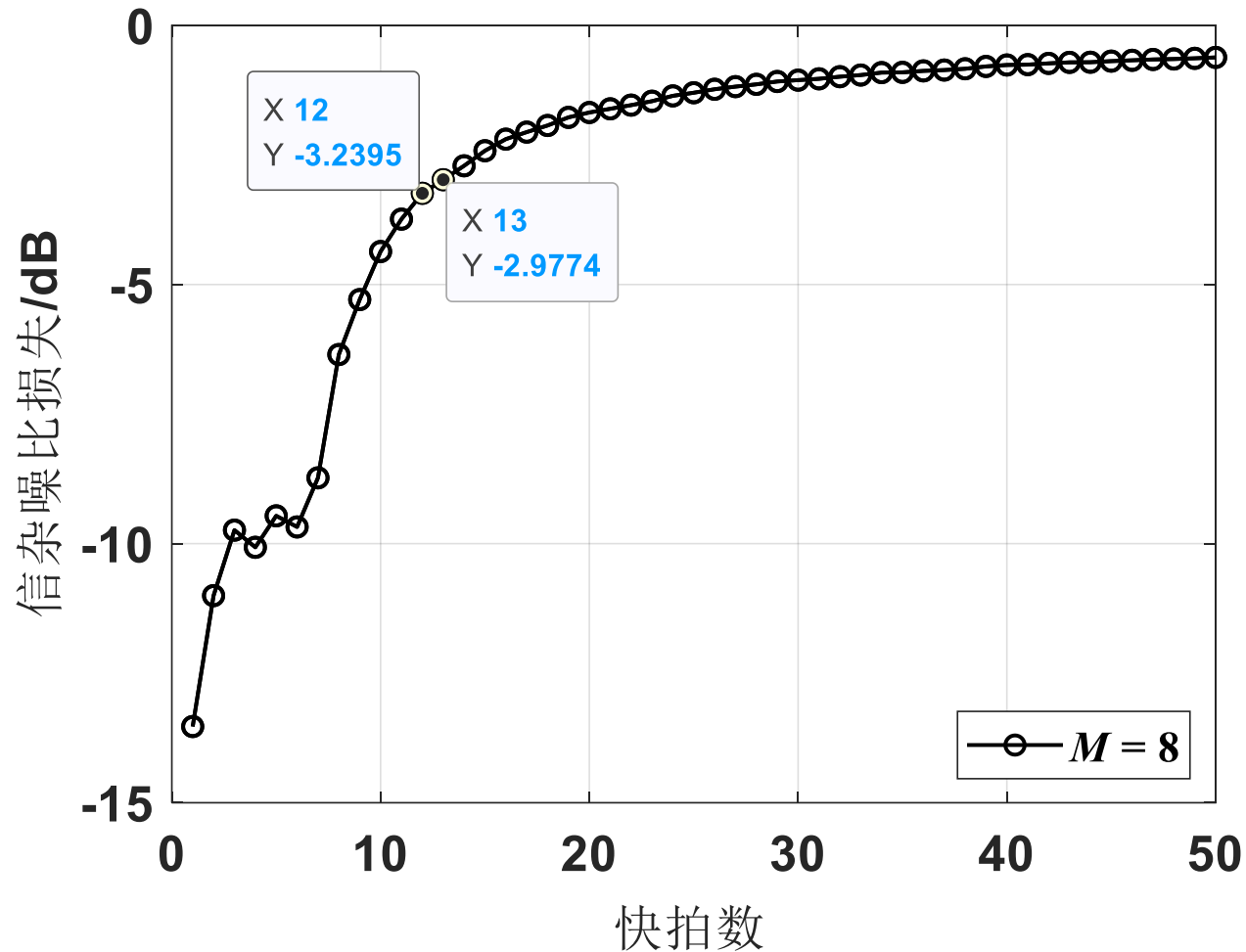
其中：

$$E[\rho] = \bar{\rho} = \frac{L+2-M}{L+1} \quad \text{var}(\rho) = \sigma_\rho = \frac{(L+2-M)(M-1)}{(L+1)^2(L+2)}$$

实际工程中，一般要求 $\bar{\rho} \geq 1/2$ ，解得 $L \geq 2M - 3$ ，即当估计协防差矩阵的快拍数 L 大于两倍系统自由度时 SINR性能损失不超过 3dB。

参考文献：

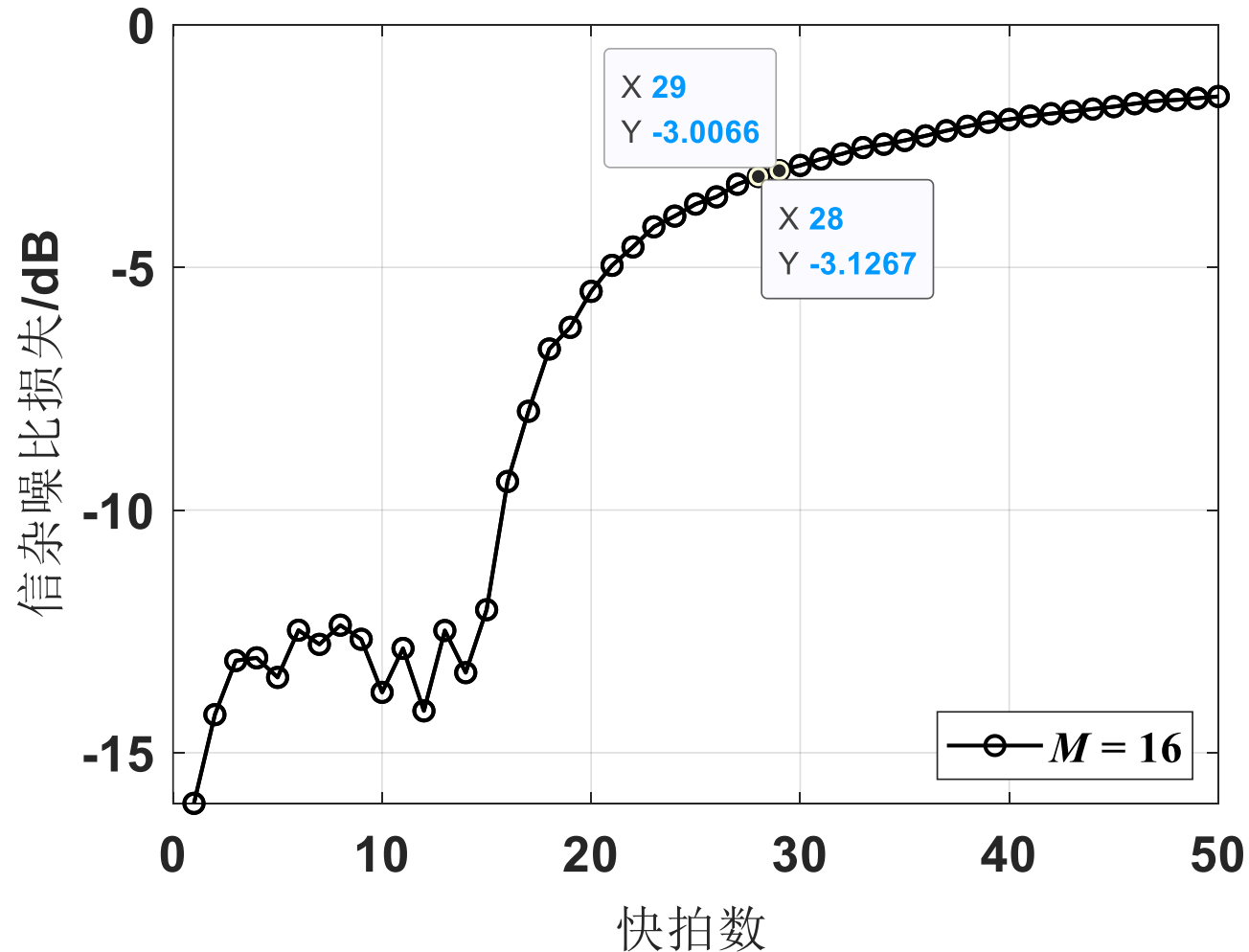
Reed I S. Rapid convergence rate in adaptive arrays. *IEEE Trans. on AES*, 10(6), 1974.



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

$$L \geq 2M - 3$$

输出信杂噪比损失与快拍数关系曲线 ($M = 8$)



$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{I+N}}(L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n)$$

$$L \geq 2M - 3$$

输出信杂噪比损失与快拍数关系曲线 ($M = 16$)



稳健波束形成：指即使在只有不精确期望信号导向矢量（由阵列误差导致）可利用时，仍旧能得到良好的输出信干噪比，而不产生信号相消现象。

几点说明：

1. 直接利用矩阵求逆得到最优权系数进行自适应波束形成的方法，统称为**采样矩阵直接求逆**（Sample Matrix Inversion, SMI）法，为开环算法。相应地，每次快拍单独计算权值的典型算法有最小均方（LMS）算法、差分最陡下降（DSD）算法和加速梯度（AG）算法等为闭环算法，即存在反馈。



2. 在阵列数据仅含干扰 + 噪声时，数据服从零均值、复高斯独立同分布，则SMI的收敛特性仅依赖于采样快拍数和阵元数；但当阵列接收数据中含有期望信号时，则严重影响输出 SINR 的收敛速度，且期望信号越大，收敛时间越长；
3. 研究表明，有限次快拍自适应波束形成中，当相关矩阵含有目标信号时，即使阵列流形精确已知，也会造成信干噪比下降；
4. 自适应波束畸变的原因：协方差矩阵特征值分散，小特征值及对应的特征向量扰动，并参与权值计算所致。解决办法为对角加载。



b. 协方差矩阵 R 对角加载 (Diagonal Loading) 技术

静态方向图 (Quiescent Pattern) : 期望方向空域导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_0)$ 形成的方向图。

特征波束 (Eigenbeam) : 用 R 特征矢量作为权系数形成的波束。

自适应波束方向图: 可看作有静态方向图减去特征方向图

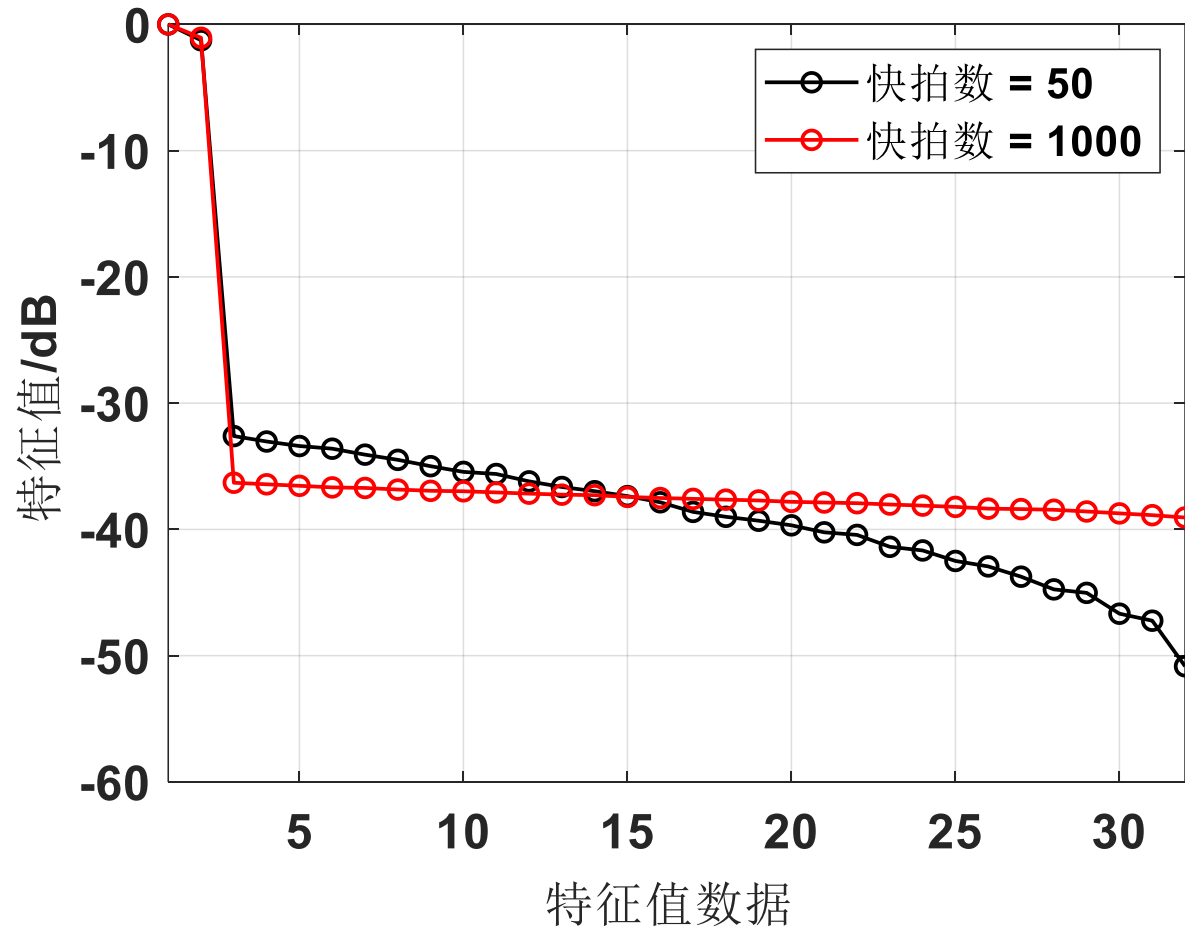
$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

参考文献

Monzingo R A and Miller T W. Introduction to adaptive arrays. New York: Wiley, 1980, 263.



- 2 个干扰源对应 2 个大特征值，其他小特征值对应噪声；
- 快拍数较少时，噪声特征值发散严重（红色曲线）；
- 快拍数较多时，噪声特征值发散不严重（黑色曲线）。



R 特征谱 ($M = 32$, 2 干扰)



$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

R 为 Hermitian 矩阵，因此所有特征值为实数，同时其特征波束正交。

$E_i(\theta)Q(\theta)$ 表征在特征波束对应方向形成零陷的深度。

理想情况下：

$$\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$$

- **当 λ_i 对应干扰时，近似为 1，表明在对应干扰方向完全形成零陷，零陷深度与干扰强度一致。**
- **当 λ_i 对应噪声时，近似为 0，表明在噪声方向并不能形成零陷。**



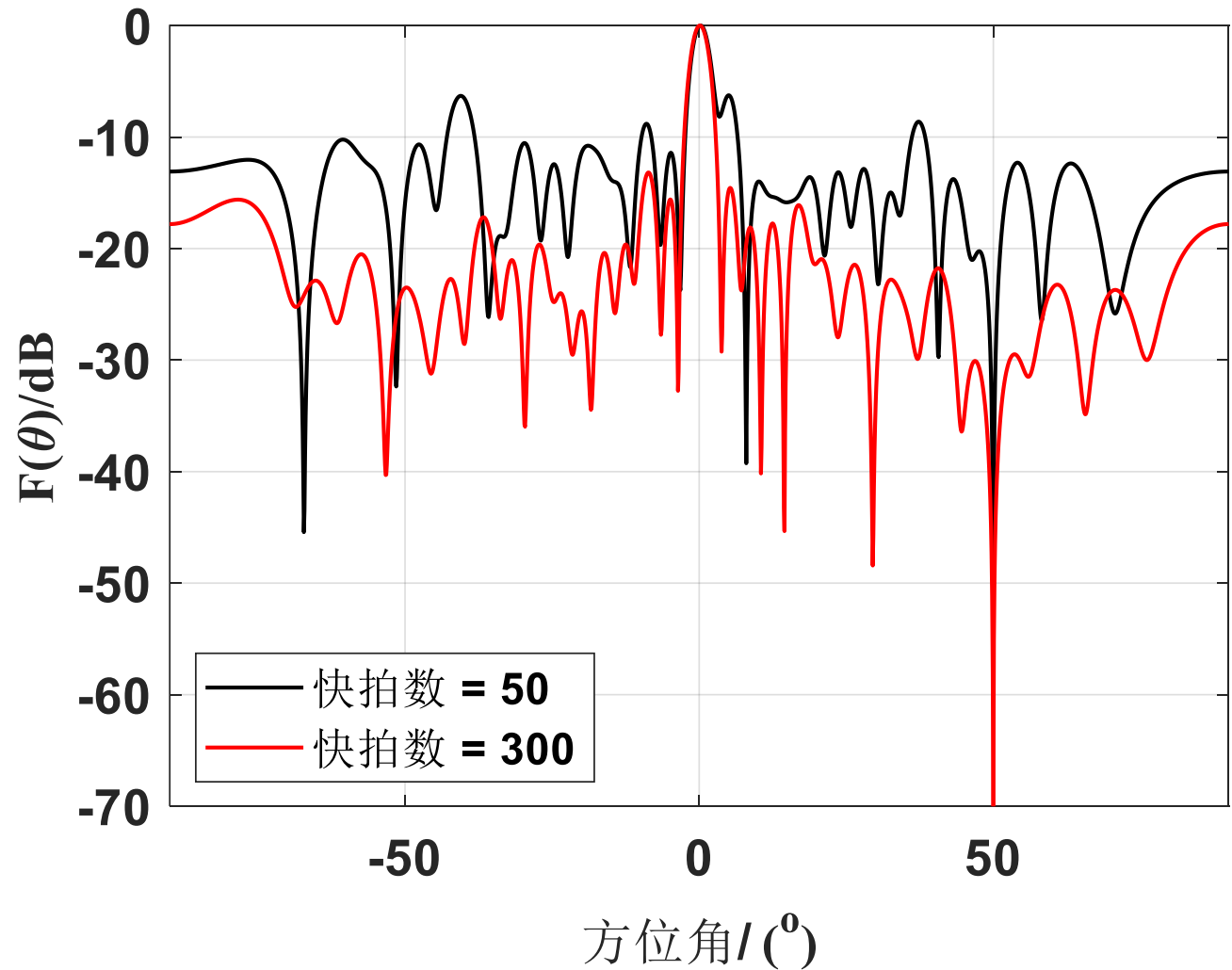
$$F(\theta) = Q(\theta) - \sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i} \right) E_i(\theta) [E_i(\theta) Q(\theta)]$$

- 当快拍数较多，即噪声对应小特征值较为“平坦”时， $\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$ 近似为零，因此自适应波束形状受噪声影响较小。
- 当快拍数较少，即噪声对应小特征值较为发散时， $\frac{\lambda_i - \lambda_{\min}}{\lambda_i}$ 并不近似为 0，导致在一些随机噪声方向发生波形零陷，导致自适应波束发生畸变。



- 快拍数较少时，由于噪声特征值发散，导致自适应方向图发生畸变，表现为副瓣抬升以及零陷深度不够。

实际应用中快拍数往往不够，怎么办呢？



自适应方向图 ($M = 32$, 1 干扰位于 50°)



协方差矩阵 \mathbf{R} 对角加载 (Diagonal Loading) 技术

思路：降低小特征值的发散程度

回顾： $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H$ 其中： $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_M)$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M]$$

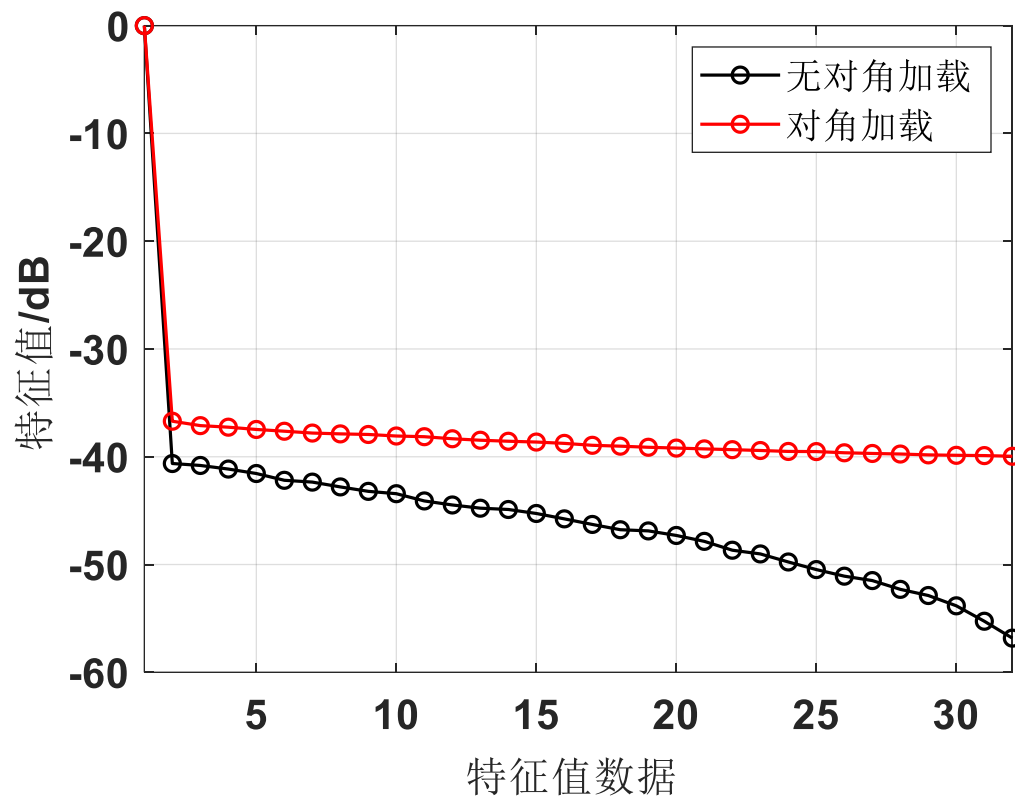
如果 \mathbf{R} 加上一个对角阵，强行将小特征值抬升至某一恒定电平，那么可期望解决其发散导致的自适应波形畸变问题。

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \sigma_L \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H + \sigma_L \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}(\mathbf{\Sigma} + \sigma_L \mathbf{I})\mathbf{U}^H$$

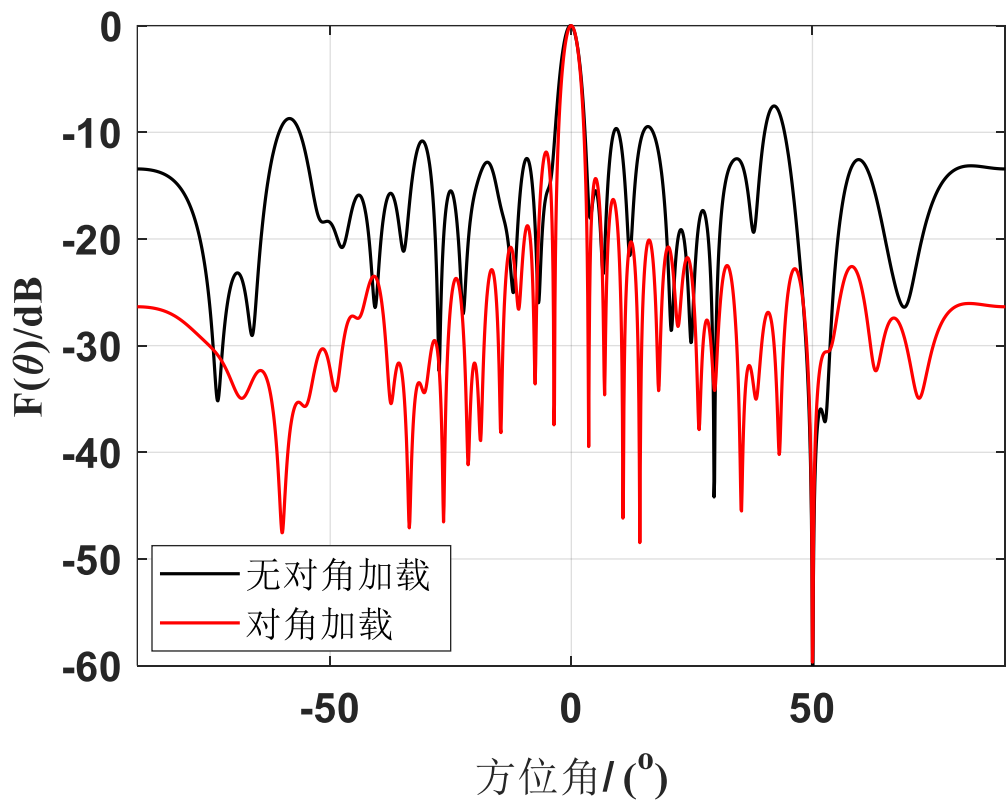


$M = 32$, 1 干扰位于 50°

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \sigma_L \mathbf{I}$$



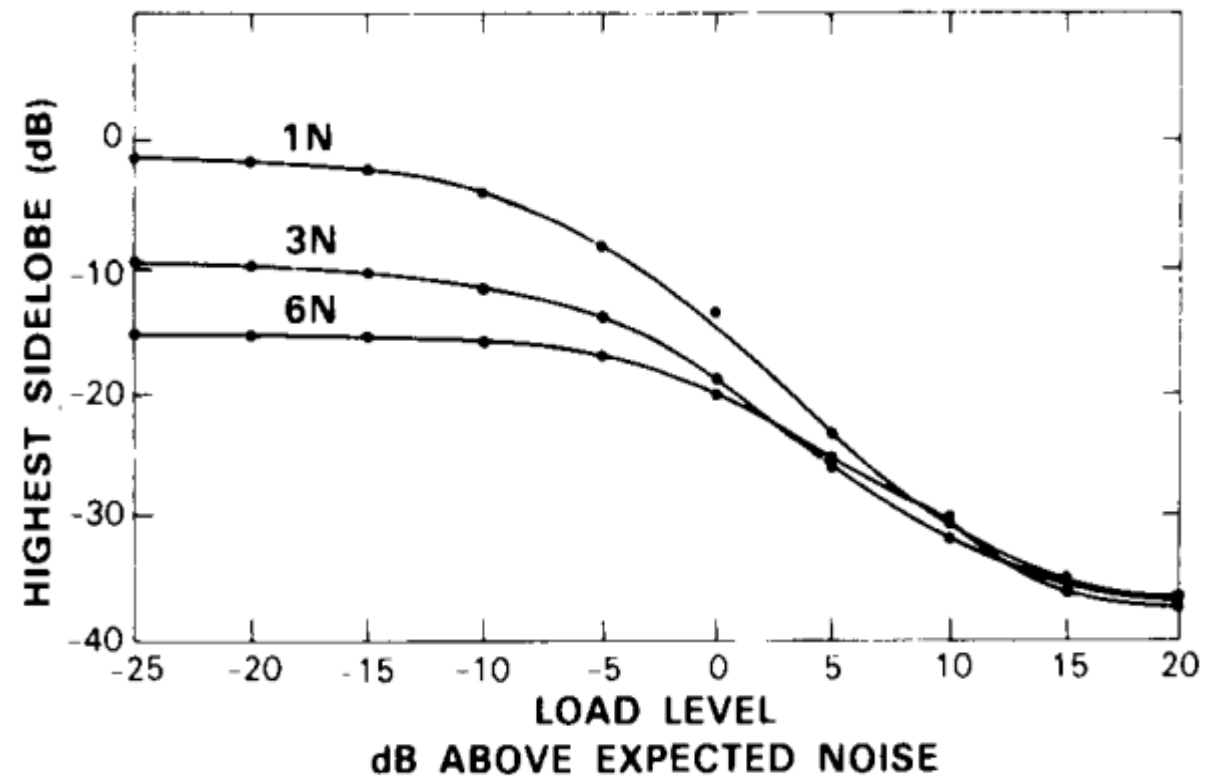
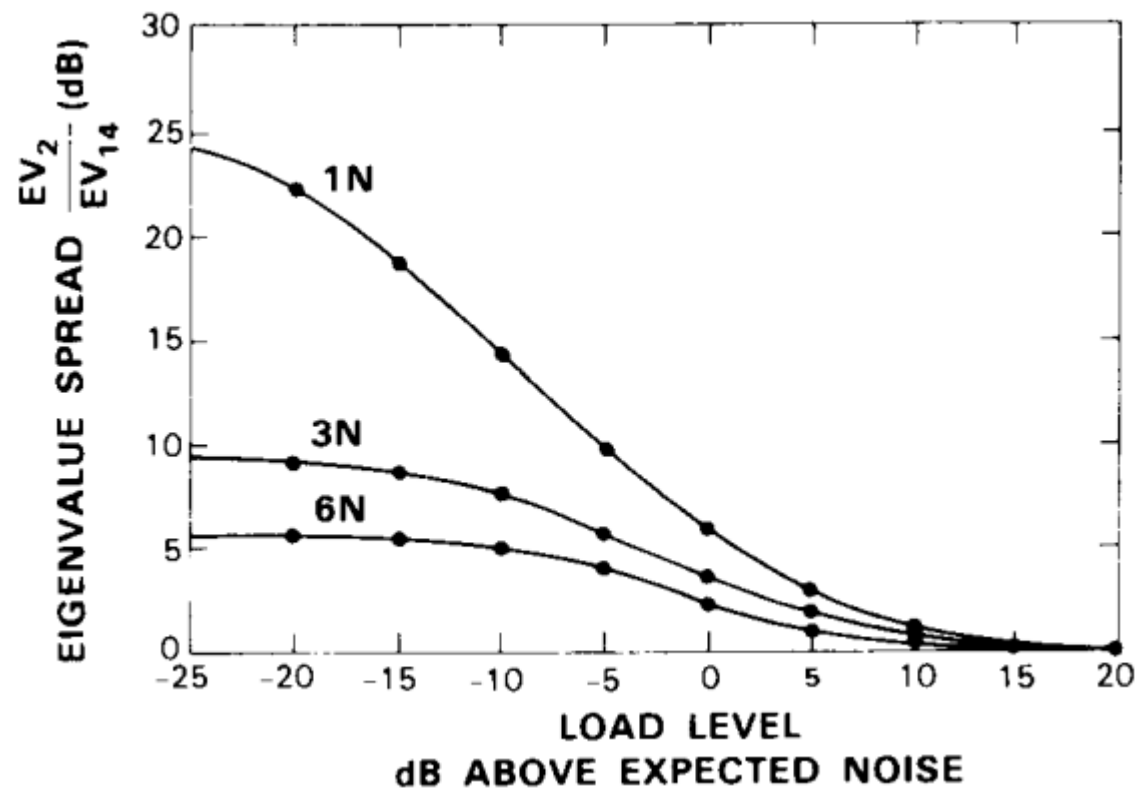
对角加载前后特征谱对比图



对角加载前后自适应方向图对比图



加载量 (Loading Level) 取多大合适呢?



结论：对角加载量取高于噪声电平12dB左右



阵列信号处理 第十讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



本次课内容

1. 部分自适应阵列处理概念
2. 降维自适应阵列处理
3. 降秩自适应阵列处理



本次课内容

1. 部分自适应阵列处理概念
2. 降维自适应阵列处理
3. 降秩自适应阵列处理



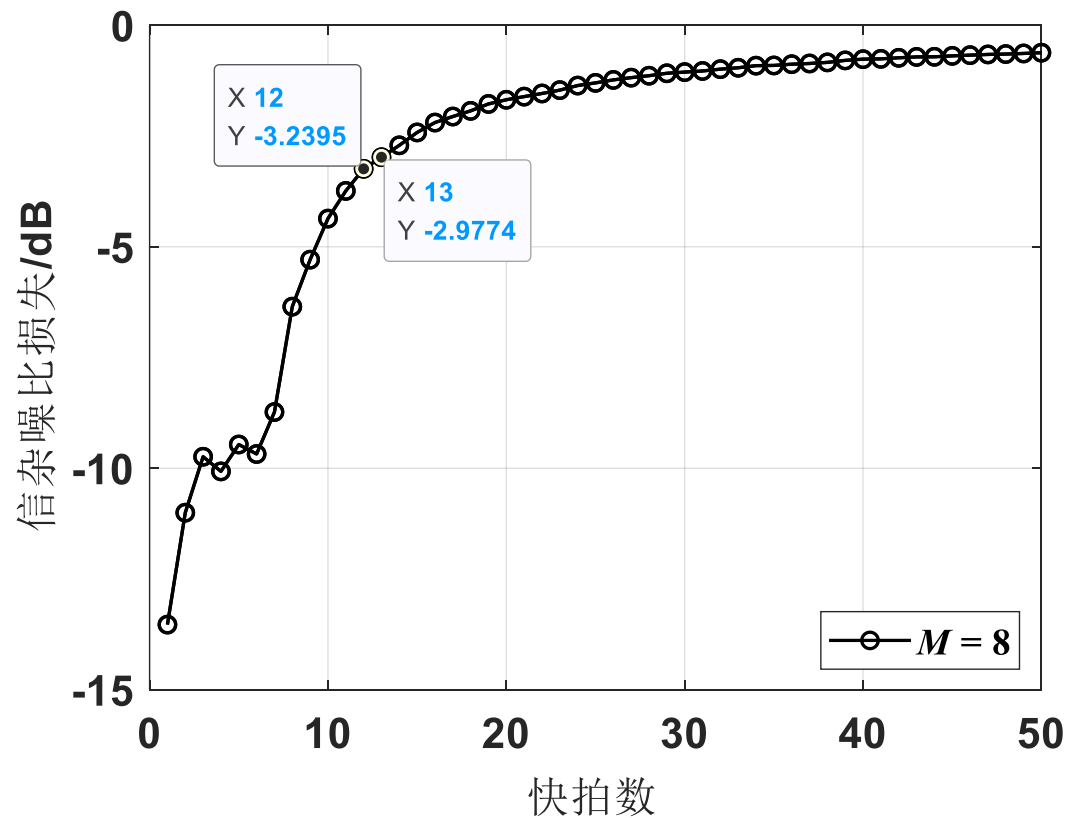
什么是自由度 (Degree of Freedom, DoF) ?

统计学上，自由度是指当以样本的统计量来估计总体的参数时，样本中**独立或能自由变化**的数据的个数。而对于阵列自适应处理来说，**自由度指能够调整权系数的阵元或通道个数**。

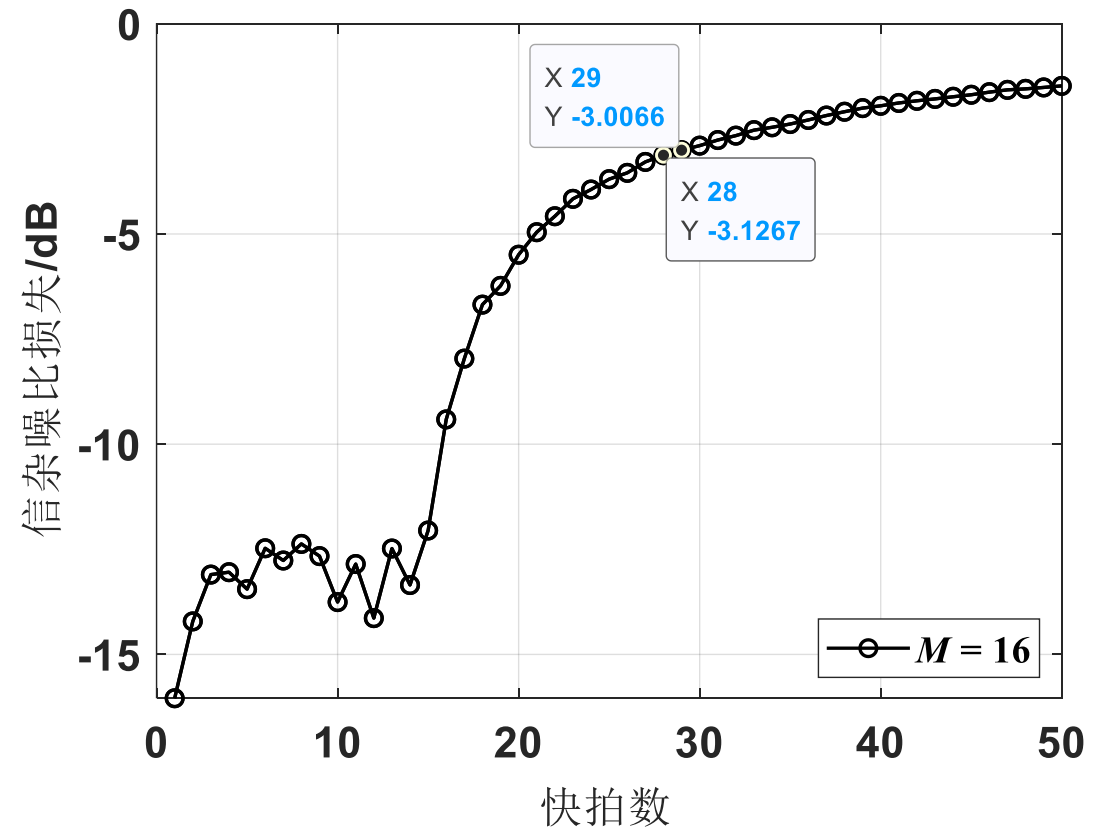
如 N 阵元自适应阵列，有 N 个自由度可以利用，其中一部分自由度用来满足特定约束（如单位增益约束及其他线性约束），这些**用于线性约束的自由度称为约束自由度**；剩下的自由度**来自自适应地抑制干扰或噪声，称为自适应自由度**。**总自由度称为系统自由度**。



自适应自由度越多，自适应算法计算量越大，收敛速度越慢，对应所需快拍数越多；反之，则收敛速度加快，能在较少快拍下收敛。



$M = 8$



$M = 16$



- 利用所有可用自适应自由度进行自适应阵列处理，称为**全自适应阵列处理**或**满秩自适应阵列处理**；
- 如果只利用部分自适应阵列处理和降秩自适应阵列处理，则称为**部分自适应阵列处理**；
- **降维自适应阵列处理**和**降秩自适应阵列处理**是部分自适应阵列处理两类典型方法。



降维自适应阵列处理

- 实际应用中，阵列的阵元数往往成千上万，如进行全自适应处理，则所需运算量与存储量极大，且收敛性极差，工程上难以应用；
- 因此，首先要从物理上进行降维，然后再进行自适应处理；
- 降维自适应阵列处理主要包括：**子阵方式（子阵空间法）**和**波束方式（波束空间法）**。



降秩自适应阵列处理

- 只利用部分自适应自由度，其余自适应自由度被舍弃或转化为约束自由度；
- 降秩自适应滤波在降秩子空间内寻优，使得自适应处理的维数降低，收敛速度加快；
- 降秩类方法收敛快拍数由约 2 倍的系统自由度降至 2 倍大特征值个数（秩）。



本次课内容

1. 部分自适应阵列处理概念
2. 降维自适应阵列处理
3. 降秩自适应阵列处理

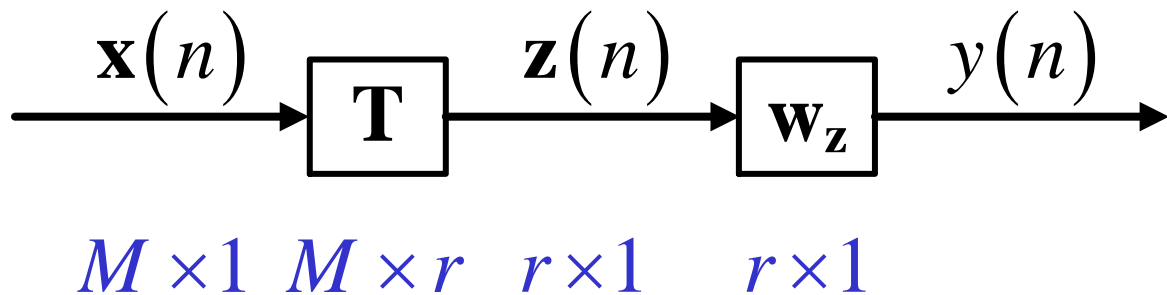


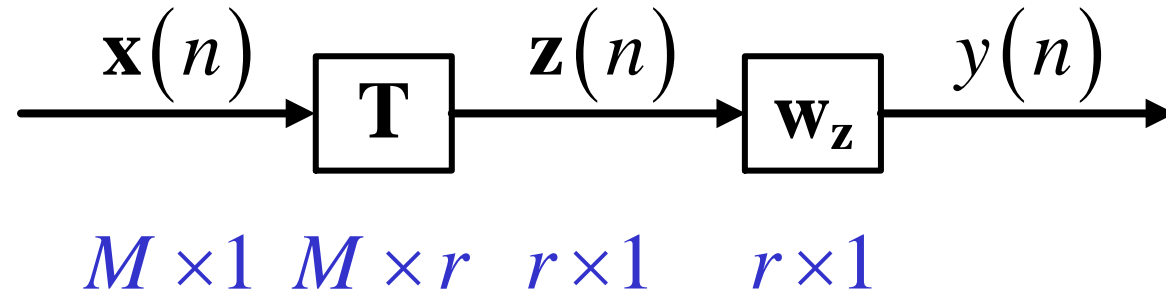
降维自适应阵列处理

主要目的：降低运算量 和 加快自适应收敛速度。

主要思想：利用降维变换将原阵列数据变换到更低维度进行自适应滤波。

设 $\mathbf{x}(n)$ 为 $M \times 1$ 维阵列接收数据向量，降维变换矩阵 \mathbf{T} 为 $M \times r$ 维列满秩矩阵， $\mathbf{z}(n) = \mathbf{T}^H \mathbf{x}(n)$ 为 $r \times 1$ 维降维数据向量，则 \mathbf{w}_z 为 $r \times 1$ 维自适应滤波权矢量。





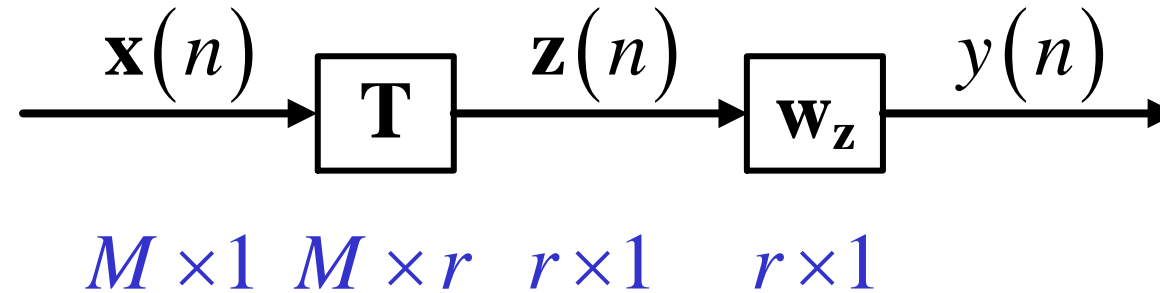
可得:

$$\mathbf{R}_z = E[\mathbf{z}(n)\mathbf{z}^H(n)] = \mathbf{T}^H \mathbf{R}_x \mathbf{T}$$

$$\mathbf{a}_z(\theta_0) = \mathbf{T}^H \mathbf{a}(\theta_0)$$

因此:

$$\mathbf{w}_z = \mu \mathbf{R}_z^{-1} \mathbf{a}_z(\theta_0)$$



- 如果 \mathbf{T} 将阵列接收数据进行子阵合成，得到若干子阵数据，则该降维方式为 **子阵空间法**；
- 如果 \mathbf{T} 将阵列接收数据进行不同指向角的波束合成，得到若干波束域数据，则该降维方式为 **波束空间法**。

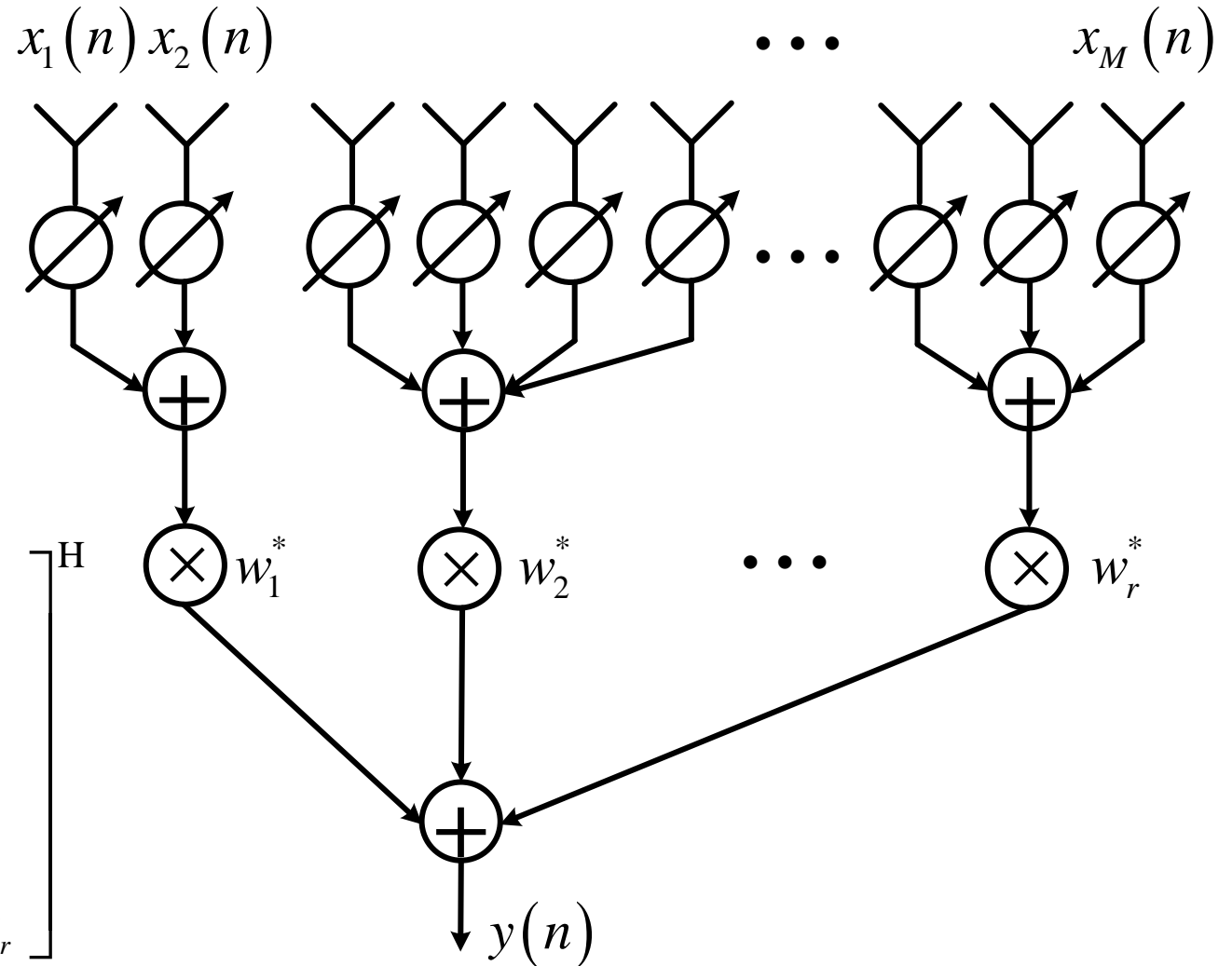


子阵空间法

子阵划分方式:

- 重叠子阵
- 不重叠子阵划分

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} \cdots t_{1N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{21} \cdots t_{2N_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{r1} \cdots t_{rN_r} \end{bmatrix}^H$$





■ 不重叠子阵

早期天线阵列在微波域进行子阵合成，不重叠子阵不需复用单元，因此工程上更易实现。均匀划分子阵导致子阵间距大于半波长，自适应波束方向图产生栅瓣。一般采用非均匀子阵划分方式解决；

■ 重叠子阵划分

新型天线阵列为全数字阵列，各阵元接收数据进行数字化处理，因此子阵合成可在数字域进行，有利于重叠子阵划分。

子阵空间法的另一种形式是Morgan提出的**多旁瓣相消器 (MSC)**。

主通道：所有阵元波束形成；

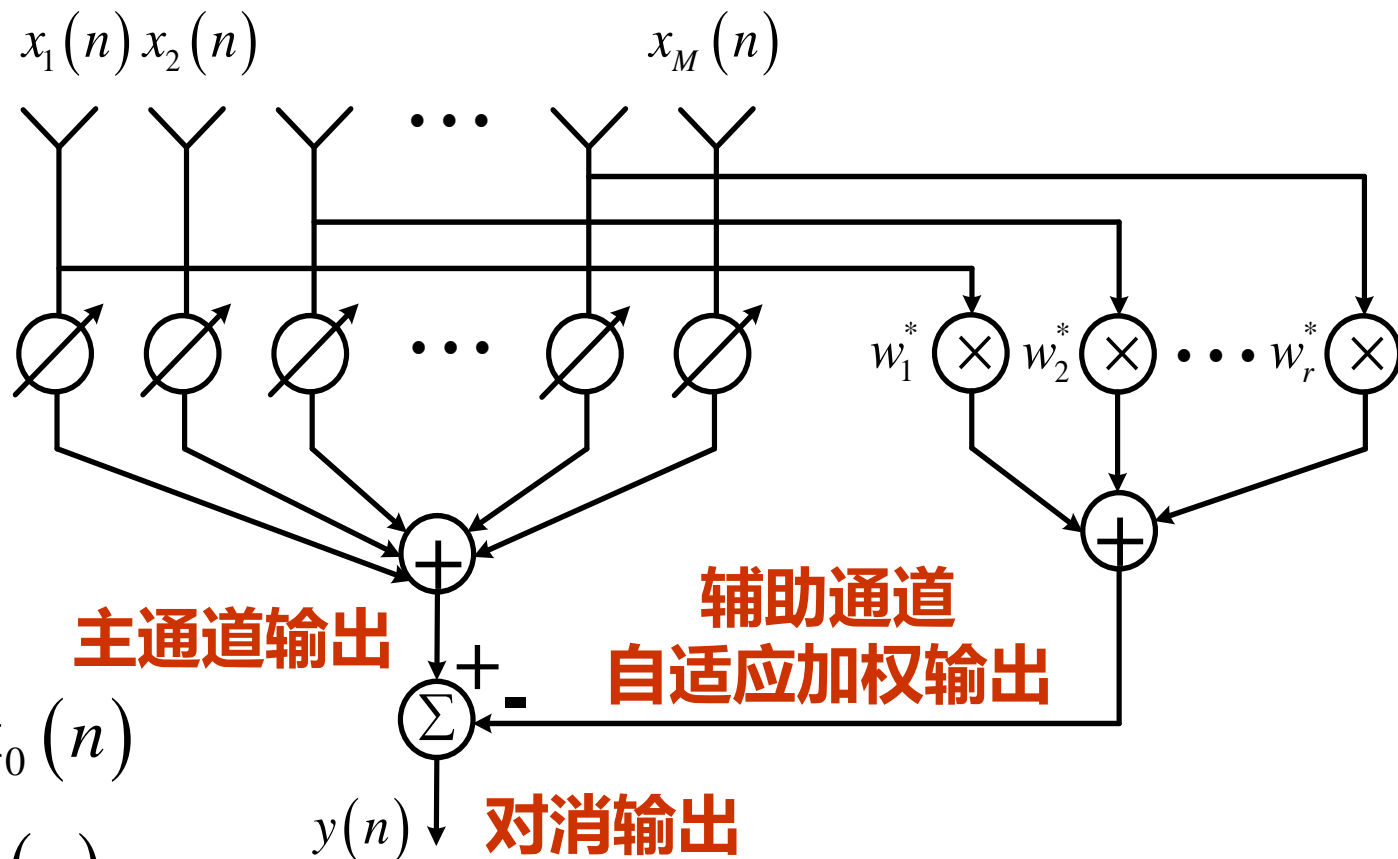
辅助通道：从主阵中抽取一些阵元；

主通道数据： $d_0 = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{x}(n)$

辅助通道数据： $\mathbf{x}_0(n) = \mathbf{B}_0 \mathbf{x}(n)$

自适应权： $\mathbf{w}_{x_0} = \mathbf{R}_{x_0}^{-1} r_{x_0 d_0}$

阵列输出： $y(n) = \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_{x_0}^H \mathbf{x}_0(n)$
 $= [\mathbf{a}^H(\theta_0) - \mathbf{w}_{x_0}^H \mathbf{B}_0] \mathbf{x}(n)$
 $= \mathbf{w}_{MSC} \mathbf{x}(n)$

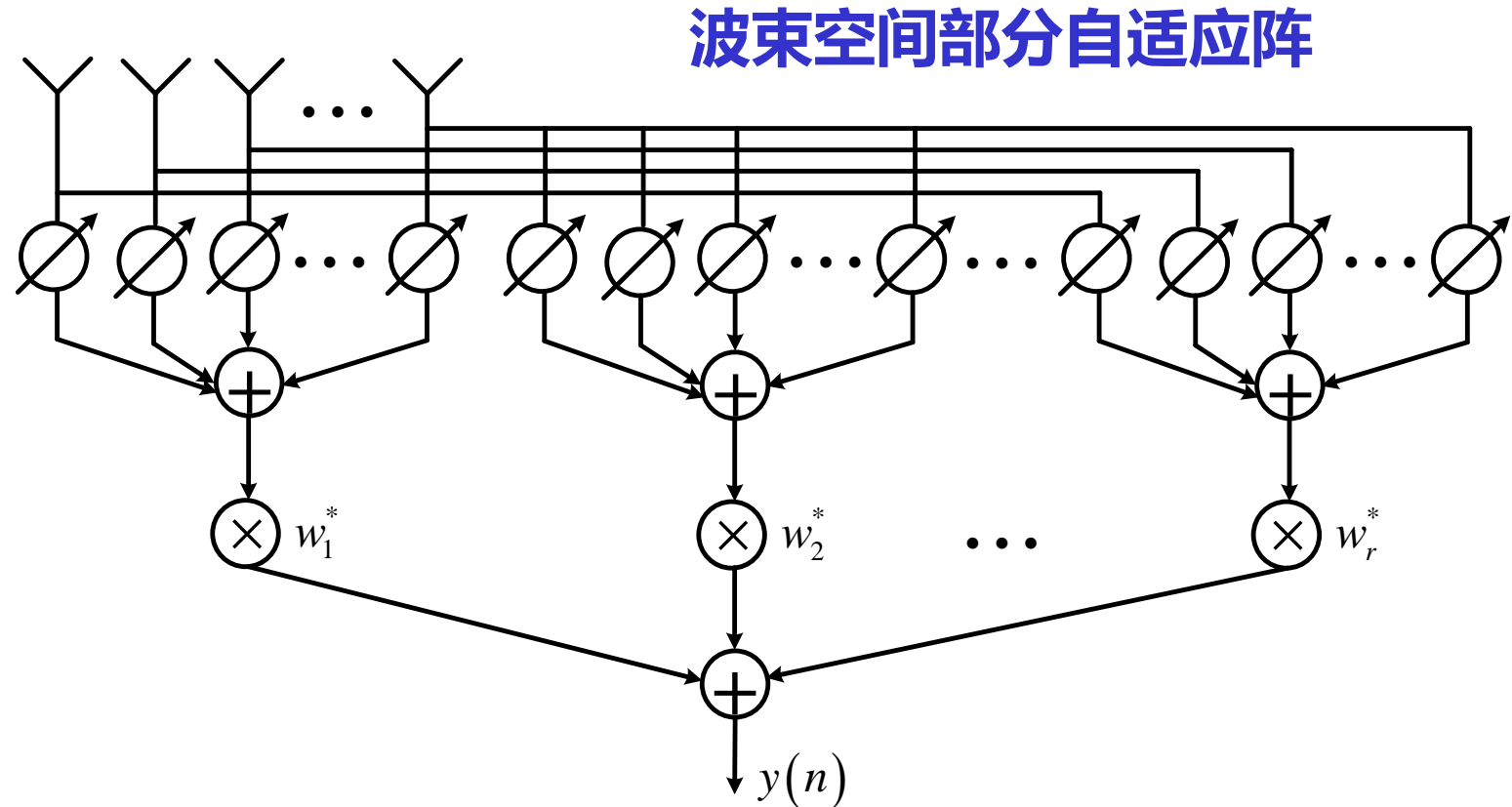


子阵自适应辅助通道多旁瓣相消器

波束空间法

主要思路：

先对 M 元阵列形成 r 个非自适应波束，再对各波束输出进行自适应加权处理。



设计期望信号附近一些角度的空间匹配滤波器（包括期望信号方向），形成包括指向期望信号方向及附近的 r 个波束（称为**相邻波束法**）。

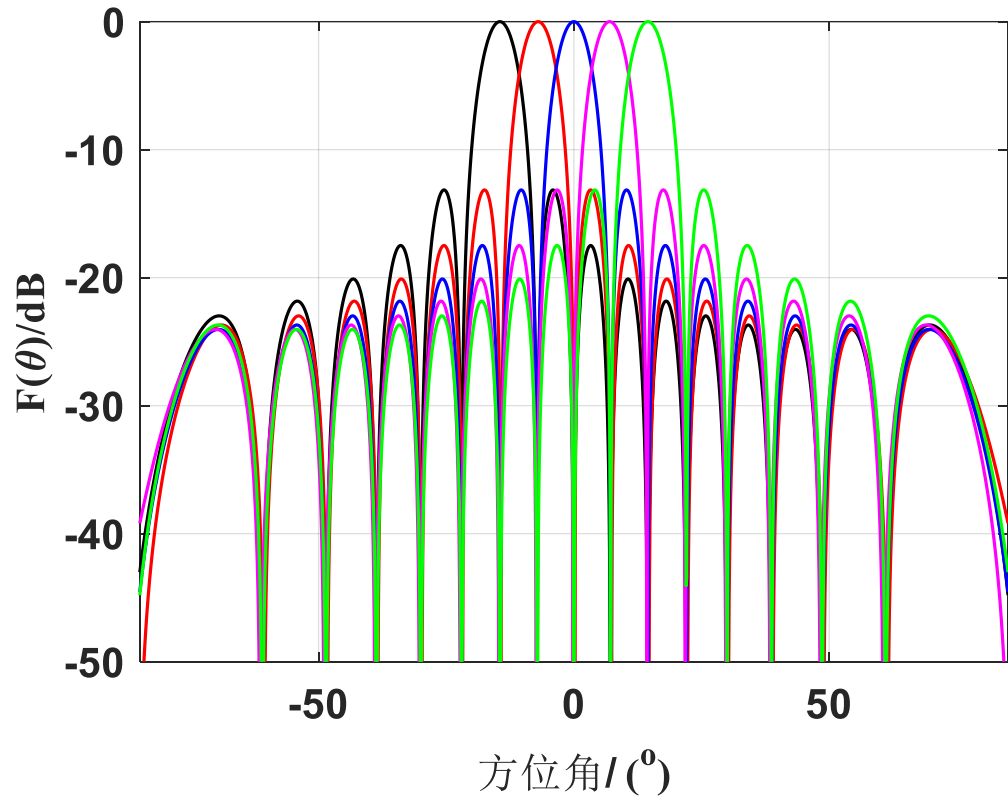
$$T = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_r)]$$



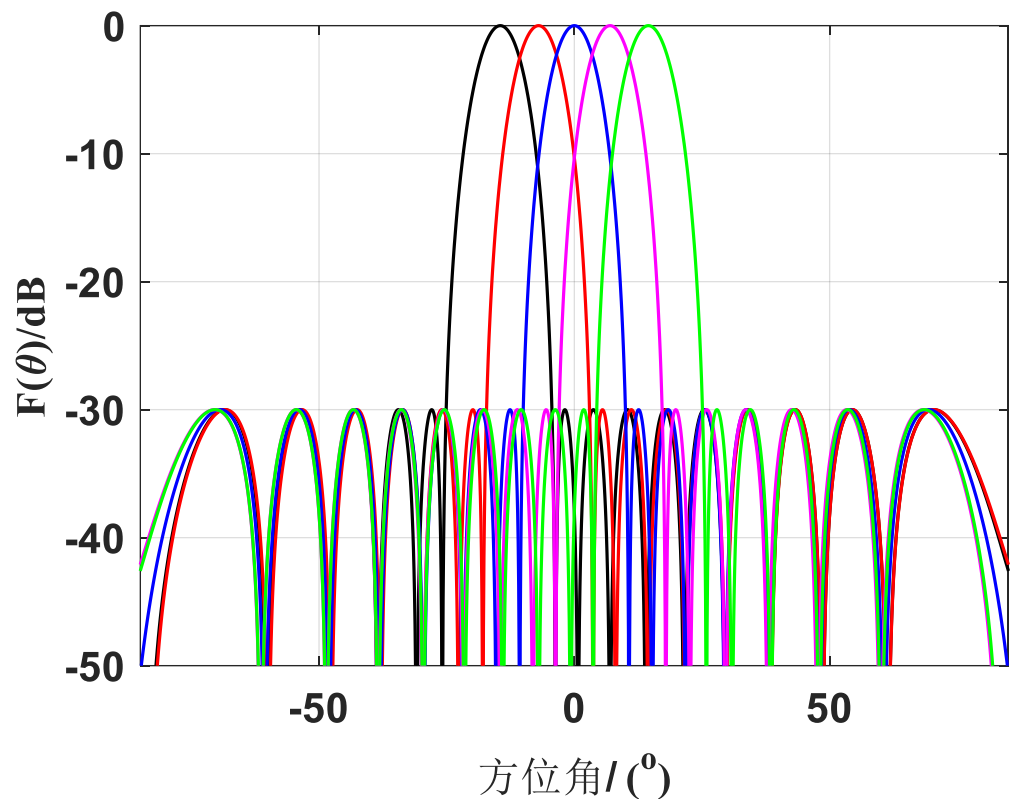
例如：假设期望信号在 0° 方向，则多波束指向可能取为 -3° 、 -2° 、 -1° 、 0° 、 1° 、 2° 、 3° 。通常使选取的 r 个波束正交，其特点是副瓣区共零点。

相邻波束法对消干扰基本思想：

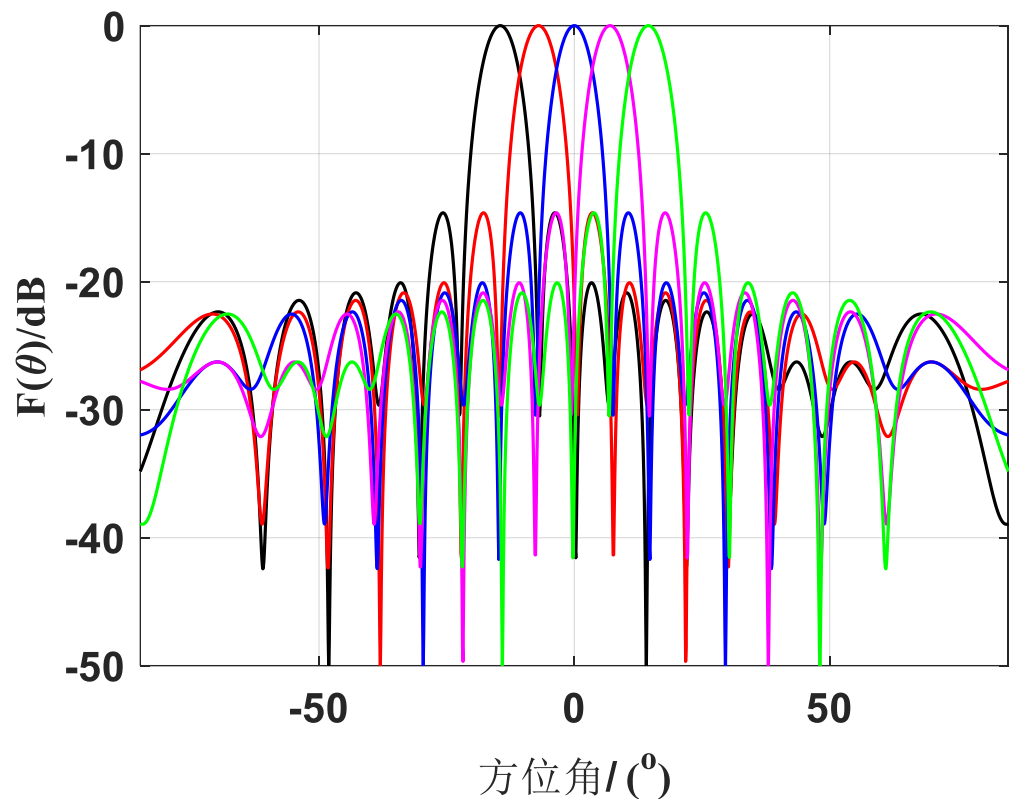
用辅助波束的副瓣来对消主波束的副瓣，因此正交波束在副瓣区共零点有利于密集型干扰的抑制。



正交波束图

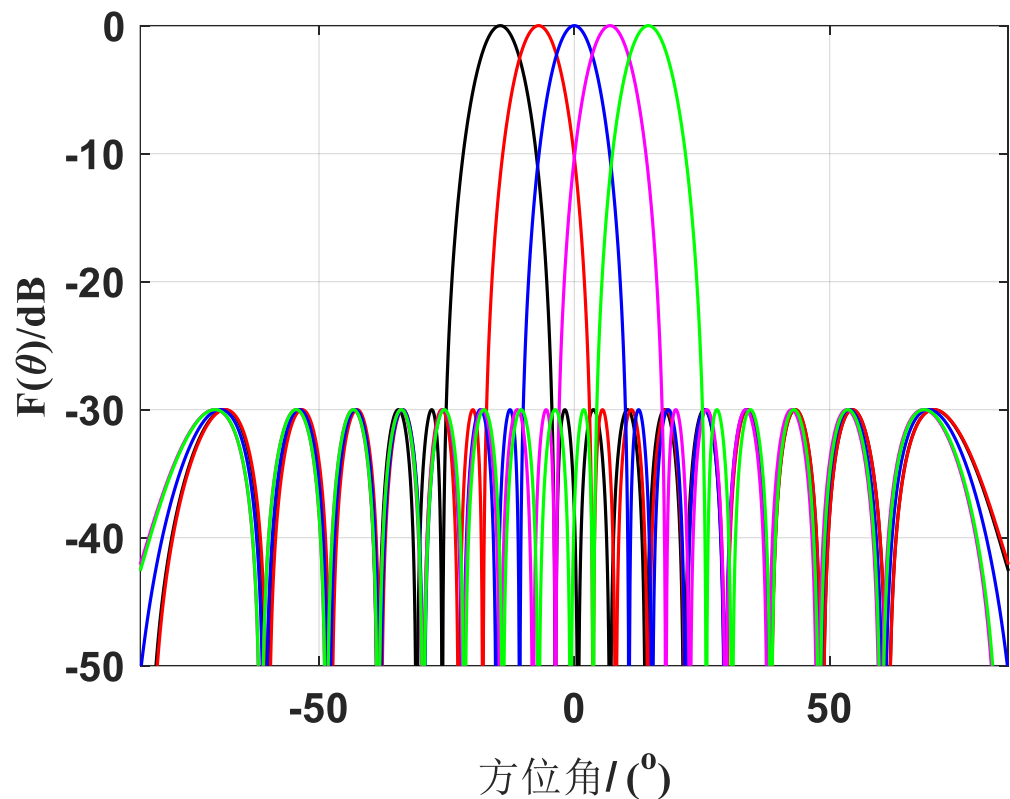


-30dB Chebyshev权

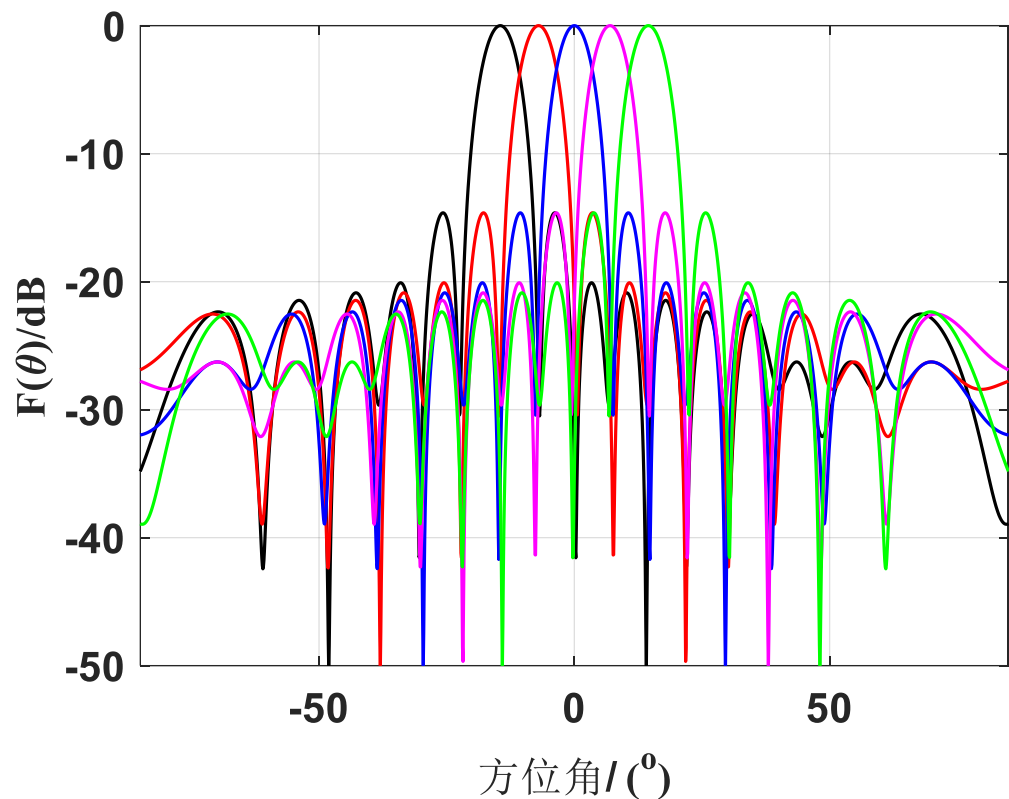


幅度误差5%，相位误差3°

- 实际应用中，波束形成需深加权形成低副瓣，波束间正交性不再成立，但副瓣区共零点特性仍近似成立；



-30dB Chebyshev权



幅度误差5%，相位误差3°

- 实际阵列中不可避免地存在幅相误差，此时副瓣区共零点特性不再成立，干扰抑制性能将大大下降。



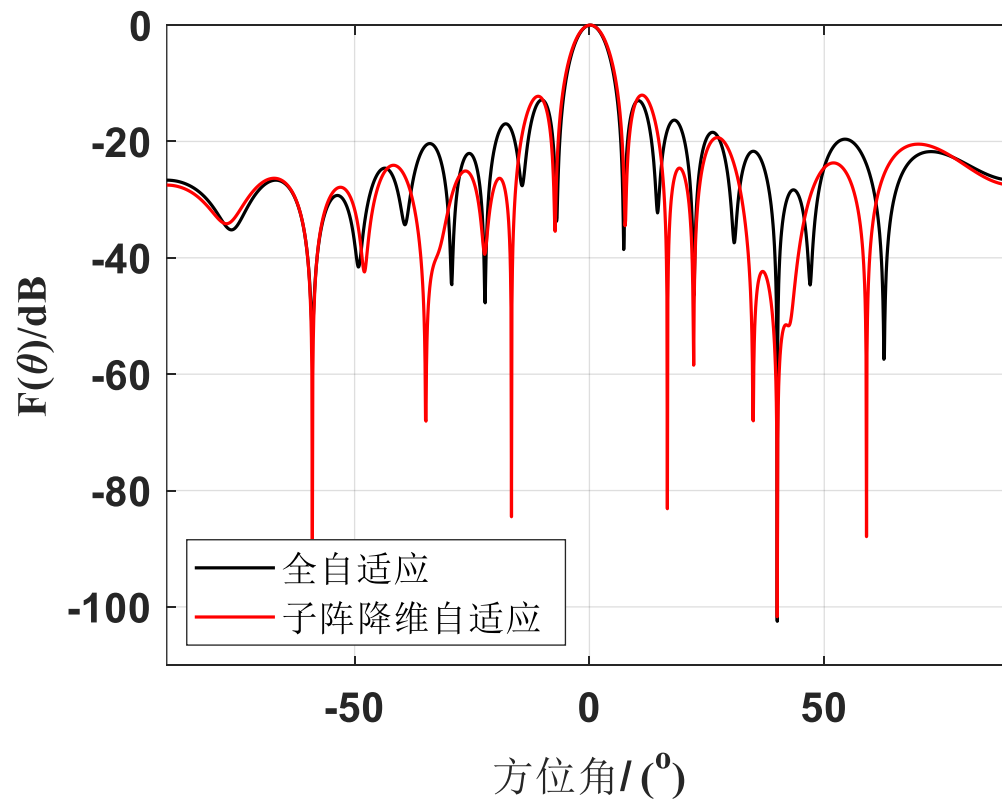
- 存在误差情况下相邻波束法性能下降严重，因此并不是理想的子波束降维方法，原因是其没有实现子波束空间分布与干扰环境相匹配；
- 如能预先估计出干扰角度**使辅助波束指向干扰方向**，再与主波束输出进行自适应干扰对消，则性能将优越地多。这种方法称为自适应-自适应（Adaptive-Adaptive）处理方法；
- 该方法利用辅助波束的主瓣来对消主波束的副瓣干扰，因此性能更为稳健。



仿真实验一： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 40° ，干扰功率为 50dB；滑窗子阵合成为 8 子阵。

结论：

较少干扰情况下，子阵降维后的自适应方向图与全自适应自适应方向图主副瓣均保持较好，干扰处零陷深度也相当；

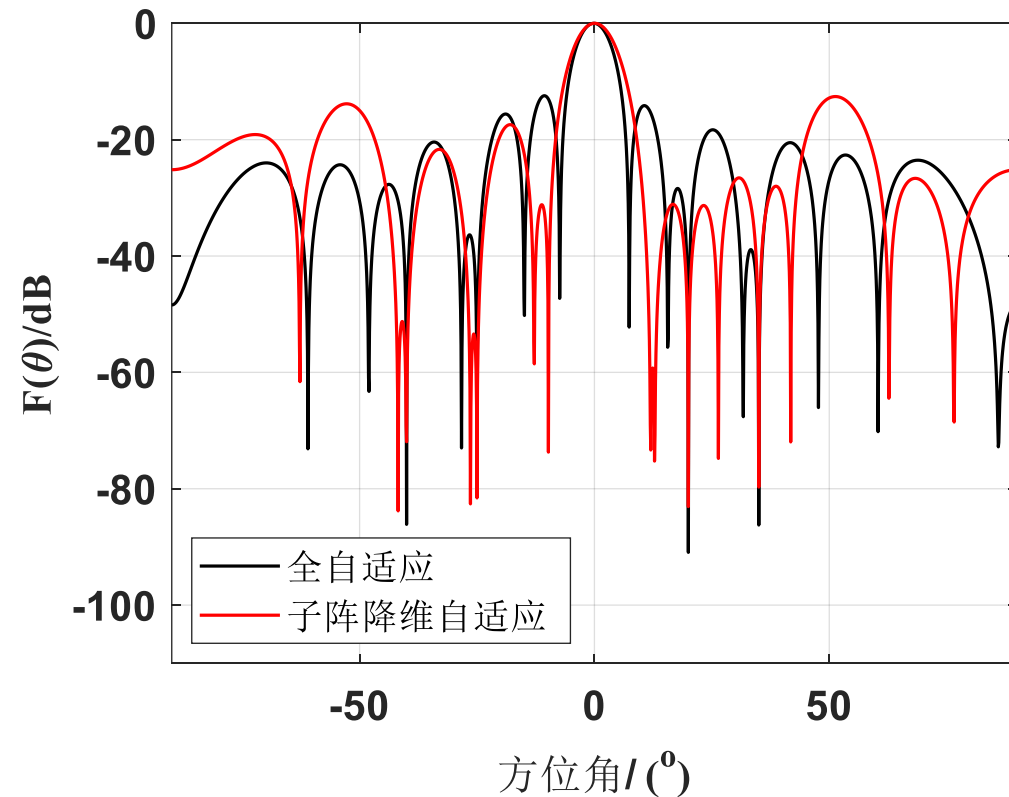


子阵空间法 自适应方向图

仿真实验二： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 4 个干扰 $[-40^\circ -25^\circ 20^\circ 35^\circ]$ ，干扰功率为 50dB；滑窗子阵合成为 8 子阵。

结论：

较多干扰情况下，子阵降维后的自适应方向图副瓣抬升，且干扰零陷深度也变浅，这是因为降维后自适应自由度大大减少所致。



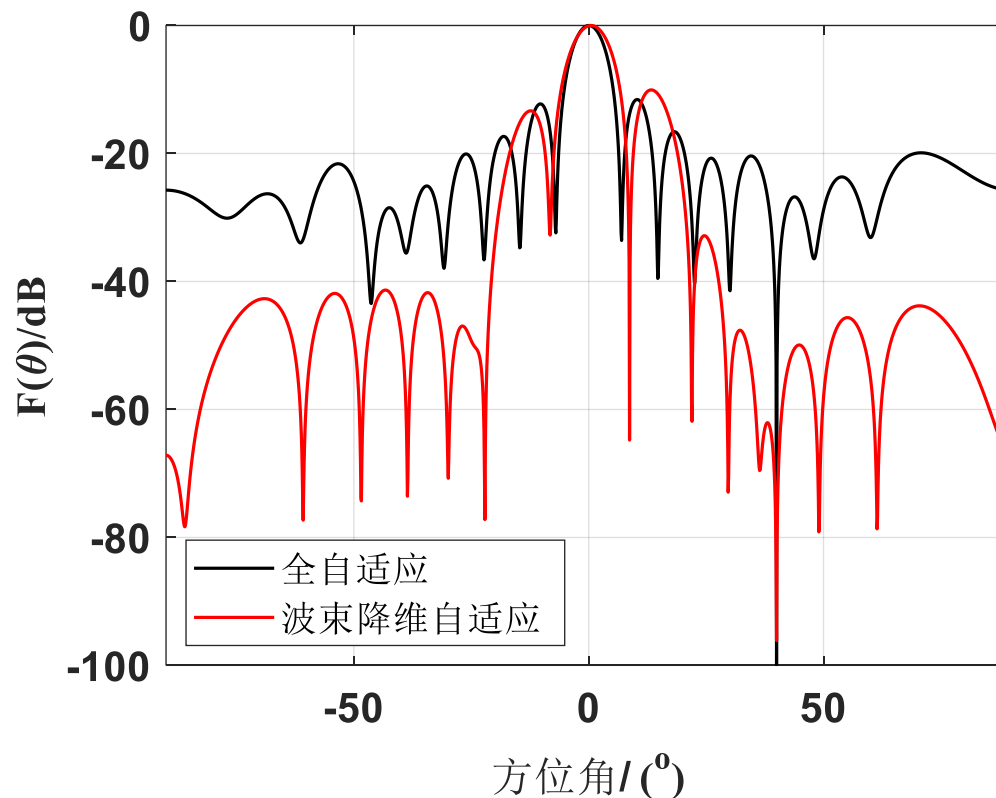
子阵空间法 自适应方向图



仿真实验三： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 40° ，干扰功率为 50dB；共 4 个相邻辅助波束。

结论：

辅助波束较少时，辅助波束法
自适应方向图副瓣较低，但主瓣展
宽特别严重；



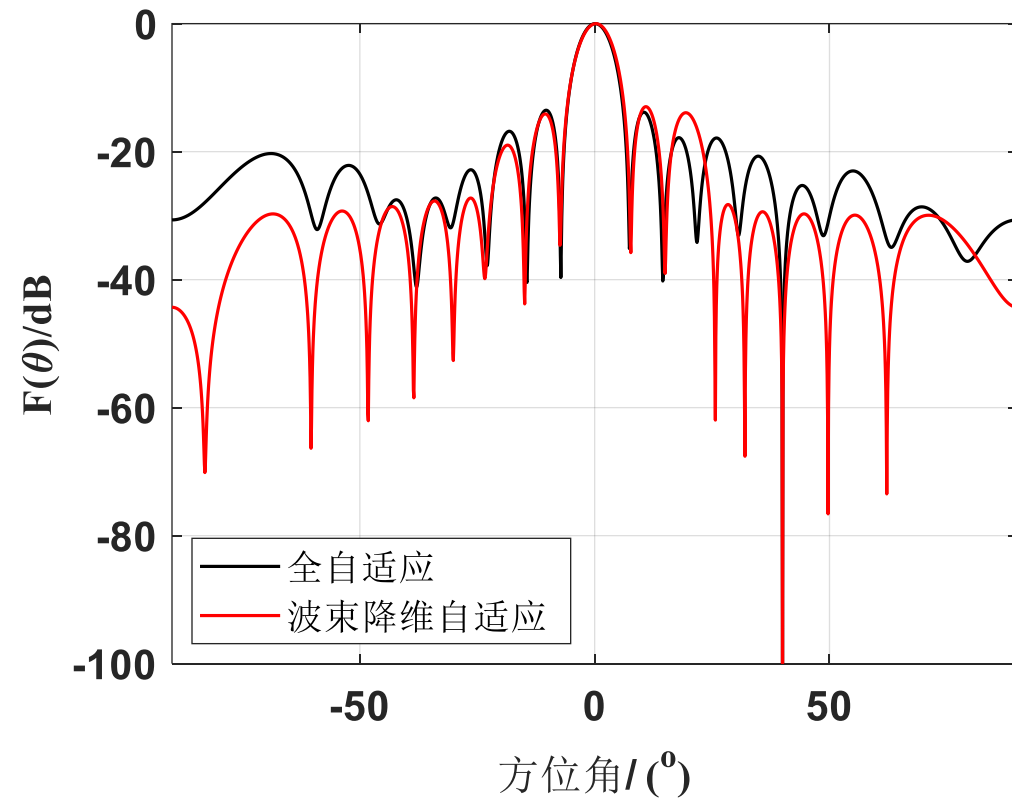
波束空间法 自适应方向图



仿真实验四： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 40° ，干扰功率为 50dB；共 6 个相邻辅助波束。

结论：

随着辅助波束增加，自适应方向图副瓣抬升，主瓣展宽问题减轻；



波束空间法 自适应方向图



本次课内容

1. 部分自适应阵列处理概念
2. 降维自适应阵列处理
3. 降秩自适应阵列处理



全自适应和降维自适应方法的一些问题

- 对于全自适应方法，自适应权矢量在满足线性约束条件下使输出功率最小，自适应自由度均被用于抑制干扰和噪声；由于自适应自由度较大，因此估计 R 收敛所需快拍数也较多；
- 对于降维自适应方法，降低自适应权矢量维度可显著降低估计 R 快拍需求，但仍要求收敛快拍数至少约 2 倍降维后权矢量维数。



典型降秩自适应阵列处理方法 — 特征干扰相消器 (EigenCanceller, EC)

- 借鉴超分辨估计的思想，把自适应权矢量约束于噪声子空间，以期得到类似“超对消”性能，即能在一个波束宽度内形成多个准确的零陷，以解决波束宽度内多个干扰抑制问题；
- 同时，由于自适应权矢量位于噪声子空间，能直接在干扰方向产生零陷，使得干扰抑制独立于干噪比；
- 降秩方法估计 R 收敛所需快拍数进一步降为 2 倍于 R 的大特征值个数，即干扰个数 2 倍。



对应 LCMV 和 MVDR 思想，特征干扰相消器可分为线性约束特征干扰相消器（LCEC）和无失真响应特征干扰相消器（DREC）。

1. 线性约束特征干扰相消器（LCEC）

优化问题可表示为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{U}_S = 0 \\ & \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{f}^H \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{f}^H$ 为线性约束（如固定增益、固定零点约束）

$\mathbf{w}^H \mathbf{U}_S = 0$ 为干扰抑制约束；

$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{w}$ 表示自适应权矢量的模最小，即白噪声增益最小。



解：

$$\mathbf{w}_{LCEC} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{C} [\mathbf{C}^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}$$

由：

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$$

解的另一种形式：

$$\mathbf{w}_{LCEC} = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}$$



2. 无失真响应特征干扰相消器 (DREC)

优化问题可表示为: $\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{w}$

$$s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{U}_s = 0$$

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$$

解:

$$\mathbf{w}_{DREC} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H) \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) (\mathbf{I} - \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H) \mathbf{a}(\theta_0)}$$

或:

$$\mathbf{w}_{DREC} = \frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta_0)}$$



分析:

$$\mathbf{w}_{LCEC} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{C} [\mathbf{C}^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{w}_{DREC} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) (\mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H) \mathbf{a}(\theta_0)}$$

- 完全去除了低快拍时噪声特征值发散（噪声子空间抖动）影响，可降低收敛快拍数，即在低快拍下得到比常规算法好的性能；
- 在低快拍下，大特征值及其特征矢量（对应干扰子空间）相对稳定，而小特征值（对应噪声子空间）发生抖动。

分析:

$$\mathbf{w}_{LCEC} = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{C} [\mathbf{C}^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{w}_{DREC} = \frac{\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta_0)}$$

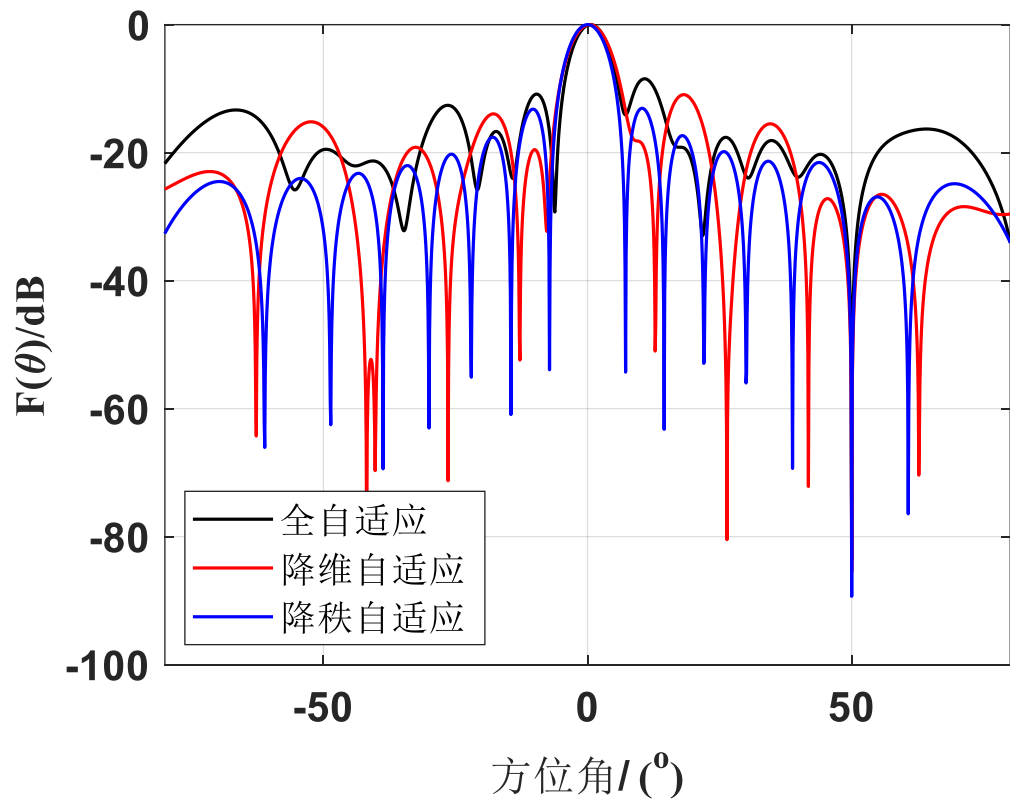
- 尽管小特向量（噪声特征矢量）发生抖动，但 $\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{I} - \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H$ 却相对稳定，因此上述形式权矢量在低快拍下也同样保持稳定。



仿真实验一： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 40° ，干扰功率为 50dB，快拍数为 100；

结论：

三种方法自适应方向图主瓣和零陷性能几乎一致。

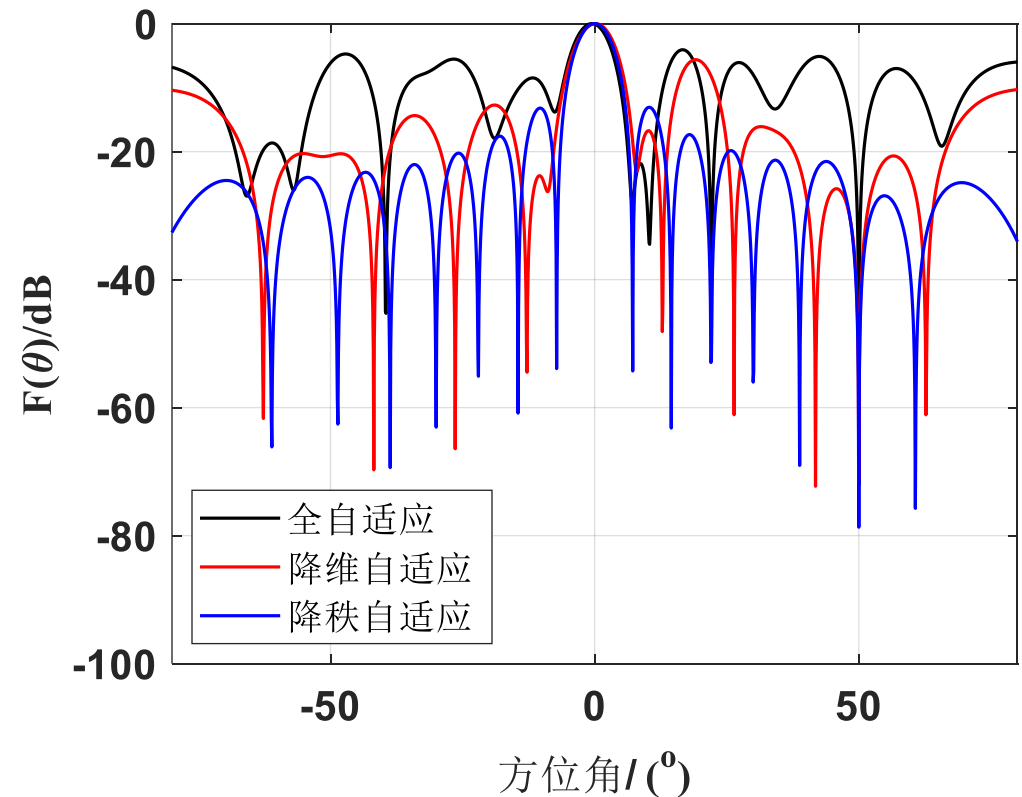


自适应方向图

仿真实验二： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 50° ，干扰功率为 50dB，快拍数为 20；

结论：

- 全自适应方法由于快拍数不足，导致副瓣严重抬升；
- 降维自适应方法副瓣略有抬升；
- 降秩自适应方法性能不变。



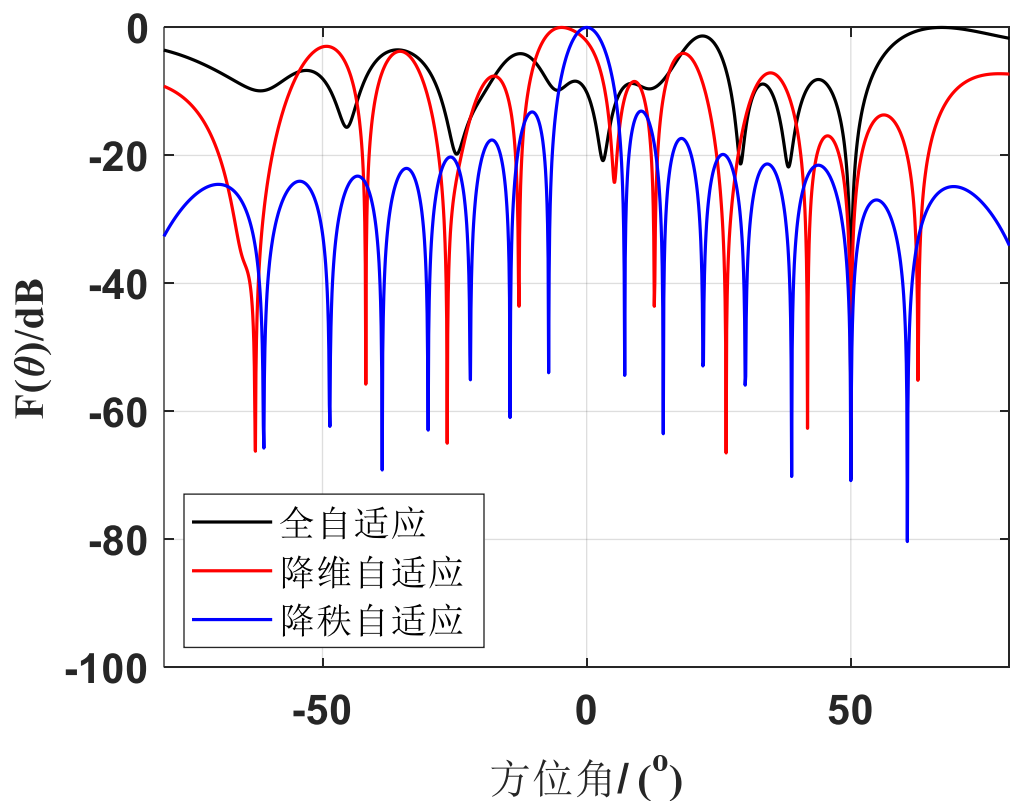
自适应方向图



仿真实验三： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 50° ，干扰功率为 50dB，快拍数为 10；

结论：

- 全自适应方法和降维自适应方法由于快拍数不足，导致主瓣严重畸变，副瓣显著抬升；
- 降秩自适应方法性能不变。



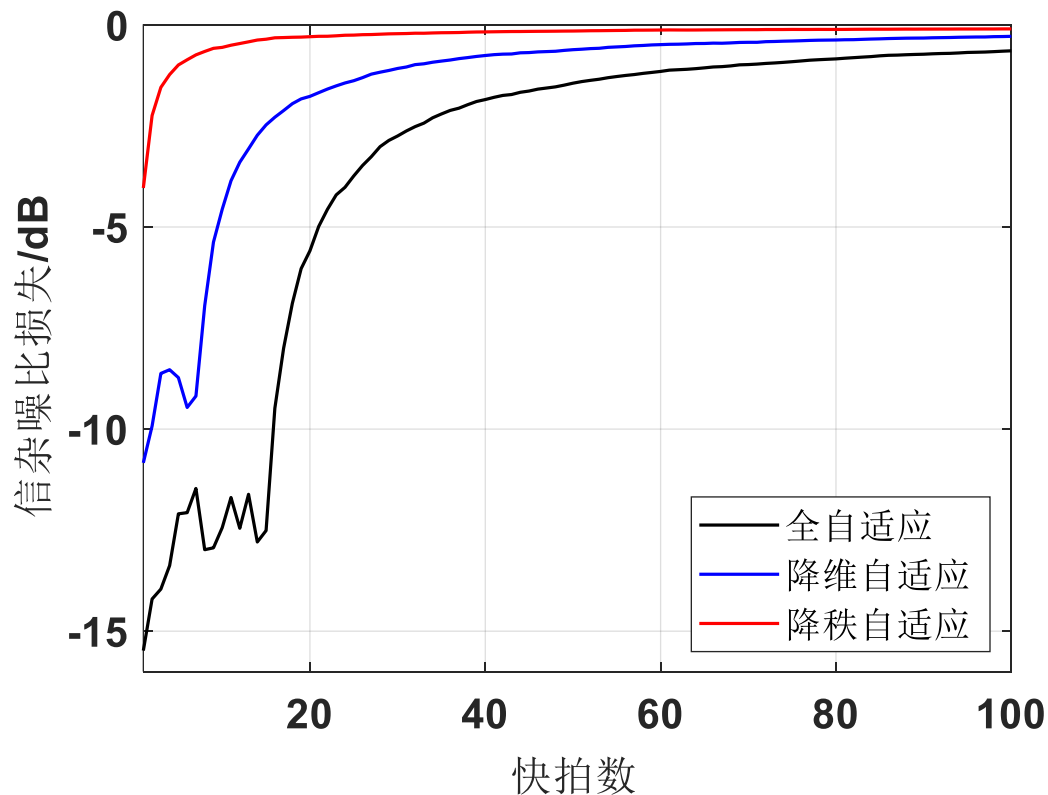
自适应方向图



仿真实验四： 16 阵元半波长间隔均匀线阵，主波束指向法线方向，共 1 个干扰 50° ，干扰功率为 50dB。

结论：

- 全自适应方法收敛最慢；
- 降维自适应方法收敛速度较全维方法提升明显；
- 降秩自适应方法收敛速度最快。



收敛曲线对比



降维方法和降秩方法比较分析:

- 降维方法将收敛快拍数降低至自适应自由度的 2 倍；降秩方法则降秩矩阵秩（干扰个数）的 2 倍；
- 降秩方法本质上为数据依赖自适应处理，需预先准确知道干扰个数，因此依赖于信源数目先验信息；而降维方法为固定结构自适应处理，无需信源数目先验信息；
- 降秩方法需特征分解，因此运算量较降维方法更大。



阵列信号处理 第十一讲

授课教师：段克清

授课单位：电子与通信工程学院

电子邮箱：duankq@mail.sysu.edu.cn

联系电话：xxxxxxx（同微信）



本次课内容

1. 方向图综合基本概念
2. 静态方向图综合典型方法 — NPS
3. 自适应方向图控制方法 — APC



本次课内容

1. 方向图综合基本概念
2. 静态方向图综合典型方法 — NPS
3. 自适应方向图控制方法 — APC



静态方向图综合 (Quiescent Pattern Synthesis, QPS)

当阵列训练数据只含空间独立白噪声时，由一定准则计算得到的阵列权矢量称之静态权矢量，对应方向图称为**静态方向图**。

由特定方向图要求（静态方向图）求取权矢量的过程，称之为**静态方向图综合**。

在一定应用背景下，形成特定静态方向图，如**低副瓣**、**固定零点**及**零点展宽**等。



静态方向图控制 (Quiescent Pattern Control, QPC)

当阵列训练数据含干扰和噪声时，由静态权矢量和阵列训练数据，经一定方法求得自适应权矢量，使得自适应方向图除在干扰方向形成自适应零陷外，在其他方向仍近似具有静态方向图特性。该类方法称之为QPC，又称为**自适应方向图控制 (APC)**；

APC一般先设计静态方向图，并综合出静态权矢量，再应用于自适应方向图控制。



本次课内容

1. 方向图综合基本概念
2. 静态方向图综合典型方法 — NPS
3. 自适应方向图控制方法 — APC



早期静态方向图综合方法

1946年，Dolph提出用于均匀线阵的经典低副瓣综合方法，可在限定最大副瓣电平的同时获得较窄的主瓣波束，称为Dolph-Chebyshev法；采用该方法综合出的低副瓣权通常称为Chebyshev权。

缺点：

1. 只能得到均匀副瓣；
2. 只适用于均匀（等距）阵列；

Dolph C L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beamwidth and side-lobe level. Proc. IRE, 1946, 34: 335~348.



静态方向图数值综合方法 (Numerical Pattern Synthesis, NPS)

在不同方向设置虚拟干扰，通过迭代调整不同方向干扰功率大小，使得此虚拟干扰环境对应的自适应方向图逼近期望的静态方向图特性。

优点：

1. 任意静态方向图综合（约束期望副瓣范围）；
2. 适于任意阵列，如非等间距、各阵元方向图不一致及非线性阵等。

Olen C A, Compton R T, A numerical pattern synthesis algorithm for arrays. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1990, 38(10):1666~1676.



NPS算法基本原理

对 M 元任意阵列，如非等距、各阵元方向图不一致及非线性阵等，其导向矢量表示为：

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[g_1(\theta) e^{j\phi_1(\theta)}, g_2(\theta) e^{j\phi_2(\theta)}, \dots, g_M(\theta) e^{j\phi_M(\theta)} \right]^T$$

其中， $g_i(\theta)$ 为第 i 个阵元的响应， $\phi_i(\theta)$ 是第 i 个阵元相对相位参考点的相移。



设阵列权矢量为: $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$

则阵列响应方向图为: $G(\theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|$

为方便起见, 设阵列权矢量总满足: $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$

设 $D(\theta)$ 为期望的副瓣峰值电平, 以dB表示 (习惯表示方式), 则对应的实际电压值为: $d(\theta) = 10^{D(\theta)/20}$

在阵列副瓣区施加多个虚拟干扰, 并控制虚拟干扰功率大小, 从而得到期望阵列天线方向图。



- 假设虚拟干扰覆盖整个空间区域，且令主瓣区虚拟干扰功率为零；
- 假设有 P 个干扰均匀分布在整個角度范围，为不使得虚拟干扰在各自方向上独立形成自适应零陷， P 应该取足够大，一般取阵列自由度的 2~3 倍；
- 设 θ_p 为各干扰对应的角度， $p = 1, 2, \dots, P$ ；
- 假设各阵元噪声为相互独立空间白噪声，且噪声功率 σ_N^2 设为 1。



算法迭代思路:

- 当虚拟干扰的角度位于主瓣区时，令其功率为零；
- 当虚拟干扰环境对应方向图在副瓣角度 θ_p 处增益 $G(\theta_p)$ 大于期望副瓣峰值 $d(\theta_p)$ 时，增加该方向干扰强度；
- 当 $G(\theta_p)$ 小于期望副瓣峰值 $d(\theta_p)$ 时，减少该方向干扰强度。
- 迭代，直到得到期望方向图为止，最后一次迭代所对应权矢量即为所求得静态权矢量。



设第 k 次迭代中第 p 个虚拟干扰的干噪比为 $\xi_m(k)$ ，第 k 次迭代得到的方向图增益为 $G(\theta, k)$ ，即

$$G(\theta, k) = \left| \mathbf{w}^H(k) \mathbf{a}(\theta) \right|$$

其中， $\mathbf{w}(k)$ 为第 k 次迭代求得的自适应权矢量。主瓣区虚拟干扰功率为零，故每次迭代中阵列协方差矩阵仅由副瓣区虚拟干扰和噪声构成，因此 $\mathbf{w}(k)$ 可由MVDR自适应波束形成求得

$$\mathbf{w}(k) = \frac{\mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{a}(\theta_0)}$$



根据虚拟干扰和噪声互不相关的假设，构造第 k 次的阵列协方差矩阵如下：

$$\mathbf{R}(k) = \sigma_N^2 \left[\mathbf{I} + \sum_{p=1}^P \xi_p(k) \mathbf{a}(\theta_p) \mathbf{a}^H(\theta_p) \right]$$

注：

1. 每次迭代主波束范围变化，需重新确定 $\theta_L(k) \leq \theta \leq \theta_R(k)$ 。其中 $\theta_L(k)$ 和 $\theta_R(k)$ 为波束第一零点角度，可通过差分检测来寻找；
2. 由于功率不能为负，如迭代中得到副瓣区虚拟干扰功率为负，则令其等于零。



虚拟干扰由第 k 次到第 $k+1$ 次的迭代公式为

$$\xi_p(k+1) = \begin{cases} 0, & \theta_L(k) \leq \theta_k \leq \theta_R(k) \\ \max[\Gamma_p(k), 0], & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Gamma_p(k) = \xi_p(k) + \eta [G(\theta_k, k) - d(\theta_k)]$$

其中, η 为步长, 可通过实验选择得到。

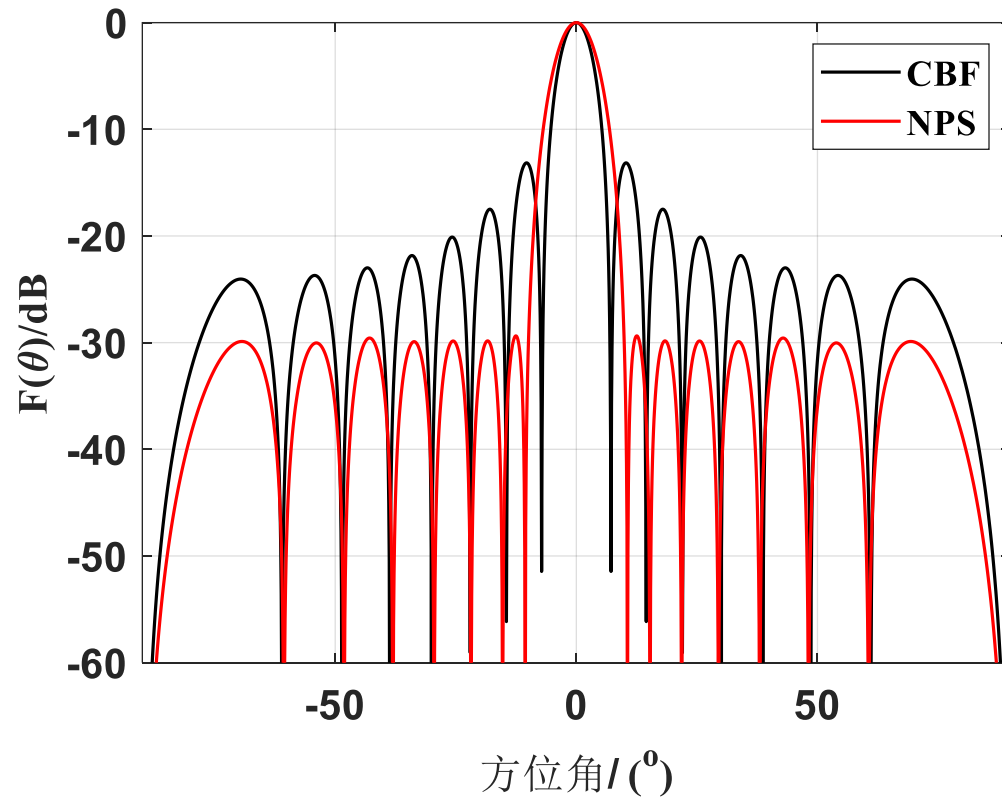
初始值设定: $\xi_p(0) = 0, p = 1, 2, \dots, P$

$$\mathbf{w}(0) = \frac{\mathbf{R}^{-1}(0) \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}^{-1}(0) \mathbf{a}(\theta_0)}$$

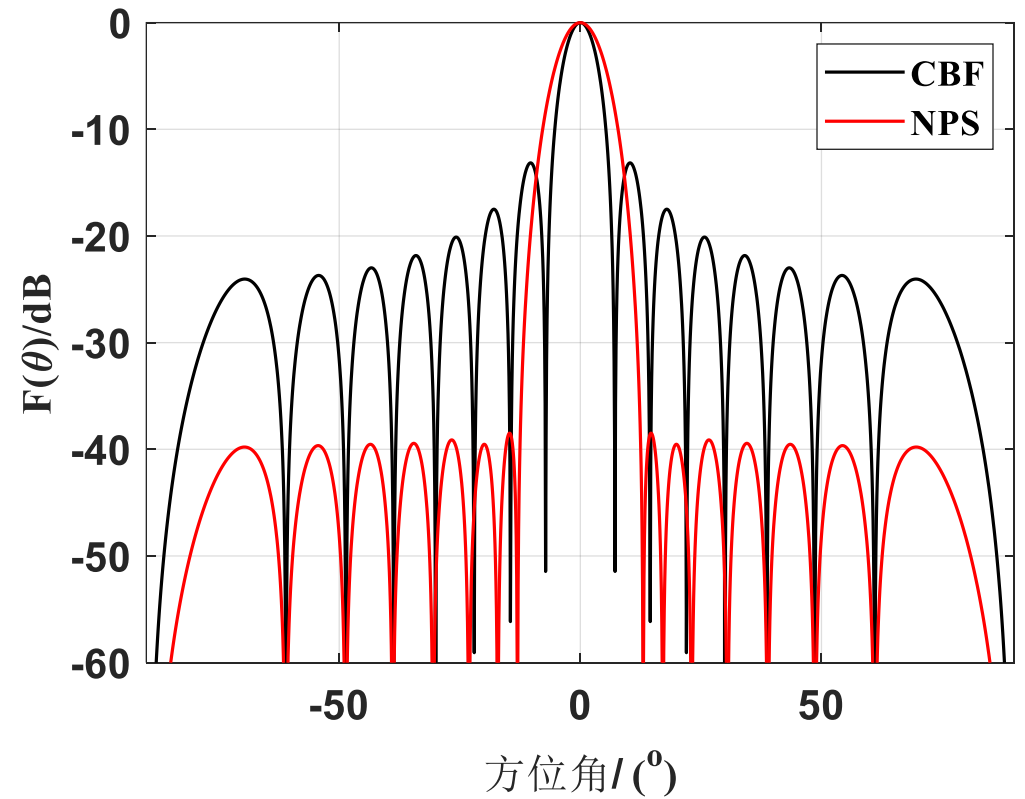
$$G(\theta, 0) = |\mathbf{w}^H(0) \mathbf{a}(\theta)|$$



$M = 16$; 迭代次数 = 10000; $\eta = 0.1$; 虚拟干扰间隔 = 2° ; 主瓣方向 = 0°



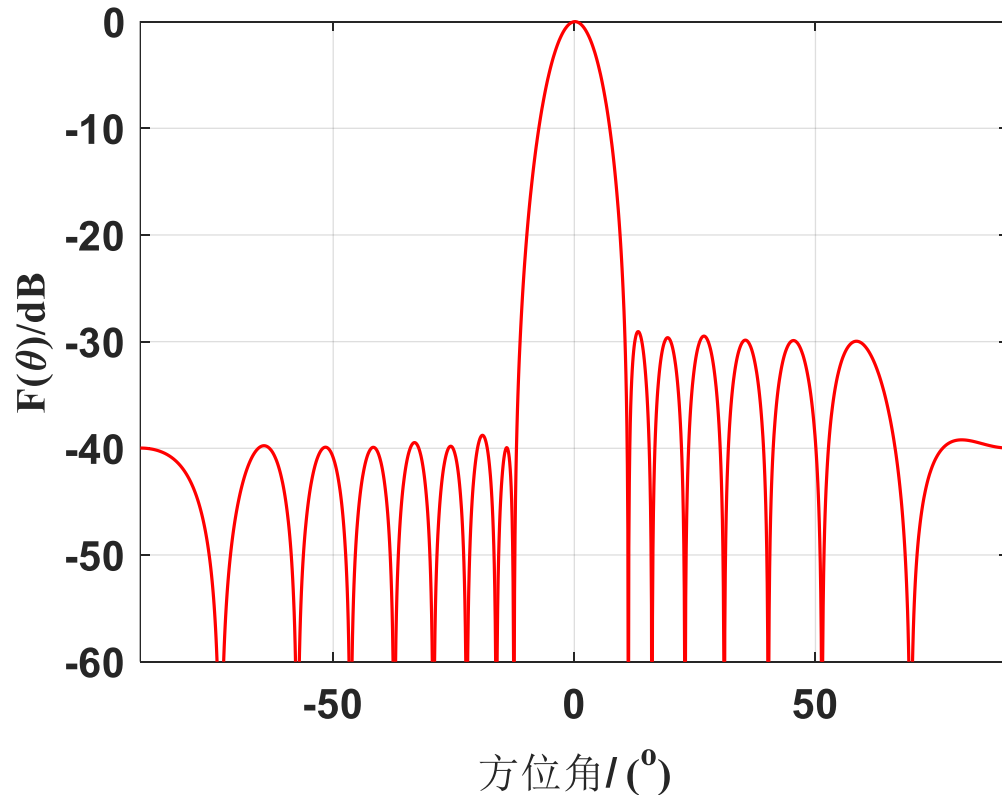
-30dB均匀副瓣



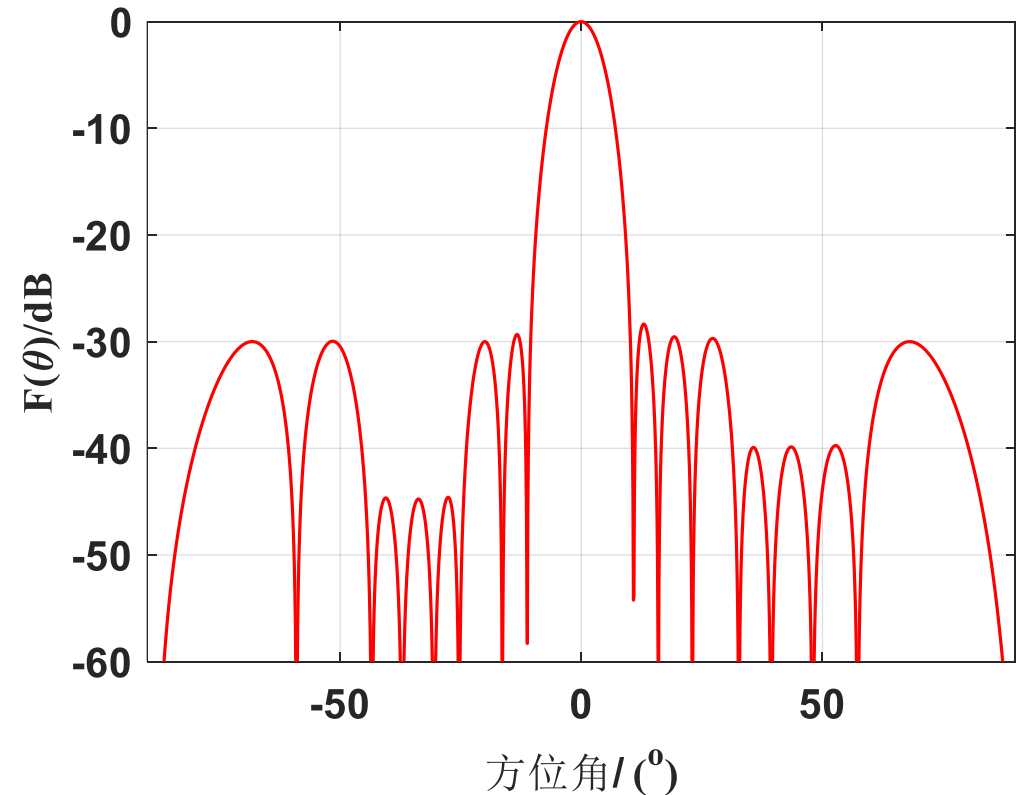
-40dB均匀副瓣



$M = 16$; 迭代次数 = 10000; $\eta = 0.1$; 虚拟干扰间隔 = 2° ; 主瓣方向 = 0°



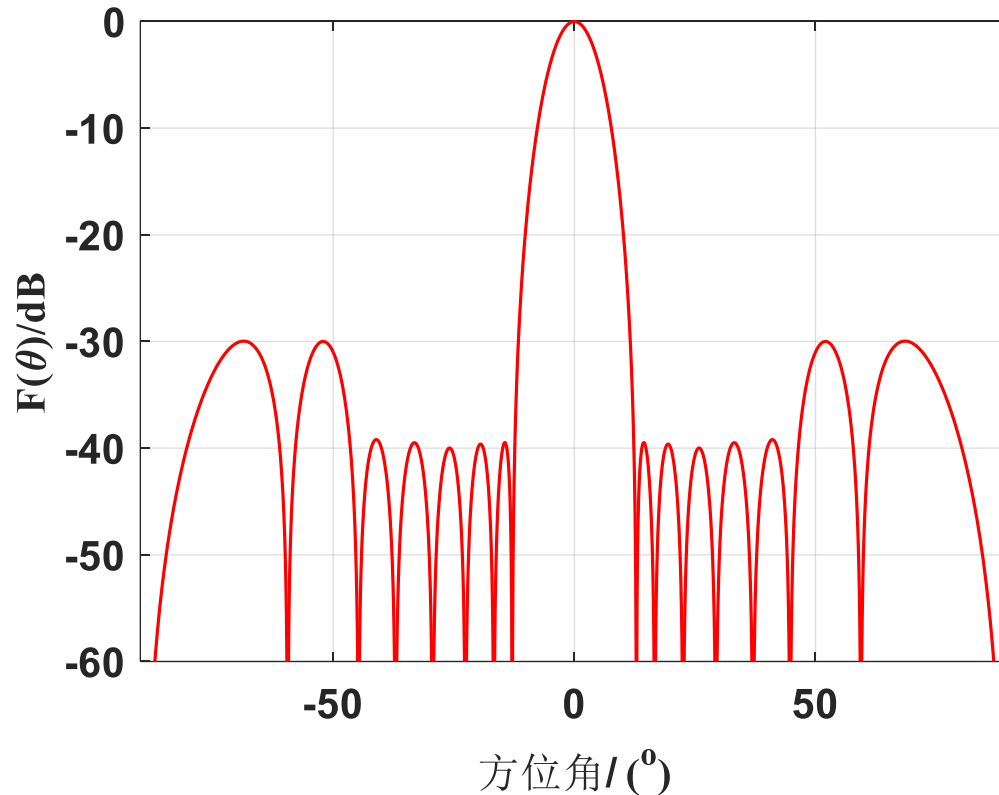
左侧-40dB均匀副瓣 / 右侧-30dB均匀副瓣



-40°~-25°之间-45dB副瓣 35°~55°之间-40dB副瓣
其他副瓣区域-30dB均匀副瓣

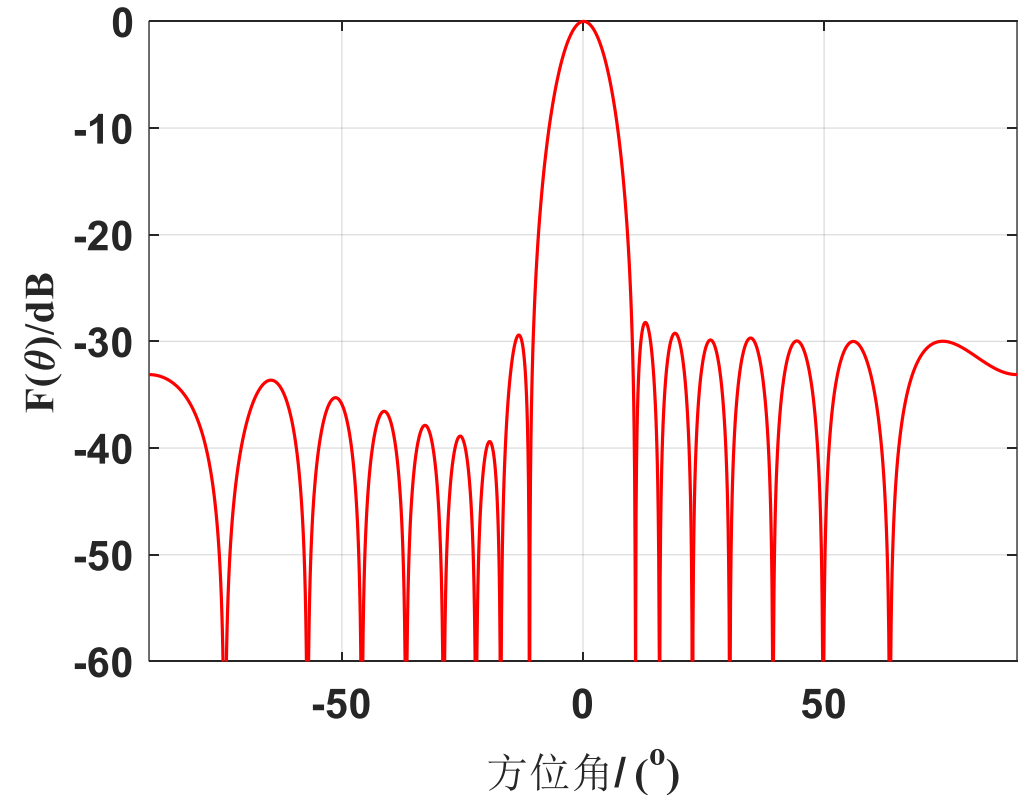


$M = 16$; 迭代次数 = 10000; $\eta = 0.1$; 虚拟干扰间隔 = 2° ; 主瓣方向 = 0°



$-40^\circ \sim 40^\circ$ 副瓣区域 -40dB

其他副瓣区域 -30dB 均匀副瓣



$-90^\circ \sim -20^\circ$ 副瓣区域沿斜线下降至 -40dB

其他副瓣区域 -30dB 均匀副瓣



本次课内容

1. 方向图综合基本概念
2. 静态方向图综合典型方法 — NPS
3. 自适应方向图控制方法 — APC

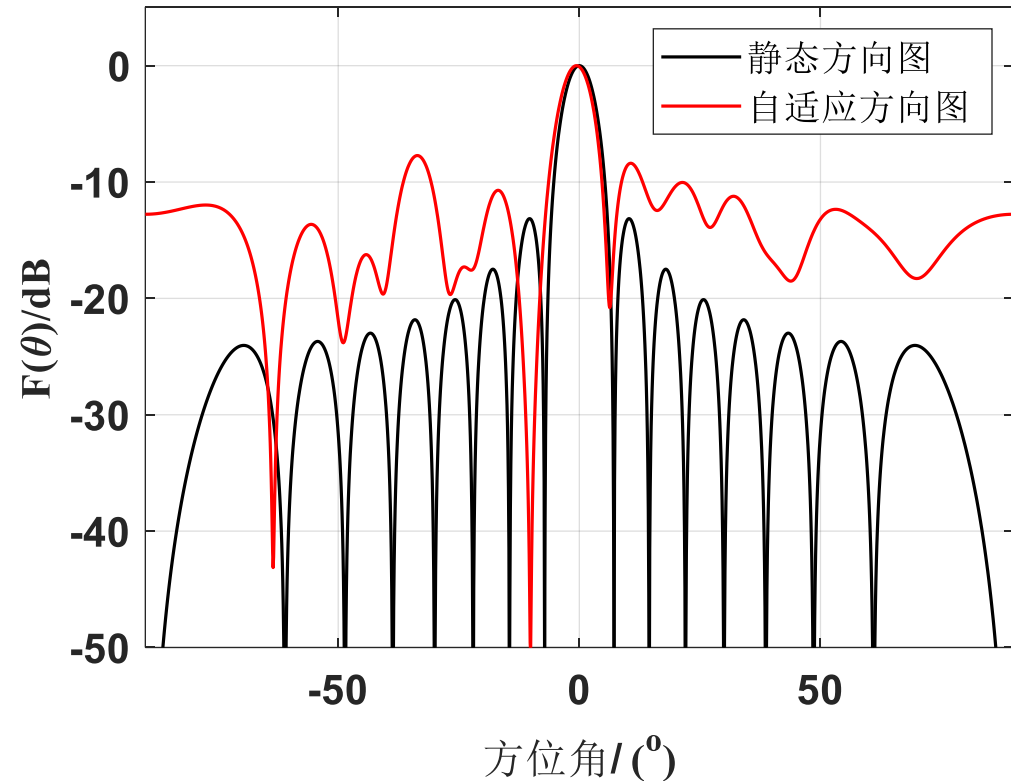


自适应方向图控制背景:

存在干扰情况下，自适应方向图在干扰处形成凹口，但往往会导致副瓣性能变差。

自适应方向图控制目的:

在原线性约束基础上增加方向图控制线性约束，使自适应方向图除干扰方向外均接近静态方向图。





一般的线性约束最小方差法为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ s.t. \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \boldsymbol{\beta}^H \end{cases} \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times L}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$$

解: $\mathbf{w}_{\text{LCMV}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} \left(\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \boldsymbol{\beta}$

特例: 当 $\mathbf{C} = \mathbf{a}(\theta_0)$, 即约束单个方向, 则 $\boldsymbol{\beta} = 1$ 。



小快拍情况下，尽管该算法仍具有干扰抑制能力，但副瓣特性较差。
其原因是由噪声发散特征值所致。

由于抑制干扰子空间与噪声子空间正交，因此当自适应加权矢量位于噪声子空间时，可在干扰方向形成零陷，即自适应加权矢量必须满足与干扰子空间正交

$$\mathbf{w}^H \mathbf{U}_s = 0$$

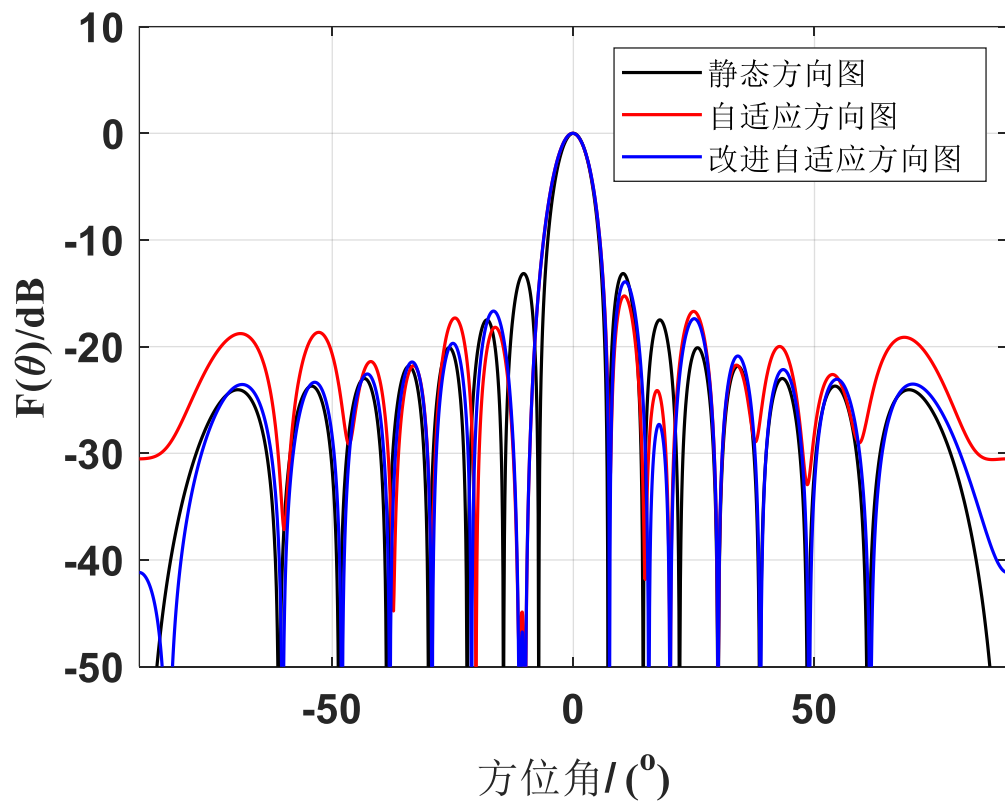
修正静态加权矢量约束矩阵 \mathbf{C} 和约束响应矢量 $\boldsymbol{\beta}$ ，得

得自适应权矢量为 $\mathbf{w}_{\text{LCMV}} = \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{C}}^H \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\beta}}$

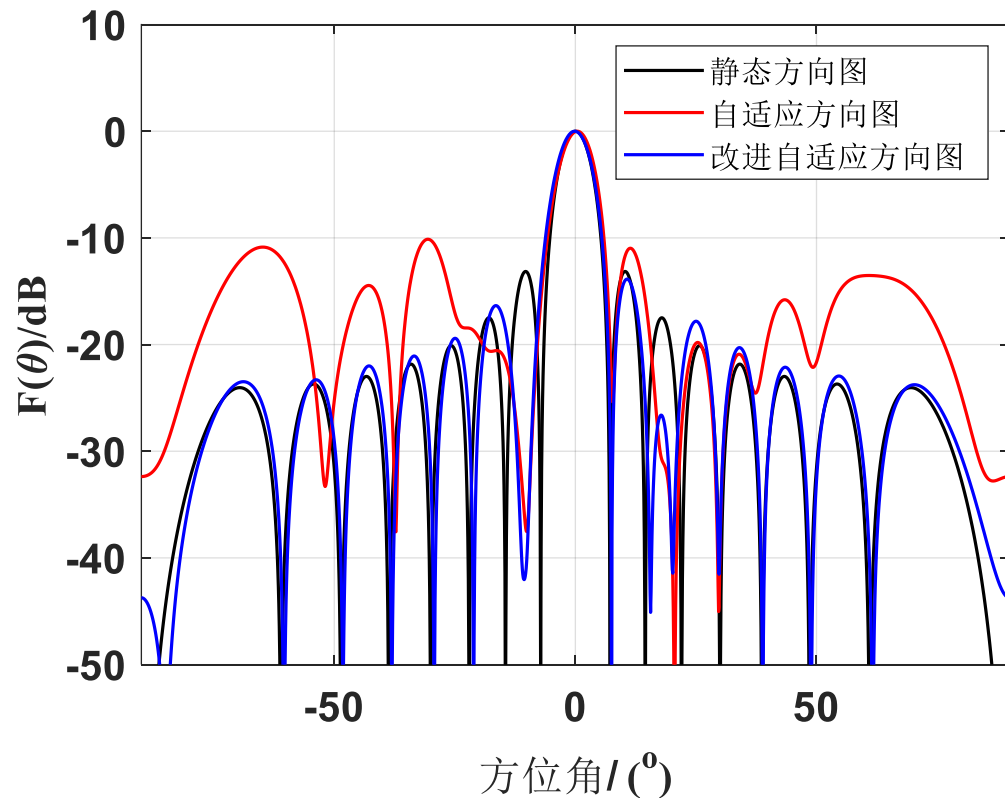
$$\begin{cases} \bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}, \mathbf{U}_s] \\ \bar{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases}$$



$M = 16$; 干扰方向为 $[-10^\circ, 20^\circ, 30^\circ]$;



快拍数 = 500



快拍数 = 20