Théorie des Graphes

Jean-Charles Régin, Arnaud Malapert

Remerciements

- Didier MAQUIN (voir son site web)
- Didier MULLER

Livres

- Claude Berge : « Graphes »
- Michel Gondran et Michel Minoux : « Graphes et Algorithmes »
- Christian Prins : « Algorithmes de Graphes »
- Eugene Lawler : « Combinatorial Optimization »
- Ahuja, Magnanti et Orlin « Network Flows »
- R. Tarjan : « Data Structures and Network Algorithms »

Introduction

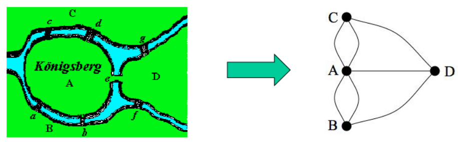
Graphes : 3 aspects

- Communiquer / Visualiser
- Définir des problèmes
- Raisonner

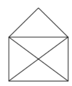
- Pas que des algos : aussi des problèmes

Histoire

Naissance en 1736, communication d'Euler où il propose une solution au problème des ponts de Königsberg



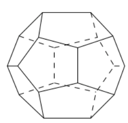
Dessin comportant des sommets (points) et des arêtes reliant ces sommets



Histoire

- 1847 Kirchhoff
  théorie des arbres (analyse de circuits électriques)
- 1860 Cayley
  énumération des isomères saturés des hydrocarbures C_nH_{2n+2}
- A la même époque, énoncé de problèmes importants
  - Conjecture des quatre couleurs (1879)
    (Möbius, De Morgan, Cayley, solution trouvée en 1976)
  - Existence de chemins Hamiltoniens (1859)

- 1936 König
  premier ouvrage sur les graphes
- 1946 → Kuhn, Ford, Fulkerson, Roy
  Berge

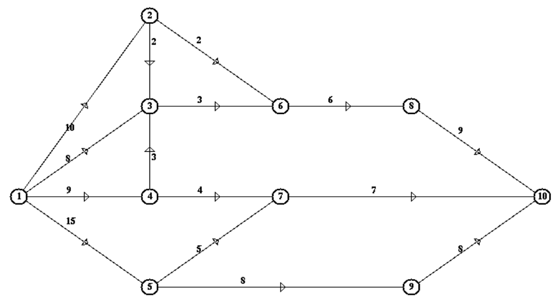


Définitions

Graphe : définitions

- Un Graphe Orienté (ou Digraph (directed graph)) G=(X,U) est déterminé par la donnée :
  - d'un ensemble de **sommets** ou **nœuds** X
  - d'un ensemble ordonné U de couples de sommets appelés **arcs**.
- Le nombre de sommets d'un arc est l'ordre du graphe
- Si u=(a,b) est un arc de G alors
  - a est l'extrémité initiale de u
  - b l'extrémité terminale de u.
  - b est le successeur de a
  - a et b sont adjacents
- Les arcs **ont un sens**. L'arc u=(a,b) va de a vers b.
- Ils peuvent être munit d'un coût, d'une capacité etc…

Graphe



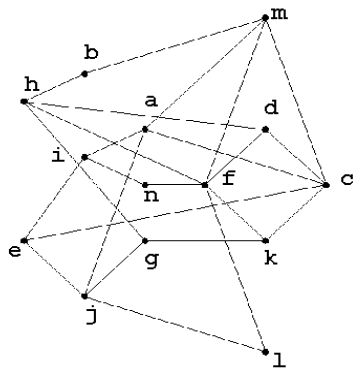
Graphe

- On note par ω(i) : l'ensemble des arcs ayant i comme extrémité
- On note par ω+(i) : l'ensemble des arcs ayant i comme extrémité initiale = ensemble des arcs sortant de i
- On note par ω-(i) : l'ensemble des arcs ayant i comme extrémité terminale = ensemble des arcs entrant dans i
- Γ(i) : ensemble des successeurs de i
- d+(i) : degré sortant de i (nombre de successeurs)
- d-(i) : degré entrant de i (nombre de sommets pour lesquels i est un successeur)

Graphe non orienté

- Un Graphe non orienté G=(X,E) est déterminé par la donnée :
  - d'un ensemble de sommets ou nœuds X
  - D'un ensemble E de paires de sommets appelées **arêtes**
- Les arêtes ne sont pas orientées

Graphe non orienté



Graphe : définitions

- Deux sommets sont voisins s'ils sont reliés par un arc ou une arête
- N(i) : ensemble des voisins de i : ensemble des sommets j tels qu'il existe un arête contenant i et j

Graphe complet

- Un graphe $G=(X, A)$ est dit complet si, pour toute paire de sommets (x, y), il existe au moins un arc de la forme (x, y) ou (x, y).
- Un graphe simple complet d'ordre n est noté K_n. Un sous-ensemble de sommets $C \subset X$ tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête est appelé une clique.

Exercices

- Reliez le nombre d'arêtes et les degrés
- Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair
- Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y en a toujours au moins 2 qui ont le même nombre d'amis présents
- Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié exactement à 3 autres ?

Exercices (suite)

Essayez d'exprimer (et non nécessairement de résoudre…) en termes de graphes les problèmes suivants :

- Peut-on placer quatre dames sur un échiquier 4x4 sans qu'aucune d'elles ne puisse en prendre une autre ?
- Un cavalier peut-il se déplacer sur un échiquier en passant sur chacune des cases une fois et une seule ?
- Combien doit-on placer de dames sur un échiquier 5x5 afin de contrôler toutes les cases ?

Représentation des graphes en machine

Représentation des graphes

- 3 types de représentation qui ont chacune leur avantage et inconvénient
  - Liste de successions
  - Matrice d'adjacence
  - Matrice d'incidence

Liste de succession

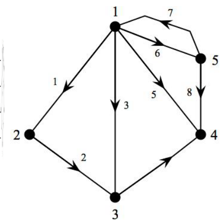
Listes de succession

1	2, 3, 4, 5
2	3
3	4
4	-
5	1, 4

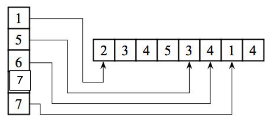
Successeurs

1	5
2	1
3	1, 2
4	1, 3, 5
5	1

Prédécesseurs



Représentation machine



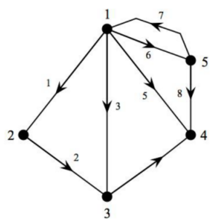
Matrice d'adjacence

Considérons un graphe $G=(X, A)$ comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice $U=(u_{ij})$ de dimension $n \times n$ telle que :

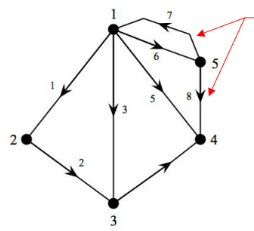
$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \text{ (c'est-à-dire } (i,j) \text{ est une arête)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle matrice, ne contenant que des « 0 » et des « 1 » est appelée matrice booléenne.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrice d'adjacence

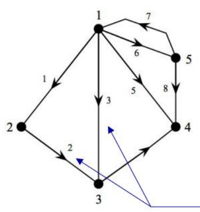


$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.

Matrice d'adjacence



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ 2

Propriétés

- la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U est égale au degré sortant $d_s(x_i)$ du sommet x_i de G.
- la somme des éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de U est égale au degré entrant $d_e(x_j)$ du sommet x_j de G.
- U est symétrique si, et seulement si, le graphe G est symétrique.

Matrice d'incidence

Considérons un graphe orienté sans boucle $G=(X, A)$ comportant n sommets $x_1, \ldots, x_n$ et m arêtes $a_1, \ldots, a_m$. On appelle matrice d'incidence (aux arcs) de G la matrice $M=(m_{ij})$ de dimension $n \times m$ telle que :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de } a_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité terminale de } a_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ n'est pas une extrémité de } a_j \end{cases}$$

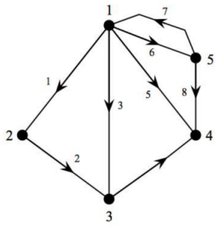
INVERSE

Pour un graphe non orienté sans boucle, la matrice d'incidence (aux arêtes) est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est une extrémité de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrice d'incidence

25



$$\begin{array}{c} \text{Arc} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

Sommet

Exercices

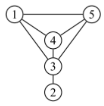
26

- Pour chacune des représentations, calculer le coût des opérations suivantes
  - Est-ce que i et j sont reliés ?
  - Combien i a-t-il de voisins ?
  - Quels sont les voisins de i ?
  - Supprimer l'arc (a,b)
  - Supprimer le premier voisin de i

Exercices

27

- Tracer la matrice d'adjacence du graphe



- On a calculé ci-dessous les matrices M^2 et M^3 (M est la matrice ci-dessus). Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus ?

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Chemins, chaînes, cycles et circuit

Chaîne

29

- Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadre dans la séquence.
- Le premier et le dernier sommet sont appelés (sommets) extrémités de la chaîne.
- La longueur de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne élémentaire.
- Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite chaîne simple.

Cycle

30

- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident.
- Un cycle élémentaire (tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant) est un cycle minimal pour l'inclusion, c'est-à-dire ne contenant strictement aucun autre cycle.

Chemin

31

- Un chemin est une séquence finie et alternée de sommets et d'arcs, débutant et finissant par des sommets, telle que chaque arc est sortant d'un sommet et incident au sommet suivant dans la la séquence (cela correspond à la notion de chaîne « orientée »).
- Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.
- Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.
- Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident.

Exercice : matrice d'adjacence

32

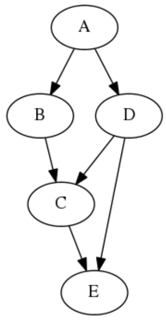
On considère un graphe G = (E, U) avec E=(A, B, C, D, E) et M sa matrice associée.

- Tracer le graphe représentatif de cette matrice.
- Déterminer la matrice d'incidence de ce graphe.
- Calculer M^i , i ∈ {1, 2, 3}. Rappeler la signification des coefficients non nuls de ces matrices.
- Calculer $A = I + M + M^2 + M^3 + M^4$. Donner une interprétation de A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice : matrice d'adjacence

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = 0$$



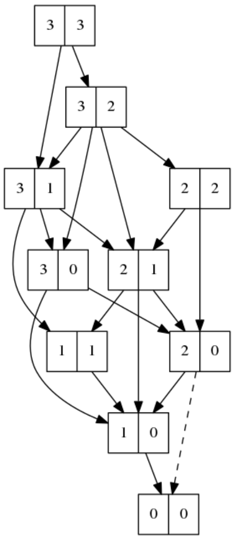
$$I + M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice: jeu des allumettes

Deux joueurs disposent de deux tas de trois allumettes, à tour de rôle chaque joueur peut enlever une ou deux allumettes dans un des tas. Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

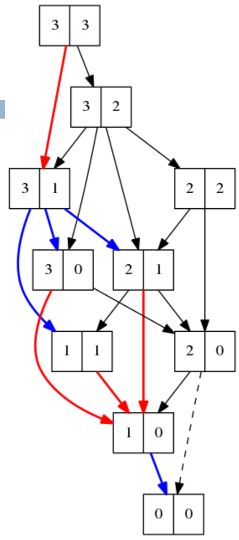
- Modéliser le jeu à l'aide d'un graphe.
- Que doit jouer le premier joueur pour gagner à coup sûr ?

Graphe d'état



- Chaque état est représenté par un sommet (x,y) indiquant le nombre d'allumettes de chaque tas.
- On élimine les symétries entre les états (x≥y).
- Il existe un arc entre deux sommets A et B s'il est possible de passer de l'état A a l'état B par une transition valide (enlever une ou deux allumettes dans un des tas).
- Notez que la transition entre (2,0) est (0,0) correspond à un suicide, alors qu'on peut jouer un coup gagnant.

Stratégie gagnante



- Il faut retirer deux allumettes d'un tas.
- Quel que soit le coup joué par l'adversaire, on peut jouer un coup gagnant.

Exercice : Die Hard !

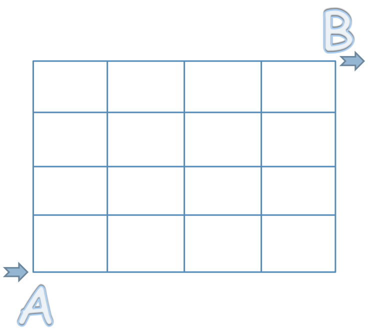
- On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres…
- Comment doit-on faire ?

Exercice : Die Hard !

- Chaque état est représenté par un sommet (x,y) indiquant le nombre de litres dans la grande et la petite bouteille.
- Il existe un arc entre deux sommets A et B s'il est possible de passer de l'état A a l'état B par une transition valide :
  - vider une bouteille (V);
  - remplir une bouteille (R);
  - transvaser le contenu de la bouteille A dans la bouteille B jusqu'à ce que la bouteille A soit vide ou la bouteille B soit pleine (T).
- Solution : (0,0) R (5,0) T (2,3) V (2,0) T (0,2) R (5,2) T (4,3)

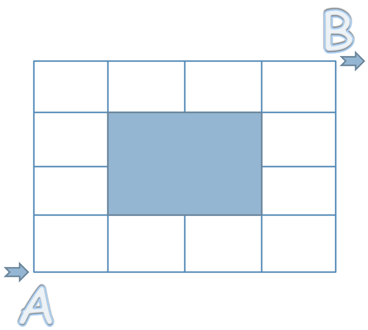
Exercice : dénombrement de chemins

- Supposons une grille de dimensions n x m (par ex. 4x4).
- Quelle est la longueur d'un plus court chemin entre A et B ?
- Comment pouvez-vous représenter un tel chemin ?
- Combien y a t-il de plus courts chemins entre A et B ?



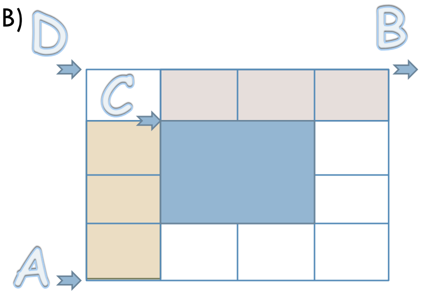
Exercice : dénombrement de chemins

- Supposons une grille de dimensions n x m (par ex. 4x4).
- Combien y a t-il de plus courts chemins entre A et B ?



Exercice 2 : dénombrement de chemins

- #AB est le nombre de plus courts chemins entre A et B.
- #AB = 2*(#AC*#CB + #ADB)
- #AB = 2*(C(1, 3+1)^2 + 1)
- #AB = 2*(16+1)=34

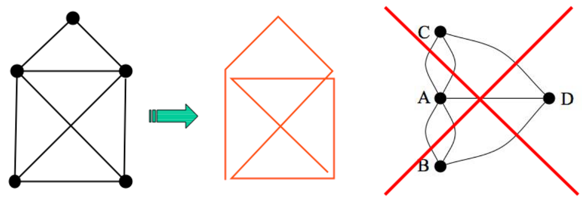


Graphes eulériens

Chaîne et cycle eulérien

Soit un graphe orienté $G=(X, A)$.

- Une chaîne eulérienne est une chaîne empruntant une fois et une fois seulement chaque arête de G.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.
- Un graphe possédant un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Existence chaîne eulérienne

***Théorème* 1**

- Un graphe non orienté connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
- Il admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

Condition nécessaire

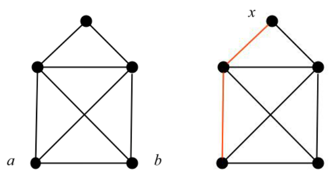
En chaque sommet, le nombre d'arcs incidents doit être égal au nombre d'arcs sortants, les sommets doivent donc être de degré pair.

Dans le cas d'une chaîne, les deux extrémités font exception ; on part ou on arrive une fois de plus, d'où un degré impair pour ces deux sommets extrémités.

Trouver une chaîne eulérienne

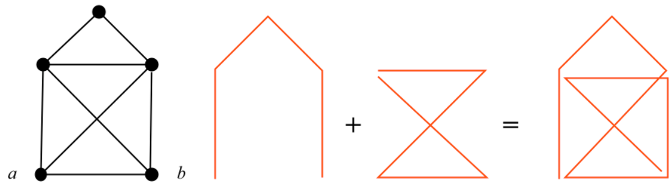
Condition nécessaire

Soit a et b deux sommets de degré impair (s'il n'y en a pas a et b sont confondus).
Soit L la chaîne parcourue en partant de a (avec l'interdiction d'emprunter deux fois la même arête).
Si l'on arrive à un sommet $x \neq b$, on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x. On peut donc « repartir » par une arête non déjà utilisée.
Quand on ne peut plus bouger, c'est qu'on est en b. Si toutes les arêtes ont été utilisées, on a parcouru une chaîne eulérienne.



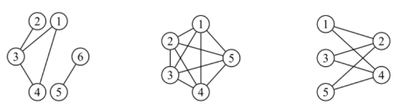
Trouver une chaîne eulérienne

Si toutes les arêtes n'ont pas été utilisées, on greffe, dans la chaîne, des cycles eulériens

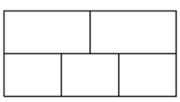


Exercices

- Les graphes suivants sont-ils eulériens ?



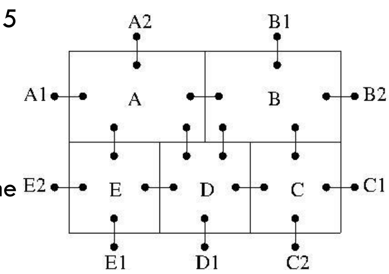
- Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Exercices

- Le degré de A,B et D est 5
- Le degré de E et C est 4
- Le degré de A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, E1 et E2 est 9.

Il est impossible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe les 16 segments car il y a plus de deux sommets de degré impair.



Exercices

49

- Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?
- On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.
  - En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
  - Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
  - Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
  - Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Correction : rendre un graphe eulérien

50

- Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?
  - On ajoute un nouveau sommet que l'on relie à tous les sommets de degré impair. Ces sommets ont maintenant un degré pair dans le graphe modifié.
  - Dans le graphe original, il y avait un nombre pair de sommets de degré impair, le nouveau sommet a donc un degré pair.
  - Ainsi, tous les sommets ont maintenant un degré pair et le graphe est eulérien.

Correction : dominos

51

- Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?
  - Les sommets du graphes sont les nombres de 1 à n.
  - Chaque sommet est relié a tous les autres sommets. Chaque arc (i,j) représente un domino.
  - En fait, le graphe est complet. Le degré d'un sommet est n-1.
  - Si n est paire, tous les sommets ont un degré impair et le graphe n'est pas eulérien.
  - Si n est impaire, tous les sommets ont un degré pair et le graphe est eulérien.

Chemin et circuit eulérien

52

- Soit un graphe oriente G=(X, A).
- Un chemin dans un graphe orienté est dit eulérien s'il passe exactement une fois par chaque arc.
- Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un circuit eulérien.

Chemin et circuit eulérien

53

- Un graphe orienté connexe admet un chemin eulérien (mais pas de circuit eulérien) si, et seulement si, pour tout sommet sauf deux (*a* et *b*), le degré entrant est égal au degré sortant et

  $d_e(a)=d_s(a)-1$ et $d_e(b)=d_s(b)+1$

- Un graphe orienté connexe admet un circuit eulérien si, et seulement si, pour tout sommet, le degré entrant est égal au degré sortant.

Chemin hamiltonien

Chemin hamiltonien

55

Soit $G=(X, A)$ un graphe connexe d 'ordre n.

- On appelle chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne) un chemin (une chaîne) passant une fois, et une fois seulement, par chacun des sommets de G.
- Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc un chemin (une chaîne) élémentaire de longueur $n-1$.
- Un circuit hamiltonien (un cycle hamiltonien) est un circuit (un cycle) qui passe une fois, et une seule fois, par chacun des sommets de G.
- On dit qu'un graphe G est hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien (cas non orienté) ou un circuit hamiltonien (cas orienté).

Traveling Salesman Problem (TSP)

56

- **Données :** une liste de villes et leurs distances deux à deux.
- **Question :** trouver le plus petit tour qui visite chaque ville exactement une fois.
- Reformulation plus mathématique :
  - Etant donné un graphe complet pondéré, trouver un cycle hamiltonien de poids minimum

TSP

Chaque ville est visitée une et une seule fois

Un seul tour (pas de sous-tour)

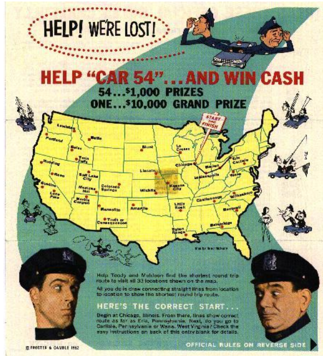
TSP

Chaque ville est visitée une et une seule fois

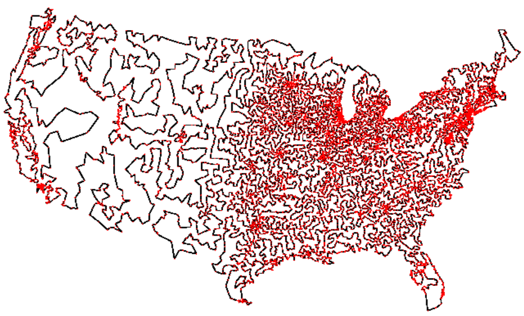
Un seul tour (pas de sous-tour)

TSP

- Certains problèmes sont équivalents au problème du TSP. Exemple : problème d'ordonnancement : trouver l'ordre dans lequel on doit construire des objets avec des presses hydrauliques
- La version « pure » du TSP n'est pas fréquente en pratique. On a souvent des problèmes qui sont
  - Non euclidiens
  - Asymétriques
  - Recouvrement de sous-ens de nœuds et non pas de tous les nœuds
- Ces variations ne rendent pas le problème plus facile.
- Problème assez commun
  - Vehicle routing (time windows, pickup and delivery…)



Procter and Gamble Contest 1962



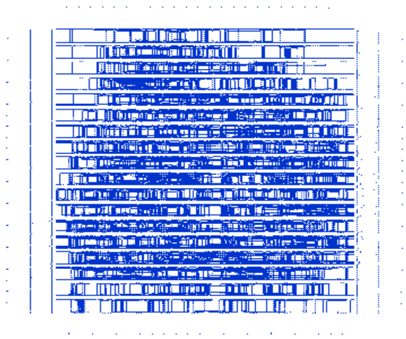
USA 13,509 cities. Solved in 1998

German Tour

- Le 20 Avril 2001, David Applegate, Robert Bixby, Vašek Chvátal, et William Cook ont anoncé la résolution du TSP pour les 15 112 villes d'Allemagne.
- Réseau de 110 processeurs (550 Mhz) à l'université de Rice et de Princeton.
- Le temps total d'utilisation des ordinateurs a été de **22.6 années.**

Germany 15,112 cities. Solved in 2001

Sweden 24,978 cities. Solved in 2004



VLSI 85,900. Solved in 2006

TSP

- Il existe plusieurs solveurs
- Le plus connu est Concorde de William Cook (gratuit)

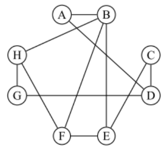
Chemin hamiltonien

Ordonnancement de tâches

- On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer n tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité.
- Si l'on construit le graphe G dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc (i, j) si la tâche i peut être effectuée avant la tâche j, le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de G.

Exercice

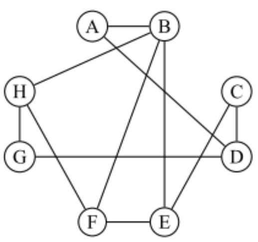
- Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).

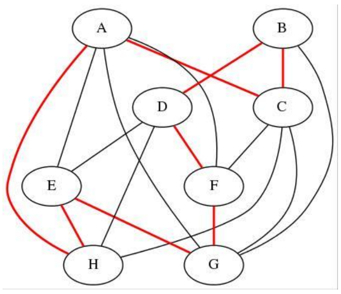


- Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes incompatibles.

Exercice

On cherche un *cycle hamiltonien* dans le *graphe de compatibilité*.





Connexité

Connexité

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.

La relation :

$$x_i \ \mathrm{R} \ x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } \ x_i = x_j \\ \text{soit il existe une chaîne joignant } x_i \text{ à } x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité). Les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_p$.

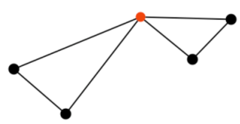
Le nombre p de classes d'équivalence distinctes est appelé nombre de connexité du graphe.

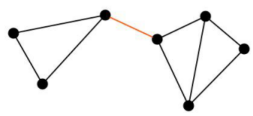
Un graphe est dit connexe si et seulement si son nombre de connexité est égal à 1.

Les sous-graphes G_i engendrés par les sous-ensembles X_i sont appelés les composantes connexes du graphe. Chaque composante connexe est un graphe connexe.

Connexité

- Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.
- Un ensemble d'articulation d'un graphe connexe G est un ensemble de sommets tel que le sous-graphe G' déduit de G par suppression des sommets de E, ne soit plus connexe.





Forte connexité

Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin joignant deux sommets quelconque.

La relation :

$$x_i \; R \; x_j \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } x_i = x_j \\ \text{soit il existe à la fois un chemin joignant } x_i \text{ à } x_j \text{ et un chemin joignant } x_j \text{ à } x_i \end{cases}$$

est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence induites sur X par cette relation forment une partition de X en $X_1, X_2, \ldots X_q$.

Les sous-graphes engendrés par les sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots G_q$ sont appelés les composantes fortement connexes du graphe.

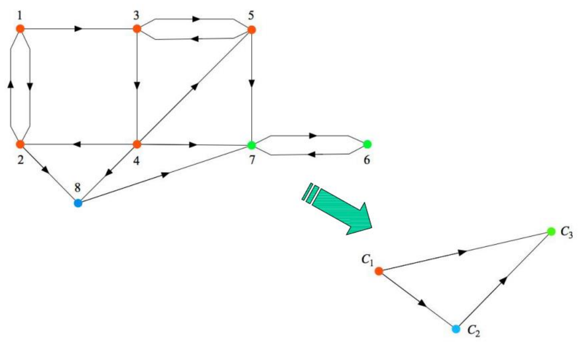
Graphe Réduit

On appelle graphe réduit le quotient du graphe G par la relation de forte connexité $G_r=G/R$

Les sommets de G_r sont donc les composantes fortement connexes et il existe un arc entre deux composantes fortement connexes si et seulement s'il existe au moins un arc entre un sommet de la première composante et un sommet de la seconde.

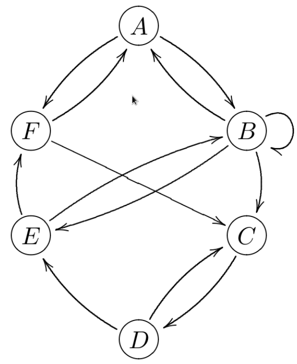
On vérifie que le graphe G_r est sans circuit.

Réduction



Exercices

- Donner l'ensemble des successeurs et de prédécesseurs de chaque sommet.
- Calculer les demi-degrés intérieurs et extérieurs de chaque sommet.
- Donner un exemple de chemin simple mais non élémentaire.
- Existe-t-il un circuit hamiltonien dans G?
- Tracer le graphe non orienté déduit de G.
- G est-il connexe ? Fortement connexe?



Arbre et arborescence

Cycle et nombre cyclomatique

- On dit que p cycles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont dépendants s'il existe, entre leurs vecteurs associés, une relation vectorielle de la forme :

  $\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_p \mu_p = 0$

  avec les λ_i non tous nuls.
- Si la satisfaction de la relation précédente implique $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots, p$, les p cycles sont dits indépendants.
- Une base de cycles est un ensemble minimal de cycles indépendants tel que tout vecteur représentatif d'un cycle puisse s'exprimer comme combinaison linéaire des cycles de la base.
- On appelle nombre cyclomatique d'un graphe G, la dimension de la base de cycles.

Nombre cyclomatique

- Soit G un graphe avec n sommets, m arêtes (ou arcs) et p composantes connexes
- La dimension de la base de cycle est v(G) = m – n +p

Arbre

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycles.
- Une **forêt** est un graphe dont chaque composante est un arbre
- **Théorème.** G=(X,A) est un arbre si et seulement si il existe une unique chaîne reliant toute paire de sommet.
- Preuve:
  - Si 2 chaines alors on aurait un cycle
  - connexe équivaut à il existe toujours une chaine entre toute paire de sommet

Arbre

- **Théorème** : Soit H=(X,U) un graphe d'ordre ≥ 2; les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre
  - H est connexe et sans cycle
  - H est sans cycle et admet n-1 arcs
  - H est connexe et admet n-1 arcs
  - H est connexe et en ajoutant un arc on crée un cycle (et un seul)
  - H est sans cycle et si on supprime un arc quelconque , il n'est plus connexe
  - Tout couple de sommets est relié par une chaîne et une seule
- Preuve : voir Berge

Graphe fortement connexe

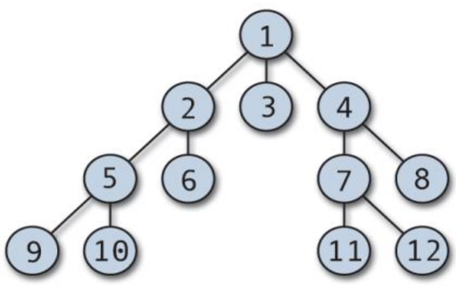
- **Théorème** : Pour un graphe G avec au moins un arc, les conditions suivantes sont équivalentes :
  - G est fortement connexe
  - Par tout arc passe un circuit
- Preuve : voir Berge

Arborescence

- Dans un graphe G=(X,U), on appelle racine, un point a tel que tout autre sommet du graphe puisse être atteint par un chemin issu de a. Une racine n'existe pas toujours.
- Une **arborescence** est un arbre muni d'une racine
- Un graphe G est dit **quasi-fortement connexe** si pour tout couple de sommet x et y, il existe un sommet z d'où partent à la fois un chemin allant en x et un chemin allant en y

Cheminement

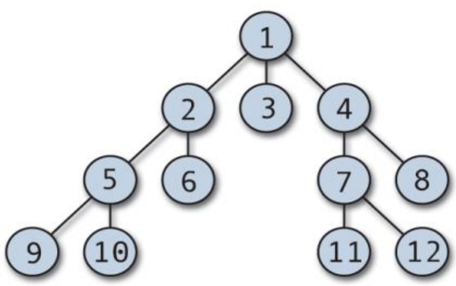
Arbre



Arbre

- La **racine** r de l'arbre est l'unique nœud ne possédant pas de parent
- Tout sommet x qui n'est pas la racine a
  - un unique parent, noté parent(x) (appelé père parfois)
  - 0 ou plusieurs fils. fils(x) désigne l'ensemble des fils de x
- Si x et y sont des sommets tels que x soit sur le chemin de r à y alors
  - x est un ancêtre de y
  - y est un descendant de x
- Un sommet qui n'a pas de fils est une feuille

Arbre

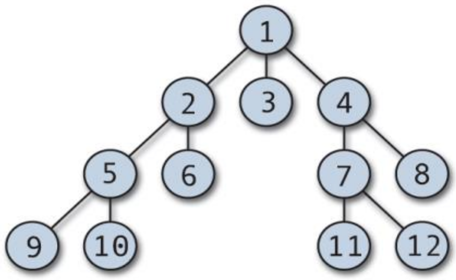


1 est la racine
9,10,6,3,11,12,8 sont les feuilles
11 est un descendant de 4, mais pas de 2
2 est un ancêtre de 10

Arbre

- Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on regarde les arêtes d'un arbre comme étant orienté de la racine vers les feuilles
- La **profondeur** d'un sommet (depth) est définie récursivement par
  - prof(v) = 0 si v est la racine
  - prof(v) = prof(parent(v)) + 1

Arbre

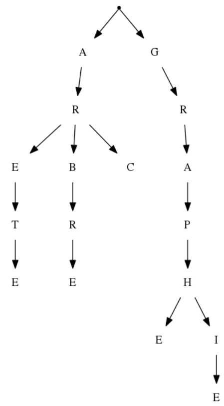


1 est la racine
2,3,4 sont à la profondeur 1
5,6,7,8 à la profondeur 2
La hauteur de 2 est 2, celle de 9 est 4, celle de 3 est 2, celle de 1 est 1.

Exemple d'arbre : dictionnaire

L'arbre ci-contre représente un dictionnaire contenant les 5 mots suivants: arbre, arc, arete, graphe, graphie.

- Ajouter le mot « arborer » au dictionnaire. Proposez un algorithme pour l'insertion d'un mot.
- Ajouter le mot « are » dans le dictionnaire. Que constatez-vous ? Proposez une solution ?
- Proposez un algorithme déterminant si un mot appartient au dictionnaire.
- Quel est le nombre de sommets maximum dún dictionnaire de profondeur *p* ?



Arbre : parcours

- Parcours (tree traversal) : on traverse l'ensemble des sommets de l'arbre

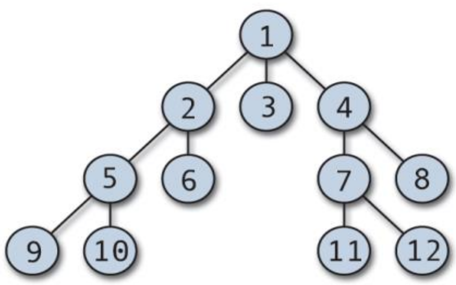
- Parcours en largeur d'abord
- Parcours en profondeur d'abord
  - Préfixe
  - Infixe (arbre binaire seulement)
  - Postfixe

Arbre : parcours en largeur d'abord

- Largeur d'abord (bfs = breadth-first search)
- On visite la racine, puis on répète le processus suivant jusqu'à avoir visité tous les sommets :
  visiter un fils non visité du sommet le moins récemment visité qui a au moins un fils non visité

- On visite tous les sommets à la profondeur 1, puis tous ceux à la profondeur 2, puis tous ceux à la profondeur 3 etc…

Arbre



Largeur d'abord: ordre de visite
1, 2 ,3 ,4 ,5, 6 , 7, 8, 9 , 10 ,11 ,12

Arbre : parcours en largeur d'abord

- Bfs(T) : array

```
r ← racine(T)
créer un file F et ajouter r dans F
i ← 0
tant que (F n'est pas vide)
      x ← premier(F); supprimer x de F
      array[i] ← x
      i++
      pour chaque fils y de x
            ajouter y dans F
      fin pour
fin tant que
```


Arbre : largeur d'abord avec passes

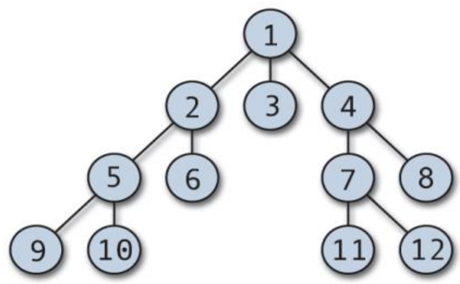
- Bfs(T) : array

```
r ← racine(T)
créer deux files F1 et F2 et ajouter r dans F1
i ← 0
faire
      tant que (F1 n'est pas vide)
            x ← premier(F1); supprimer x de F1
            array[i] ← x
            i++
            pour chaque fils y de x
                  ajouter y dans F2
            fin pour
      fin tant que
      F1 ← F2          // fin d'une passe début de la nouvelle : la
      F2 devient vide  // profondeur change
tant que F1 n'est pas vide
```


Arbre : parcours en largeur d'abord

Largeur d'abord: ordre de visite

- Passe 1 : 1
- Passe 2 : 2,3,4
- Passe 3 : 5,6,7,8
- passe 4 : 9,10,11,12



Arbre : parcours en profondeur d'abord

- Profondeur d'abord (dfs = depth-first search)
- Défini de façon récursive
- visit(sommet x)
  previsit(x)
  pour chaque fils y de x
      visit(y)
  postvisit(x)
- Premier appel : visit(racine(T))

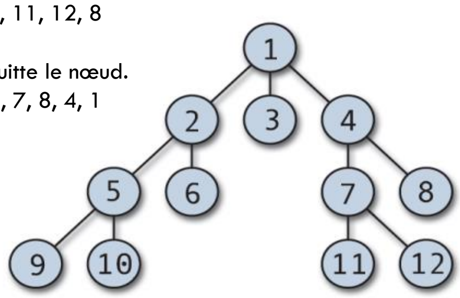
Arbre : parcours en profondeur d'abord

- Ordre préfixé ou postfixé dépend des fonction previsit et postvisit
- Si previsit(x) : met x dans le array et incremente i alors array contient l'ordre préfixé
- Si c'est postvisit qui le fait alors array contiendra l'ordre postfixé

Théorie des Graphes - 2015/2016

Arbre: parcours en profondeur d'abord

- ordre de visite préfixé
  - On marque quand on atteint le nœud.
  - 1, 2, 5, 9, 10, 6, 3, 4, 7, 11, 12, 8
- ordre de visite postfixé
  - On marque quand on quitte le nœud.
  - 9, 10, 5, 6, 2, 3, 11, 12, 7, 8, 4, 1



Théorie des Graphes - 2015/2016

Arbre : parcours en profondeur d'abord

- Dfs(T) : array
  r ← racine(T)
  créer une pile P et ajouter r dans P
  i ← 0
  tant que (P n'est pas vide)
      x ← premier(P); supprimer x de P
      array[i] ← x
      i++
      pour chaque fils y de x
          ajouter y dans P
      fin pour
  fin tant que

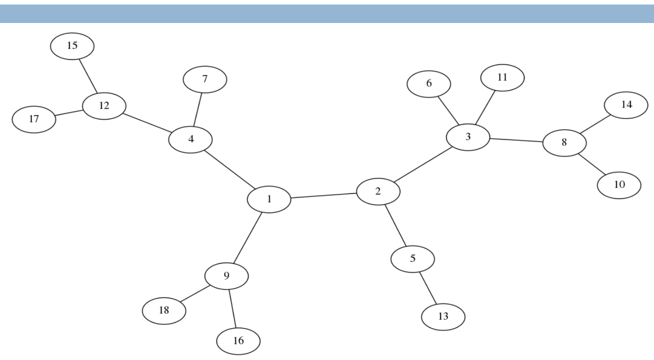
Théorie des Graphes - 2015/2016

Arbre : implémentation

- Représentation des fils
  - Par une liste :
    - Le parent possède un premier fils
    - Chaque sommet possède un pointeur vers son frère suivant (liste chaînée des fils)
  - Par un tableau si le nombre de fils est connu à l'avance (arbre k-aire)
  - Dans le cas binaire, le parent possède le fils gauche et le fils droit

Théorie des Graphes - 2015/2016

Exercice : parcours d'arbre



- Effectuez un parcours en largeur/profondeur d'abord en partant de 1.
- Vous devez visitez les successeurs d'un nœud dans leur ordre naturel.

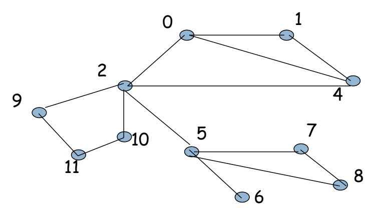
Théorie des Graphes - 2015/2016

Cheminement dans un graphe

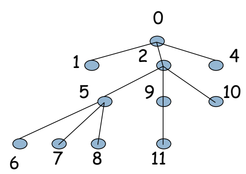
- Les algorithmes que l'on a vu pour les arbres (DFS et BFS) peuvent s'appliquer aux graphes
- Il faut faire un peu attention
  - **On ne doit pas visiter deux fois le même sommet**

Théorie des Graphes - 2015/2016

Graphe: largeur d'abord



Graphe G



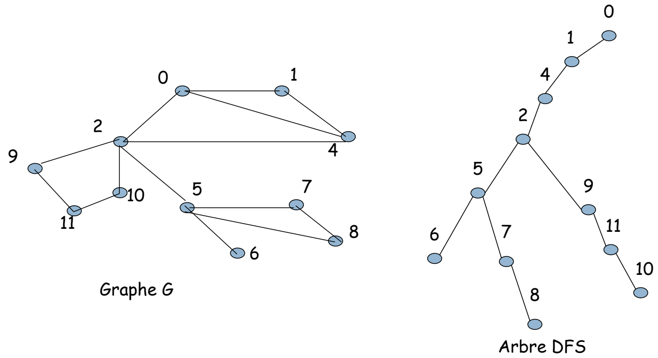
Arbre BFS

Théorie des Graphes - 2015/2016

Graphe : largeur d'abord

- Bfs(G,s) : array
```
r ← s
pour tous les sommets x marque[x] ← faux
créer un file F; enfiler(F,r); marque[r] ← vrai
i ← 0
tant que (F n'est pas vide)
      x ← premier(F); defiler(F)
      array[i] ← x
      i++
      pour chaque voisin y de x
            si marque[y] est faux
            alors    marque[y] ← vrai
                     enfiler(F,y)
      fin pour
fin tant que
```


Graphe : profondeur d'abord



Graphe G

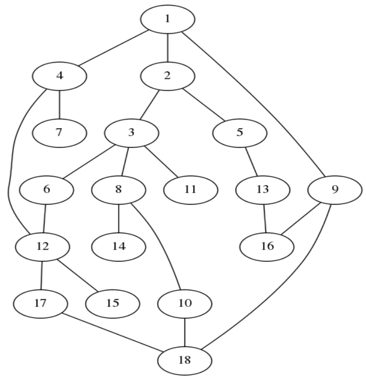
Arbre DFS

Graphe : profondeur d'abord

- Dfs(G,s) : array
```
r ← s
pour tous les sommets x marque[x] ← faux
créer un pile P; push(P,r); marque[r] ← vrai
i ← 0
tant que (P n'est pas vide)
      x ← top(P); pop(P);
      array[i] ← x
      i++
      pour chaque voisin y de x
            si marque[y] est faux
            alors    marque[y] ← vrai
                     push(P,y)
      fin pour
fin tant que
```

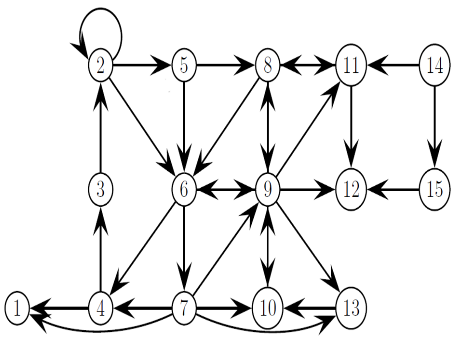

Exercice : parcours de graphe

- Effectuez un parcours en largeur/profondeur d'abord en partant de 1.
- Précisez :
  - l'arbre du parcours
  - la liste des prédécesseurs
  - l'ordre préfixe/postfixe
- Visitez les successeurs d'un nœud dans l'ordre :
  - naturel (croissant).
  - ante-naturel (décroissant)



Exercice : parcours de graphe orienté

- Effectuez un parcours en largeur/profondeur d'abord en partant de 5.
- Précisez :
  - l'arbre du parcours
  - la liste des prédécesseurs
  - l'ordre préfixe/postfixe
- Visitez les successeurs d'un nœud dans l'ordre :
  - naturel (croissant).
  - ante-naturel (décroissant)



Recherche de connexité

Graphe connexe

- Ecrire un algorithme qui détermine si un graphe est connexe
- Ecrire un algorithme qui calculent les composantes connexes d'un graphe

Composantes fortement connexes

- Ecrire un algorithme qui teste si un graphe est fortement connexe
- En écrire un meilleur !

Composantes fortement connexes

- On calcule G' le graphe inverse (transpose graph)
- On marque « non marqué » tous les sommets
- Début: On prend un sommet s non marqué
- On calcule tous les sommets que l'on peut atteindre dans G et dans G' à partir de s
- On marque « marqué » tous les sommets atteints deux fois ainsi que s
- On retourne en Début tant qu'il reste des sommets « non marqués »

- Complexité ? En théorie ? En pratique ?

Composantes fortement connexes

- Algorithme de R.E **Tarjan**
  - Premier algorithme linéaire : complexité en O(n+m)
  - ICS 161: Design and Analysis of Algorithms, D. Eppstein.
- Algorithme de **Kosaraju**
  - Kosaraju's algorithm, Wikipedia.
- Algorithme de **Gabow** (Path-based strong component algorithm)

DFS types d'arcs

- On visite v, on atteint w
  - w n'a jamais été atteint
  - w est un ancêtre de v dans la DFS
  - w est a déjà été totalement visité

- Idée : on marque les nœuds avec un indice que l'on augmente. On regarde quel est l'indice minimal que l'on peut atteindre à partir d 'un nœud.

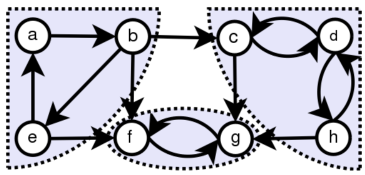
Algorithme de Tarjan

- num := 0; *P* := pile vide; partition := ensemble vide
- pour chaque sommet *v* de G
      si *v*.num n'est pas défini
            parcours(G, *v*)
      renvoyer partition
  fin de fonction

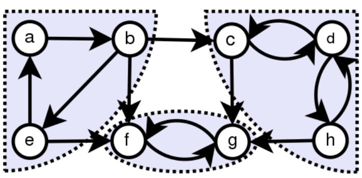
Function parcours(sommet v)

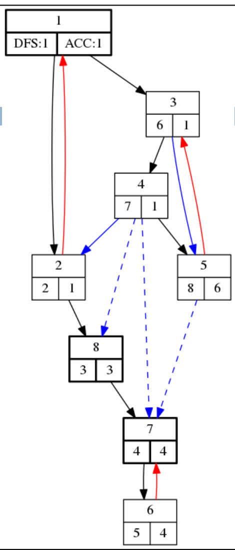

```
v.num := num
v.numAccessible := num
num := num + 1
P.push(v), v.dans_P := oui
// Parcours récursif
pour chaque w successeur de v
    si w.num n'est pas défini
        parcours(w)
        v.numAccessible := min(v.numAccessible, w.numAccessible)
    sinon si w.dans_P = oui
        v.numAccessible := min(v.numAccessible, w.num)
si v.numAccessible = v.num
    // C'est une racine, calcule la composante fortement connexe associée
    C := ensemble vide
    répéter
        w := P.pop(), w.dans_P := non
        ajouter w à C
    tant que w différent de v
    ajouter C à partition
```


Composantes fortement connexes

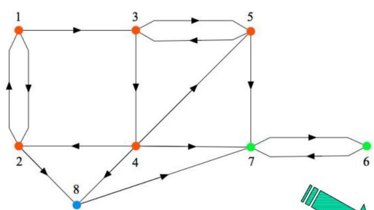


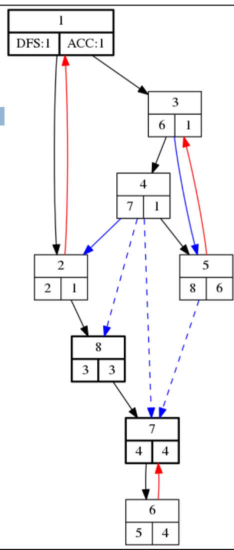
CFC : algorithme de Tarjan





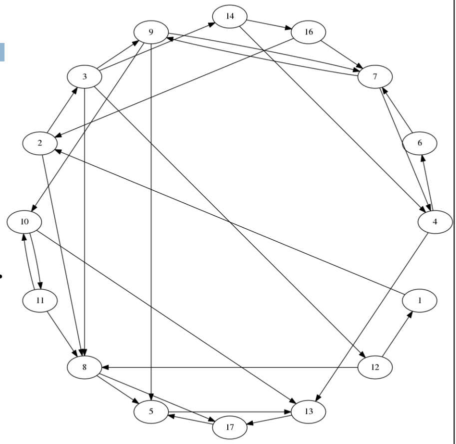
CFC : algorithme de Tarjan





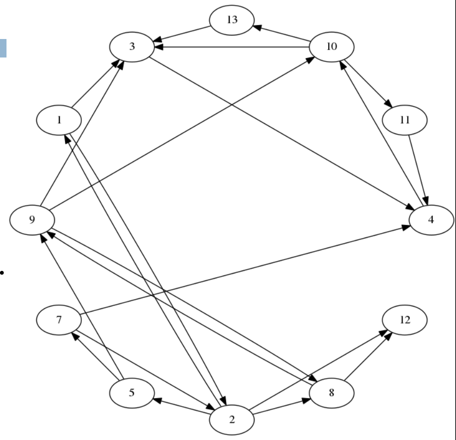
Exercice : composantes fortement connexes.

- Trouvez les CFC avec l'algorithme de Tarjan.
- Dessinez l'arbre DFS.
- Dessinez le graphe réduit.



Exercice : encore des CFC.

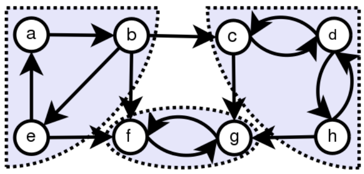
- Trouvez les CFC avec l'algorithme de Tarjan.
- Dessinez l'arbre DFS.
- Dessinez le graphe réduit.



Algorithme de Kosaraju

- S : pile vide
- Tant que S ne contient pas tous les sommets
  - Choisir un sommet arbitraire v qui n'est pas dans S
  - Lancer une DFS depuis v. Mettre tous les sommets visités (**à la fin de leur visite**) u dans S
- Inversé la direction de tous les arcs pour obtenir le graphe transposé.
- Tant que S est non vide:
  - Affecter v avec le sommet de S. Dépiler S
  - Lancer une DFS depuis v. (On peut aussi utiliser une BFS)
  - L'ensemble des sommets visistés depuis v appartiennent à la cfc contenant v; supprimer ces sommets de G et de S.

Algorithme de Kosaraju

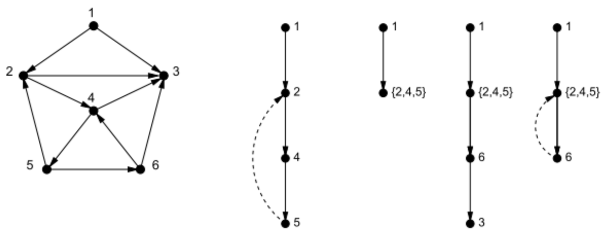


On commence à a
a,b,c,d,h,g,f
On ferme f : S={f}
On ferme g,h,d,c
S={f,g,h,d,c}
On ouvre e
On ferme e,b,a
S={f,g,h,d,c,e,b,a}

On prend le transposé.
On dépile S: a. On atteint b et e
CFC={a,b,e}; S={f,g,h,d,c}
On dépile S: c. On atteint d,h
CFC={c,d,h}; S={f,g}
On dépile S: g. On atteint f
CFC={f,g}

Path-based strong component algorithm

- Idée



(a) (b) (c) (d) (e)

Path-based strong component algorithm

procedure STRONG(G)
empty stacks S and B;
for $v \in V$ **do** $I[v] = 0$;
$c = n$;
for $v \in V$ **do if** $I[v] = 0$ **then** DFS(v);

procedure DFS(v)
PUSH(v, S); $I[v]$ = TOP(S); PUSH($I[v], B$); /* add v to the end of P */
for edges $(v, w) \in E$ **do**
  if $I[w] = 0$ **then** DFS(w)
  else /* contract if necessary */ **while** $I[w] < B$[TOP(B)] **do** POP(B);
if $I[v] = B$[TOP(B)] **then** { /* number vertices of the next strong component */
  POP(B); increase c by 1;
  while $I[v] \leq$ TOP(S) **do** I[POP(S)] $= c$ };

Path-based strong component algorithm

- L'algorithm applique une DFS et maintient 2 piles S et P.
- La pile S contient tous les sommets qui n'ont pas encore étét affecté à une CFC dans l'ordre dans lequel ils ont été atteint par la DFS.
- La pile P contient tous les sommets dont on ne sait pas s'ils appartiennent à une CFC différentes de celles trouvées
- On met num(x)=0 pour tous les sommets et C=1

Visit(v)

- num(v) ← C; incrémenter C
- Empiler v sur S; Empiler v sur P.
- Pour chaque voisin de w de v
  si num(w)=0 alors visit(w)
  sinon si w n'a pas été placé dans une CFC alors
  Tant que num(sommet(P)) > num(w)
  dépiler P
- Si v est le sommet de P:
  - Dépiler S jusqu'à dépiler v. Mettre tous les sommets dépilés dans une CFC
  - Dépiler v de P

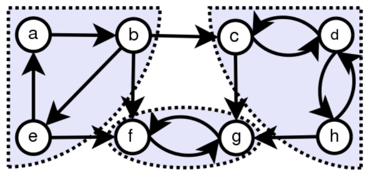
Path-based strong component algorithm

129

- On fait une boucle sur les sommets non encore ouverts par la DFS

Path-based strong component algorithm

130



On commence à a
S={a}; P={a}; num(a)=1
S={a,b}; P={a,b}; num(b)=2
S={a,b,c}; P={a,b,c}; num(c)=3
S={a,b,c,d}; P={a,b,c,d}; num(d)=4
On touche c. d est dépilé de P
S={a,b,c,d,h}; P={a,b,c,h}; num(h)=5
On touche d. h est dépilé de P
S={a,b,c,d,h,g}; P={a,b,c,g}; num(g)=6
S={a,b,c,d,h,g,f}; P={a,b,c,g,f}; num(f)=7
On touche g. f est dépilé

S={a,b,c,d,h,g,f}; P={a,b,c,g}; On quitte g
g est le sommet de P. On dépile S jusqu'à g CFC={f,g}. P={a,b,c}
On quitte h,d,c. c est le sommet de P. On dépile S jusqu'à c
CFC={c,d,h}; P={a,b}; S={a,b}
on ajoute e. S={a,b,e}; P={a,b,e}. On touche a. e et b sont dépilés de P
P={a}. On quitte e,b,a. a est le sommet de P
CFC={a,b,c}

K-connexité

131

- La k-connexité revient à se demander combien il faut éliminer de sommet au minimum pour casser la connexité du graphe
  - 2 : alors graphe 2-connexe
- On peut aussi se poser la question pour les arêtes
  - K-arête connexes : il faut éliminer k arêtes
- Il existe des algorithmes dédiés souvent semblables aux algorithmes présentés avant (2 connexes et algo de Tarjan pour les composantes fortement connexes)

Problème 2-SAT

Un graphe pour résoudre 2-SAT, Philippe Gambette.

Exercices : problème 2-SAT

133

Trouvez les valuations des formules 2-SAT suivantes.

- $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$
- $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$
- 12 + 1-3 + -14 + 23 + 27 + 2-6 + 34 + 45 + 46 + 4-7 + 6-7

Problèmes de cheminement

Problèmes

135

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - Combinaison des deux
- Détection de cycles négatifs
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- Cas des graphes sans circuit

Sommets atteignables

136

- Pour savoir quels sont les sommets atteignables à partir d'un sommet, il suffit d'utiliser une procédure de parcours du graphe (DFS ou BFS)
- Trouver le chemin le plus court est un peu plus complexe
- On cherche le plus court chemin entre deux sommets s et t (source=source; t=sink)

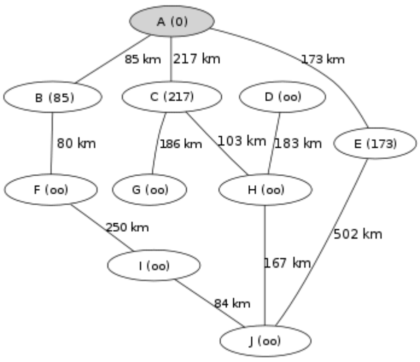
Plus court chemin entre deux points

- On introduit maintenant une longueur sur les arcs
- Le coût sur les arcs peut être appelé différement
  - Distance
  - Poids
  - Coût
  - …
- important : **la longueur d'un chemin est égal à la somme des longueurs des arcs qui le compose**

Plus court chemin entre deux points

- Pour commencer, on supposera que tous les coûts sont positifs. Ensuite on relâchera cette condition.
- Ce n'est pas une obligation : on peut très bien calculer le plus court chemin avec des coûts négatifs.

Chemin de A vers J



Plus court chemin

- On ne peut pas énumérer tous les chemins
- On se place dans le cas où toutes les longueurs sont positives
- Un algorithme glouton existe !

Problèmes

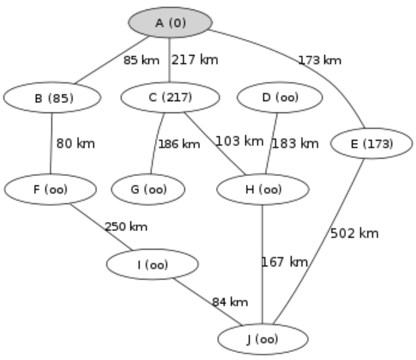
- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - **Algorithme de Dijkstra**
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - Combinaison des deux
- Détection de cycles négatifs
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- Cas des graphes sans circuit

Algorithme de Dijkstra

- On maintien en permanence la distance des sommets avec l'origine
- On a trois ensembles de sommets
  - Les **ouverts** (ce sont les candidats pour la prochaine étape)
    - On peut les atteindre en passant par des sommets précdemment choisis
  - Les **fermés** : ce sont des sommets qui ont été choisis
  - Les **indéfinis** : pour l'instant on ne peut pas les atteindre
- A chaque étape on choisit le sommet ouvert situé à la plus petite distance
- On regarde les sommets qui sont reliés à ce sommet
  - Ceux qui sont indéfinis deviennent ouvert et on calcule leur distance
  - Ceux qui sont ouverts ont leur distance modifiée
- On ferme le sommet

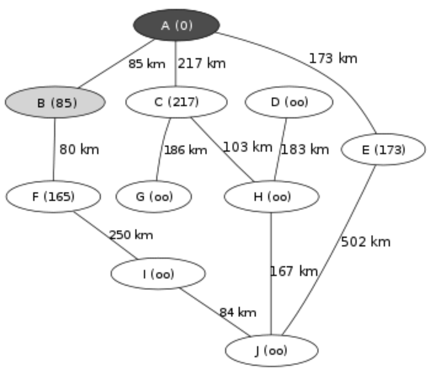
Chemin de A vers J

A est ouvert
Sommets reliés à A : B,C et E
Ils sont ouverts avec
D(A,B) ≤ 85
D(A,C) ≤ 217
D(A,E) ≤ 173
Ouvert={B,E,C}



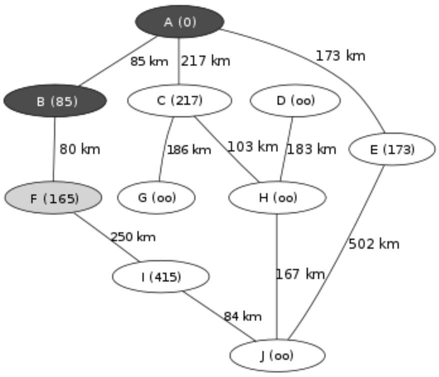
Chemin de A vers J

On ajoute le sommet ouvert
à la plus petite distance
Ici c'est B. On ferme B
On s'intéresse aux voisins de B
Il y a F : on ouvre F
D(A,F) ≤ d(A,B) + d(B,F) ≤ 165
Ouvert = {F,E,C}



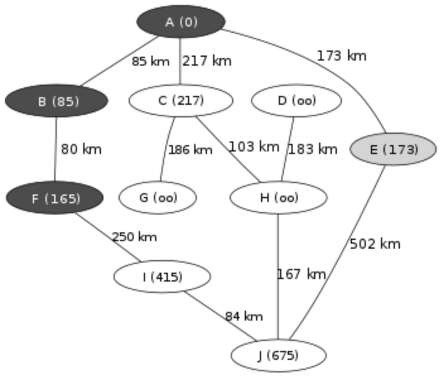
Chemin de A vers J

On choisit F. On le ferme
On ouvre I
D(A,I) ≤ d(A,F) + d(F,I) ≤ 415
Ouverts = {E,C,I}



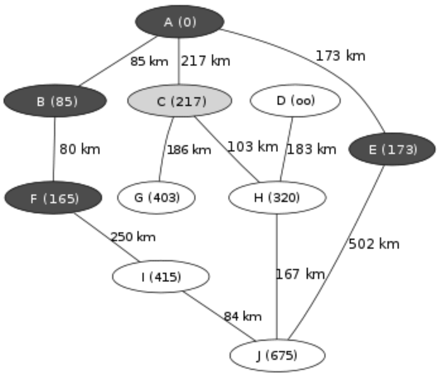
Chemin de A vers J

On choisit E. On le ferme
On ouvre J
D(A,J) ≤ d(A,E) + d(E,J) ≤ 675
Ouverts = {C,I,J}



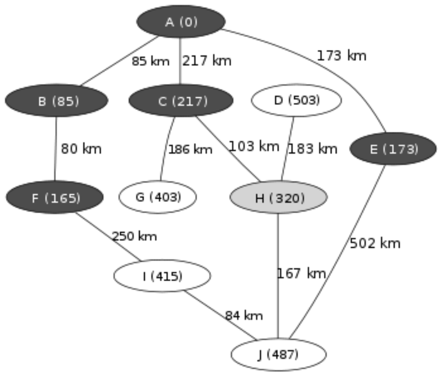
Chemin de A vers J

On prend C
On ouvre G et H
Ouverts = {H,G,I,J}



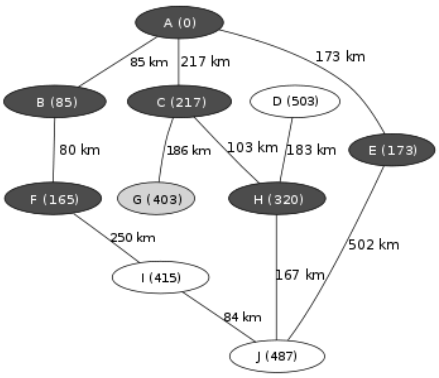
Chemin de A vers J

On prend H
On met à jour J



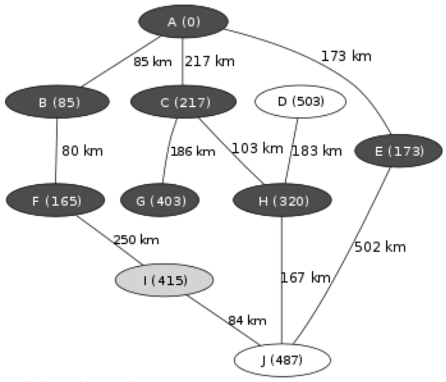
Chemin de A vers J

On prend G



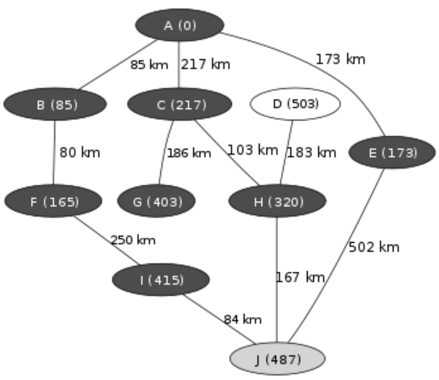
Chemin de A vers J

On prend I



Chemin de A vers J

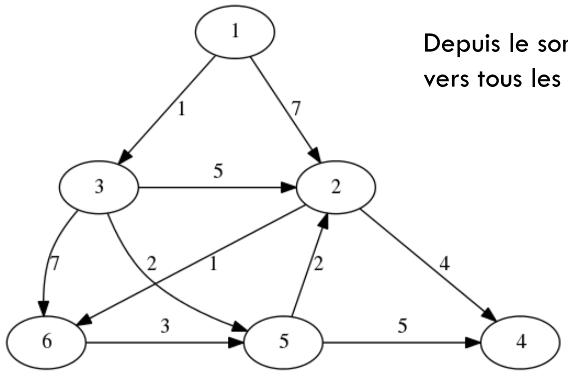
On prend J
Fin de l'algorithme



Dijkstra

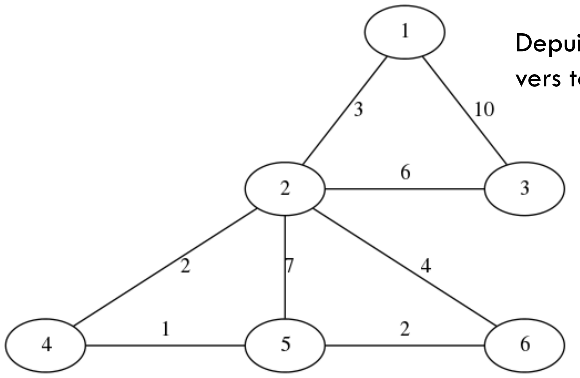
- maj_distances(s1,s2)
  si d[s2] > d[s1] + longueur(s1,s2)
  alors d[s2] ← d[s1] + longueur(s1,s2)
- Dijkstra(G,Poids,sdeb)
  Ouvert ← {s}
  tant que Ouvert ≠∅ et t n'est pas fermé
  faire i ← Trouve_min(Ouvert)
  supprimer i de Ouvert
  fermer(i)
  pour chaque nœud k voisin de i
  faire **si** k n'est pas fermé
  alors ajouter k dans Ouvert s'il n'y était pas déjà
  maj_distances(i,k)
  fait
  fait
- Pour trouver le chemin il faut garder le predecesseur (celui qui a mis à jour la distance min)

Exercice 1 : plus court chemin



Depuis le sommet 1 vers tous les autres

Exercice 2 : plus court chemin



Depuis le sommet 1 vers tous les autres

Algorithme de Dijkstra

- La difficulté vient de la détermination du sommet situé à la plus petite distance
  - Queue de Priorité

Queues de priorité : rappels

- 3 opérations
  - insert(elt,val)
  - decreaseKey(elt,val)
  - extractMin()
- Monotone ou pas (l'élément extrait augmente ou pas)
- Implémentations (complexité ?)
  - Liste
  - Liste ordonnée
  - Tas
  - Buckets

Queues de priorité : rappels

- Bucket : on crée un tableau de C valeurs possible (c'est le max du cout d'une arete de s à t)
- On traverse le tableau pour trouver le plus petit élément
- On utilise le tableau de façon circulaire
- Pourquoi est-ce que cela marche ?
- Complexité O(m+nC)

Queues de priorité

- Il existe de nombreuses structures de données
  - K-ary heap
  - Fibonacci heap
  - K-level buckets
  - Hot queue

Propriétés

- Tout sous-chemin d'un plus court chemin est un plus courts chemin
- L'ensemble des arcs des plus courts chemins forment un arbre
- La valeur des nœuds extrait par Dijkstra est croissante
- Ce dernier point n'est plus vrai si on a des coûts négatifs

Problèmes

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - **Algorithme de Bellman-Ford**
  - Combinaison des deux
- Détection de cycles négatifs
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- Cas des graphes sans circuit

Algorithme de Bellman-Ford

161

- Propriété des chemins. d : distance depuis s
  condition d'optimalité
  - $\forall(u,v) \in A$, $d(v) \leq d(u) + c(u,v)$
- Signification intuitive
  - Soit le plus court chemin de s à v peut passer par l'arc (u,v) et dans ce cas on a : $d(v) = d(u) + c(u,v)$
  - Soit le plus court chemin de s à v ne peut pas passer par l'arc (u,v) et dans ce cas on a : $d(v) < d(u) + c(u,v)$

Algorithme de Bellman-Ford

162

- Principe :
  - On met à jour les distances jusqu'à vérifier la propriété précédente pour chaque arc
  - Quand on trouve un arc (u,v) avec $d(v) > d(u) + c(u,v)$, cela signifie qu'on peut réduire la distance de s à v en passant par u.
  - On met donc d(v) à jour en passant par u
    - $d(v) \leftarrow d(u) + c(u,v)$,
  - On commence avec d(s)=0 et ∞ pour tous les autres sommets

LabelCorrecting

163

LabelCorrecting
$d(s) \leftarrow 0$
$support(s) \leftarrow nil$
$\forall i \in N - \{s\} : d(i) \leftarrow \infty$
while $\exists (i,j) s.t. d(j) > d(i) + c_{ij}$ **do**
  $d(j) \leftarrow d(i) + c_{ij}$
  $support(j) \leftarrow i$

Bellman-Ford

164

- Preuve
  - Pour tout sommet u, d(u) décroit tout au long de l'algorithme
  - En l'absence de cycle négatif, à la fin de l'algorithme on a
    - $\forall i \in X$: $-nC \leq d(i) \leq nC$
    - Preuve: comme il n'y a pas de cycle négatif un chemin emprunte au plus n-1 arcs
  - LabelCorrecting est en $O(n^2C)$
    - Preuve : d(i) peut être modifié au plus 2nC fois car il est décrémenter de 1 à chaque fois. Il y a n sommets dont au plus $O(n^2C)$ décrémentations

Bellman-Ford

165

- Modified LabelCorrecting
- Le problème central est la détection et l'ordre de traitement des arcs (u,v) tels que
  - $d(v) > d(u) + c(u,v)$
  - Cela signifie qu'on peut réduire la distance en passant par u
- Plusieurs idées possibles
  - On met l'ensemble des arcs dans une liste et on les traite les uns après les autres.
    On gère l'introduction de nouveaux arcs : ce sont les arcs voisins d'un sommet dont la distance vient d'être modifiée.
  - On utilise une liste de sommets. Un sommet u appartient à la liste s'il existe un arc (u,v) qui viole la condition d'optimalité

Modified LabelCorrecting

166

ModifiedLabelCorrecting
$d(s) \leftarrow 0$
$support(s) \leftarrow nil$
$\forall i \in N - \{s\} : d(i) \leftarrow \infty$
$i \leftarrow s$
do
  for *chaque* $(i,j) \in A(i)$ **do**
    if $d(j) > d(i) + c_{ij}$ **then**
      $d(j) \leftarrow d(i) + c_{ij}$
      $support(j) \leftarrow i$
      AddNode$(j, Stream)$
  $i \leftarrow$ SelectNode$(Stream)$
while $i \neq nil$

Modified LabelCorrecting

167

- Stream a une structure de FIFO
- On la décompose en 2 ensemble S1 et S2
  - addNode ajoute toujours en fin de S2
  - selectNode choisie le premier élément de S1 si S1 n'est pas vide; sinon S2 est copiée dans S1 et puis vidée. Dans ce cas on parle de **changement de passe**.
- La passe i traite les nœuds qui ont été introduit en i-1

Modified LabelCorrecting

168

Bellman-Ford-Moore
Stream est décomposé en 2 ensembles S_1 et S_2

AddNode$(node, Stream)$
  if $node \notin S_2$ **then** AddLast$(node, S_2)$

SelectNode$(node, Stream)$
  if $S_1 = \emptyset$ **then**
    if $S_2 = \emptyset$ **then** nil
    $S_1 \leftarrow S_2$
    $S_2 \leftarrow \emptyset$
  $node \leftarrow$ FirstNode(S_1)
  RemoveNode$(node, S_1)$
  $node$

Bellman-Ford

169

- Théorème
  - L'algorithme de Bellman-Ford est tel que
    - Chaque passe est en O(m)
    - Le nombre de passes est borné par la hauteur de l'arbre des plus courts chemins
    - L'algorithme est en O(nm)

Modified LabelCorrecting

170

- Autre possibilité pour Stream:
  - LIFO : l'algorithme n'est plus polynomial ! Mais il fonctionne parfois très bien pratique
- Remarque :
  - **Aucune supposition n'a été faite sur les coûts** !

Problèmes

171

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - **Combinaison des deux**
- Détection de cycles négatifs
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- Cas des graphes sans circuit

Bellman-Ford + Dijkstra ?

172

- Si on a uniquement des coûts non négatifs et si on prends l'algorithme Modified LabelCorrecting et que Stream est implémenté comme une queue de priorité avec la distance à s comme valeur, alors
  - On implémente l'algorithme de Dijkstra !
  - Un nœud ne peut-être introduit dans Stream qu'une seule fois

Bellman-Ford + Dijkstra ?

173

- Que se passe t'il si Stream est une queue de priorité et si les coûts ne sont pas tous négatifs ?
  - Bellman-Ford fonctionne toujours (pas de supposition ni sur Stream, ni sur le coût des arcs)
  - Algorithme de Dinitz et Itzhak (2010).
  - Complexité en O(nm)

Plus court chemin de s à t

174

- Si on cherche le plus court chemin de s à t, les algorithmes précédents recherchent un plus court chemin de s à tous les autres nœuds jusqu'à rencontré t
- Est-ce que l'on peut accélérer cela et éviter, dans le cas euclidien, de faire des cercles qui s'agrandissent ?
  - Si on cherche un plus court chemin entre Lille et Nice, les algos considèrent Amsterdam !

Plus court chemin de s à t

175

- Pour éviter cela, on peut utiliser un minorant de la distance minimum entre un nœud i et t
- Dès que l'on aura trouver un majorant de la distance de s à t alors on pourra utiliser ces minorants
  - $d(s,t) \leq M$
  - Si $d(s,i) + md(i,t) > M$ alors on arrête d'explorer depuis i
- Par exemple:
  - on sait que Amsterdam est au moins à 1000km de Nice.
  - on sait que Lille est au plus à 1200 km de Nice
  - on trouve que d(Lille,Amsterdam) = 280 km
  - on en déduit que d(Lille,Amsterdam) + d(Amsterdam,Nice) > d(Lille,Nice). On arrête l'exporation depuis amsterdam

Problèmes

176

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - Combinaison des deux
- **Détection de cycles négatifs**
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- Cas des graphes sans circuit

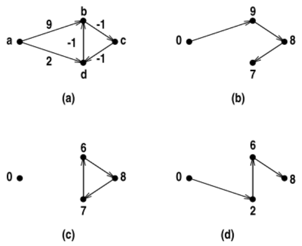
Détection de cycles négatifs

- C = plus grand cout d'un arc.
- Méthode 1 : Si une distance atteint une valeur ≤ -nC alors un cycle négatif est présent
- Méthode 2 :
  - On utilise le Modified LabelCorrecting algorithm avec une FIFO et la décomposition par passe.
  - On compte pour chaque nœud le nombre de fois où il est introduit dans la queue.
  - Si un nœud est introduit plus de (n-1) fois alors il y a un circuit négatif

Détection de cycles négatifs

- Méthode 3 :
  - Quand on modifie la distance d'un nœud v : d(v) ← d(u) + c(u,v). On dit que u est le prédécesseur de v, on le note p(v)
  - Le graphe des prédécesseurs est le sous graphe engendré par les arcs (p(v),v)
  - SI le graphe des prédécesseurs a un cycle alors G contient un cycle négatif.

Détection de cycles négatifs



Détection de cycles négatifs

- Méthode 4 : on applique la méthode 3 de temps en temps

Détection de cycles négatifs

- Méthode 5 : on applique la méthode 3 mais au lieu de considérer la graphe des prédécesseurs, on considère le graphe des arcs admissibles :
  - Arc admissible : arc (u,v) tel que d(v) ≥ d(u) + c(u,v)

Détection de cycles négatifs

- Méthode 6 : Subtree traversal
  - Quand on applique l'operation de mise à jour de la distance à un arc (u,v) on crée un cycle dans le graphe des parents ssi u est un ancêtre de v
  - On vérifie cela lors de la mise à jour de la distance
- Méthode 7 : Tarjan subtree disassembly (dépasse le cadre de ce cours)

Problèmes

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - Combinaison des deux
- Détection de cycles négatifs
- **Plus courts chemins entre tous les sommets**
- Cas des graphes sans circuit

Plus courts chemins entre tous les sommets

- ∀ i,j: on veut connaitre la distance du plus court chemin entre i et j
- 2 méthodes principales
  - Repeated shortest path problem
  - Algorithme de Floyd Warshall

Repeated shortest path

185

- Idée simple : on répète l'algo de plus court chemin n fois
- A partir d'un nœud i : on calcule tous les plus courts chemins de i vers t à l'aide d'un algorithme (Dijkstra ou Belmann Ford)
- Si on répète n fois on a répondu au problème

Elimination des couts négatifs

186

- Introduction d'une technique importante
  - **Les coûts réduits**
- Attention : beaucoup de livres introduisent cette notion sans donner son intérêt et en faisant comme si elle était obligatoire. Ce n'est pas vrai. Elle est utile mais c'est tout.

Coûts réduits

187

- Supposons que l'on ait calculé les distances d entre s et tous les sommets.
- Pour chaque arc (u,v) on peut calculer la valeur
  - $c^d(u,v) = c(u,v) + d(u) - d(v)$
  - C'est le coût réduit de l'arc (u,v)
  - Cela représente le surcoût local à passer par cet arc
- On a toujours $c^d(u,v) \geq 0$
  - La condition d'optimalité $d(v) \leq d(u) + c(u,v)$ implique $0 \leq c(u,v) + d(u) - d(v)$, d'où $c^d(u,v) \geq 0$

Coûts réduits

188

- On peut remplacer les coûts initiaux par les coûts réduits
- En procédant ainsi il ne reste que des coûts positifs
- On peut ainsi appliquer n fois l'algorithme de Dijkstra
- On obtient les valeurs d'origine des distance en appliquant la transformation suivante pour chaque paire de noeud u et v : on ajoute d(v)-d(u) à la distance calculée dans le graphe contenant les coûts réduits

Algorithme de Floyd Warshall

189

- Algorithme de programmation dynamique en $O(n^3)$.
- Basé sur le théorème suivant :
  Les distances sont optimales ssi
  $\forall u,v,w \; d[u,v] \leq d[u,w] + d[w,v]$
- Appelons $d^k[u,v]$ la longueur du plus court chemin utilisant au maximum les nœuds 1 à k-1. On a
  - $d^{k+1}[u,v] = \min \{d^k[u,v], d^k[u,k] + d^k[k,v]\}$

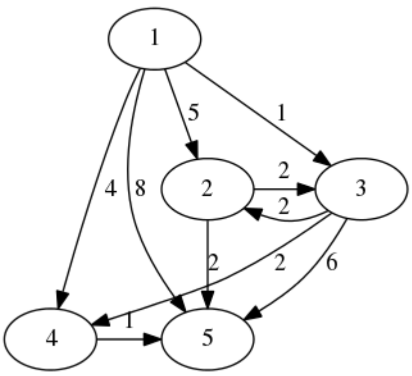
Algorithme de Floyd Warshall

190

```
∀u,v d[u,v] ← ∞; pred[u,v] ← null
∀u d[u,u] ← 0
∀(u,v) ∈ A d[u,v] ← c(u,v); pred[u,v] ← v
Pour k de 1 à n
    Pour u de 1 à n
        Pour v de 1 à n
            Si d[u,v] > d[u,k]+d[k,v]
            Alors  d[u,v] ← d[u,k]+d[k,v]
                   pred[u,v] ← k
            Fin si
        Fin pour
    Fin pour
Fin pour
```


Exercice : Floyd Warshall

191



Problèmes

192

- Connexité et sommets atteignables
- Plus court chemin entre deux sommets
  - Algorithme de Dijkstra
  - Algorithme de Bellman-Ford
  - Combinaison des deux
- Détection de cycles négatifs
- Plus courts chemins entre tous les sommets
- **Cas des graphes sans circuit**

Graphes sans circuits

Graphes sans circuits

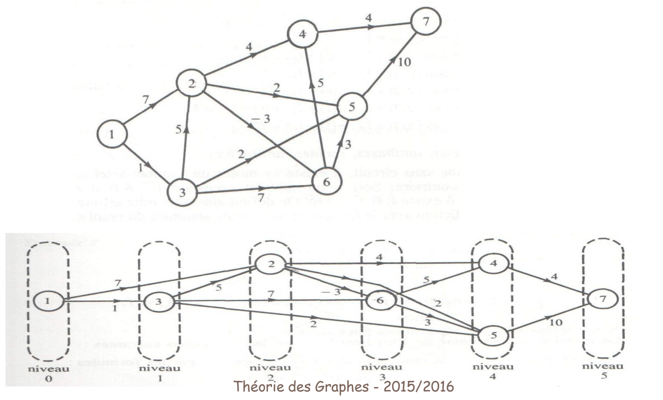
- Attention ce ne sont pas nécessairement des arbres.
- On parle ici de circuit et non pas de cycle.
- On est donc dans le cas ORIENTE

- Les problèmes du plus court chemin et de plus long chemin deviennent facile
- On calcule d'abord l'ordre topologique du graphe

Fonction rang d'un graphe

- Ordre topologique (un sommet est toujours visité avant ses successeurs)
- Associe à chaque nœud i un nombre positif rang(i) tel que
  - r(1)=0
  - R(i) = nombre d'arcs dans un chemin de cardinalité maximum entre 1 et i (taille (nombre de sommets) du plus grand chemin de prédécesseurs depuis 1)
- Se calcule facilement : on élimine les sommets sans prédécesseur à chaque étape (on épluche le graphe)

Rang d'un graphe



Rang d'un graphe

- TraitementNiveau(Niveau k,R) :
  Pour chaque élément i de R faire
  - S ← vide
  - Rang(i) ← k
  - Pour chaque voisin j de i faire
    - Décrémenter degré(j)
    - Si degré(j) = 0 alors ajouter j dans S

  R ← S

- Algorithme :
  - On détermine les racines. On les place dans R
  - Niveau ← 0
  - Répéter tant que R n'est pas vide
    - TraitementNiveau(Niveau,R)
    - Incrémenter Niveau

Chemins et graphes sans circuit

- On prend les sommets selon l'ordre topologique
- Plus court chemin jusqu'au nœud v
  - Minimum des plus courts chemins à partir de ses arcs entrants
- Plus long chemin jusqu'au nœud v
  - Maximum des plus longs chemins à partir de ses arcs entrants

Problème d'ordonnancement

- Un **problème d'ordonnancement** est composé de façon générale d'un ensemble de tâches soumises à certaines contraintes, et dont l'exécution nécessite des ressources.
- **Résoudre un problème** d'ordonnancement consiste à **organiser ces tâches**, c'est-à-dire à déterminer leurs dates de démarrage et d'achèvement, et à leur **attribuer des ressources**, de telle sorte que les contraintes soient respectées.
- Les problèmes d'ordonnancement sont très variés.

Paramètres en ordonnancement

- tâches
  - morcelables ou non
  - indépendantes ou non
  - durées fixes ou non
- ressources
  - renouvelables ou consommables
- contraintes portant sur les tâches
  - contraintes temporelles
  - fenêtres de temps
- aux critères d'optimalité
  - liés au temps (délai total, délai moyen, retards)
  - aux ressources (quantité utilisée, taux d'occupation)
  - ou à d'autres coûts (production, lancement, stockage)

Méthode PERT/CPM

201

- **PERT (Programme Evaluation Review Technique)** introduit par l'armée américaine (navy) en 1958 pour contrôler les coûts et l'ordonnancement de la construction des sous-marins Polaris.
- **CPM (Critical Path Method)** introduit par l'industrie américaine en in 1958 (DuPont Corporation and Remington-Rand) pour contrôler les coûts et l'ordonnancement de production.
- **PERT/CPM ignore la plupart des dépendances.**

Intérêts de PERT/CPM

202

- Quel sera la durée totale du projet ?
- Quelles sont les risques ?
- Quelles sont les **activités critiques** qui perturberont l'ensemble du projet si elles ne sont pas achevées dans les délais ?
- Quel est le statut du projet ? En avance ? Dans les temps ? En retard ?
- Anticiper les conséquences des retards et dépassements.
- Si la fin du projet doit être avancée, quelle est la meilleure manière de procéder ?

Principe de PERT/CPM

203

- On suppose que le projet se décompose en tâches
- Chaque tâches i est caractérisée par
  - Sa durée d(i)
  - Ses contraintes d'antériorité avec les autres tâches.
- **PERT/CPM ignore la plupart des dépendances :**
  - partage de ressources pour la réalisation des taches.

Graphe potentiels-tâches

204

- A chaque tâche i on associe un sommet du graphe
- Si la tâche i doit précéder la tâche j alors on définit un arc (i,j) de longueur d(i) (durée de i)
- On ajoute deux sommets fictifs
  - α qui correspond à la tâche de début des travaux (durée 0) qui est antérieure à toutes les autres tâches
  - ω qui correspond à la tâche de fin des travaux (durée 0) qui est postérieure à toutes les autres tâches
- Pas de circuit dans le graphe : sinon problème i doit suivre j, k doit suivre i et j doit suivre k : blocage

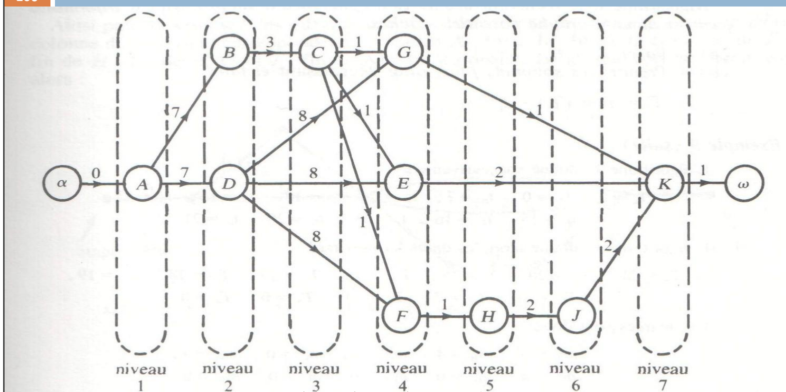
Graphe potentiels-tâches

205

Code de la tâche		Durée (semaine)	Tâches antérieures
A	Maçonnerie	7	-
B	Charpente	3	A
C	Toiture	1	B
D	Installations sanitaires et élec.	8	A
E	Façades	2	D,C
F	Fenêtres	1	D,C
G	Jardin	1	D,C
H	Plafonnage	2	F
J	Peinture	2	H
K	Emménagement	1	E,G,J

Graphe potentiels-tâches

206



Ordonnancement

207

- **But** : trouver un ordonnancement qui minimise le délai total du travail, donc la date de fin des travaux
- Pour qu'une tâche puisse commencer , il est nécessaire que toutes les tâches qui la précède (relie à la tâche début) soient réalisées

Ordonnancement

208

- **Date de début au plus tôt** de la tâche i
  - t(i) = max (t(k) + d(k), avec k prédécesseur de i)
  - Plus long chemin de α à i
- **Durée minimale** du projet (t(ω)) = plus long chemin de α à ω

Ordonnancement

209

- On fixe à $t(\omega)$ la durée du projet
- **Date de début au plus tard** de la tâche i
  - $T(i) = \min (T(k) - d(i))$, avec k successeur de i)
  - $T(i) = t(\omega)$ - plus long chemin de i à ω
- **Marge** de la tâche i
  - Différence entre début au plus tard et début au plus tôt
  - $T(i) - t(i)$
- **Tâche critique :** tâche dont la marge est nulle

Chemin critique

210

- **Tâche critique :**
  - tâche dont la marge est nulle
  - tâche sur un plus long chemin de α à ω
- **Il existe au moins un chemin critique.**
- **Attention, il peut exister plusieurs chemins critiques !**
- Les activités de ce chemin déterminent à elles seules la date de fin du projet.
- Il est nécessaire de réduire la longueur de tous les chemins critiques pour avancer la fin du projet.
- Les activités non critiques n'influencent pas la date de fin.

Tâche fondamentale

211

- une **étape clé** durant l'accomplissement du projet.
- On doit y porter :
  - une attention approfondie et
  - et contrôler rigoureusement sa réalisation.
- Par exemple, une tâche appartenant à tous les chemins critiques.

Intérêt pratique de PERT/CPM

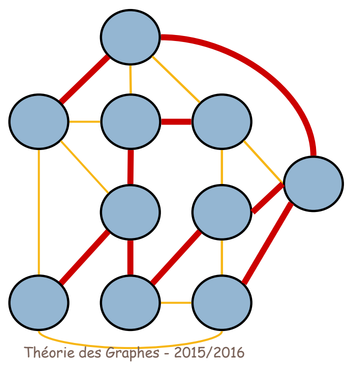
212

- Ensuite, l'affectation des personnes et ressources peut être améliorée en se concentrant sur ces activités critiques.
- Réciproquement, on peut alors réordonnancer les activités non-critiques et libérer les ressources qui leurs sont allouées sans perturber le reste du projet.
- Gestion basique des incertitudes.

Arbre couvrant de poids minimum

Spanning Tree

214



Minimum Spanning Tree

215

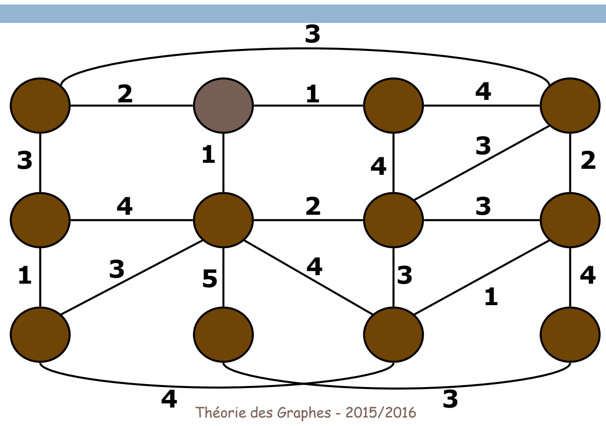
- Given a graph G, find a spanning tree where total cost is minimum.

Algorithme de Prim

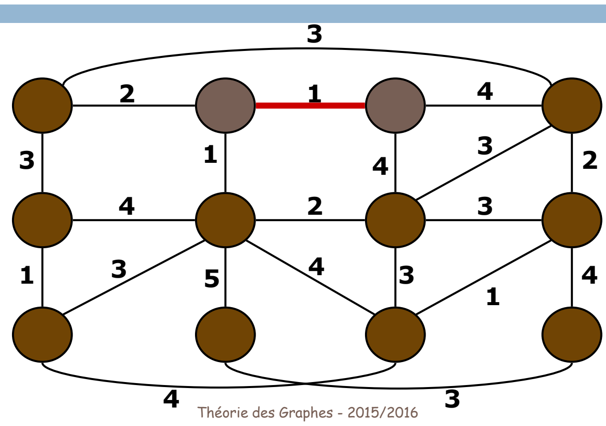
216

- On utilise un ensemble S de nœuds. On place un seul nœud dedans (celui que l'on veut)
- On ajoute petit à petit dans S tous les nœuds du graphe
- A chaque étape on ajoute dans S un nœud du graphe qui n'est pas dans S et qui est relié à un nœud de S et tel que le coût minimum du lien qui le relie à S est le plus petit possible. On place ce lien minimum dans l'arbre

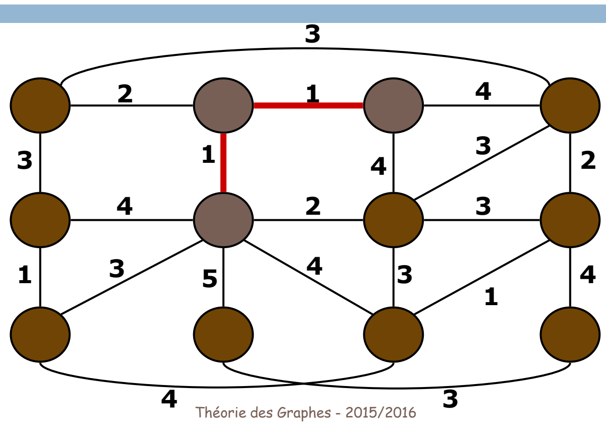
Prim’s Algorithm



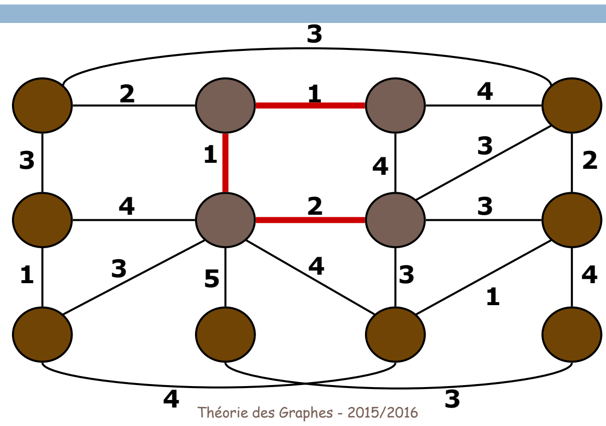
Prim’s Algorithm



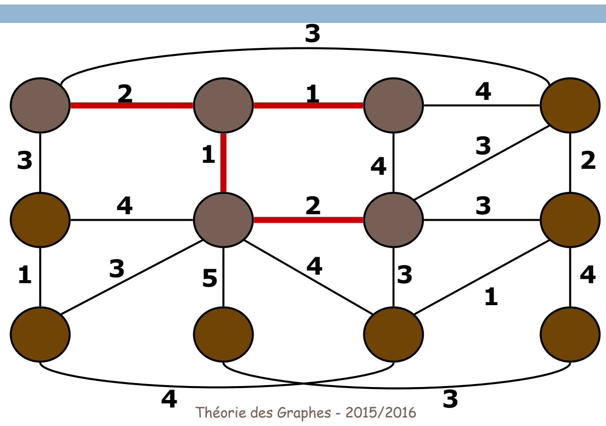
Prim’s Algorithm



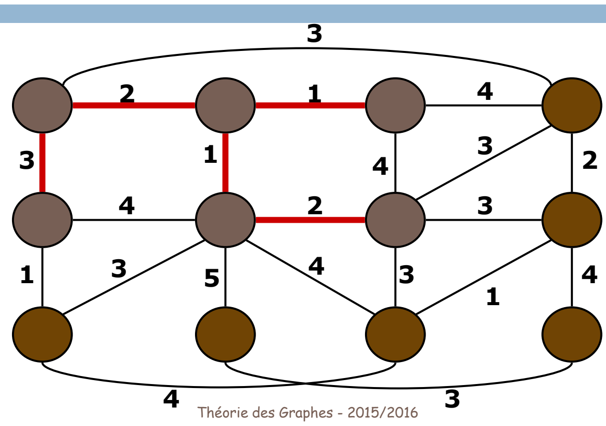
Prim’s Algorithm



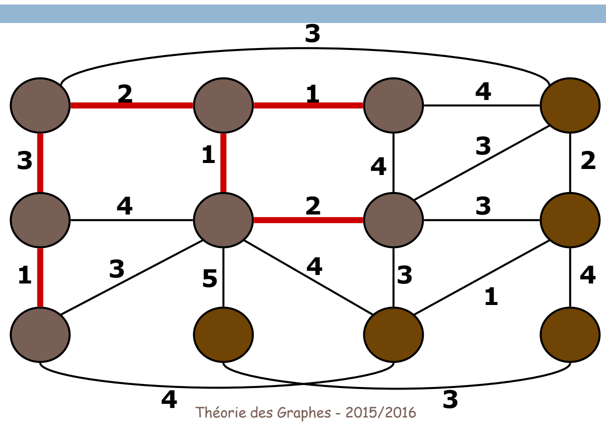
Prim’s Algorithm



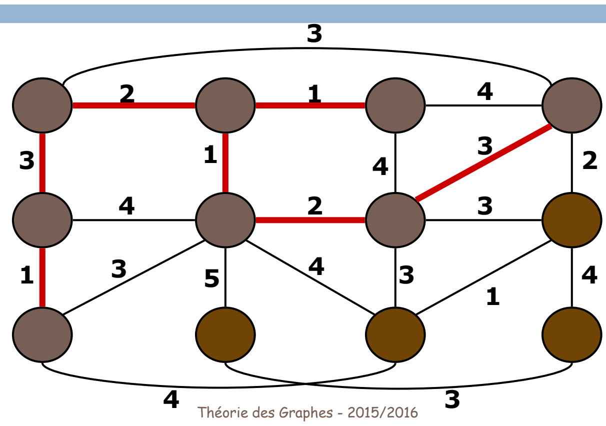
Prim’s Algorithm



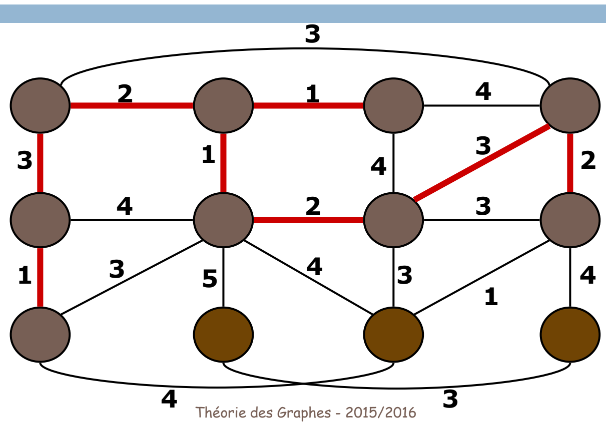
Prim’s Algorithm



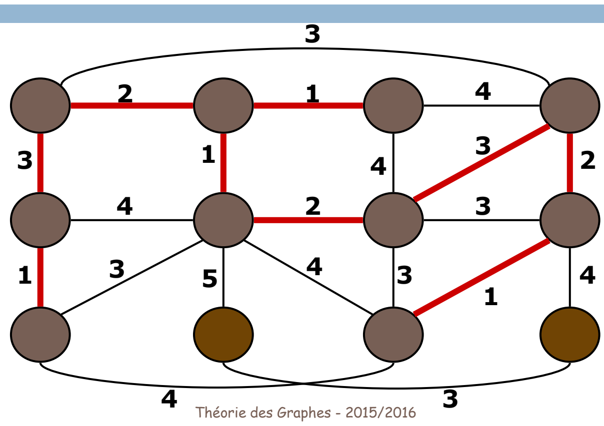
Prim’s Algorithm



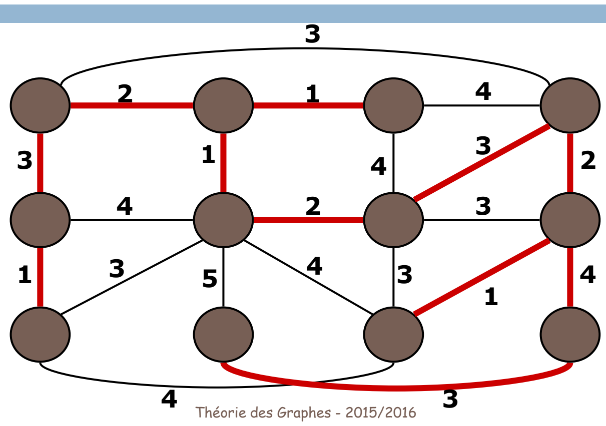
Prim's Algorithm



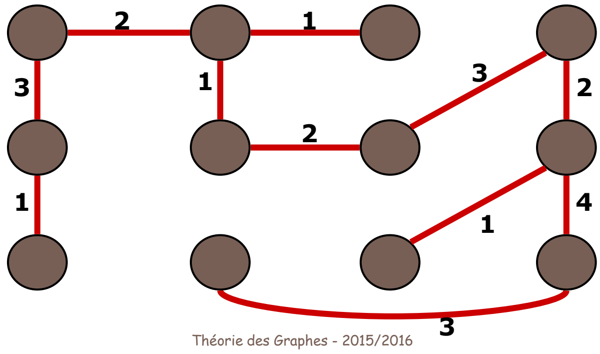
Prim's Algorithm



Prim's Algorithm



Prim's Algorithm



Prim's Greedy Algorithm

color all vertices yellow

color the root red

while there are yellow vertices

pick an edge (u,v) such that

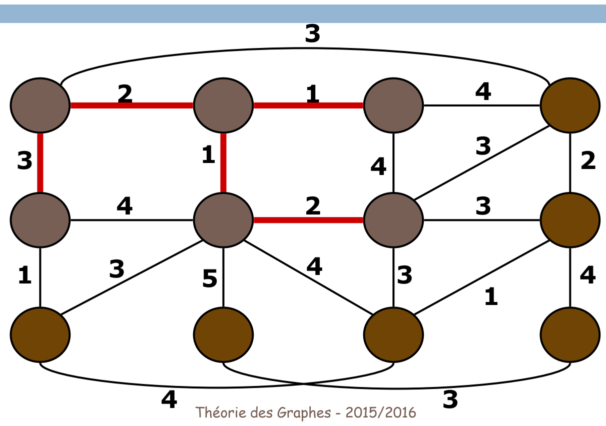
u is red, v is yellow & cost(u,v) is min

color v red

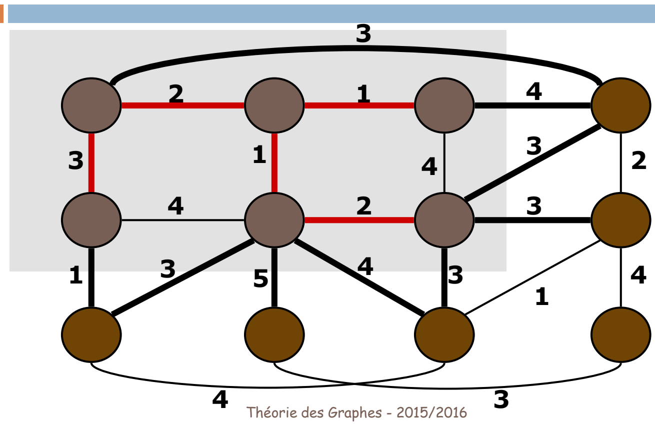
Preuve

- Considérons
  - SG : la solution calculée par l'algorithme glouton
  - Sopt : la solution optimale
- Si val(SG)=val(Sopt) alors pas de problèmes
- Si val(SG)≠val(Sopt) alors les deux arbres diffèrent. Prenons le premier arc dans l'ordre du Greedy qui diffère entre SG et Sopt. Appelons le e. Quand cet arc a été choisi, c'était le plus petit de la coupe (V,V'). Cet arc relie deux sommets x et y. Dans Sopt x et y sont reliés par un chemin. Sur ce chemin il y a un arc f qui relie un sommet de V a un sommet de V'. Comme l'algo Greedy a préféré e a f : on a poids(e) ≤ poids(f).
- Prenons la solution Sopt et remplacons f par e, on obtient Spot'. Si Sopt est optimal alors cela ne peut pas amélioré val(Sopt). Donc on a valS(opt')=val(Sopt) et donc poids(e) = poids(f). On peut reprendre le point précédant avec Sopt' au lieu de Sopt.
- A la fin on va donc montrer qu'on ne peut jamais amélioré Sopt' et que l'arbre construit par le Greedy a la même valeur

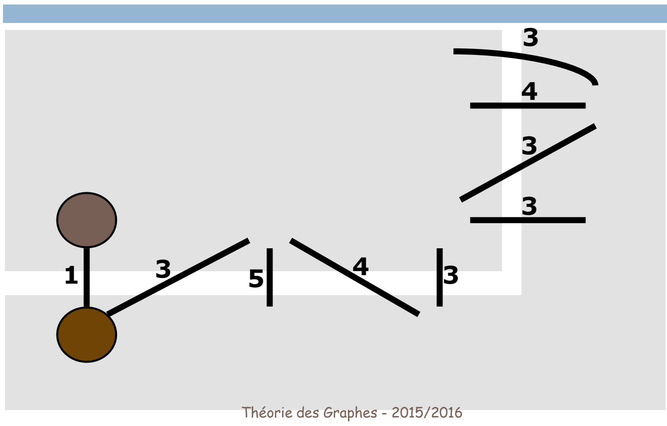
Why Greedy Works?



Why Greedy Works?



Why Greedy Works?

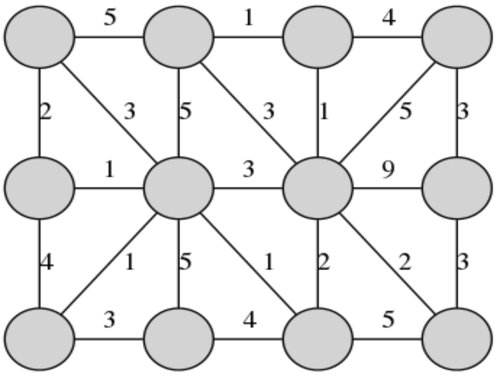


Prim's Algorithm


```
foreach vertex v
   v.key = ∞
root.key = 0
pq = new PriorityQueue(V) // add each vertex in the priority queue
while pq is not empty
   v = pq.deleteMin()
   foreach u in adj(v)
         if u is in pq and cost(v,u) < u.key
            pq.decreaseKey(u, cost(v,u))
```

Complexity: O((V+E)log V)

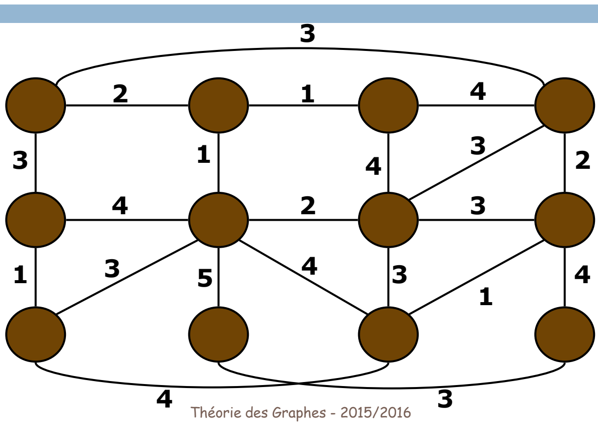
Exercice : Algorithme de Prim



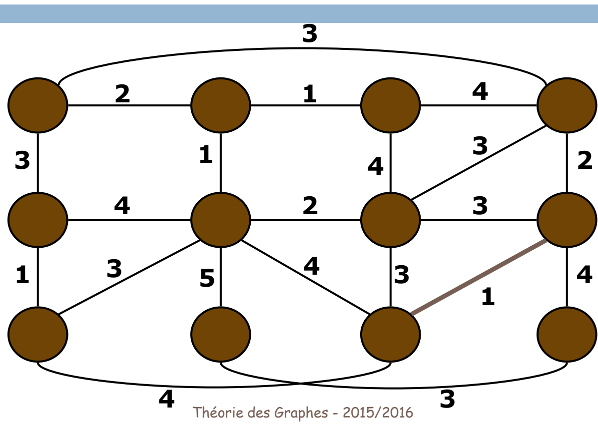
Algorithme de Kruskal

- On raisonne avec les arêtes.
- On place chaque nœud dans un ensemble qui lui est propre
- On parcourt les arêtes dans l'ordre croissant des coûts.
  - Si une arête relie deux ensembles disjoints alors on l'ajoute à l'arbre recouvrant et on fusionne les deux ensembles (ils ne sont donc plus disjoints)
  - Si ce n'est pas le cas, on passe a l'arête suivante

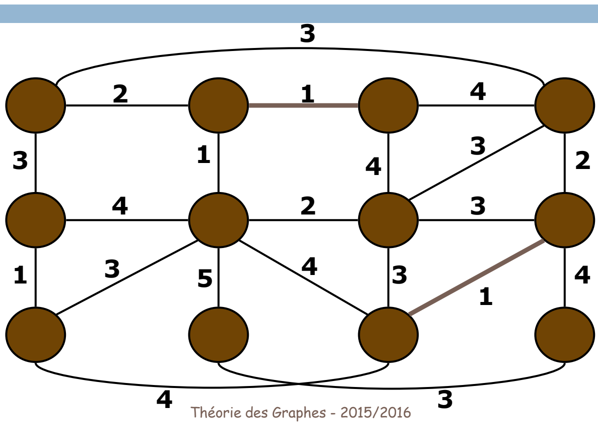
Kruskal's Algorithm



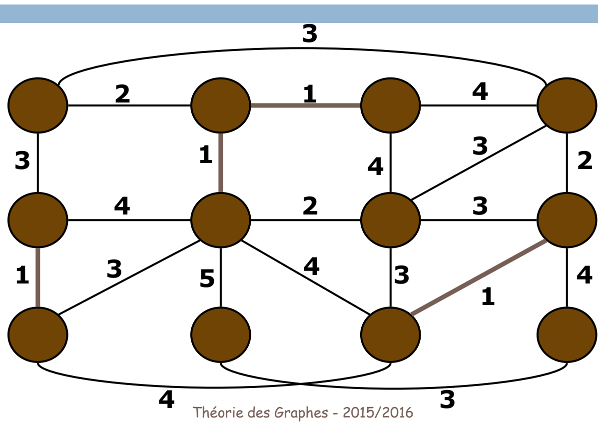
Kruskal's Algorithm



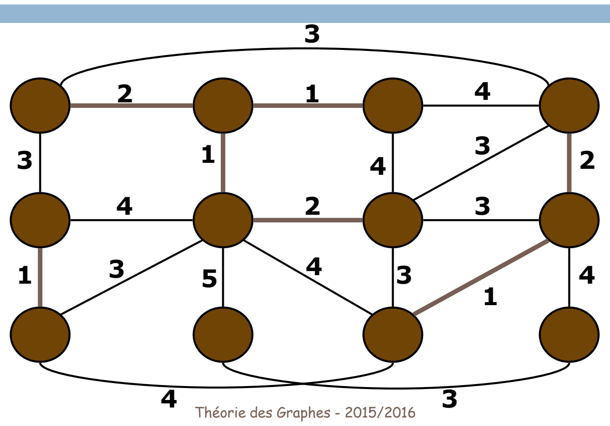
Kruskal's Algorithm



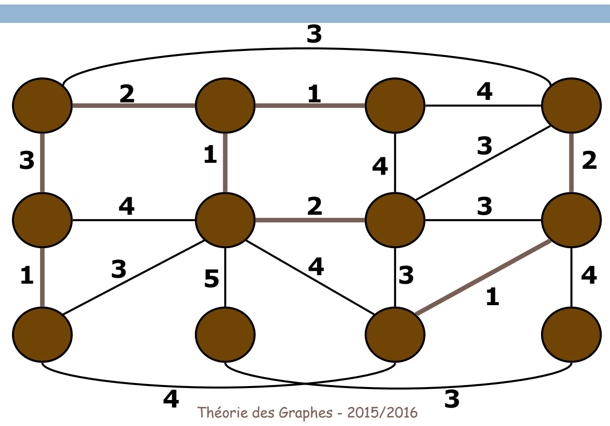
Kruskal's Algorithm



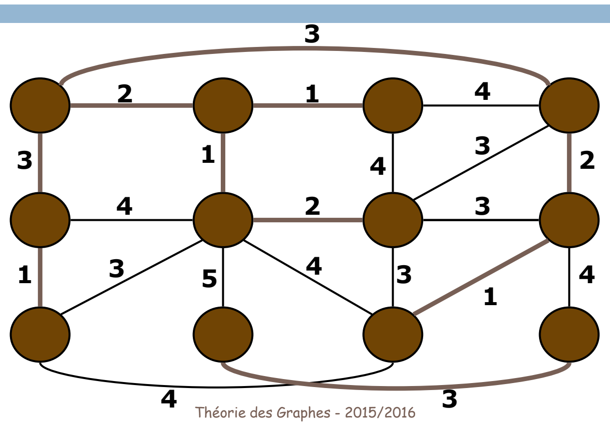
Kruskal's Algorithm



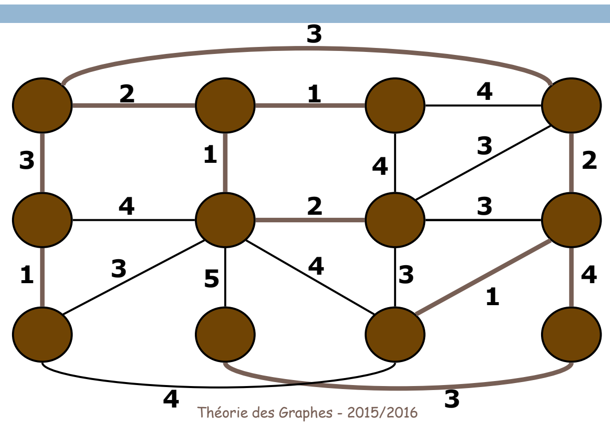
Kruskal's Algorithm



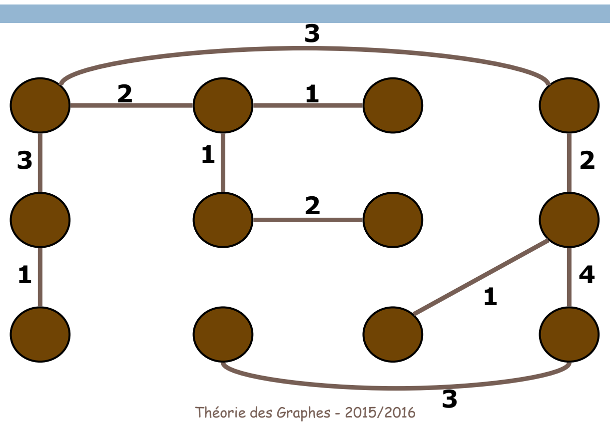
Kruskal's Algorithm



Kruskal's Algorithm



Kruskal's Algorithm



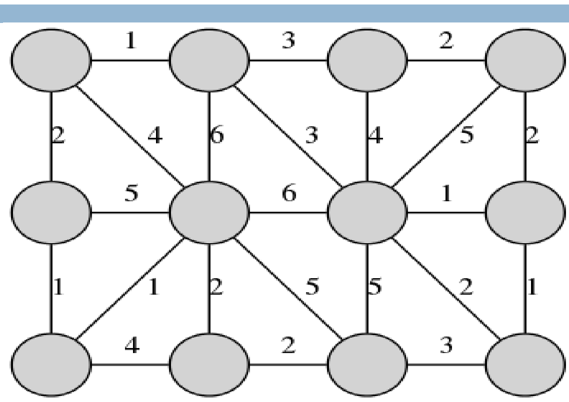
Kruskal's Algorithm

while there are unprocessed edges left
    pick an edge e with minimum cost
    if adding e to MST does not form a cycle
        add e to MST
    else
        throw e away

Preuve

- On construit bien un arbre : clairement il ne peut pas y avoir de cycle et s'il y avait deux composantes connexes alors on aurait pris une arête pour les relier
- Minimalité : par induction. Montrons qu'a tout étape il existe un arbre recouvrant minimum qui contient les aretes choisies. F ens des arêtes choisies; T arbre recouvrant min contenant F; e prochaine arête choisie. SI e est dans T alors c'est ok. Sinon T+e a un cycle. Soit f l'arete de ce cycle qui est dans T et pas dans F. T –f+e est un arbre recouvrant, son poids est >= T donc poids f <= poids de e: poids(f) ne peut pas etre < poids(e) sinon on l'aurait choisit. Donc egalité entre les poids et donc F+e appartient a un arbre recouvrant de poids min.

Exercice : Algorithme de Kruskal



Data Structures

249

- How to pick edge with minimum cost?
  - Sort the array once for all
- How to check if adding an edge can form a cycle?
  - Use a Disjoint Set

Union find data structure

250

- Union find = disjoint set data structure
- Problème à résoudre : on va partitionner des éléments en les regroupant petit à petit. On voudrait savoir
  - A quel partie un élément appartient ?
  - Est-ce que deux éléments appartiennent à la même partie ?
- La structure de données Union-Find maintient une partition d'un ensemble et dispose de deux fonctions
  - Find : trouver (retourne la partie d'un élément)
  - Union : regroupe deux parties en une

Union find

251

- On dispose en outre d'une fonction makeSet qui crée un partie singleton
- Chaque partie (ou ensemble) est identifiée par un élément particulier : son représentant
- **Find(x)** : retourne le représentant de la partie auquelle x appartient
- **Union(x,y)** : réunit les deux parties (celle de x et de y) en une seule. Une des deux variable devient le représentant
- **MakeSet(x)** : crée une partie dont x est le représentant

Union find : implémentation

252

- Listes chaînées : l'élément en tête est le représentant
  - MakeSet crée une liste (en O(1))
  - Union concatène les deux listes (en O(1))
  - Find : il faut accéder au premier : requiert O(n)
- On améliore le Find : chaque élément pointe vers la tête de liste
  - Cela dégrade l'Union qui devient en O(n) …

Union find : implémentation

253

- Une bonne solution consiste à utiliser des arbres, représentés à l'aide de la primitive parent
- Le représentant de chaque partie (ensemble) est la racine de l'arbre

Union find : implémentation

254

- MakeSet(x)
  - parent[x] ← **null**
- Find(x)
  - **si** parent[x] = **null return** x
  - **sinon return** Find(parent[x])
- Union(x, y)
  - xRoot ← Find(x)
  - yRoot ← Find(y)
  - parent[xRoot] ← yRoot

Union find : implémentation

255

- Dans cette première version, la complexité n'est pas meilleure qu'avec des listes chaînées
- On peut faire deux améliorations importantes
  - **Union par rang** : On attache l'arbre le plus petit à la racine de l'arbre le plus grand (taille = niveau)
  - **Compression de chemins** : on met à jour Find quand on l'utilise
    - Find(x)
    - **si** parent[x] ≠ x **alors** parent[x] ← Find(parent[x])
    - **return** parent[x]

Union find

256

- Union(x,y)
  - Lier(Find(x),Find(y))
- Lier(x,y)
  - si rang[x] > rang[y] alors parent[y] ← x
  - sinon parent[x] ← y
    - si rang[x]=rang[y]
    - rang[y] ← rang[y] +1

Union find : complexité

- On fait m opérations, avec n éléments
- Union pondérée ou par rang est en O(m + n log(n))
- Fonction d'Ackermann :
  - A(m,n)=n+1 si m=0
  - A(m,n)=A(m-1,1) si m>0 et n=0
  - A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)) si m >0 et n >0

Fonction d'Ackermann

Values of *A*(*m*, *n*)

m\n	0	1	2	3	4	n
0	1	2	3	4	5	$n+1$
1	2	3	4	5	6	$n+2=2+(n+3)-3$
2	3	5	7	9	11	$2n+3=2\cdot(n+3)-3$
3	5	13	29	61	125	$2^{(n+3)}-3$
4	13 $=2^{2^{2}}-3$	65533 $=2^{2^{2^{2}}}-3$	$2^{65536}-3$ $=2^{2^{2^{2^{2}}}}-3$	$2^{2^{65536}}-3$ $=2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}-3$	$2^{2^{2^{65536}}}-3$ $=2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}-3$	$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n+3}-3$

Union find : complexité

- On peut montrer que l'on a une borne sup en O(mlog*(n)) : voir Cormen-Leiserson-Rivest
- Tarjan a montré que la complexité est en O(mα(m,n)), où α(m,n) est l'inverse de la fonction d'Ackermann, qui est presque toujours inférieur à 5 en pratique (pour 2^{65535})

Algorithme incrémental de connexité

- On peut utiliser la structure de données de l'union-find pour calculer la connexité d'un graphe.
- Algorithme peut efficace, mais fonctionne si on connait le graphe petit à petit
- Principes :
  - On fait makeSet(x) quand un nouveau sommet apparait
  - On fait Union(x,y) quand une arête {x,y} apparait

Couplages

Exercices

- Donner un algorithme qui teste si un graphe est biparti
- Prouver cet algorithme

- Aide : on pourra faire une DFS ou une BFS

Couplage

- Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes qui n'ont pas de sommet en commun.
- C'est typiquement la solution aux problèmes d'appariements (regroupement par 2)
- Un **couplage maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes.
- Un **couplage parfait** ou **1-factor** est un couplage M du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de M.

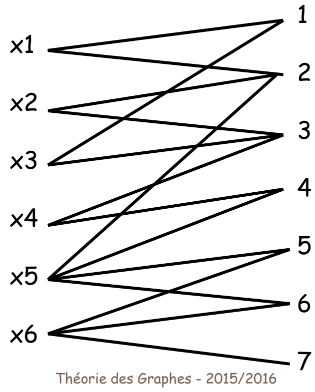
Couplage

- Soit M un couplage (matching en anglais),
- Un sommet qui est une extrémité d'une arête de M est dit **couplé ou "matché"**
- Un sommet qui n'est pas une extrémité de M est dit **libre**
- Une **chaîne alternée** est une chaîne dont les arêtes sont alternativement des arêtes du couplage et des arêtes n'appartenant pas au couplage
- Une **chaîne augmentante** est une chaîne alternée dont les deux extrémités sont libres

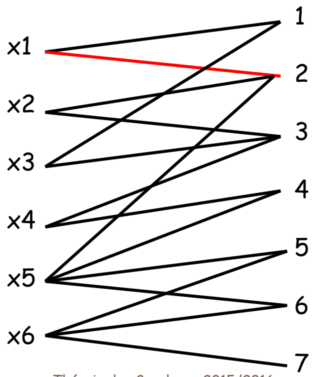
Chaîne augmentante

- Le terme vient du fait que si on trouve une chaîne augmentante on peut augmenter la cardinalité du couplage en inversant les arêtes de la chaîne : les libres deviennent matchées et les matchées deviennent libres.

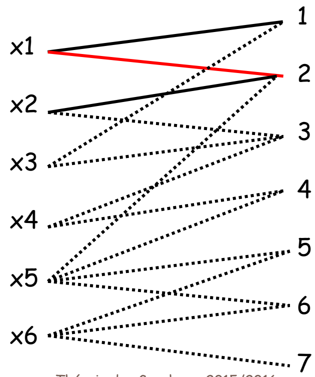
Couplage



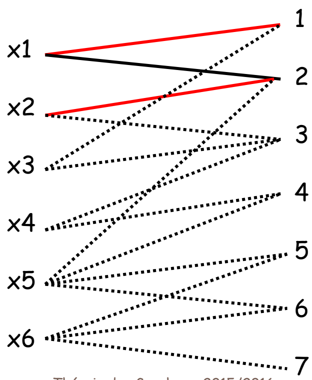
Couplage



Couplage



Couplage



Couplage : théorème de Berge

- Théorème : un couplage est maximum si et seulement si il n'admet pas de chaîne augmentante

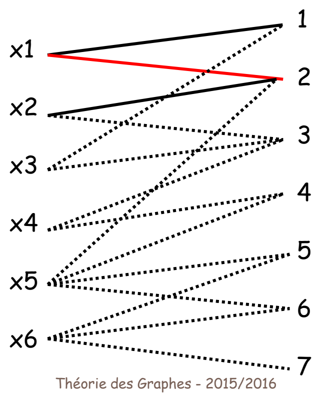
Couplage : algorithmes

- Le théorème nous fournit le principe d'un algorithme.
- On part d'un couplage vide
- On cherche une chaine augmentante
  - Simple avec un graphe biparti
  - Complexe avec un graphe non biparti

Couplage : graphe biparti

- Chercher une chaîne alternée dans un graphe biparti est simple, car l'alternance des arêtes correspond à l'alternance des ensembles.
  - Soit $G=(X \cup Y , E)$
  - On oriente les arêtes matchées de Y vers X, les autres de X vers Y.
  - Une chaîne augmentante devient un chemin d'un sommet libre de X vers un sommet libre de Y

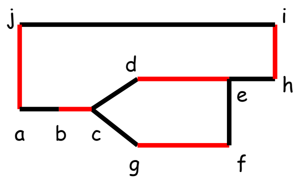
Couplage



Couplage : graphe biparti

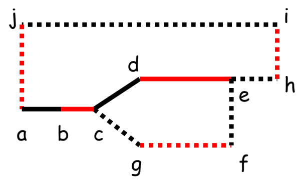
- Une DFS ou une BFS permet de trouver les chaînes augmentante
- La complexité est en O(nm)
- Si on travaille par niveau :
  - On sature tous les sommets atteignable au niveau i, avant de passer au niveau i+1
  - On peut montrer que la complexité est en $O(\sqrt{n} \cdot m)$

Couplage : graphe non biparti



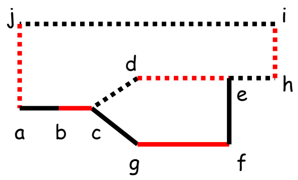
On ne peut plus orienté les arêtes comme avec les bipartis !

Couplage : graphe non biparti



e est marqué pair

Couplage : graphe non biparti



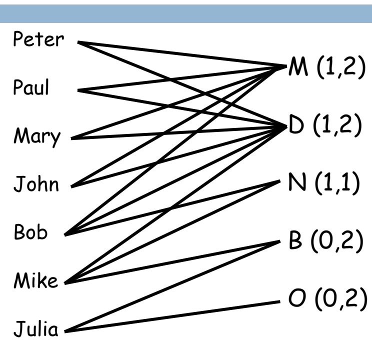
e est marqué impair

Couplage : graphe non biparti

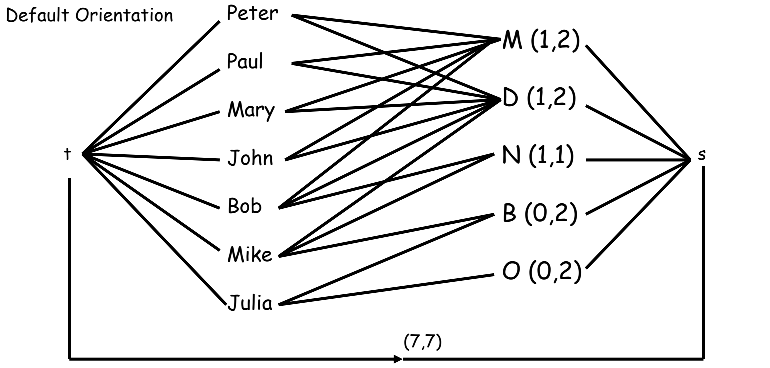
- Idée: Edmond's algorithm
  - Shrinking-blossom algorithm
- Amélioration par Tarjan et d'autres
- Complexité $O(nm\alpha(n,m))$ difficile à implémenter
  O(nm) très difficile
  $O(n^{1/2}m)$: 42 pages de démonstration non intuitive

Flots

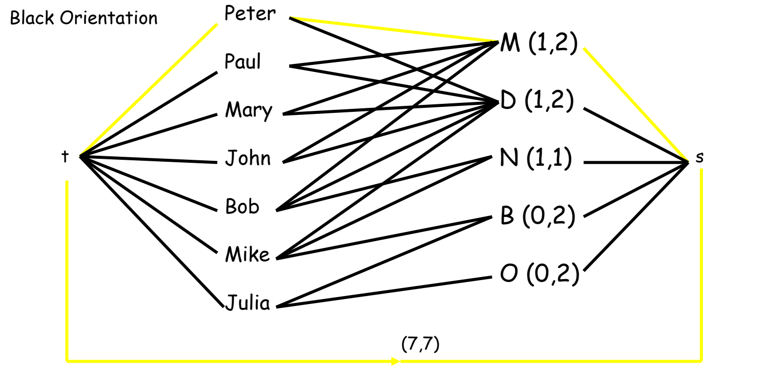
Flot : affectation



Affectation



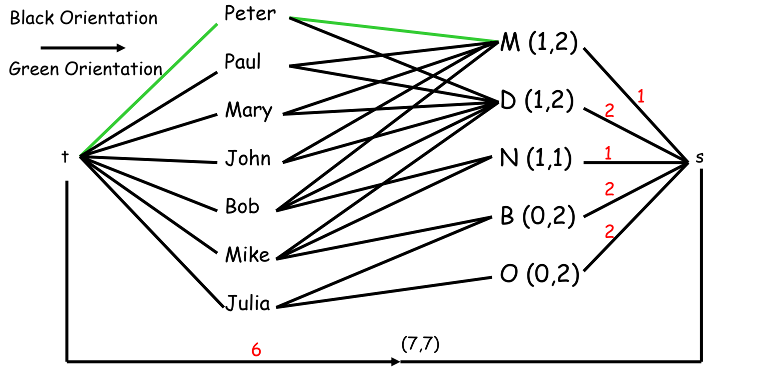
Flot compatible



Augmentation successive

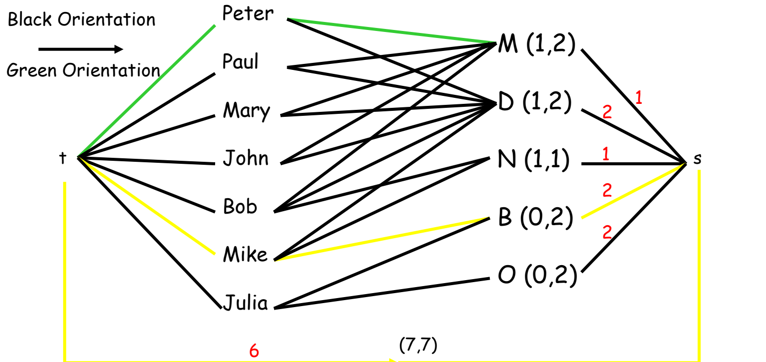
- Successive augmentation are computed in a particular graph:
  The **residual graph**
- The residual graph has **no lower bounds**
- In our case this algorithm is equivalent to the best ones.

Residual Graph

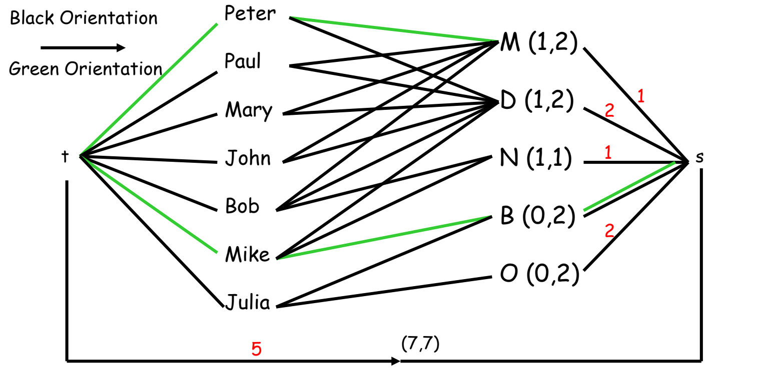


If f(i,j) < u(i,j) then (i,j) and r(i,j)= u(i,j) - f(i,j)
If f(i,j) > l(i,j) then (j,i) and r(j,i)= f(i,j) - l(i,j)

Residual Graph

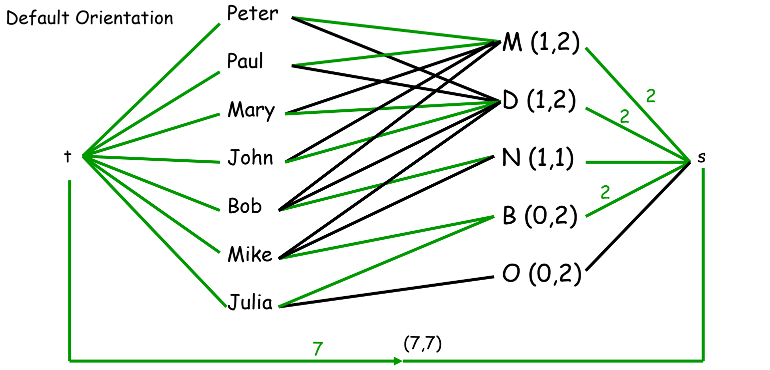


Residual Graph



If f(i,j) < u(i,j) then (i,j) and r(i,j)= u(i,j) - f(i,j)
If f(i,j) > l(i,j) then (j,i) and r(j,i)= f(i,j) - l(i,j)

Une Solution

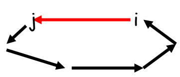


7 flow value

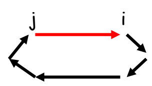
Sum = 7

Properties

- The flow value xij of (i,j) can be increased iff there is a path from j to i in R - {(j,i)}



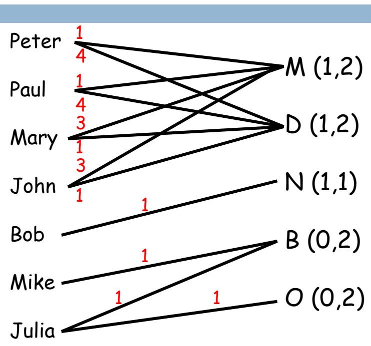
- The flow value xij of (i,j) can be decreased iff there is a path from i to j in R - {(i,j)}



Minimum cost Flows

- Let G be a graph in which every arc (i,j) is associated with 3 integers:
  - l(i,j) the lower bound capacity of the arc
  - u(i,j) the upper bound capacity of the arc
  - c(i,j) the cost of carrying one unit of flow
- The cost of a flow f is $cost(f)=\sum f(i,j)\ c(i,j)$
- The minimum cost flow problem:
  - If there exists a feasible flow, find a feasible flow f such that cost(f) is minimum.

Affectation avec coûts

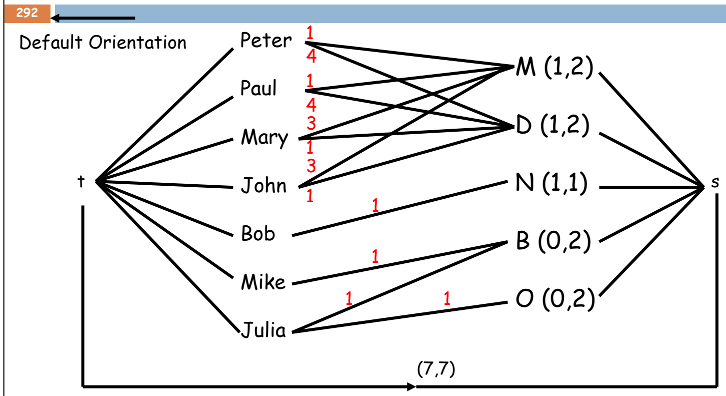


Sum < 12

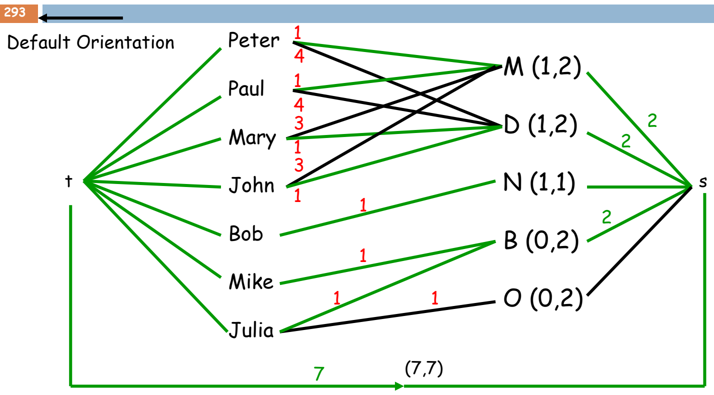
Minimum Cost flow

- Similar to feasible flow except that: **shortest** paths are considered.
- length of an arc = **reduced cost** of the arc
- Reduced costs are used to work with nonnegative value (useful for shortest paths algorithms), but the principles remains the same with **residual costs.**
- We will consider here only the residual costs

Minimum Cost Flow



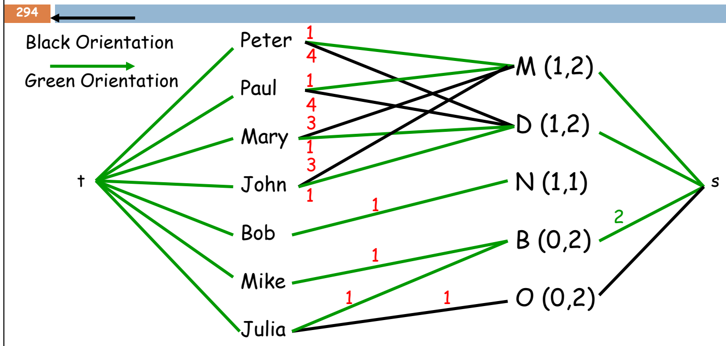
Une Solution



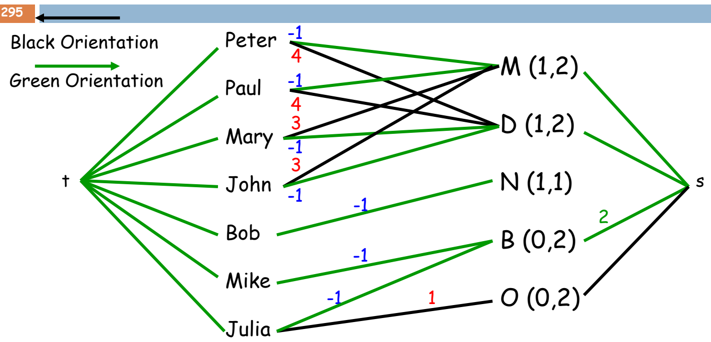
7 flow value

Sum = 7

Residual Graph

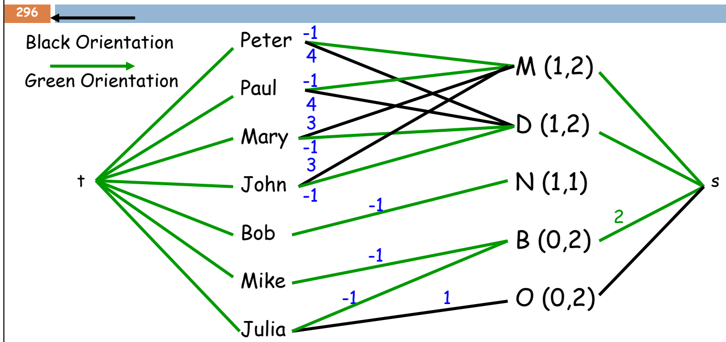


Residual Costs



-1 residual cost = - cost if opposite arc

Residual Costs



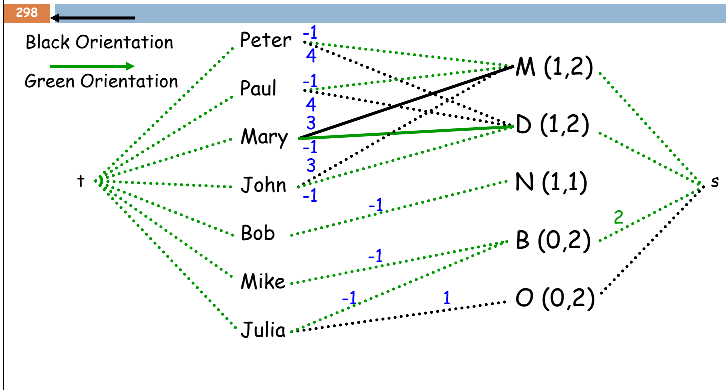
-1 residual cost = - cost if opposite arc

1 residual cost = cost if arc

Shortest path

- d(i,j) = length of the shortest path which does not use (i,j) in the residual graph. The length is the sum of the residual costs of the arc contained in the path.

Residual Costs



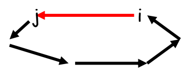
d(M,D)=3 + (-1) = 2

Minimum cost flow

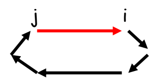
- If the feasible flow is computed by augmenting the flow along shortest paths then the solution is optimal.
- Complexity O(n S(n,m,χ)) where χ is the maximum cost value.

Properties

- The flow value xij of (i,j) can be increased iff there is a path from j to i in R - {(j,i)}



- The flow value xij of (i,j) can be decreased iff there is a path from i to j in R - {(i,j)}



Terminaison de l'algorithme

- On peut éviter la dernière augmentation, en faisant attention à ce que le puits soit toujours atteignable dans le graphe résiduel.
- On utilise un compteur (num) qui compte le nb de nœuds que l'on peut atteindre à une distance k donnée depuis s. Si on change la distance d'un nœud de k1 à k2 alors on décremente num(k1) et on incrémente num(k2). Si num(k1) devient vide alors on peut arrêter l'algorithme.
- Voir Ahuja/Magnanti et Orlin p 219

Flots : push-relabel algorithm

Problèmes

- Trier les sommets d'un graphe en fonction de leur degré
  - Algorithme ?
  - Coût ?

- Graphes planaires
- Plus courts chemins (Dijkstra, Bellman-Ford, les deux). Recherche de distances entre deux points
- Cycles négatifs
- Couplage
- Flots
- Arbres recouvrants
- Ordonnancement, rang et tri topologique
- Graphes triangulés
- Graphes parfaits