

# 第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷

## (数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

|    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 题号 | 一  | 二  | 三  | 四  | 五  | 六  | 总分  |
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 |    |    |    |    |    |    |     |

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

一、(本题 15 分) 设  $N(0, 0, 1)$  是球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的北极点.  $A(a_1, a_2, 0), B(b_1, b_2, 0), C(c_1, c_2, 0)$  为  $xOy$  平面上不同的三点. 设连接  $N$  与  $A, B, C$  的三直线依次交球面  $S$  于点  $A_1, B_1$  与  $C_1$ .

- (1) 求连接  $N$  与  $A$  两点的直线方程.
- (2) 求点  $A_1, B_1$  与  $C_1$  的坐标.
- (3) 给定点  $A(1, -1, 0), B(-1, 1, 0), C(1, 1, 0)$ , 求四面体  $NA_1B_1C_1$  的体积.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

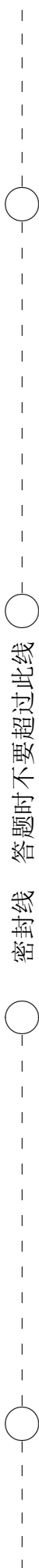
二、(本题 15 分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})}$ .

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

三、（本题 15 分）设  $A, B$  均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组  $Ax = Bx (x \in \mathbb{R}^{2020})$  的解空间维数为 3. 问: 矩阵  $A, B$  是否可能相似? 证明你的结论.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

四、（本题 20 分）称非常值一元  $n$  次多项式 (合并同类项后) 的  $n - 1$  次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式  $f(x)$ , 满足对  $f(x)$  的每个复根  $x_k$ , 都存在非常值复系数首一多项式  $g_k(x)$  和  $h_k(x)$ , 使得  $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$ , 且  $g_k(x)$  与  $h_k(x)$  的第二项系数相等.



|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

五、（本题 15 分）设  $\varphi$  是  $\mathbb{R}$  上严格单调增加的连续函数,  $\psi$  是  $\varphi$  的反函数, 实数列  $\{x_n\}$  满足

$$x_{n+2} = \psi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), \quad n \geqslant 2.$$

证明  $\{x_n\}$  收敛或举例说明  $\{x_n\}$  有可能发散.

|     |  |
|-----|--|
| 得分  |  |
| 评阅人 |  |

六、（本题 20 分）对于有界区间  $[a, b]$  的划分

$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ , 其范数定义为  $\|P\| =$

$\max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$ . 现设  $[a, b]$  上函数  $f$  满足 Lipschitz 条

件, 即存在常数  $M > 0$  使得对任何  $x, y \in [a, b]$ , 成立

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ . 定义  $s(f; P) \equiv \sum_{k=0}^n \sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$ . 若

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$  存在, 则称曲线  $y = f(x)$  可求长. 记  $P_n$  为  $[a, b]$  的  $2^n$  等分. 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$  存在.

(2) 曲线  $y = f(x)$  可求长.