练习题二

必做题：

一、设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $n+1$ 阶导数，对每对实数 a,b， $a<b$，使得

$$\ln\frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}=b-a\text{，}$$

那么，存在一个数 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

证明一： 设 $g(x)=(f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x))\mathrm{e}^{-x}$， 由假设知 $g(b)=g(a)$，

由微分中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$， 使得 $g'(\xi)=0$， 即

$$f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi).$$

证明二： 设 $g(x)=\ln(f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x))$， 由已知条件知， $g(b)-g(a)=b-a$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$， 使得

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$$

即 $g'(\xi)=1$.

于是， $\dfrac{f'(\xi)+f''(\xi)+\cdots+f^{(n+1)}(\xi)}{f(\xi)+f'(\xi)+\cdots+f^{(n)}(\xi)}=1$， 即 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

二、求解方程 $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ 的实根.

解： 显然 $x>0$.

因为方程 $x^2=x+1$ 的正实根为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， 它也是方程 $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ 的一个实根.

记 $f(x)=x-\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$， 则

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}>0.$$

则根是唯一的.

三、已知函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f'''(x)$ 为非零的有限值，如果

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,(0<\theta<1),$$

求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

解: 由泰勒公式,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x+\alpha h)h^3,\quad (0<\alpha<1),$$

于是, $\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2-\frac{1}{2}f''(x)h^2=\frac{1}{6}f'''(x+\alpha h)h^3$.

又因为 $f''(x+\theta h)-f''(x)=f'''(x+\theta_1\theta h)\theta h, 0<\theta_1<1$,

$$\Rightarrow \theta=\frac{1}{3}\frac{f'''(x+\alpha h)}{f'''(x+\theta_1\theta h)}\Rightarrow \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}.$$

注: 本题中如果没有三阶导数连续这个条件结论也是成立的，具体求解方法如下:

由带有佩亚诺余项的泰勒公式,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)h^3+o(h^3).$$

由已知条件, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,(0<\theta<1)$. 两式相减, 得

$$\frac{f''(x+\theta h)-f''(x)}{h}=\frac{1}{3}f'''(x)+\frac{o(h^3)}{h^3}.$$

两边取极限, 可得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}f'''(x)+\frac{o(h^3)}{h^3}}{\frac{f''(x+\theta h)-f''(x)}{\theta h}}=\frac{1}{3}$.

四、已知可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq 0$。求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$。(要求: 不可用广义洛必达法则)

证明: 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$. $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时有 $f'(x)>\frac{A}{2}$.

$$x>X, f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)\Rightarrow f(x)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=A$$

五、已知函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0, f(a)=0$。求证: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得

$f'(\xi)=0$。

证明一：（1）若 $f(x)\equiv 0$.命题显然成立;

(2)若 $\exists x_0, f(x_0)\neq 0$.不妨设 $f(x_0)>0$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 可得

$$\exists X>0, \text{当} x>X>x_0, f(x)<\frac{f(x_0)}{2}$$

取 $M>X>x_0$.在 $[a,M]$ 上 $f_{\max}(x)\neq f(a), f_{\max}(x)\neq f(M)$.

设 $f_{\max}(x)=f(\xi),\xi\in(a,M)\Rightarrow f'(\xi)=0$.

证明二：作辅助函数 $g(x)=\begin{cases} f(\tan x), & x=\arctan a \\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[\arctan a,\frac{\pi}{2}]$ 上满足罗尔中值定理的条件，因此，存在 $\eta\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(\eta)=0$，即 $f'(\tan\eta)=0$.

取 $\xi=\tan\eta$，则 $\xi\in(a,+\infty)$，且 $f'(\xi)=0$.

六、设 $I_n=\int_0^{\pi}\sin^n x dx$，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n$.

解：因为 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$,

所以，$J_n=(n-1)(J_{n-2}-J_n)$，即 $nJ_n=(n-1)J_{n-2}$.

于是，$nJ_nJ_{n-1}=(n-1)J_{n-1}J_{n-2}=\cdots=J_1J_0=\frac{\pi}{2}$.

因此，$\frac{\pi}{2}=(n+1)J_{n+1}J_n\le(n+1)J_n^2\le(n+1)J_nJ_{n-1}=(1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{n\pi}{2(n+1)}\le nJ_n^2\le\frac{\pi}{2}$.

由夹逼极限准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty} nJ_n^2=\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}J_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}J_n=\sqrt{2\pi}.$

选做题：

七、已知数列 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k a_n^2=\frac{3}{2}$。求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}$.

解： 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_ka_n^2=\frac{3}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n(S_n-S_{n-1})^2=\frac{3}{2}$ 或 $\lim_{n\to\infty}S_na_n^2=\frac{3}{2}$.

因为 $a_n>0$，则 S_n 单调增加.

如果 S_n 有界，则 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可推出 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 于是，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_ka_n^2=0$，与题设矛盾. 因此 $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n\sqrt{S_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{S_n}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\times 0=0$.

由拉格朗日中值定理，有 $S_n^{\frac{3}{2}}-S_{n-1}^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(S_n-S_{n-1})\xi^{\frac{1}{2}}, S_n>\xi>S_{n-1}$. 因此，

$$\frac{3}{2}a_n\sqrt{S_{n-1}}<S_n^{\frac{3}{2}}-S_{n-1}^{\frac{3}{2}}<\frac{3}{2}a_n\sqrt{S_n} .$$

由 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_ka_n^2=\frac{3}{2}$，有 $\lim_{n\to\infty}(S_{n-1}+a_n)a_n^2=\frac{3}{2}$，即 $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}a_n^2=\frac{3}{2}$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}a_n\sqrt{S_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}a_n\sqrt{S_n}=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} .$$

由夹逼极限准则，得 $\lim_{n\to\infty}S_n^{\frac{3}{2}}-S_{n-1}^{\frac{3}{2}}=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}$.

由 Stolz 公式，得 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\frac{3}{2}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\frac{3}{2}}-S_{n-1}^{\frac{3}{2}}}{1}=(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}$，于是，

$$\lim_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}=\lim_{n\to\infty}a_nS_n^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{n}}{S_n^{\frac{1}{2}}}=1 .$$

八、设 $\{a_n\}$ 是一个正的收敛数列，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n+1}\right)^n .$$

解： $\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a_1}-1+\sqrt[n]{a_2}-1+\cdots+\sqrt[n]{a_n}-1}{n}\right)$.

由泰勒公式，

$$\sqrt[n]{a_i}-1=e^{\frac{1}{n}\ln a_i}-1=\frac{1}{n}\ln a_i+\frac{1}{2}\frac{\ln^2 a_i}{n^2}e^{\xi_i},\ i=1,2,\cdots,n , \tag{1}$$

其中ξ_i介于0和$\frac{1}{n}\ln a_i$之间，即$|\xi_i| \le \frac{1}{n}|\ln a_i|$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln A$，故存在$M > 0$，使得$|\ln a_n| \le M$，$n = 1, 2, \cdots$.

因此，$\left|\sqrt[n]{a_i} - 1\right| \le \frac{1}{n}M + \frac{1}{2}\frac{M^2}{n^2}\mathrm{e}^M$，从而

$$\left|\frac{\sqrt[n]{a_1}-1+\sqrt[n]{a_2}-1+\cdots+\sqrt[n]{a_n}-1}{n}\right| \le \frac{1}{n}M + \frac{1}{2}\frac{M^2}{n^2}\mathrm{e}^M \to 0 \ (n\to\infty),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_1}-1+\sqrt[n]{a_2}-1+\cdots+\sqrt[n]{a_n}-1}{n} = 0$.

于是，$\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n})$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\sqrt[n]{a_1}-1+\sqrt[n]{a_2}-1+\cdots+\sqrt[n]{a_n}-1}{n} \qquad \text{（由等价无穷小）}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n} + \frac{\mathrm{e}^{\xi_1}\ln^2 a_1+\mathrm{e}^{\xi_2}\ln^2 a_2+\cdots+\mathrm{e}^{\xi_n}\ln^2 a_n}{2n^2}).$$

注意到$\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi_1}\ln^2 a_1+\mathrm{e}^{\xi_2}\ln^2 a_2+\cdots+\mathrm{e}^{\xi_n}\ln^2 a_n}{2n^2}\right| \le \frac{\mathrm{e}^M M^2}{2n} \to 0 \quad (n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}.$$

由 Stolz 公式，得

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n}) = \lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln A.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n+1})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n})^n \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\ln(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n})} = \frac{A}{\mathrm{e}}.$$