



## 2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算  $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$  \_\_\_\_\_, 其中区域  $D$  由直线  $x+y=1$  与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设  $f(x)$  是连续函数, 满足  $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x)dx - 2$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

(3) 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$  平行平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程是 \_\_\_\_\_.

(4) 设  $y = y(x)$  由方程  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$  确定, 其中  $f$  具有二阶导数, 且  $f' \neq 1$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_.

第二题: (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$ , 其中  $n$  是给定的正整数.

第三题: (15 分) 设函数  $f(x)$  连续,  $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ ,  $A$  为常数, 求  $g'(x)$  并讨论  $g'(x)$  在  $x=0$  处的连续性.



**第四题：(15 分)**已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ， $L$  为  $D$  的正向边界，试

证：(1)  $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$

(2)  $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$

**第五题：(10 分)**已知  $y_1 = x e^x + e^{2x}$ ， $y_2 = x e^x + e^{-x}$ ， $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$  是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。



**第六题：(10 分)** 设抛物线  $y = ax^2 + bx + 2\ln c$  过原点，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ 。试确定  $a, b, c$  使此图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积  $V$  最小。



微信公众号：

**第七题：(15 分)** 已知  $u_n(x)$  满足  $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$  ( $n$  为正整数)，且  $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，

求函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  之和。

考研竞赛数学(xwmath)



第八题：(10 分)求  $x \rightarrow 1 -$  时，与  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$  等价的无穷大量.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)