7.26 Метод продолжения в краевых задачах

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad R(x(a),x(b)) = 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b,\ x \in E^n. \tag{1}$$

Здесь $f(t,x) : E^1 \times E^n \mapsto E^n$, $R(x,y) : E^n \times E^n \mapsto E^n$ являются гладкими векторными функциями. Предполагая существование решения краевой задачи (1), обсудим алгоритмические вопросы поиска её решения. Решение краевой задачи можно свести к некоторому нелинейному векторному уравнению в E^n. Выберем некоторую точку $t_* \in [a,b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x|_{t=t_*} = p \in E^n. \tag{2}$$

Свобода выбора точки t_* может быть полезна для вычислительной практики. Пусть

$$x(t,p), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{3}$$

— решение задачи Коши (2). Предполагается продолжимость решения (3) на весь отрезок $[a,b]$ для любого p. Начальное значение параметра $p \in E^n$ ищется из условий выполнения векторного граничного условия в задаче (1), т.е. искомое p является решением уравнения

$$\Phi(p) \equiv R(x(a,p),x(b,p)) = 0. \tag{4}$$

Итак, краевая задача (1) сведена к конечному векторному уравнению (4). Далее к уравнению (4) применяется метод продолжения, описанный в разделе 7.25. Матрица $\Phi'(p)$ определяется равенством

$$\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a,p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b,p)}{\partial p}.$$

Здесь $(n \times n)$-матрицы $R'_x(x,y)$, $R'_y(x,y)$ вычисляются вдоль решения (3), т.е. при $x = x(a,p)$, $y = x(b,p)$. Введём обозначение

$$X(t,p) \equiv \frac{\partial x(t,p)}{\partial p}$$

для $(n \times n)$-матрицы производных решения (3) по начальному условию. Матрица $X(t,p)$ определяется дифференциальным уравнением в вариациях

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $A = A(t,p) \equiv f'_x(t,x)|_{x=x(t,p)}$ есть $(n \times n)$-матрица, I — единичная матрица. Основная задача Коши схемы продолжения по параметру имеет вид

$$\mathbf{IVP}: \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(0) = p_0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(p) \ &= R(x(a,p), x(b,p)), \\ \Phi'(p) &= R'_x(x(a,p), x(b,p))X(a,p) + R'_y(x(a,p), x(b,p))X(b,p). \end{aligned}$$

Для одновременного вычисления векторной функции $x(t,p)$ и матричной функции $X(t,p)$ может быть записана следующая векторно-матричная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} \ = f(t,x), & x|_{t=t_*} \ = p, \\ \dot{X} = f'_x(t,x)X, & X|_{t=t_*} = I, \quad a \leqslant t \leqslant b. \end{cases} \qquad (6)$$

Задачу Коши (5) будем называть *внешней задачей*, задачу Коши (6) — *внутренней задачей*. Таким образом, предлагается итерационный процесс (10) для решения рассматриваемой краевой задачи (1) на основе внешней задачи (5) и внутренней задачи (6). На одном шаге итерационного процесса выполняется решение внешней задачи (5), в ходе решения которой происходит многократное обращение к решению внутренней задачи Коши (6) при различных значениях параметра p. Описанная схема применялась при разработке программы BVP в среде Maple для численного решения краевой задачи (1). При формировании матриц f'_x, R'_x, R'_y привлекаются возможности среды по выполнению аналитических вычислений.

Краевая задача принципа максимума Понтрягина может содержать разрывные или негладкие функции, например, функции *сигнатуры* (sign), *насыщения* (sat), *мёртвой зоны* (dez), и т.д. Поэтому описанный подход для решения гладких краевых задач, как правило, не может быть использован непосредственно в краевых задачах принципа максимума. Ещё одна веская причина для сглаживания заключается в том, что в задачах с управлениями *релейного типа* (bang-bang) обращаемая матрица может оказаться вырожденной в некоторых областях, а при сглаживании можно добиться невырожденности соответствующих матриц, поэтому оправдана предварительная работа по сглаживанию краевой задачи принципа максимума. Некоторые методы сглаживания задач управления описаны в [7], [15]-[19], [21], [23], [31]. Эти процедуры сглаживания связаны с изменением размерности управления. Регуляризация задачи иногда достигается без изменения размерности управления. Простые формулы сглаживания приводятся ниже.

Функция *сигнатуры* $\mathrm{sign}(s)$ может быть приближена гладкими функциями

$$\begin{aligned} \mathrm{SGN1}(s,\nu) &= \frac{s}{\sqrt{\nu+s^2}}, \\ \mathrm{SGN2}(s,\nu) &= \mathrm{th}\left(\frac{s}{\nu}\right), \\ \mathrm{SGN3}(s,\nu) &= \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{s}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Функция *насыщения* и функция *мёртвой зоны*

$$\mathrm{sat}(s) = \begin{cases} s, & |s| \leqslant 1, \\ \mathrm{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases} \quad \mathrm{dez}(s) = \begin{cases} 0, & |s| < 1, \\ \mathrm{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases}$$

соответственно, аппроксимируются следующими функциями

$$\begin{aligned} \mathrm{SAT}(s,\nu) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu+(s+1)^2} - \sqrt{\nu+(s-1)^2}\right), \\ \mathrm{DEZ}(s,\nu) &= \frac{1}{2}\left(\frac{s+1}{\sqrt{\nu+(s+1)^2}} + \frac{s-1}{\sqrt{\nu+(s-1)^2}}\right). \end{aligned}$$

Параметр сглаживания ν является некоторым малым положительным числом. Соответствующие формулы сглаживания для экстремальных управлений при применении принципа максимума [1], могут быть получены в результате подходящего “малого” возмущения функционала.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 26.1 (*краевая задача двух тел [26]*)**:**

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x(0) = a_1, \quad x(T) = b_1, \\ \ddot{y} = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & y(0) = a_2, \quad y(T) = b_2. \end{cases}$$

Эта краевая задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_2 = x_4, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = b_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & \\ \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}. & \end{cases}$$

Для данных

$$T = 7, \quad a_1 = 2, a_2 = 0, \quad b_1 = 1.0738644361, b_2 = -1.0995343576,$$

при выборе параметра $t_* = 0$, для начальных приближений

$$p_0 1 = [2, 0, -0.5, 0.5] \quad \text{и} \quad p_0 2 = [2, 0, 0.5., -0.5],$$

получены два разных решения со следующими векторами начальных условий в момент времени t_*:

ans1=[2.,0.,0.0000004834,0.5000000745]   и   ans2=[2.,0.,0.4510782034,−0.2994186665].

Соответствующие траектории **1** и **2** системы (с начальной точкой S и конечной точкой F) в плоскости $x_1 x_2$ показаны на рисунке 26.1. Здесь и в следующих примерах для решения задачи Коши использовался метод Рунге – Кутты – Фельберга (rkf-45). Выбранная точность: для решения внешней задачи 10^{-4}, для решения внутренней задачи 10^{-6}. Число итераций 3.

Пример 26.2 (*предельные циклы в системе Эквейлера [30]*):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sin(x_2). \end{cases}$$

Эта система имеет счётное множество предельных циклов. Некоторые из них вычисляются вместе с неизвестными периодами T. Выбор различных начальных векторов p_0 позволяет находить различные предельные циклы. Поиск предельного цикла сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, & x_1(0) = x_4(0), \quad x_1(1) = x_4(1), \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + \sin(x_2)), & x_2(0) = 0, \qquad\quad x_2(1) = 0, \\ \dot{x}_3 = 0, & \\ \dot{x}_4 = 0. & \end{cases}$$

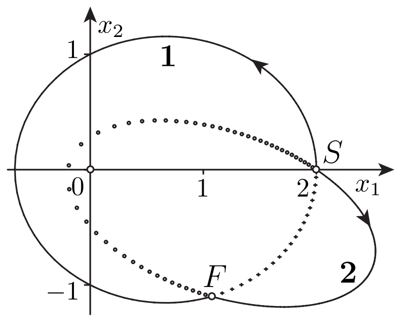

Рисунок 26.1

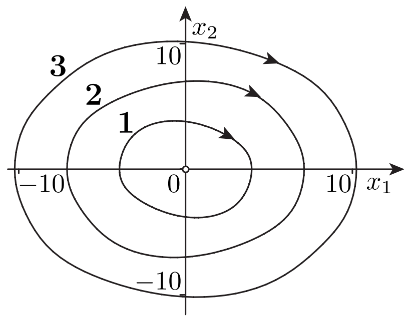

Рисунок 26.2

Здесь введены две вспомогательные переменные: $x_3 = T$ – период, и $x_4 = x_1(0)$ – абсцисса точки пересечения предельного цикла с осью x_1. Выбирая точку $t_* = 0$, для начальных векторов

$$p_0 1 = [2, 0, 2\pi, 2], \quad p_0 2 = [6.5, 0, 2\pi, 6.5], \quad p_0 3 = [9, 0, 2\pi, 9]$$

получены следующие векторы начальных условий в момент времени t_*:

$$\begin{aligned}
&\text{ans1}=[\ \ 3.9655467678, 0, 6.4661401325, \ \ 3.9655467678],\\
&\text{ans2}=[\ \ 7.1078664573, 0, 6.3387892836, \ \ 7.1078664573],\\
&\text{ans3}=[10.2456910360, 0, 6.3101121791, 10.2456910360].
\end{aligned}$$

Соответствующие предельные циклы **1, 2, 3** показаны на рисунке 26.2.

Пример 26.3 (*функционал типа "энергия" для трёхкратного интегратора*) **.**

Рассмотрим задачу управления

$$\left\{\begin{array}{llll}
\dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, & x_1(T) = 0, & \\
\dot{x}_2 = x_3, & x_2(0) = 0, & x_2(T) = 0, & \\
\dot{x}_3 = \ u, & x_3(0) = 0, & x_3(T) = 0, & \\
|u| \leqslant 1, & T = 3.275, & L = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u(t)^2\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)}. &
\end{array}\right. \tag{7}$$

Для задачи управления в E^n

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,\ x(T) = 0,\\
|u| \leqslant 1,\ T > 0 - \text{задано}, \quad L(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)},
\end{array}\right.$$

с одномерным ограниченным управлением краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \cdot \mathrm{sat}(b^* \psi), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = 0, \\ \dot{\psi} = -A^* \psi, \end{cases}$$

а в частном случае (7), при сглаженной функции *насыщения*, — вид системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = \ \ x_3,\ \ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu + (x_6+1)^2} - \sqrt{\nu + (x_6-1)^2}\right), \\ \dot{x}_4 = \ \ 0,\ \ \dot{x}_5 = -x_4,\ \ \dot{x}_6 = -x_5 \end{cases}$$

с граничными условиями из (7). Эта краевая задача решена программой BVP ($t_* = T$, $\nu = 10^{-10}$) с вектором начальных значений p в момент t_*:

ans=$[0, 0, 0, -2.9850435834, 4.8880088678, -2.9083874537]$.

Зависимость оптимальных фазовых переменных и управления от t показана на рисунках 26.3, 26.4.

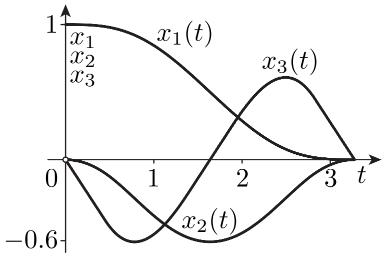

Рисунок 26.3

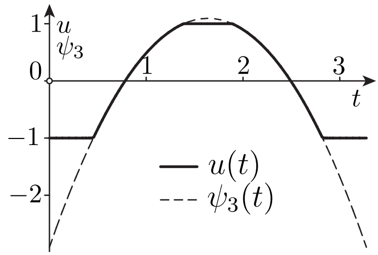

Рисунок 26.4

Пример 26.4 (*Задача быстродействия с областью управления в форме лунки [23]*).

Сглаживание негладкой области управления U, т.е. построение её гладкой выпуклой аппроксимации U_μ, предполагает конструктивное описание опорной функции сглаженного[7] множества U_μ. Рассмотрим

[7]Для множеств U, представимых в виде алгебраической суммы, выпуклой оболочки объединения множеств с известной гладкой выпуклой аппроксимацией, задача сглаживания решается конструктивно, см. [21]. Труднее работать с множествами U, заданными в форме пересечения нескольких множеств или в виде геометрической разности, см. [23], [31]. Пример сглаживания лунки дан ниже.

задачу быстродействия с областью управления U в форме лунки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + u_2, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = 0, \\ u = (u_1, u_2) \in U = S_{\sqrt{2}}((+1,0)) \cap S_{\sqrt{2}}((-1,0)), \\ \alpha = 0.25, \ \beta = 1.5, \ a_1 = 4, \ a_2 = 1. \end{cases}$$

Сглаженная лунка U_μ ($\mu > 0$ — малый параметр) задаётся опорной функцией, см. [23],

$$c(U_\mu, \psi) = \left(\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} - \sqrt{q_1^2} \right) \Big|_{q_1 = q_1(\psi), \ q_2 = \psi_2},$$

$$\text{где} \qquad q_1(\psi) = \tfrac{1}{2} \left(\sqrt{\mu \|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \sqrt{\mu \|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2} \right).$$

Краевая задача принципа максимума сглаженной задачи управления, в безразмерном времени, состоит из пяти скалярных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = T\,(x_2 + c'_{\psi_1}(U_\mu, \psi)), & x_1(0) = a_1, & x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = T\,(-\beta x_1 - \alpha x_2 + c'_{\psi_2}(U_\mu, \psi)), & x_2(0) = a_2, & x_2(1) = 0, \\ \dot{\psi} = -T\,A^* \psi, & \psi_1^2(1) + \psi_2^2(1) = 1, & \\ \dot{T} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Решение краевой задачи при малых μ даёт приближения к оптимальному процессу. На рисунке 26.5 показаны графики управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\mu = 10^{-6}$, на рисунке 26.6 — графики $u_1(t)$ для трёх значений $\mu = 1, \ 10^{-1}, \ 10^{-6}$. Вычисления выполнены с помощью упомянутой выше программы BVP.

Пример 26.5 (*задача быстродействия*):

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u, & x \in E^m, u \in U \subset E^m, \quad \alpha, \beta \in E^{m \times m}, \\ x(0) = a_0, \ \dot{x}(0) = b_0, & x(T) = a_1, \ \dot{x}(T) = b_1, \quad T \to \min. \end{cases}$$

При $m = 2$ область управления U — лунка, при $m = 3$ — тело, полученное вращением лунки вокруг её вертикальной оси. Краевая задача принципа максимума содержит $4m + 1$ уравнений. Область управления конструктивно сглаживается до телесного выпуклого компакта в пространстве E^{2m}.

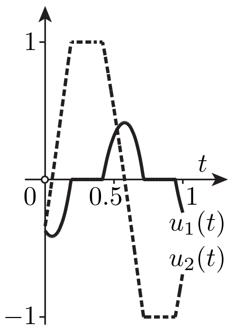

Рисунок 26.5

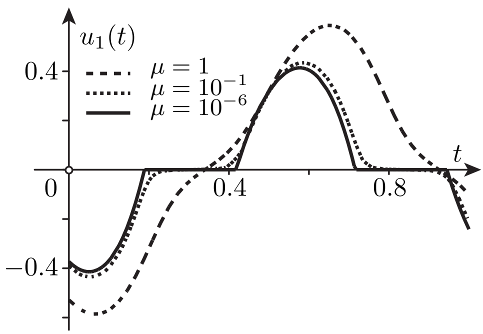

Рисунок 26.6

Сделаем несколько важных замечаний. Если в краевой задаче (1) краевые условия содержат задание нескольких неизвестных функций $x_1(a) = x_{10}, \ \ldots, \ x_k(a) = x_{k0}, \ 1 \leqslant k \leqslant n-1$, то, при выборе $t_* = a$, порядок внешней задачи можно понизить до $n-k$, полагая $p = (x_{k+1}(a), \ldots, x_n(a))$, что является существенным при решении краевых задач принципа максимума, в которых фазовая переменная задана в начальный момент времени, а в роли искомого вектора p выступает неизвестное начальное значение сопряжённой переменной. Описанная схема применима и для многоточечных краевых задач. Другие примеры расчётов см. в [32].