# Задание 3

**Условие**

$f(x,y) = e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3$

Найдите экстремум функции программно или аналитически.

**Решение**

Найдем $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x(x^2-4y^2)^2 e^{\frac{x+y}{2}}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3}{2} - 24y(x^2-4y^2)^2 e^{\frac{x+y}{2}}$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3}{2} + 6x(x^2-4y^2)^2 e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ \frac{e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3}{2} - 24y(x^2-4y^2)^2 e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^2(\frac{x^2}{2} - 2y^2 + 6x) = 0 \\ e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^2(\frac{x^2}{2} - 2y^2 - 24y) = 0 \end{cases}$$

Так как $e^{\frac{x+y}{2}}$ не обращается в нуль, можем поделить оба уравнения на этот множитель.

Также видим, что решения $(x^2-4y^2)^2 = (x-2y)^2(x+2y)^2 = 0$ являются решениями нашей системы. Отсюда $x = 2y$ и $x = -2y$ решения системы.

Найдем остальные решения системы:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - 2y^2 + 6x = 0 \\ \frac{x^2}{2} - 2y^2 - 24y = 0 \end{cases}$$

Из 2 уравнения выразим $x$: $x = \pm\sqrt{4y^2 + 48y}$. Причем подкоренное выражение не должно быть меньше нуля: $y(y + 12) \geq 0$; $y \geq 0$ или $y \leq -12$

Рассмотрим 2 случая:

1. $x = -\sqrt{4y^2 + 48y}$. Подставим в 1 уравнение. Получим:

   $24y - 6\sqrt{4y^2 + 48y} = 0$

   $2y = \sqrt{y^2 + 12y}$

   Заметим, что такое равенство выполняется только для $y \geq 0$.

   $4y^2 = y^2 + 12y$

   $3y(y - 4) = 0$

   Получили $y = 0$ и $y = 4$. Найдем $x$ для этих $y$:

   Для $y = 0$: $x = 0$

   Для $y = 4$: $x = -16$

2. $x = \sqrt{4y^2 + 48y}$. Подставим в 1 уравнение. Получим:

   $24y + 6\sqrt{4y^2 + 48y} = 0$

   $-2y = \sqrt{y^2 + 12y}$

   Заметим, что такое равенство может быть верно только для $y \leq 0$.

   $4y^2 = y^2 + 12y$

   $3y(y - 4) = 0$

   Получили $y = 0$ и $y = 4$. Из этих корней по условию $y \leq 0$ нам подходит только $y = 0$.

   Для $y = 0$: $x = 0$.

В конечном счете, мы получили решения $x = -2y$; $x = 2y$; $(0, 0)$; $(-16, 4)$.

Найдем $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x^2} = 24x^2(x^2 - 4y^2)e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + 6x\left(x^2 - 4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + \frac{\left(x^2-4y^2\right)^3 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}}{4} + 6\left(x^2 - 4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}$

$\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x \partial y} = -96xy(x^2-4y^2)e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + 3x\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} - 12y\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + \frac{\left(x^2-4y^2\right)^3 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}}{4}$

Убедимся, что $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y \partial x}$:

$\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y \partial x} = -96xy(x^2-4y^2)e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + 3x\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} - 12y\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + \frac{\left(x^2-4y^2\right)^3 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}}{4}$

$\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2} = 384y^2(x^2-4y^2)e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} - 24y\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}} + \frac{\left(x^2-4y^2\right)^3 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}}{4} - 24\left(x^2-4y^2\right)^2 e^{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}$

Посчитаем для стационарных точек $(x_0, y_0)$ определитель $\Delta = det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2$, где

$A = \frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.

Для точки (0, 0): $\Delta = 0$. Для ответа на вопрос про существование экстремума необходимо дополнительное исследование.

Возьмем x = 0, тогда $f(0,y) = -64y^6 e^{\frac{y}{2}}$ — для $y \neq 0$ принимает только отрицательные значения

Возьмем y = 0, тогда $f(x,0) = x^6 e^{\frac{x}{2}}$ — для $x \neq 0$ принимает только положительные значения

Получается, в любой ненулевой окрестности точки $(0,0)$ есть как положительные, так и отрицательные значения $\Rightarrow$ в точке $(0,0)$ экстремума нет.

Для стационарной точки $(-16,4)$ $\Delta = 195689447424e^{-12} > 0$. В свою очередь $A = -368640e^{-6} < 0 \Rightarrow (-16,4)$ - точка максимума функции.

Точки из $x = 2y$ и $x = -2y$ не могут быть экстремумами, т.к. у них нет такой проколотой окрестности, чтобы функция во всех точках этой окрестности была строго больше или меньше, чем в самой точке, подозреваемой на экстремум. По другому, в любой проколотой окрестности для $x = 2y (x = -2y)$ будут еще стационарные точки(по крайней мере, точки также лежащие на $x = 2y(x = -2y)$).

**Ответ:** $(-16,4)$ - точка максимума функции.