

## 2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

### 一、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知  $y_1 = e^x$  和  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是\_\_\_\_\_.

(2) 设有曲面  $S: z = x^2 + 2y^2$  和平面  $\pi: 2x + 2y + z = 0$ ，则与  $\pi$  平行的  $S$  的切平面方程是\_\_\_\_\_.

(3) 设  $y = y(x)$  由  $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$  所确定，则  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

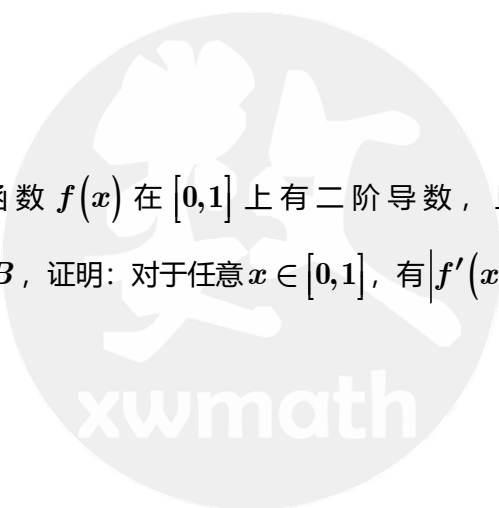
(4) 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ \_\_\_\_\_.

(5) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ \_\_\_\_\_.



**第二题：(12 分)** 设  $n$  为正整数，计算  $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| dx$ .

**第三题：(14 分)** 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有二阶导数，且有正常数  $A, B$  使得  $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$ ，证明：对于任意  $x \in [0,1]$ ，有  $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$ .



微信公众号:

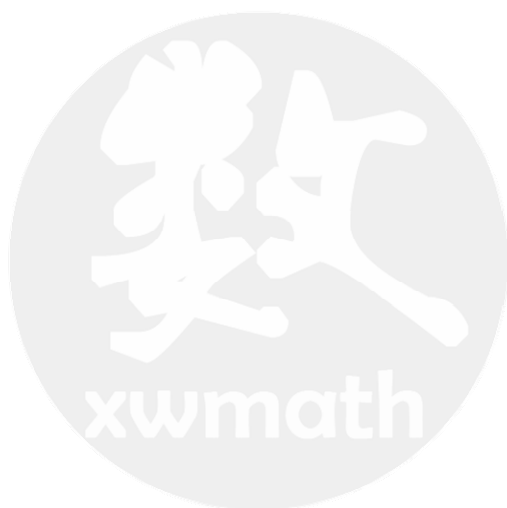
考研竞赛数学(xwmath)

**第四题：(14 分)** (1) 设一球缺高为  $h$ ，所在球半径为  $R$ 。证明该球缺的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3R - h)h^2, \text{ 球冠的面积为 } 2\pi Rh.$$

(2) 设球体  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$  被平面  $P: x + y + z = 6$  所截的小球缺为  $\Omega$ 。记球缺上的球冠为  $\Sigma$ ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$



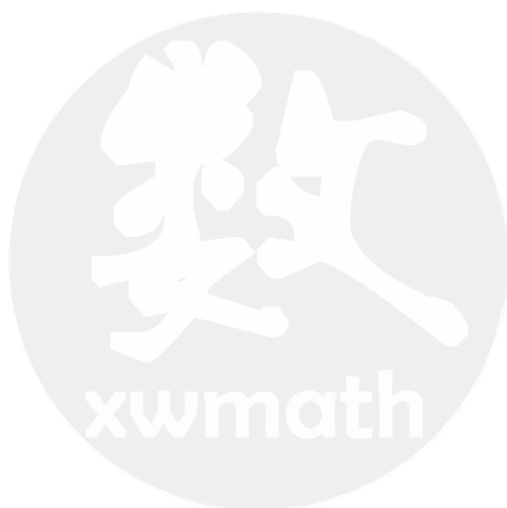
微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



**第五题：(15 分)**设  $f$  在  $[a, b]$  上非负连续，严格单增，且存在  $x_n \in [a, b]$  使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$



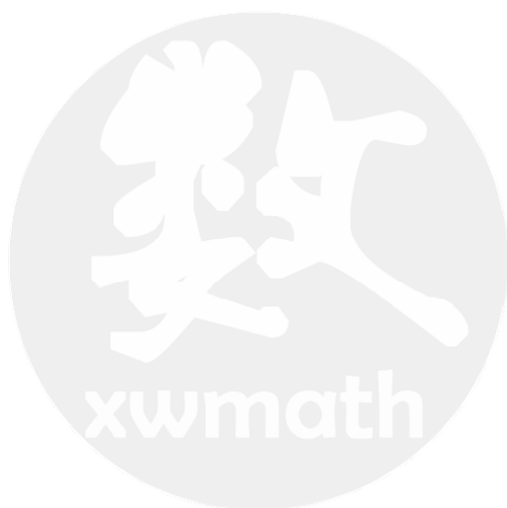
微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

参考答案参见微信公众号：考研竞赛数学(ID: xwmath)菜单“竞赛实验”下的“竞赛试题与通知”

相关知识点总结与解题思路分析、探索参见公众号《公共基础课》在线课堂，或公众号回复“在线课堂”

第六题：(15 分) 设  $A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - A_n \right)$ .



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)