第九周

一、设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内可微， $f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得在 $(0,+\infty)$ 内有 $\left|f'(x)\right|<A\left|f(x)\right|$，那么，在 $(0,+\infty)$ 内， $f(x)\equiv 0$.

二、设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可微函数，且当 $x\in(0,1)$ 时， $0<f'(x)<1$， $f(0)=0$，试证明

$$(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^p > 2^{1-p}p\int_0^1 f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p>1$ 为常数.

三、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \le 4\int_0^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x.$$

四、设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可到，且 $\left|f(x)\right|\le 1$，还满足 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=2$，证明：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0.$

五、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(x)\ge 0$， $f''(x)\le 0$，证明：

$$\max_{a\le x\le b} f(x) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x》$$

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：存在 $\xi\in$（0,1），使得 $f(\xi)=\dfrac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.