第二周

必做题：

一、设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $n+1$ 阶导数，对每对实数 a,b， $a<b$，使得

$$\ln\frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}=b-a,$$

那么，存在一个数 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

二、求解方程 $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ 的实根.

三、已知函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f'''(x)$ 为非零的有限值，如果

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,(0<\theta<1),.$$

求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

四、已知可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq 0$。求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$。(要求：不可用广义洛必达法则)

五、已知函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0, f(a)=0$。求证：存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$。

六、设 $I_n=\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n$.

选做题：

七、已知数列 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k a_n^2=\dfrac{3}{2}$。求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}$.

八、设 $\{a_n\}$ 是一个正的收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_n}}{n+1}\right)^n.$$