第四周习题解答

一、已知Γ是平面Π: $Ax+By+Cz+D=0$上的一条光滑闭曲线，其中$A^2+B^2+C^2=1$，Γ所围成的区域Σ的面积为S.求证:

$$S=\left|\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(Bz-Cy)\mathrm{d}x+(Cx-Az)\mathrm{d}y+(Ay-Bx)\mathrm{d}z\right|$$

证明： $P=Bz-Cy, Q=Cx-Az, R=Ay-Bx$，则

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2A,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2B,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2C$$

由斯托克斯公式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(Bz-Cy)\mathrm{d}x+(Cx-Az)\mathrm{d}y+(Ay-Bx)\mathrm{d}z\\&=\iint_{\Sigma}A\mathrm{d}y\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}\frac{A^2+B^2+C^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=S.\end{aligned}$$

二、设$\vec{n}$为光滑闭曲面Σ的外法向量，$\vec{a}$为常向量.求: $\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S$.

解: 设$\vec{n}^0=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), \vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1)$，则

$$\cos(\vec{n},\vec{a})=\cos(\vec{n}^0,\vec{a}^0)=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1.$$

于是，

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S&=\oiint_{\Sigma}\left(\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1\right)\mathrm{d}S\\&=\oiint_{\Sigma}\left(\cos\alpha_1\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta_1\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

由高斯公式，可得

$$\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial\cos\alpha_1}{\partial x}+\frac{\partial\cos\beta_1}{\partial y}+\frac{\partial\cos\gamma_1}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=0,$$

其中Ω是由Σ围成的区域.

三、设函数$f(x,y)$在闭区域$D: x^2+y^2\le 1$上有二阶偏导数，且$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.求:

$$\iint_D (x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解: (1)令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1 r\left[\int_0^{2\pi} (r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r$$

(2) 设 $L_r: x^2+y^2=r^2$，取逆时针方向，则

$$\oint_{L_r} -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi} -\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y}\mathrm{d}(r\cos\theta)+\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}\mathrm{d}(r\sin\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi} (r\cos\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}+r\sin\theta\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y})\mathrm{d}\theta .$$

于是，$\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 r\left[\oint_{L_r} -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}r$.

设 $L_r: x^2+y^2=r^2$ 所围成的区域为 D'，由格林公式，可得

$$\oint_{L_r} -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2})$$

故 $\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 r\left[\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2})\right]\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

四、设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $2b>3a$，$a+b>0$，$f(a)=0$，$f(\frac{2a+2b}{5})+f(\frac{3a+3b}{5})=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

证明： 构造辅助函数 $\Phi(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，寻找某一子区间 $[c,d]\subset[a,b]$，使得 $\Phi(x)$ 在 $[c,d]$ 上满足罗尔定理的条件。

因为$2b>3a$，$a+b>0$，则有$\dfrac{2a+2b}{5}$，$\dfrac{3a+3b}{5}\in(a,b)$，由题设$f(\dfrac{2a+2b}{5})+f(\dfrac{3a+3b}{5})=0$,可知$f(\dfrac{2a+2b}{5})f(\dfrac{3a+3b}{5})<0$或者$f(\dfrac{2a+2b}{5})=f(\dfrac{3a+3b}{5})=0$.

若$f(\dfrac{2a+2b}{5})f(\dfrac{3a+3b}{5})<0$，则由连续函数的零点定理，存在$\eta\in(\dfrac{2a+2b}{5},\dfrac{3a+3b}{5})$，使得$f(\eta)=0$；

若$f(\dfrac{2a+2b}{5})=f(\dfrac{3a+3b}{5})=0$，则取$\eta=\dfrac{2a+2b}{5}$，则$f(\eta)=0$.

显然$[a,\eta]\subset[a,b]$，且$\Phi(x)$在$[a,\eta]$上满足罗尔定理的条件，则由罗尔定理知，存在$\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$使得$\Phi'(\xi)=0$.

而$\Phi'(\xi)=\mathrm{e}^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0$，因$\mathrm{e}^{g(\xi)}\neq0$，故有$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.　　　　证毕

五、设平面Π: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和圆柱面Σ: $x^2+y^2=1$的交线为*C*，求：(1) *C*在*yoz*平面上的投影曲线方程；（2）*C*到*xoy*平面的最短距离.

解：（1）从*C*的方程$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$中消去*x*得 $9(1-\dfrac{y}{4}-\dfrac{z}{5})^2+y^2=1$，

所以*C*在*yoz*平面上的投影曲线方程为$\begin{cases}9(1-\dfrac{y}{4}-\dfrac{z}{5})^2+y^2=1\\ x=0\end{cases},(-1\le y\le1)$.

(2) *C*位于上半空间中，所以*C*到*xoy*平面的距离为*z*.

因此*z*在约束条件$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$和$x^2+y^2=1$下的最小值即为*C*到*xoy*平面的最短距离.

记$L(x,y,z)=z+\lambda(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1)$.

令$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{1}{3}\lambda+2\mu x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \beta}=\dfrac{1}{4}\lambda+2\mu y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=1+\dfrac{1}{5}\lambda\\ x^2+y^2=1,\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1\end{cases}$，由前两式解得$3x=4y$，再代入最后的等式得

$$x=\pm\frac{4}{5},y=\pm\frac{3}{5},\quad z=\frac{35}{12},\frac{85}{12},$$

故最小值为$\dfrac{35}{12}$，即*C*到*xoy*平面的最短距离为$\dfrac{35}{12}$.

六、求经过三条平行直线 $L_1: x=y=z$， $L_2: x-1=y=z+1$， $L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 设圆柱面的轴为 L_0，由 L_0 到 L_1， L_2， L_3 的距离相等可知

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y-z-1)^2+(z-x+2)^2+(x-y-1)^2$$

$$=(y-z+2)^2+(z-x-1)^2+(x-y-1)^2.$$

整理得 $\begin{cases} x=z+1 \\ y=z-1 \end{cases}$， 即 L_0： $x-1=y+1=z$.

圆柱面的半径为 $r=\dfrac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$，那么对圆柱面上任意一点，有

$$(y-z-1)^2+(z-x+2)^2+(x-y-1)^2=6,$$

整理即得经过 L_1， L_2， L_3 的圆柱面方程为

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0.$$

七、设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求（1） $f(x)$ 的表达式;（2） $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n\,\mathrm{d}t$.

(其中 $n=2,3,\cdots$).

解：（1）令 $u=t-x$， $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u=\int_{-x}^0 tf(t)\mathrm{d}t+x\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$.

所以题设中的等式为 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0 tf(t)\mathrm{d}t+x\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$.

上式两边求导得 $1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t+xf(-x)$,即 $1=f(x)+\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$,

对此式两边再求导得 $f'(x)+f(-x)=0$， (*)

即 $f'(x)=-f(-x)$.（**这意味着 $f'(x)$ 的导数是存在的**）

对(*)两边再求导得 $f''(x)-f'(-x)=0$，在（*）式中用 $-x$ 替换 x，得 $f'(-x)+f(x)=0$.

代入上式即得二阶常系数齐次线性方程 $f''(x)+f(x)=0$，它的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

由 $1=f(x)+\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ 和 $f'(-x)+f(x)=0$ 得 $f(0)=1$， $f'(0)=-f(0)=-1$.

将其代入通解中和 $f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$ 中，求得 $C_1=1$， $C_2=-1$，故

$$f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}).$$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n \mathrm{d}t=2^{\frac{n}{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left|\cos(t+\frac{\pi}{4})\right|^n \mathrm{d}t$.

令 $x=t+\frac{\pi}{4}$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(t)|^n \mathrm{d}t=2^{\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}|\cos x|^n \mathrm{d}x$$

$$=2^{\frac{n}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=3,5,7,\cdots\\ 2^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

八、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n$ 阶连续导数且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$，$k=0,1,2,\cdots,2n-1$. 证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2n)}(x)\right|.$$

证明： 设 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$，那么 $g^{(2n)}(x)=(-1)^n(2n)!$.

又有 $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(x-a)^n(b-x)^n\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)^{2n+1}B(n+1,n+1)$$

$$=(b-a)^{2n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}$$

$$=(b-a)^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

利用 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$，$k=0,1,2,\cdots,2n-1$，应用多次分部积分，可得

$$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x=(-1)^k\int_a^b f^{(2n-k)}(x)g^{(k)}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $k=1,2,\cdots,2n.$

因此，$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x\,.$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{(2n)!}\left|\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\le \frac{1}{(2n)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2n)}(x)\right|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2n)}(x)\right|.$$