

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Факультет вычислительной
математики и кибернетики Кафедра оптимального управления

**Отчет о заданиях по практикуму
Решение прикладных задач оптимального управления
с использованием пакета GAMS**

Выполнил студент
5 курса, 513 группы,
Ахrameев Павел Кириллович

Руководитель:
Григоренко Николай Леонтьевич

Москва
2014

Содержание

1	Оптимизация питания и инъекций инсулина при сахарном диабете	3
1.1	Постановка задачи	3
1.2	Задача нелинейного программирования	3
1.3	Решение в GAMS	3
2	Решение дифференциального уравнения	4
2.1	Постановка задачи	4
2.2	Задача нелинейного программирования	4
2.3	Решение в GAMS	4
3	Задача быстродействия	4
3.1	Постановка задачи	4
3.2	Задача нелинейного программирования	5
3.3	Решение в GAMS	5
4	Задача быстродействия с прохождением заданной точки	7
4.1	Постановка задачи	7
4.2	Задача нелинейного программирования	7
4.3	Решение в GAMS	7
5	Разработка карьера открытого типа	9
5.1	Постановка задачи	9
5.2	Задача нелинейного программирования	9
5.3	Решение в GAMS	9

1 Оптимизация питания и инъекций инсулина при сахарном диабете

1.1 Постановка задачи

Динамика сахара и инсулина в крови описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = b_1(x - x_0)H(x - x_0) - b_2y + b_3\omega(t), & y(0) = 0, \\ \frac{dx}{dt} = -a_1xy + a_2(x_0 - x)H(x_0 - x) - a_4(x - x_0)H(x - x_0) + a_3z(t), & x(0) = x^0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}.$$

График приёма пищи здоровым человеком:

$$z^1(t) = \begin{cases} 50, & t \in [8, 8.3], \\ 100, & t \in [12, 12.3], \\ 100, & t \in [18, 18.3], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $x^1(t), y^1(t)$ - решение системы при параметрах здорового человека.

Задача. При параметрах организма больного диабетом средней тяжести и $z(t)$ вида (2) найти

$$J_1 = \int_0^{24} \left(A(x(t) - x^1(t))^2 + B\omega^2(t) \right) dt \rightarrow \min_{\omega(t)}.$$

1.2 Задача нелинейного программирования

Переходим к задаче нелинейного программирования с помощью разностной схемы Эйлера с шагом $h = \frac{T}{n}$:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = b_1(x_k - x_0)H(x_k - x_0) - b_2y_k + b_3\omega_k, \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{h} = -a_1x_ky_k + a_2(x_0 - x_k)H(x_0 - x_k) - a_4(x_k - x_0)H(x_k - x_0) + a_3z_k, & k = \overline{0, n-1} \\ y_0 = 0, x_0 = x^0. \end{cases} \quad (3)$$

Интеграл считаем методом прямоугольников:

$$J_1 = \sum_{i=0}^n A(x_k - x_k^1)^2 h + \sum_{i=1}^n B\omega_k^2 h,$$

1.3 Решение в GAMS

Значение функционала в задаче при параметрах: $A = 1, B = 0.5$, получилось равным $J_1 = 30.7$;

График отклонения уровня сахара в крови больного человека от уровня сахара в крови здорового человека представлен на Рис.1.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_1.1

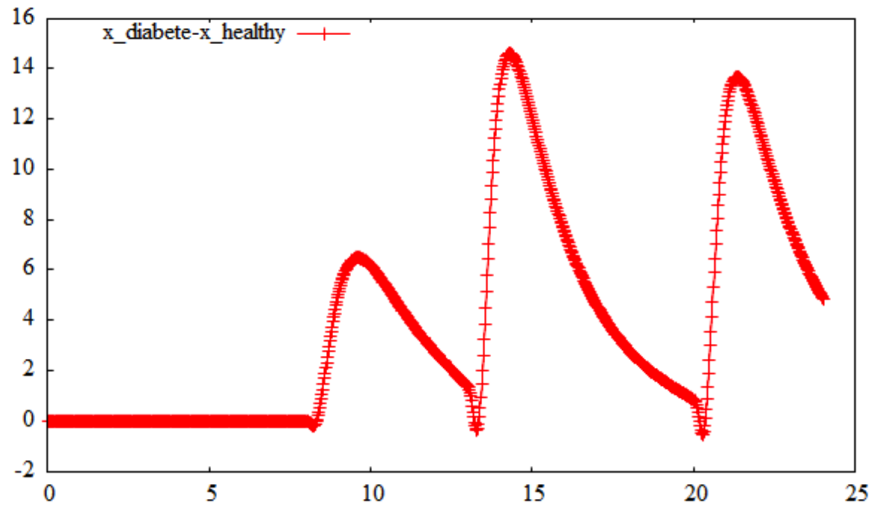


Рис. 1: График $x_{diabete}(t) - x_{healthy}(t)$

2 Решение дифференциального уравнения

2.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\ddot{x}(t) = 0.2\sqrt{x(t)} - \sin(x(t)), x(0) = 10; t \in [0, 8]; \quad (4)$$

2.2 Задача нелинейного программирования

Переходим к задаче нелинейного программирования, используя разностную схему Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = 0.2\sqrt{x_k(t)} - \sin(x_k(t)), k = 1..N, x_0 = 10; \quad (5)$$

2.3 Решение в GAMS

График $x(t)$ представлен на Рис. 2

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_2.1

3 Задача быстрогодействия

3.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \|\dot{x}\| \dot{x} = \rho u, & x, u \in \mathbf{R}^2, \alpha, \rho > 0, \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \\ x(T) = x_T, \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \\ T \rightarrow \min_{\|u\| \leq 1}. \end{cases} \quad (6)$$

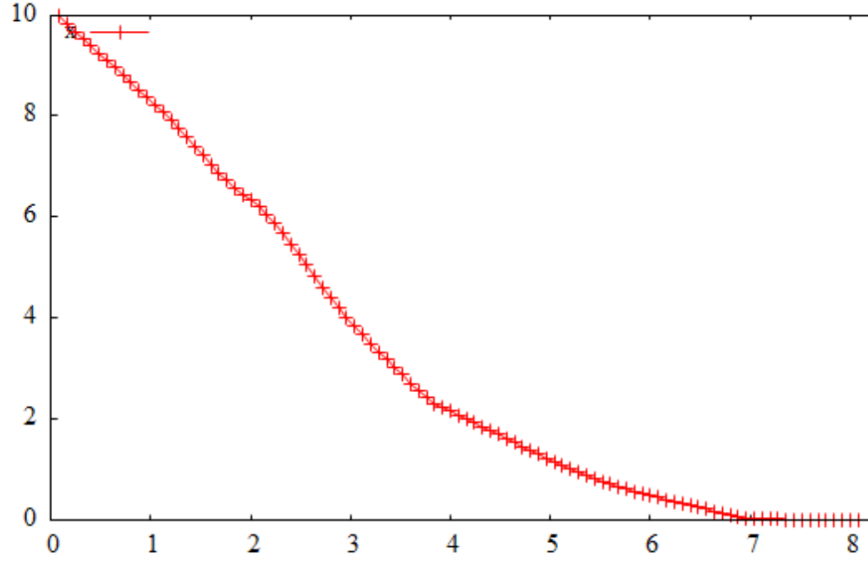


Рис. 2: График $x(t)$

3.2 Задача нелинейного программирования

Также, как и в предыдущей задаче, переходим к задаче нелинейного программирования, используя схему Эйлера с шагом $h = \frac{T}{n}$:

$$\begin{cases} x_k^1 = x_{k-1}^1 + hx_{k-1}^3, \\ x_k^2 = x_{k-1}^2 + hx_{k-1}^4, \\ x_k^3 = x_{k-1}^3 + h\left(-\alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2}x_{k-1}^3 + \rho u_{k-1}^1\right), \\ x_k^4 = x_{k-1}^4 + h\left(-\alpha\sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2}x_{k-1}^4 + \rho u_{k-1}^2\right), \end{cases} \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$x_0^1 = x_0^1, \quad x_0^2 = x_0^2, \quad x_0^3 = \dot{x}_0^1, \quad x_0^4 = \dot{x}_0^2,$$

$$x_n^1 = x_T^1, \quad x_n^2 = x_T^2, \quad x_n^3 = \dot{x}_T^1, \quad x_n^4 = \dot{x}_T^2.$$

При этом задача быстродействия ставится при помощи функционала: $h \rightarrow \min$.

3.3 Решение в GAMS

Решение задачи при следующих начальных параметрах:

$$x_0^1 = -2, \quad x_0^2 = 1, \quad x_0^3 = 1, \quad x_0^4 = 10,$$

$$x_n^1 = 0, \quad x_n^2 = 0, \quad x_n^3 = 0, \quad x_n^4 = 0,$$

$$\alpha = 0.1, \quad \rho = 1.$$

Оптимальное время $T = 11.4$. На Рис. 3, 4 и 5 изображены графики траектории и управления.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_3.1

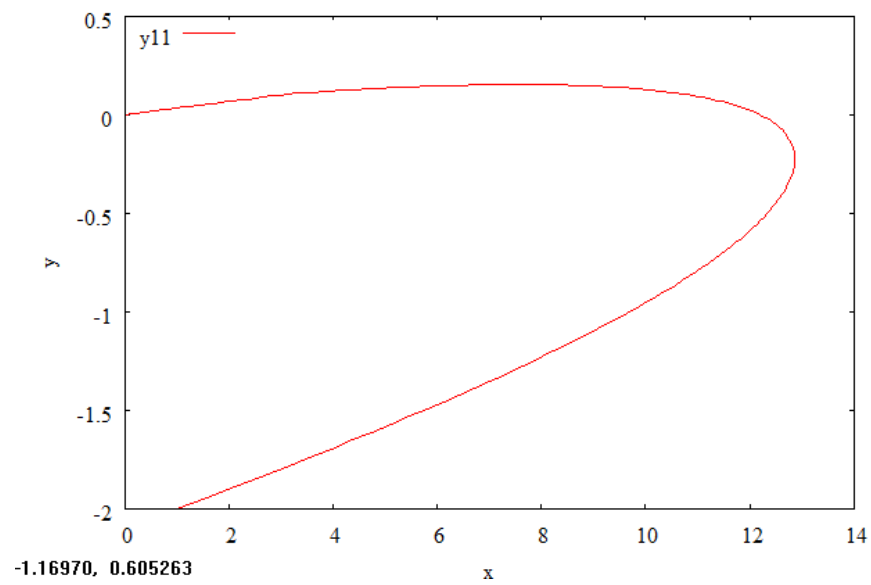


Рис. 3: График $x(t)$

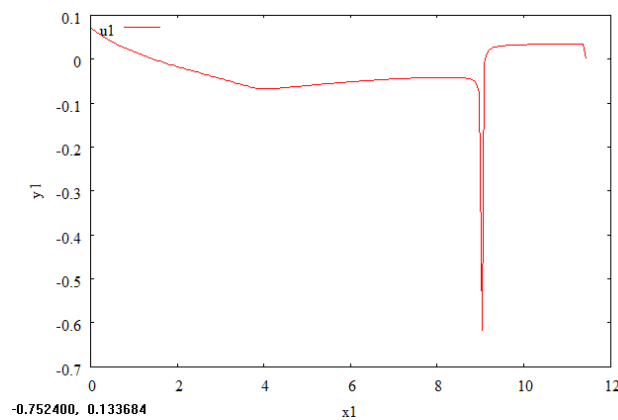


Рис. 4: График $u_1(t)$

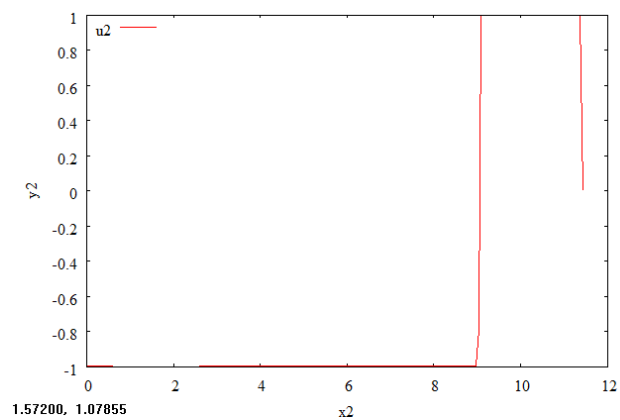


Рис. 5: График $u_2(t)$

4 Задача быстрогодействия с прохождением заданной точки

4.1 Постановка задачи

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \|\dot{x}\| \dot{x} = \rho u, \quad x, u \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha, \rho > 0, \quad \|u\| \leq 1, \\ \ddot{y} + \beta \|\dot{y}\| \dot{y} = \sigma v, \quad y, v \in \mathbf{R}^2, \quad \beta, \sigma > 0, \quad \|v\| \leq 1, \\ x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \\ x(\tau) = x_t, \tau \in [0, T], \quad x(T) = x_T, \\ T \rightarrow \min_{\|u\| \leq 1}, \end{cases} \quad (8)$$

Должны выполняться неравенства:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq 2, \quad \|x(t) - y(t)\| \geq 1, \quad t \in [0, T].$$

4.2 Задача нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования записывается при помощи разностной схемы Эйлера с переменным шагом

$$h = \begin{cases} \frac{\tau}{n_1}, & k = \overline{1, n_1} \\ \frac{T-\tau}{n_2}, & k = \overline{n_1, n_1 + n_2} \end{cases}$$

:

$$\begin{cases} x_k^1 = x_{k-1}^1 + hx_{k-1}^3, \\ x_k^2 = x_{k-1}^2 + hx_{k-1}^4, \\ x_k^3 = x_{k-1}^3 + h \left(-\alpha \sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^3 + \rho u_{k-1}^1 \right), \\ x_k^4 = x_{k-1}^4 + h \left(-\alpha \sqrt{(x_{k-1}^3)^2 + (x_{k-1}^4)^2} x_{k-1}^4 + \rho u_{k-1}^2 \right), \quad k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} y_k^1 = y_{k-1}^1 + hy_{k-1}^3, \\ y_k^2 = y_{k-1}^2 + hy_{k-1}^4, \\ y_k^3 = y_{k-1}^3 + h \left(-\beta \sqrt{(y_{k-1}^3)^2 + (y_{k-1}^4)^2} y_{k-1}^3 + \sigma v_{k-1}^1 \right), \\ y_k^4 = y_{k-1}^4 + h \left(-\beta \sqrt{(y_{k-1}^3)^2 + (y_{k-1}^4)^2} y_{k-1}^4 + \sigma v_{k-1}^2 \right), \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (10)$$

Начальные условия остаются такими же, как в предыдущей задаче, с добавлением двух условий: $x_{n_1} = x_t$, $x_{n_1+n_2} = x_T$.

4.3 Решение в GAMS

Представлено решение задачи при начальных параметрах:

$$x_0^1 = 0, \quad x_0^2 = -5, \quad x_0^3 = 1, \quad x_0^4 = 2, \quad y_0^1 = 0, \quad y_0^2 = -6, \quad x_0^3 = 1, \quad x_0^4 = 0,$$

$$x_t^1 = 1, \quad x_t^2 = -2, \quad x_T^1 = 0, \quad x_T^2 = 0.$$

А также $\rho = \sigma = 4$, $\alpha = \beta = 0.1$.

Оптимальное время $T = 2.1$. На Рис.6, 7, 8, 9 и 10 изображены графики траектории управлений.

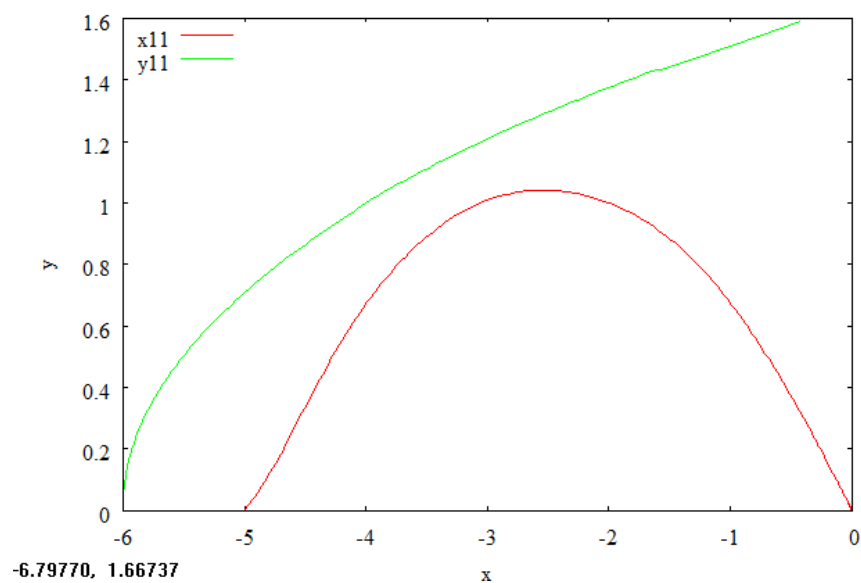


Рис. 6: График $x(t)$ è $y(t)$

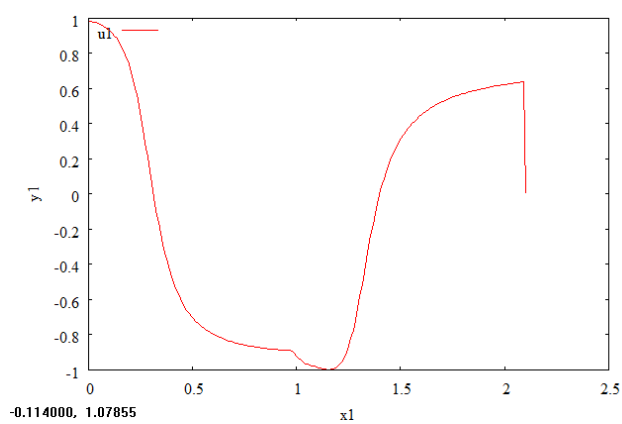


Рис. 7: График $u_1(t)$

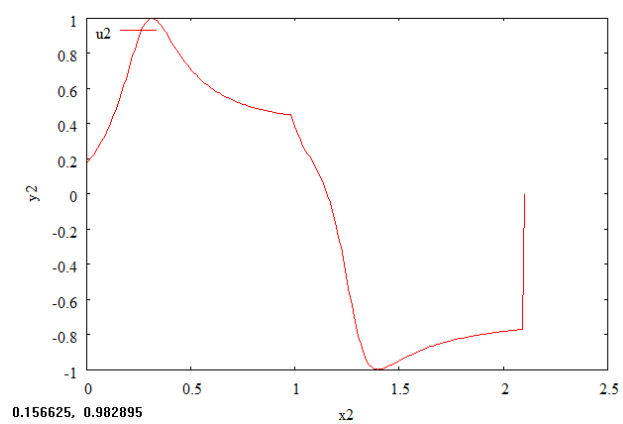


Рис. 8: График $u_2(t)$

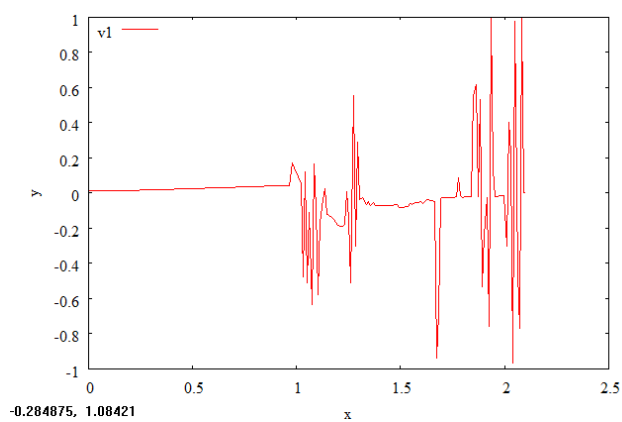


Рис. 9: График $v_1(t)$

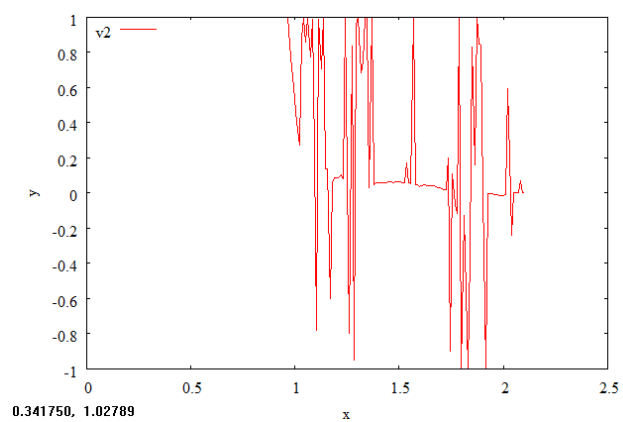


Рис. 10: График $v_2(t)$

5 Разработка карьера открытого типа

5.1 Постановка задачи

Динамика разработки карьера описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{y} = f^0(u^1, P, Q), \quad y(0) = 0, \quad y(T) = y_T, \quad 0 \leq u_1 \leq 1, \\ \dot{P} = u^2, \quad P(0) = P^0 \geq 0, \quad 0 \leq u_2 \leq 1, \\ \dot{Q} = u^2 + u^3, \quad Q(0) = Q^0 \geq 0, \quad 0 \leq u_3 \leq 1, \\ J = \int_0^T e^{-\nu t} \left[-mf^0 - u^2 - u^3 - pP + s(t)P(2 - \frac{P}{f^0}) \right] dt \rightarrow \max, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$f^0(u^1, P, Q) = u^1 P + (1 - u^1)Q.$$

В задаче $s(t)$ - биржевые цены на сырье взяты из файла *data_r-1.csv*, p - цена переработки единицы сырья, m - цена добычи единицы сырья. Время T не фиксированно.

5.2 Задача нелинейного программирования

Перевод задачи (11) в задачу нелинейного программирования:

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + hf_{k-1}^0, \quad y_0 = 0, \quad y_n = y_T \\ P_k = P_{k-1} + hu_{k-1}^2, \quad P_0 = P^0, \\ Q_k = Q_{k-1} + h(u_{k-1}^2 + u_{k-1}^3), \quad Q_0 = Q^0, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (12)$$

Функционал:

$$J = \sum_{i=0}^n e^{-\nu ih} \left(-mf_i^0 - u_i^2 - u_i^3 - pP_i + s_i P_i (2 - \frac{P_i}{f_i^0}) \right).$$

5.3 Решение в GAMS

Задача решалась при начальных параметрах:

$$m = 1, \quad p = 5, \quad \nu = 0.01, \quad y_T = 2000, \quad P^0 = 0.8, \quad Q^0 = 1.$$

Получено значение функционала $J = 6.7 * 10^6$. Графики траектория и управления показаны на Рис. 11, 12, 13, 14, 15 и 16.

Репозиторий с решением задания может быть найден по ссылке: https://github.com/Akhrameev/Practicum_GAMS_5.1

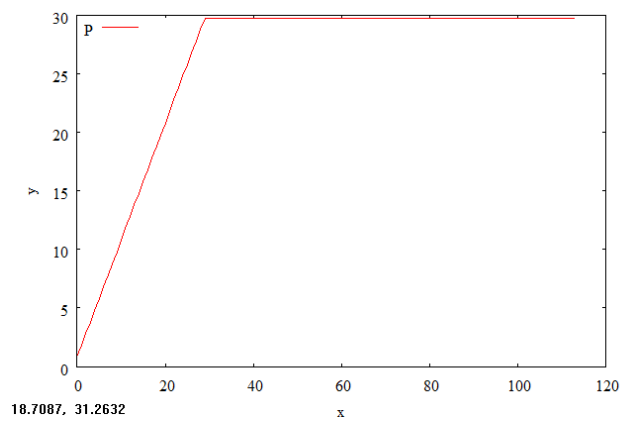


Рис. 11: График $P(t)$

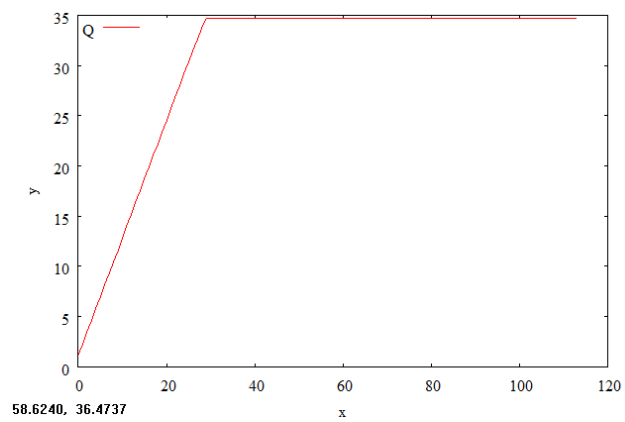


Рис. 12: График $Q(t)$

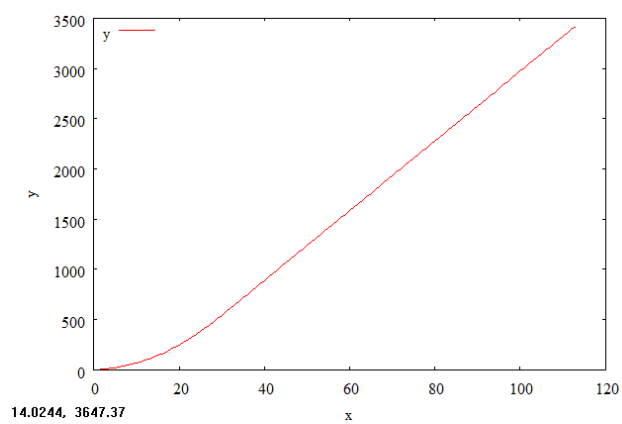


Рис. 13: График $y(t)$

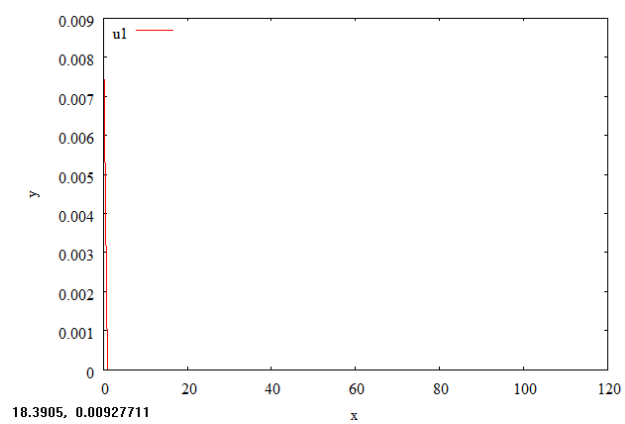


Рис. 14: График $u_1(t)$

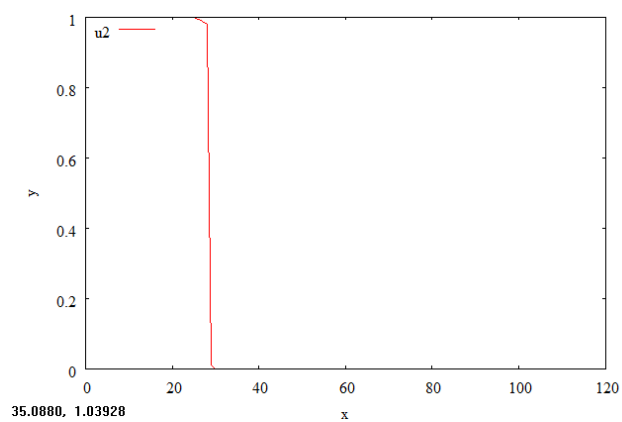


Рис. 15: График $u_2(t)$

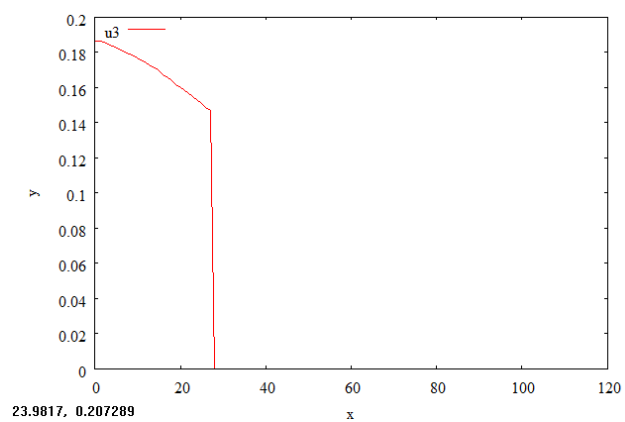


Рис. 16: График $u_3(t)$

Список литературы

- [1] А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Численные методы*. Наука, 1989.
- [2] М.Дж. Дэвис. *Дифференциальная модель сахарного диабета*. В книге *Математическое моделирование*. Редакторы Дж. Эндрюс, Р. Мак- Лоун. Мир, 1979.
- [3] Ф.Л. Черноусько, А.А. Меликян. *Игровые задачи управления и поиска*. Наука, 1978.
- [4] Р. Айзекс. *Дифференциальные игры*. Мир, 1967.
- [5] И.Х. Сигал, А.П. Иванова. *Введение в прикладное дискретное программирование*. Физматлит, 2007.