Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра оптимального управления

Отчет о заданиях по практикуму
Решение прикладных задач оптимального управления с использованием пакета GAMS

Выполнил студент
5 курса, 513 группы,
Ахрамеев Павел Кириллович

Руководитель:
Григоренко Николай Леонтьевич

Москва
2014

Содержание

1 Оптимизация питания и инъекций инсулина при сахарном диабете

1.1 Постановка задачи

Динамика сахара и инсулина в крови описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = b_1(x-x_0)H(x-x_0) - b_2y + b_3\omega(t),\ y(0)=0, \\ \dfrac{dx}{dt} = -a_1xy + a_2(x_0-x)H(x_0-x) - a_4(x-x_0)H(x-x_0) + a_3z(t),\ x(0)=x^0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}.$$

График приёма пищи здоровым человеком:

$$z^1(t) = \begin{cases} 50, & t \in [8, 8.3], \\ 100, & t \in [13, 13.3], \\ 100, & t \in [20, 20.3], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $x^1(t), y^1(t)$ - решение системы при параметрах здорового человека.
Задача. При параметрах организма больного диабетом средней тяжести и $z(t)$ вида (2) найти

$$J_1 = \int_0^{24} \Big(A(x(t) - x^1(t))^2 + B\omega^2(t) \Big) dt \to \min_{\omega(t)}.$$

1.2 Задача нелинейного программирования

Переходим к задаче нелинейного программирования с помощи разностной схемы Эйлера с шагом $h = \frac{T}{n}$:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = b_1(x_k - x_0)H(x_k - x_0) - b_2y_k + b_3\omega_k, \\ \dfrac{x_{k+1} - x_k}{h} = -a_1x_ky_k + a_2(x_0 - x_k)H(x_0 - x_k) - a_4(x_k - x_0)H(x_k - x_0) + a_3z_k,\ k = \overline{0, n-1} \\ y_0 = 0, x_0 = x^0. \end{cases} \tag{3}$$

Интеграл считаем методом прямоугольников:

$$J_1 = \sum_{i=0}^{n} A(x_k - x_k^1)^2h + \sum_{i=1}^{n} B\omega_k^2h,$$

1.3 Решение в GAMS

Значение функционала в задаче при параметрах:$A = 1, B = 0.5$, получилось равным $J_1 = 30.7$;

График отклонения уровня сахара в крови больного человека от уровня сахара в крови здорового человека представлен на Рис.1.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: `https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_1.1`

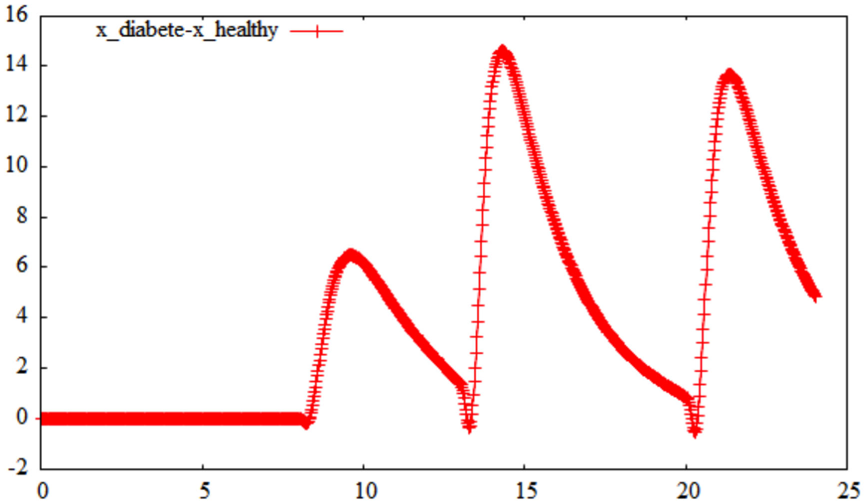

Рис. 1: График $x_{diabete}(t) - x_{healthy}(t)$

2 Решение дифференциального уравнения

2.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\ddot{x}(t) = 0.2\sqrt{x(t)} - sin(x(t)), x(0) = 10; t \in [0, 8]; \tag{4}$$

2.2 Задача нелинейного программирования

Переходим к задаче нельнейного программирования, использую разностную схему Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = 0.2\sqrt{x_k(t)} - sin(x_k(t)), k = 1..Nx_0 = 10; \tag{5}$$

2.3 Решение в GAMS

График $x(t)$ представлен на Рис. 2

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: `https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_2.1`

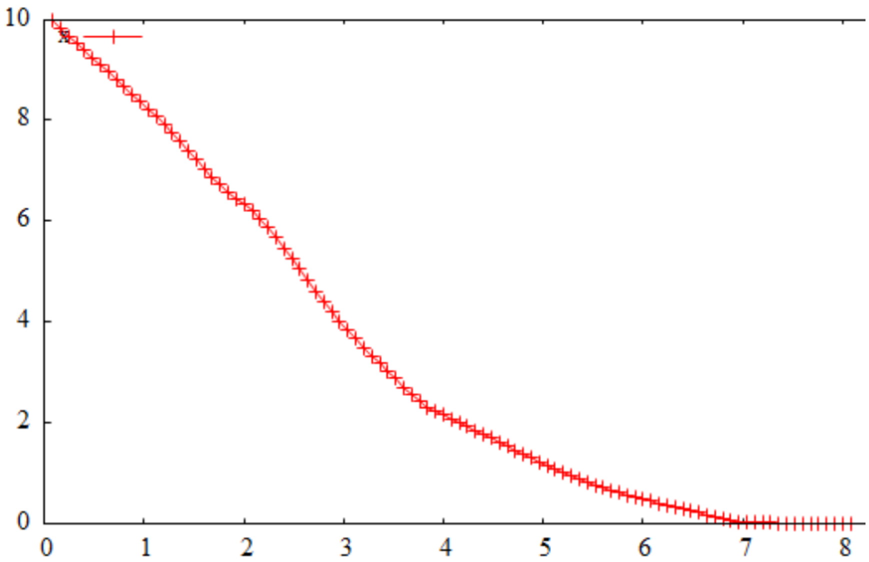

Рис. 2: График $x(t)$

3 Задача быстродействия

3.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha||\dot{x}||\dot{x} = \rho u,\ x, u \in \mathbf{R}^2,\ \alpha, \rho > 0,\ ||u|| \le 1, \\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \\ x(T) = x_T,\ \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \\ T \to \min\limits_{||u|| \le 1}. \end{cases} \tag{6}$$

3.2 Задача нелинейного программирования

Также, как и в предыдущей задаче, переходим к задаче нелинейного программировани, используя схему Эйлера с шагом $h = \frac{T}{n}$:

$$\begin{cases} x_k^1 = x_{k-1}^1 + h x_{k-1}^3, \\ x_k^2 = x_{k-1}^2 + h x_{k-1}^4, \\ x_k^3 = x_{k-1}^3 + h\Big(- \alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^3 + \rho u_{k-1}^1 \Big), \\ x_k^4 = x_{k-1}^4 + h\Big(- \alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^4 + \rho u_{k-1}^2 \Big),\ k = \overline{1, n-1}, \end{cases} \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$x_0^1 = x_0^1,\ x_0^2 = x_0^2,\ x_0^3 = \dot{x}_0^1,\ x_0^4 = \dot{x}_0^2,$$

$$x_n^1 = x_T^1,\ x_n^2 = x_T^2,\ x_n^3 = \dot{x}_T^1,\ x_n^4 = \dot{x}_T^2.$$

При этом задача быстродействия ставится при помощи функционала: $h \to \min$.

3.3 Решение в GAMS

Решение задачи при следующих начальных параметрах:

$$x_0^1 = -2,\ x_0^2 = 1,\ x_0^3 = 1,\ x_0^4 = 10,$$

$$x_n^1 = 0,\ x_n^2 = 0,\ x_n^3 = 0,\ x_n^4 = 0,$$

$$\alpha = 0.1,\ \rho = 1.$$

Оптимлальное время $T = 11.4$. На Рис. 3, 4 и 5 изображены графики траектории и уравления.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: `https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_3.1`

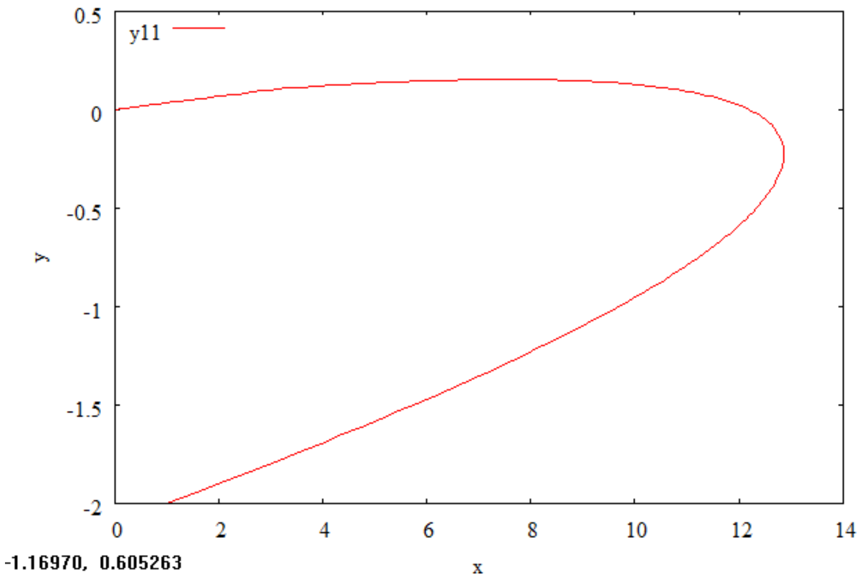

Рис. 3: График $x(t)$

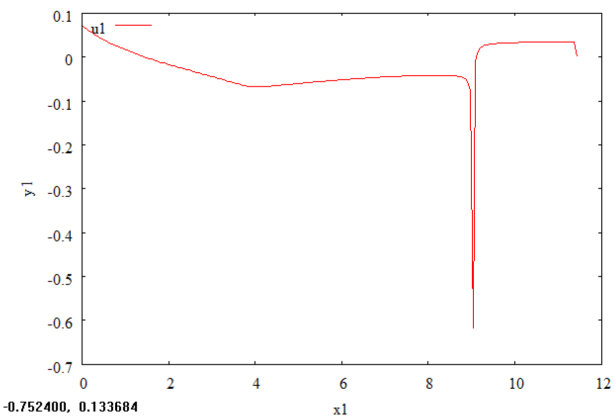

Рис. 4: График $u_1(t)$

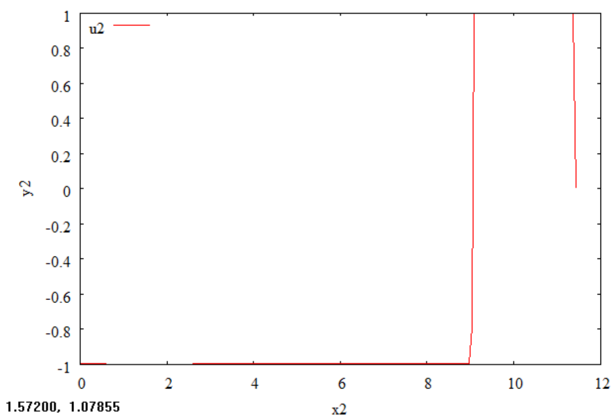

Рис. 5: График $u_2(t)$

4 Задача быстродействия с прохождением заданной точки

4.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha||\dot{x}||\dot{x} = \rho u,\ x, u \in \mathbf{R}^2,\ \alpha, \rho > 0,\ ||u|| \le 1, \\ \ddot{y} + \beta||\dot{y}||\dot{y} = \sigma v,\ y, v \in \mathbf{R}^2,\ \beta, \sigma > 0,\ ||v|| \le 1, \\ x(0) = x^0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}^0,\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \\ x(\tau) = x_t, \tau \in [0, T],\ x(T) = x_T, \\ T \to \min\limits_{||u|| \le 1}, \end{cases} \tag{8}$$

Должны выполняться неравенства:

$$||x(t) - y(t)|| \le 2,\ ||x(t) - y(t)|| \ge 1,\ t \in [0, T].$$

4.2 Задача нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования записывается при помощи разностной схемы Эйлера с переменным шагом

$$h = \begin{cases} \frac{\tau}{n_1}, & k = \overline{1, n_1} \\ \frac{T-\tau}{n_2}, & k = \overline{n_1, n_1 + n_2} \end{cases}$$

:

$$\begin{cases} x_k^1 = x_{k-1}^1 + h x_{k-1}^3, \\ x_k^2 = x_{k-1}^2 + h x_{k-1}^4, \\ x_k^3 = x_{k-1}^3 + h\Big(- \alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^3 + \rho u_{k-1}^1 \Big), \\ x_k^4 = x_{k-1}^4 + h\Big(- \alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^4 + \rho u_{k-1}^2 \Big),\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} y_k^1 = y_{k-1}^1 + h y_{k-1}^3, \\ y_k^2 = y_{k-1}^2 + h y_{k-1}^4, \\ y_k^3 = y_{k-1}^3 + h\Big(- \beta\sqrt{(y_{k-1}^3)^2 + (y_{k-1}^4)^2} y_{k-1}^3 + \sigma v_{k-1}^1 \Big), \\ y_k^4 = y_{k-1}^4 + h\Big(- \beta\sqrt{(y_{k-1}^3)^2 + (y_{k-1}^4)^2} y_{k-1}^4 + \sigma v_{k-1}^2 \Big),\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Начальные условия остаются такими же, как в предыдущей задаче, с добавлением двух условий: $x_{n_1} = x_t,\ x_{n_1+n_2} = x_T$.

4.3 Решение в GAMS

Представлено решение задачи при начальных параметрах:

$$x_0^1 = 0,\ x_0^2 = -5,\ x_0^3 = 1,\ x_0^4 = 2, y_0^1 = 0,\ y_0^2 = -6,\ x_0^3 = 1,\ x_0^4 = 0,$$

$$x_t^1 = 1,\ x_t^2 = -2,\ x_T^1 = 0,\ x_T^2 = 0.$$

А также $\rho = \sigma = 4,\ \alpha = \beta = 0.1$.

Оптимлальное время $T = 2.1$. На Рис.6, 7, 8, 9 и 10 изображены графики траекторийи управлений.

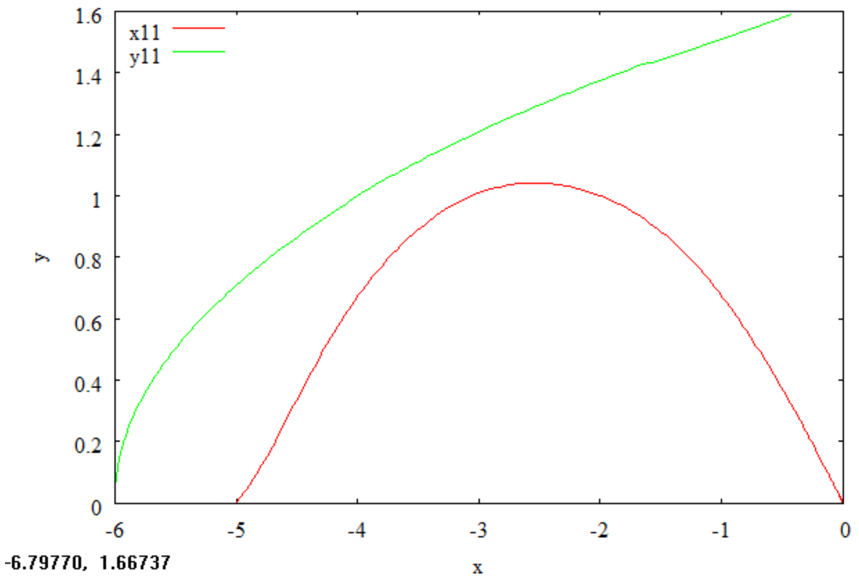

Рис. 6: График $x(t)$ и $y(t)$

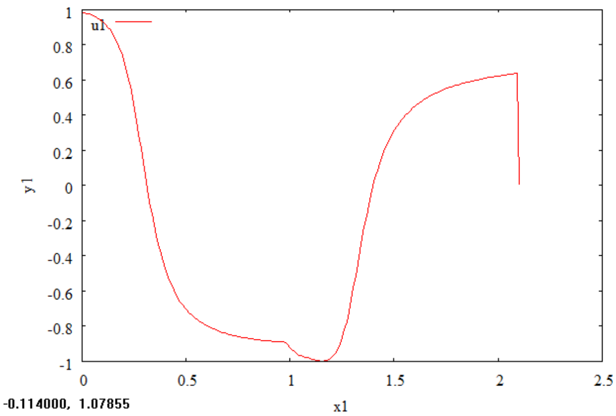

Рис. 7: График $u_1(t)$

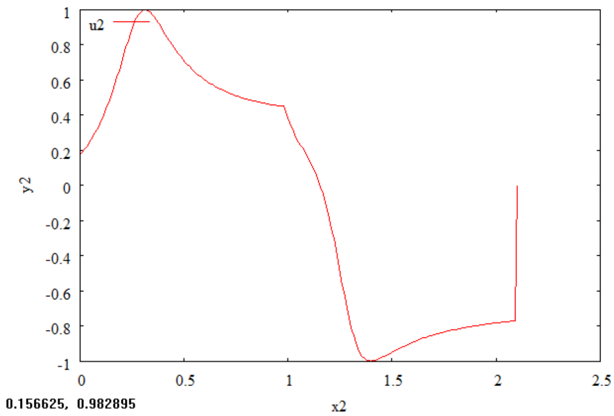

Рис. 8: График $u_2(t)$

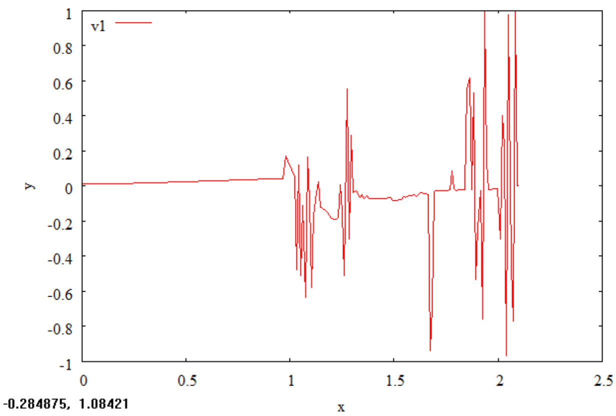

Рис. 9: График $v_1(t)$

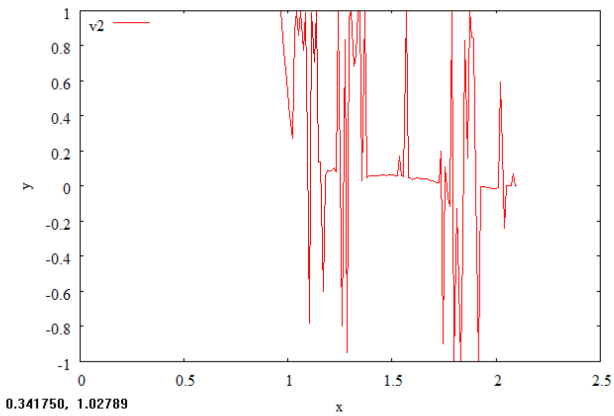

Рис. 10: График $v_2(t)$

5 Разработка карьера открытого типа

5.1 Постановка задачи

Динамика разработки карьера описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{y} = f^0(u^1, P, Q),\ y(0) = 0,\ y(T) = y_T,\ 0 \le u_1 \le 1, \\ \dot{P} = u^2,\ P(0) = P^0 \ge 0,\ 0 \le u_2 \le 1, \\ \dot{Q} = u^2 + u^3,\ Q(0) = Q^0 \ge 0,\ 0 \le u_3 \le 1, \\ J = \int_0^T e^{-\nu t}\Big[-mf^0 - u^2 - u^3 - pP + s(t)P(2 - \dfrac{P}{f^0})\Big] dt \to \max, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$f^0(u^1, P, Q) = u^1 P + (1 - u^1)Q.$$

В задаче $s(t)$ - биржевые цены на сырье взяты из файла $data_r - 1.csv$, p - цена переработки единицы сырья, m - цена добычи единицы сырья. Время T не фиксированно.

5.2 Задача нелинейного программирования

Перевод задачи (11) в задачу нелинейного программирования:

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + hf^0_{k-1},\ y_0 = 0,\ y_n = y_T \\ P_k = P_{k-1} + hu^2_{k-1},\ P_0 = P^0, \\ Q_k = Q_{k-1} + h(u^2_{k-1} + u^3_{k-1}),\ Q_0 = Q^0,\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{12}$$

Функционал:

$$J = \sum_{i=0}^{n} e^{-\nu i h}\Big(-mf^0_i - u^2_i - u^3_i - pP_i + s_i P_i (2 - \frac{P_i}{f^0_i})\Big).$$

5.3 Решение в GAMS

Задача решалась при начальных параметрах:

$$m = 1,\ p = 5,\ \nu = 0.01,\ y_T = 2000,\ P^0 = 0.8,\ Q^0 = 1.$$

Получено значение функционала $J = 6.7 * 10^6$. Графики траектория и управления показаны на Рис. 11, 12, 13, 14, 15 и 16.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: `https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_5.1`

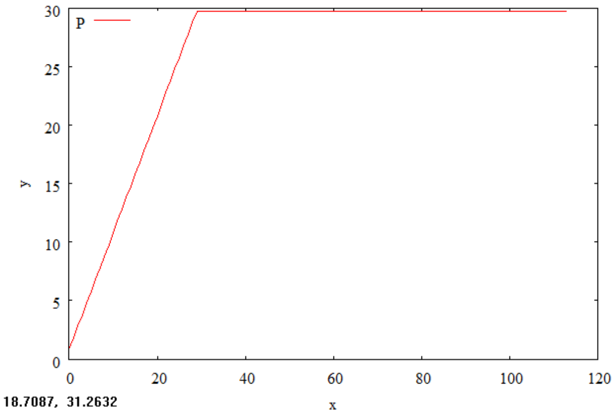

Рис. 11: График $P(t)$

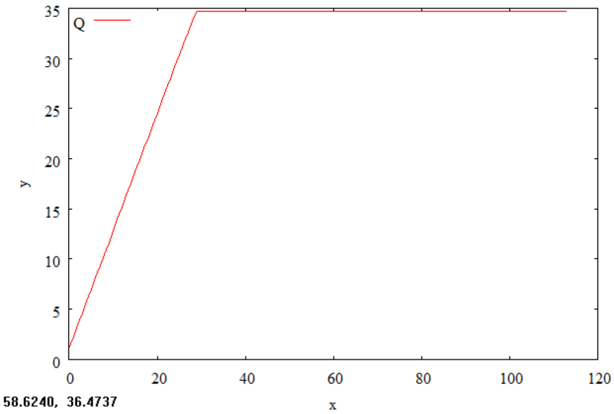

Рис. 12: График $Q(t)$

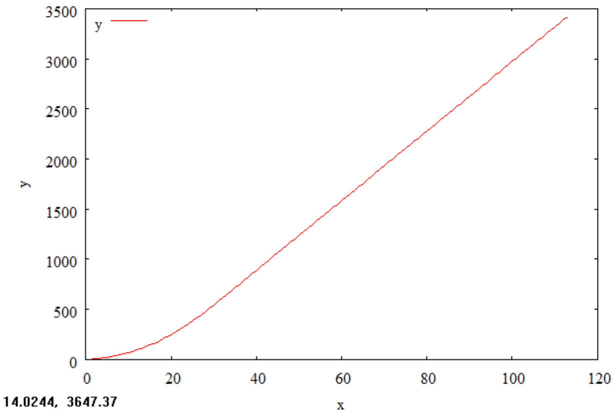

Рис. 13: График $y(t)$

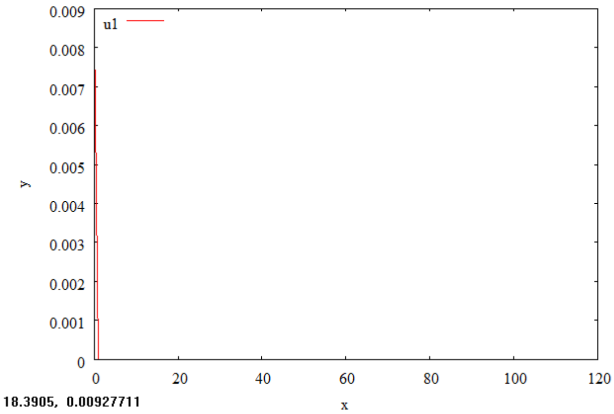

Рис. 14: График $u_1(t)$

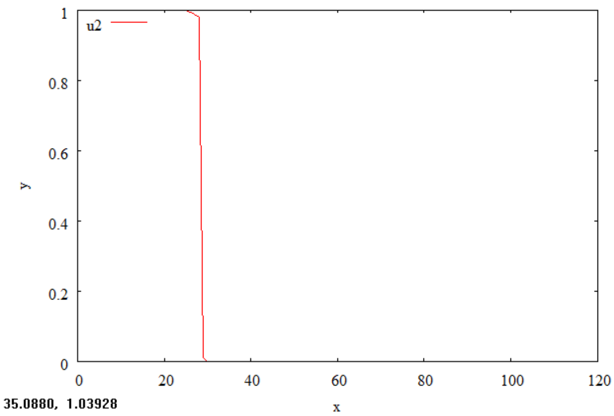

Рис. 15: График $u_2(t)$

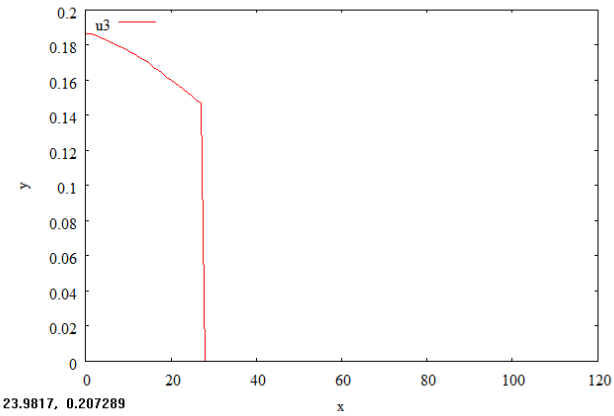

Рис. 16: График $u_3(t)$

Список литературы

[1] А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Численные методы*. Наука, 1989.

[2] М.Дж. Дэвис. *Дифференциальная модель сахарного диабета*. В книге *Математическое моделирование*. Редакторы Дж. Эндрюс, Р. Мак- Лоун. Мир, 1979.

[3] Ф.Л. Черноусько, А.А. Меликян. *Игровые задачи управления и поиска*. Наука, 1978.

[4] Р. Айзекс. *Дифференциальные игры*. Мир, 1967.

[5] И.Х. Сигал, А.П. Иванова. *Введение в прикладное дискретное программирование*. Физматлит, 2007.