一、设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内可微， $f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得在 $(0,+\infty)$ 内有 $\left|f'(x)\right|<A\left|f(x)\right|$，那么，在 $(0,+\infty)$ 内， $f(x)\equiv 0$.

证明：设存在 $y\in(a,b]$ 使得 $f(y)\neq 0$，不失一般性，设 $f(y)>0$.

由函数 $f(x)$ 的连续性，存在 $c\in(a,y]$ 使得 $f(c)=0$ 且 $f(x)>0$， $x\in(c,y]$.

记 $g(x)=\ln f(x)-Ax$， $x\in(c,y]$，那么由已知条件，

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-A\leq 0,\quad x\in(c,y],$$

从而 $g(x)$ 是单调减函数.

于是， $\ln f(x)-Ax\geq \ln f(y)-Ay$， $x\in(c,y]$，从而

$$f(x)\geq f(y)\mathrm{e}^{A(x-y)},\quad x\in(c,y],$$

因此，令 $x\to c^{+}$，则 $f(y)\mathrm{e}^{A(c-y)}\leq 0$，与 $f(y)>0$ 矛盾.

故在 $(0,+\infty)$ 内， $f(x)\equiv 0$.

如果 $f(y)<0$，只需考虑 $F(x)=-f(x)$， $F(x)$ 满足定理的条件，故在 $(0,+\infty)$ 内， $F(x)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv 0$.

二、设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可微函数，且当 $x\in(0,1)$ 时， $0<f'(x)<1$， $f(0)=0$，试证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p>2^{1-p}p\int_0^1 f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p>1$ 为常数.

证明：令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^p-2^{1-p}p\int_0^x f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x$，则

$$F'(x)=pf(x)\left[\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^{p-1}-2^{1-p}f^{2p-2}(x)\right].$$

因为 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$. 由 $0<f'(x)<1$，则当 $0<x<1$ 时，有 $0<f(x)<x\leq 1$.

记 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则 $g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$，因此，当 $x\in(0,1)$ 时，

$g(x)>0$，即$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t > 2^{-1} f^2(x)$.

于是，$(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^{p-1} > 2^{1-p} f^{2p-2}(x) > 2^{1-p} f^{2p-1}(x)$.

所以，$F'(x)>0$，则$F(1)>F(0)$，即

$$(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^p > 2^{1-p} p\int_0^1 f^{2p-1}(x)\mathrm{d}x.$$

三、设 $f(x)$ 在$[0,1]$上存在二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

证明：因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上存在二阶连续导数，则存在 $x_0, x_1 \in [0,1]$，使得

$$|f(x_0)| = \min_{x\in[0,1]} |f(x)|，\quad |f'(x_1)| = \min_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

由拉格朗日中值定理，对任何$x\in[0,1]$，存在$\xi_x \in (0,1)$，使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_x)(x-x_0).$$

若 $f(x_0) \ne 0$，那么 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号（否则，必存在 $t_0 \in (0,1)$，使得 $f(t_0)=0$，与 $|f(x_0)| = \min_{x\in[0,1]} |f(x)|$ 矛盾），再由$|f(x)| \ge |f(x_0)|$，则 $f(x_0)$ 与 $f'(\xi_x)(x-x_0)$ 同号，于是

$$|f(x)| = |f(x_0)| + |f'(\xi_x)(x-x_0)| \ge |f'(x_1)(x-x_0)|,\ x\in[0,1].$$

上式从 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \ge |f'(x_1)| \int_0^1 |x-x_0|\mathrm{d}x$$

$$= |f'(x_1)|(\frac{x_0^2}{2} + \frac{(1-x_0)^2}{2}) \ge \frac{1}{4}|f'(x_1)|.$$

进一步，由

$$|f'(x)| = \left|f'(x_1) + \int_{x_1}^x f''(x)\mathrm{d}x\right| \le |f(x_1)| + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

$$\le 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

再由上面不等式从 0 到 1 积分，得

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

四、设函数 $f(x)$ 在$[-2,2]$上二阶可到，且$|f(x)|\le 1$，还满足$[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 2$，证明：

在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0.$

证明：记 $g(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$.

由拉格朗日中值定理，存在 $a\in(-2,0), b\in(0,2)$，使得

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(a),\quad \frac{f(2)-f(0)}{2}=f'(b).$$

由题设 $|f(x)|\le 1$，则 $|f'(a)|\le 1$，$|f'(b)|\le 1$，从而 $g(a)\le 2$，$g(b)\le 2$.

由 $g(0)=2$，所以，$g(x)$ 在 (a,b) 内取得最大值.

设最大值点为 $\xi\in(a,b)$. 那么 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$.

由于 $g(\xi)\ge 2$，$|f(\xi)|\le 1$，得 $|f'(\xi)|=\sqrt{g(\xi)-[f(\xi)]^2}\ge\sqrt{2-1}>0$，所以 $f'(\xi)\ne 0$.

故 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

五、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(x)\ge 0$， $f''(x)\le 0$，证明：

$$\max_{a\le x\le b} f(x)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明：记 $F(x)=2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)(x-a)$，则 $F(a)=0$.

因为 $F'(x)=f(x)-f'(x)(x-a)$，$F'(a)=f(a)\ge 0$.

又因为 $F''(x)=-f''(x)(x-a)\ge 0$，即 $F'(x)$ 是单调不减的，则当 $x\in[a,b]$，有

$F'(x)\ge F'(a)\ge 0$，即 $F(x)$ 是单调不减的，故 $F(x)\ge F(a)=0$，即

$$2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ge f(x)(x-a).$$

取 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$，则

$$2\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\ge f(x_0)(x_0-a).$$

同理可证： $$2\int_{x_0}^b f(t)\mathrm{d}t\ge f(x_0)(b-x_0).$$

两式相加，得 $\max\limits_{a\le x\le b} f(x)=f(x_0)\le\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：存在 $\xi\in$（0,1），使得 $f(\xi)=\dfrac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.

证明：设 $F(x)=(1-x)^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F'(x) = -2(1-x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + (1-x)^2 f(x)\,.$$

又 $F(0) = F(1) = 0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in$（$0,1$），使得

$$F'(\xi) = -2(1-\xi)\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t + (1-\xi)^2 f(\xi) = 0\,.$$

移项后，可得 $f(\xi) = \dfrac{2}{1-\xi}\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$.