

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) .

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$.

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的。

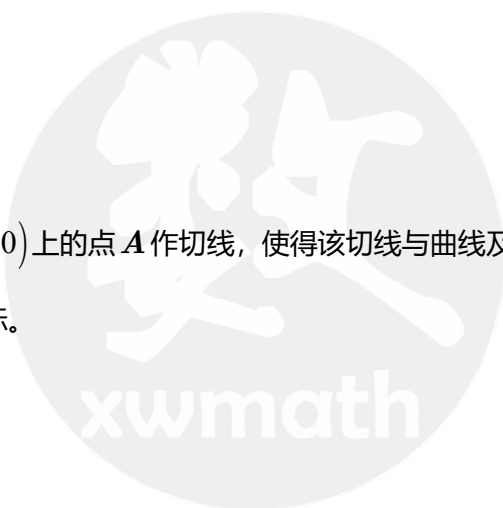
微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



3. 设 $y = y(x)$ 由 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

4. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$ 。求点 A 的坐标。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



参考答案参见微信公众号：考研竞赛数学(ID: xwmath)菜单“竞赛实验”下的“竞赛试题与通知”

相关知识点总结与解题思路分析、探索参见公众号《公共基础课》在线课堂，或公众号回复“在线课堂”

第二题：(12 分)计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$.

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明：级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛。

微信公众号：

考研竞赛数学(xwmath)



第四题：(10 分) 设 $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ ，证明：

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}.$$

第五题：(14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dy dz + (2y^3 - y) dz dx + (3z^3 - z) dx dy.$$

试确定曲面 Σ ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

微信公众号：

考研竞赛数学(xwmath)

第六题：(14 分) 设 $I_a(r) = \int_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆

$x^2 + xy + y^2 = r^2$, 取正向。求极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r)$.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



第七题：(14 分)判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。



微信公众号：

考研竞赛数学(xwmath)