第六周训练题解答

一、设 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{2^n}$ 收敛并求和函数.

解：$f'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$，

所以，$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^x\cos(x+\dfrac{n\pi}{4})$.

因为 $\left|\dfrac{f^{(n)}(x)}{2^n}\right|\le(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n\mathrm{e}^x$，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n\mathrm{e}^x$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{2^n}$ 绝对收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{2^n}=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{i(x+\frac{n\pi}{4})}}{(\sqrt{2})^n}=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{x(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}})^n]$$

$$=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{x(1+i)}(1+i)]=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x).$$

二、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，证明：对于 $x\in(0,1)$，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=f(x)\mathrm{e}^{x-\xi}$.

证明：设 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$，则 $F(0)=F(1)=0$. 要证明的式子可转化为 $F'(\xi)=F(x)$.

如果 $f(x)=0$，则 $F(x)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0=F(x)$，结论成立.

如果 $f(x)\neq0$，则 $F(x)\neq0$. 令 $g(t)=F(t)-tF(x)$，则 $g(x)g(1)=-(1-x)F^2(x)<0$，所以存在 $\eta\in(x,1)$，使得 $g(\eta)=0$.

又 $g(0)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $F'(\xi)=F(x)$，也即

$$f'(\xi)+f(\xi)=f(x)\mathrm{e}^{x-\xi}.$$

三、设 $g(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，求 $g(x)$ 的最小值.

解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，$g'(x)=2\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>0$，故当 $x\ge1$ 时 $g(x)$ 单调增加；

当 $x<-1$ 时，$g(x)=-2x\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，$g'(x)=-2\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t<0$，故当 $x\le-1$ 时 $g(x)$ 单调减少；

当 $-1<x<1$ 时，$g(x)=\int_{-1}^{x}(x-t)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$$=x\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_x^1t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-x\int_x^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t.$$

$$g'(x)=\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{x}^{1}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\int_{-x}^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$ 。

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点.

又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>2\int_0^1\mathrm{d}t=2$，$g(0)=2\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{t^2}\Big|_0^1=\mathrm{e}-1$，

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=\mathrm{e}-1$.

四、设 $u_n=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

解：$u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k})$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k})-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 3$.

五、求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+a\sin^2 x}\mathrm{d}x\ge\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a})$，其中 $a>-1$.

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+a\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1+a)\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

记 $\vec{\alpha}(x)=(\sqrt{1+a}\sin x,\cos x)$，$\vec{\beta}(x)=(\sin x,\cos x)$，则有

$$\left|\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\beta}(x)\right|\le\left|\vec{\alpha}(x)\right|\left|\vec{\beta}(x)\right|,$$

即 $\sqrt{(1+a)\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\ge\sqrt{1+a}\sin^2 x+\cos^2 x$.

于是，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+a\sin^2 x}\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{(1+a)}\sin^2 x+\cos^2 x]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{1+a}).$$

六、设 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$.求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}$.

解：令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=n\int_0^{n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{n}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=n^2.$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{1}{2}$

注意到 $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},|x|<1$，两边积分，可得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},|x|\le 1.$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\frac{1}{2}-\arctan 1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

七、已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)>0$， $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2\ge 0,x\in R$，

（1）证明：$f(x_1)f(x_2)\ge f^2(\frac{x_1+x_2}{2}),\forall x_1,x_2\in R$；

（2）若 $f(0)=1$，证明：$f(x)\ge \mathrm{e}^{f'(0)x},x\in R.$

证明：(1) 要证明 $f(x_1)f(x_2)\ge f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，$\forall x_1,x_2\in R$，

只需证明 $\frac{1}{2}\ln f(x_1)+\frac{1}{2}\ln f(x_2)\ge \ln f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)$，$\forall x_1,x_2\in R$，

也即说明 $F(x)=\ln f(x)$ 是凹函数，

$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$，$[\ln f(x)]''=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\ge 0$，

故 $F(x)=\ln f(x)$ 是凹函数，即证.

(2) $F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\xi)}{2}x^2$

$=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}x+\left.\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{2f^2(x)}\right|_{x=\xi}x^2\ge f'(0)x$，

即：$f(x)\ge e^{f'(0)x}$，$x\in R$.

八、计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{t}}{t^2+t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$