厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

变分法与最优控制方法

谭　忠

目录
CONTENTS

Part 1 源头问题与当今应用

8.1源头问题与当今应用

过去我们遇到了需要**求函数极值的问题**，但有时在现象或事件中需要寻求对那些自变量也是函数的特殊函数求极值，也就是说这种特殊的函数是“函数的函数”，称为**泛函**，求泛函的极值问题称为**变分问题**。

8.1源头问题与当今应用

求解这类变分问题的方法就称为**变分法**，其理论形成了一门数学分支 –**变分学**。

8.1源头问题与当今应用

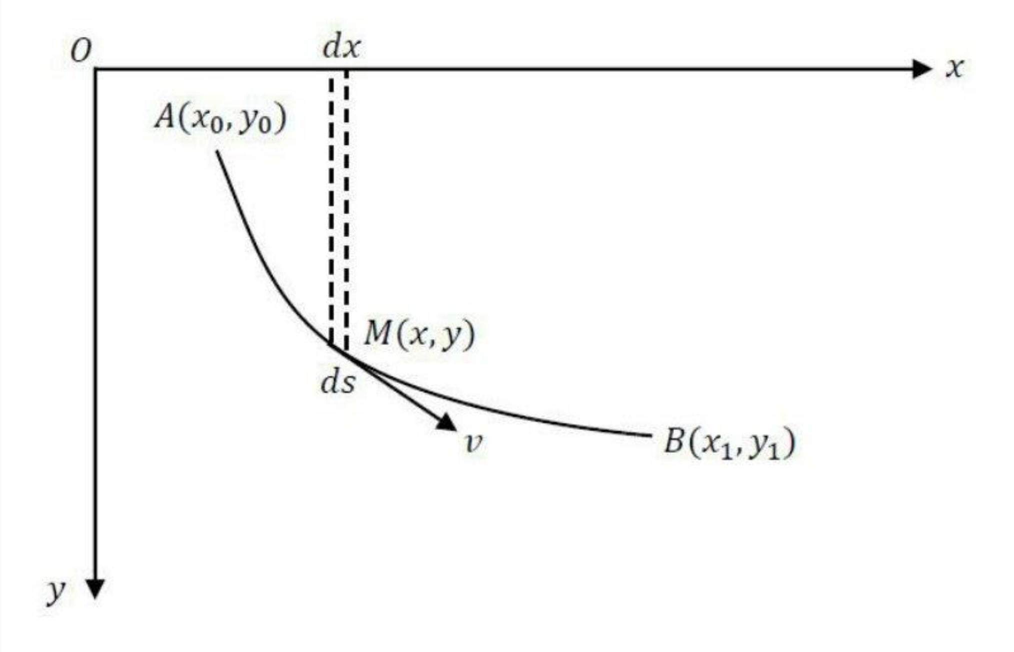
确定某一函数 $z=f(x)$ 的极值问题是催生微积分产生和发展的源头问题之一，而确定一个泛函的极值问题，则是催生变分学诞生和发展的源头问题。历史上曾经出现了许多有名的变分问题。

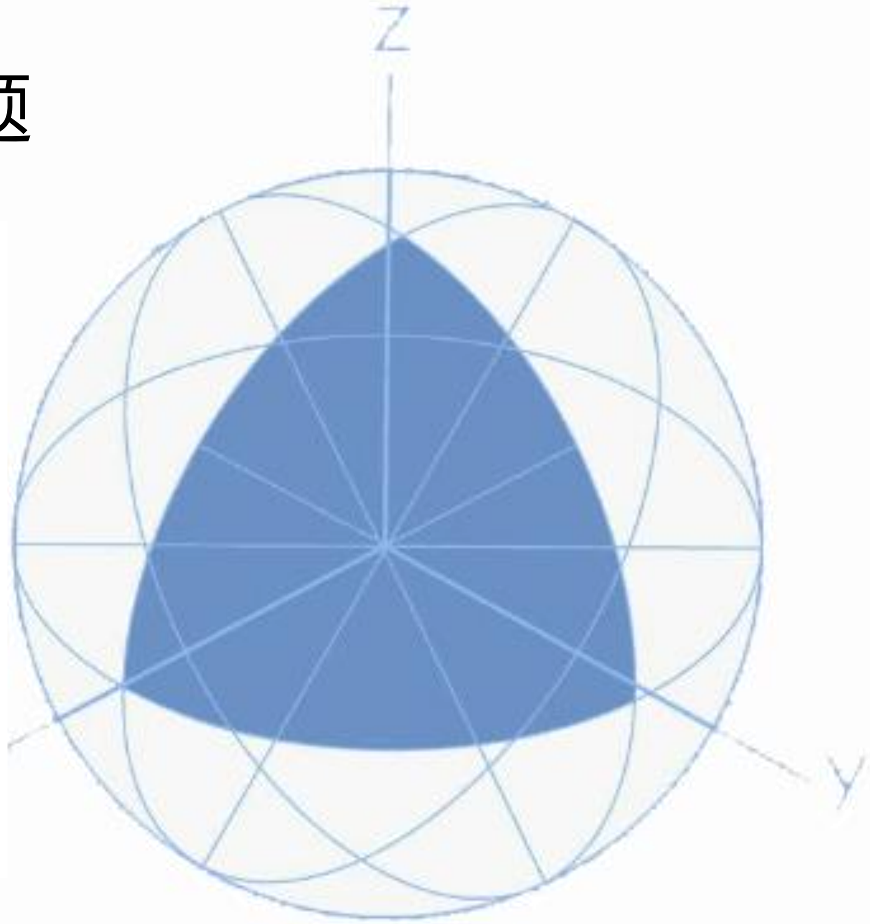
8.1.1催生变分学产生的源头问题

例（最速降线问题） （The Brachistochrone Problem）

约翰·伯努利1696 年提出了一个难题：“设在垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问沿什么曲线下滑，时间最短？”，以此挑战全欧洲的数学家。这就是著名的“最速降线”问题。

8.1.1催生变分学产生的源头问题





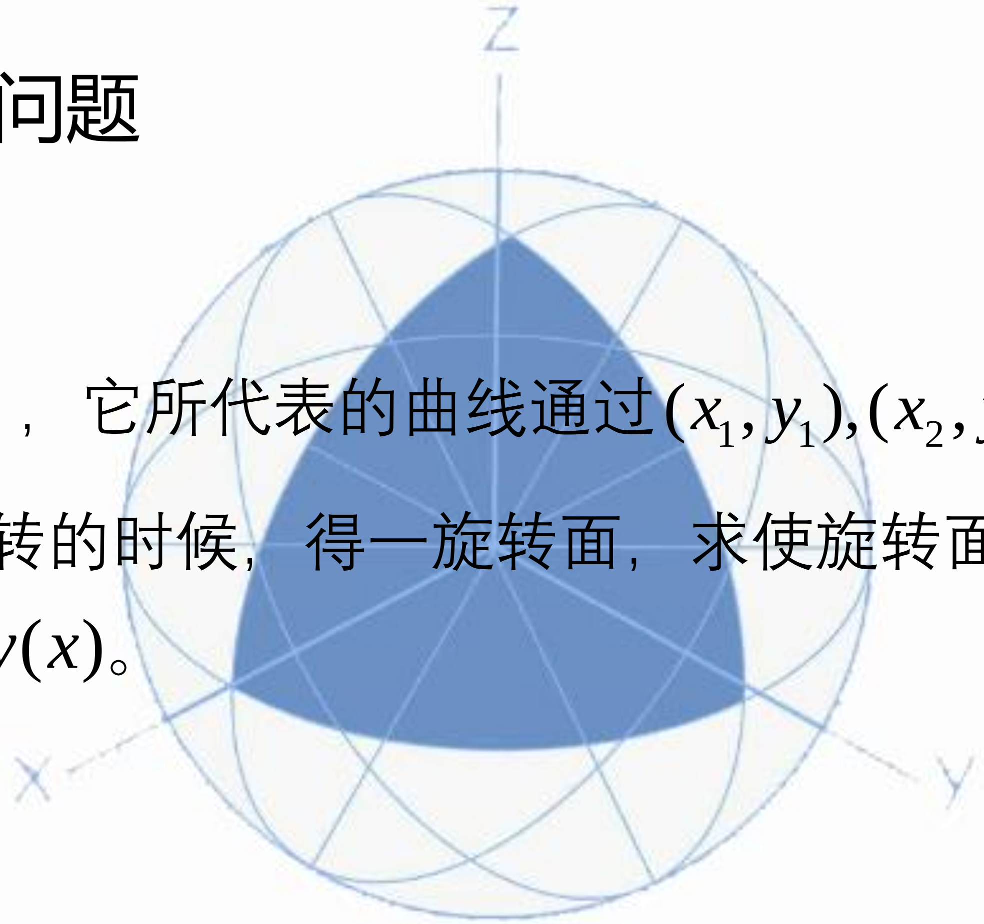
8.1.1催生变分学产生的源头问题

它比通常的求函数的极大极小值不同，它是要求出一个未知函数（曲线），来满足所给的条件。这问题的新颖和别出心裁引起了广泛注意，罗比塔、雅可比•伯努利、莱布尼茨和牛顿都得到了解答。后来欧拉和拉格朗日建立了这一类问题的普遍解法，从而确立了数学的一个分支 –**变分学**。

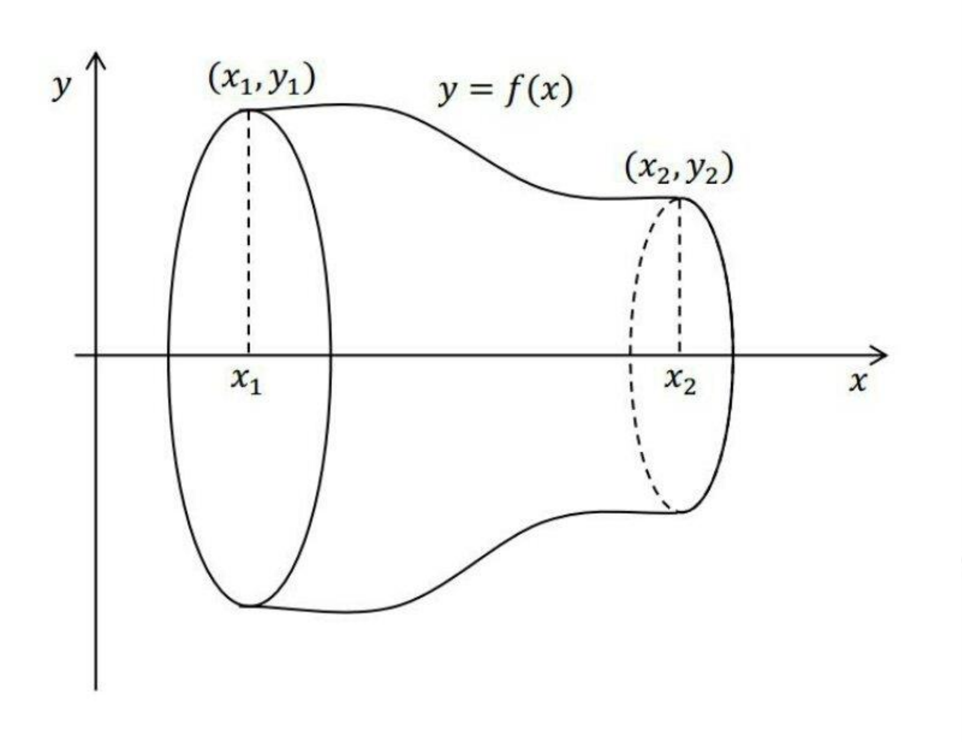
8.1.1催生变分学产生的源头问题

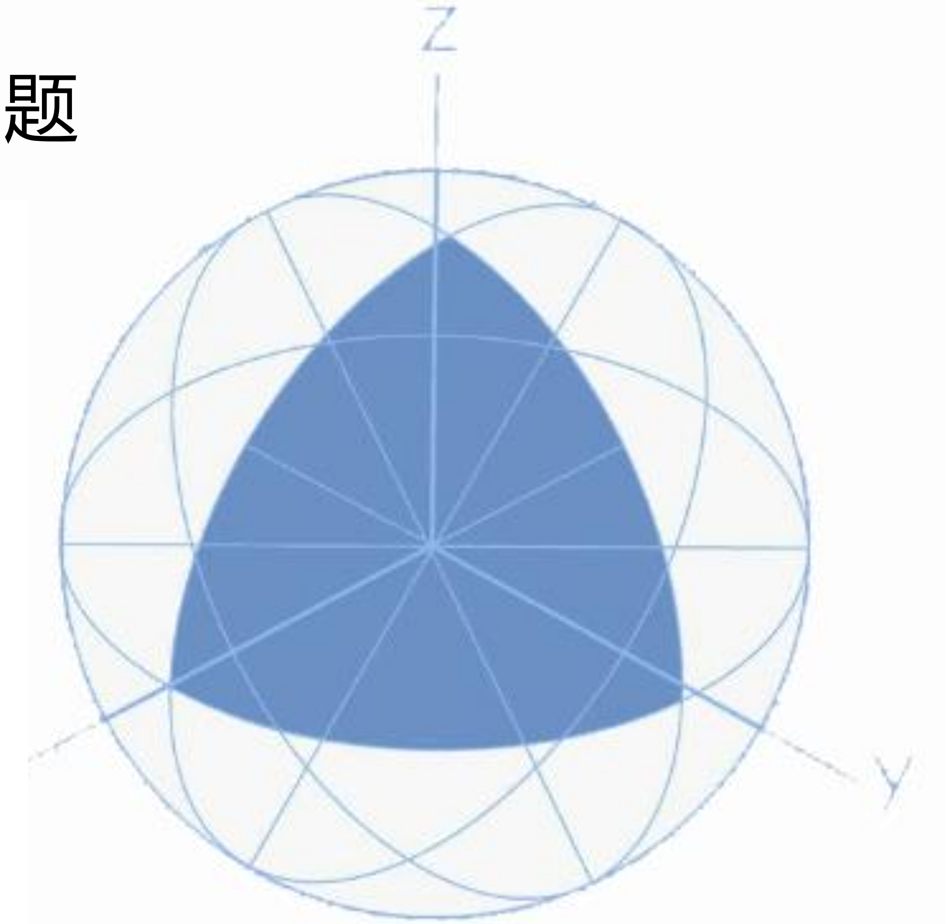
例（最小旋转面问题）

设有一正值函数 $y=y(x)>0$ ， 它所代表的曲线通过$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$两点，当这条曲线绕 x 轴旋转的时候，得一旋转面，求使旋转面的面积最小的那个函数 $y=y(x)$。



8.1.1催生变分学产生的源头问题



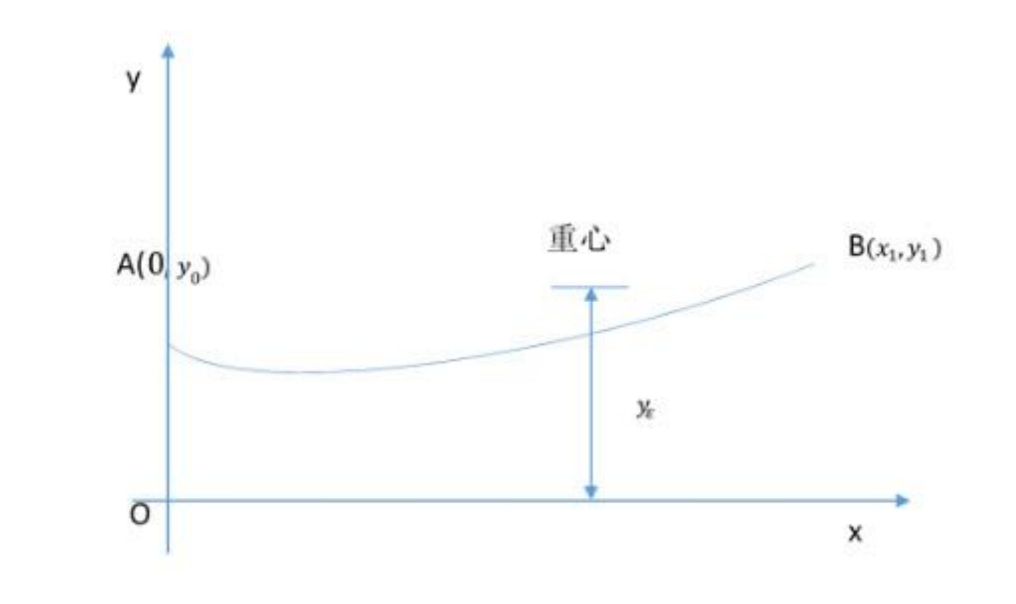


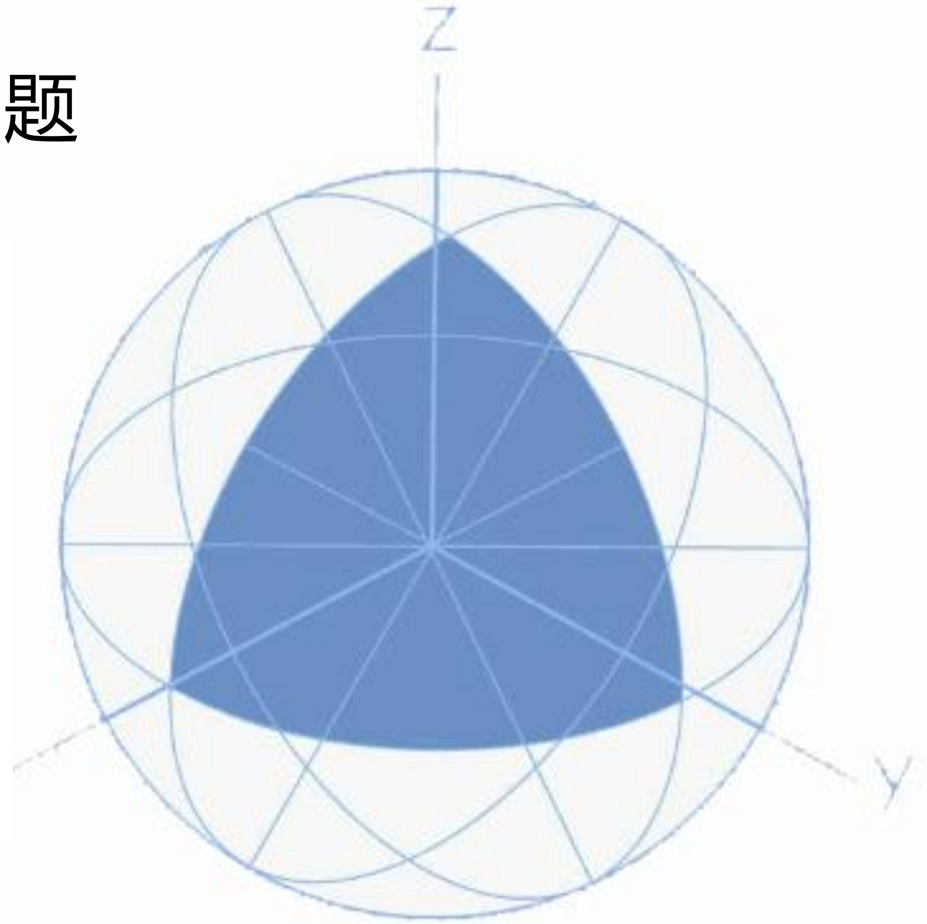
8.1.1催生变分学产生的源头问题

例（悬索形状问题） (The Hanging Chain Problem)

1690年，约翰・伯努利的哥哥雅可比・伯努利提出了如下问题向数学界征求答案，即，固定项链的两端，在重力场中让它自然垂下，问项链的曲线方程是什么。这就是著名的悬链线问题。

8.1.1催生变分学产生的源头问题





8.1.1催生变分学产生的源头问题

在大自然中，除了悬垂的项链外，我们还可以观察到吊桥上方的悬垂钢索，挂着水珠的蜘蛛网，以及两根电线杆之间所架设的电线，这些都是悬链线。伽利略比贝努利更早注意到悬链线，他猜测悬链线是抛物线，但实际上不是。惠更斯在 1646 年（当时17岁），经由物理的论证，得知伽利略的猜测不对，但那时，他也求不出答案。

8.1.1催生变分学产生的源头问题

到1691年，也就是雅可比·伯努利提出悬链线问题的第二年，莱布尼兹、惠更斯(已62岁)与约翰·伯努利各自得到了正确答案，所用方法是诞生不久的微积分。

8.1.1催生变分学产生的源头问题

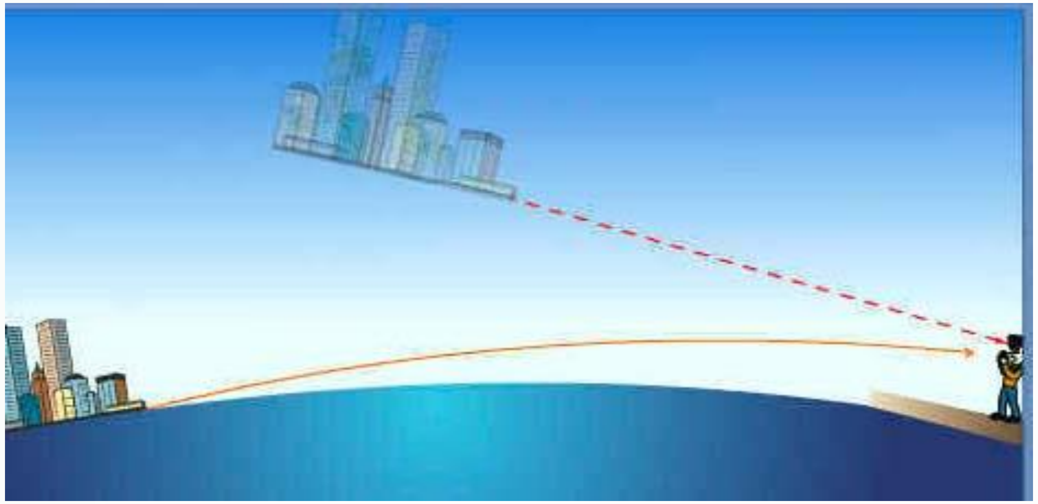
例(费马(Fermat)原理)

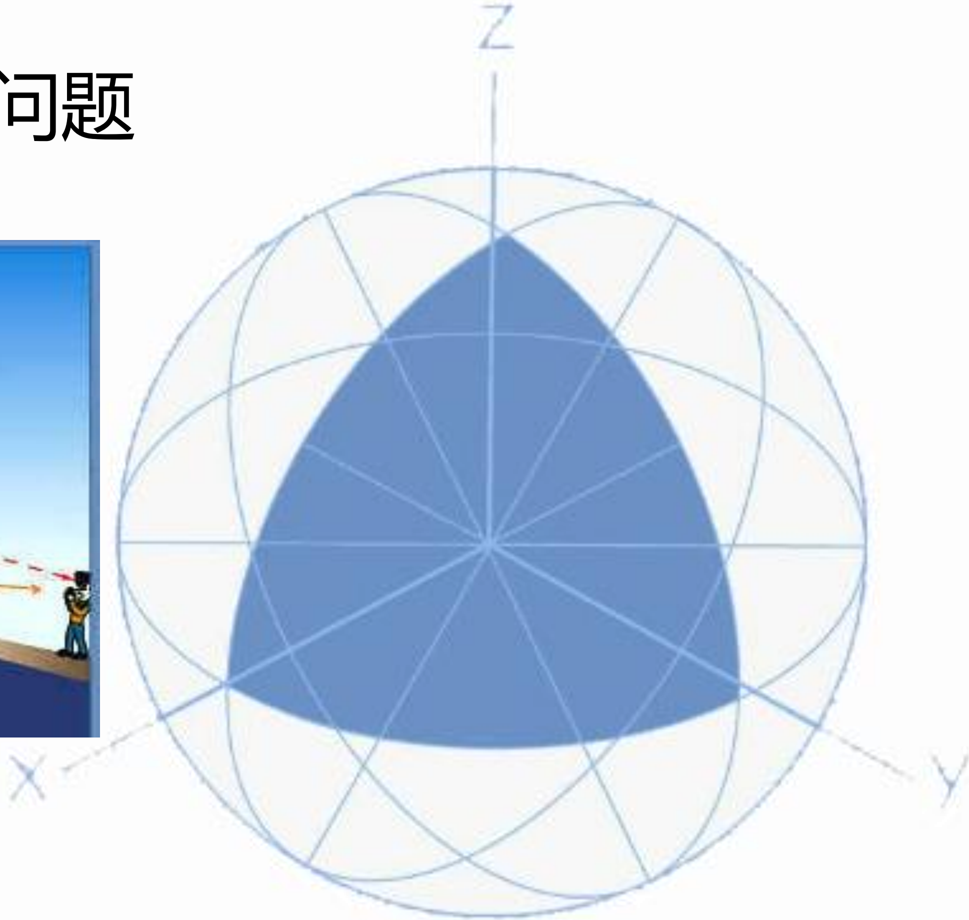
费马原理说：通过介质的光路，使光线通过这一段光路所需时间为最小值。这里涉及折射率，即光在真空中的传播速度与光在该介质中的传播速度之比。材料的折射率越高，使入射光发生折射的能力越强。

8.1.1催生变分学产生的源头问题

设光在某种介质中的速度为v，由于真空中的光速为c，所以这种介质的绝对折射率公式：$n = c / v$。比如海市蜃楼是一种因光的折射而形成的自然现象，它也简称蜃景，是地球上物体反射的光经大气折射而形成的虚像。

8.1.1催生变分学产生的源头问题



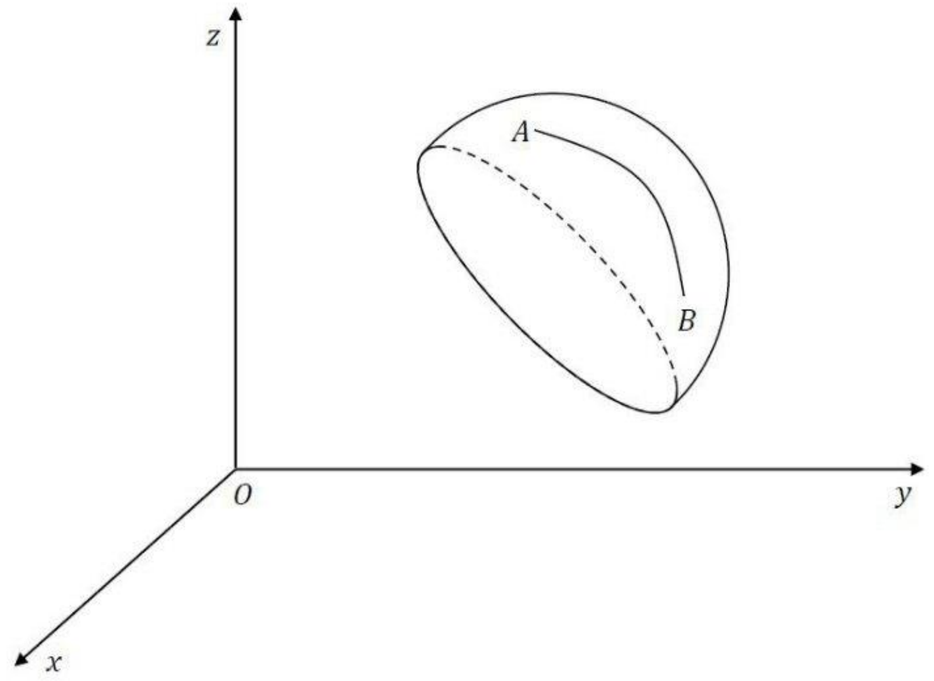


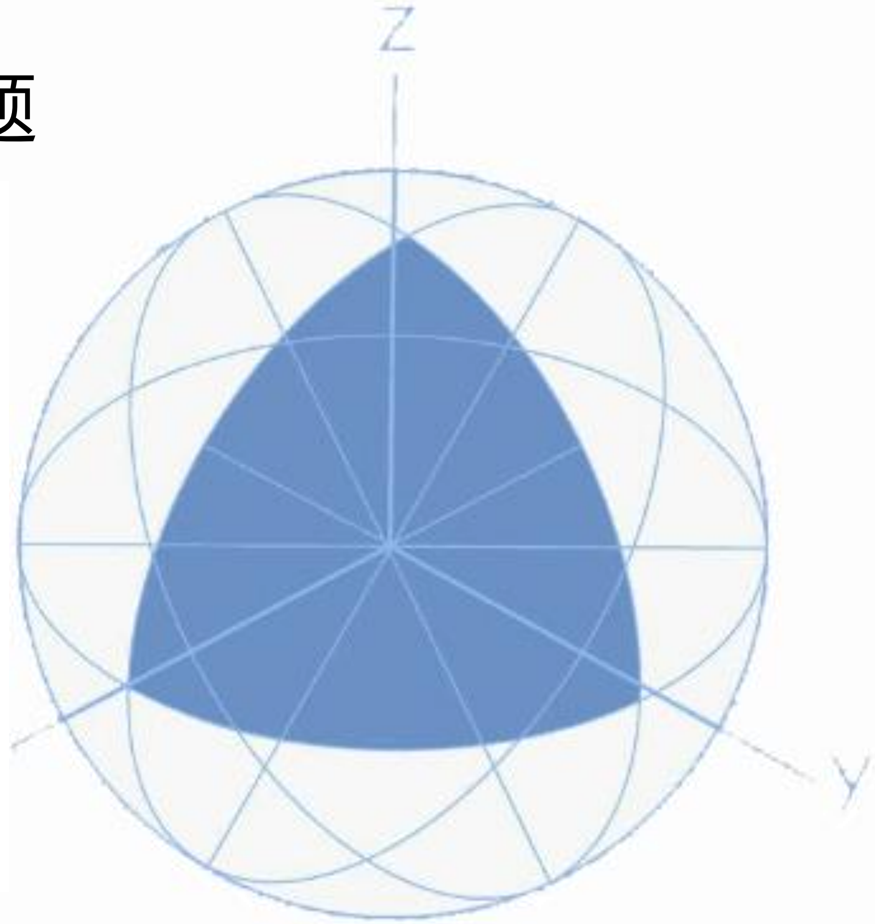
8.1.1催生变分学产生的源头问题

例(测地线(Geodesic line)问题)

设 $\varphi(x,y,z)=0$ 是一已知曲面，求在该曲面上所给两点 (A,B) 间长度最短的曲线。这个最短曲线叫测地线。球面上两点的测地线即为通过两点的大圆。这是一个典型的变分问题。

8.1.1催生变分学产生的源头问题





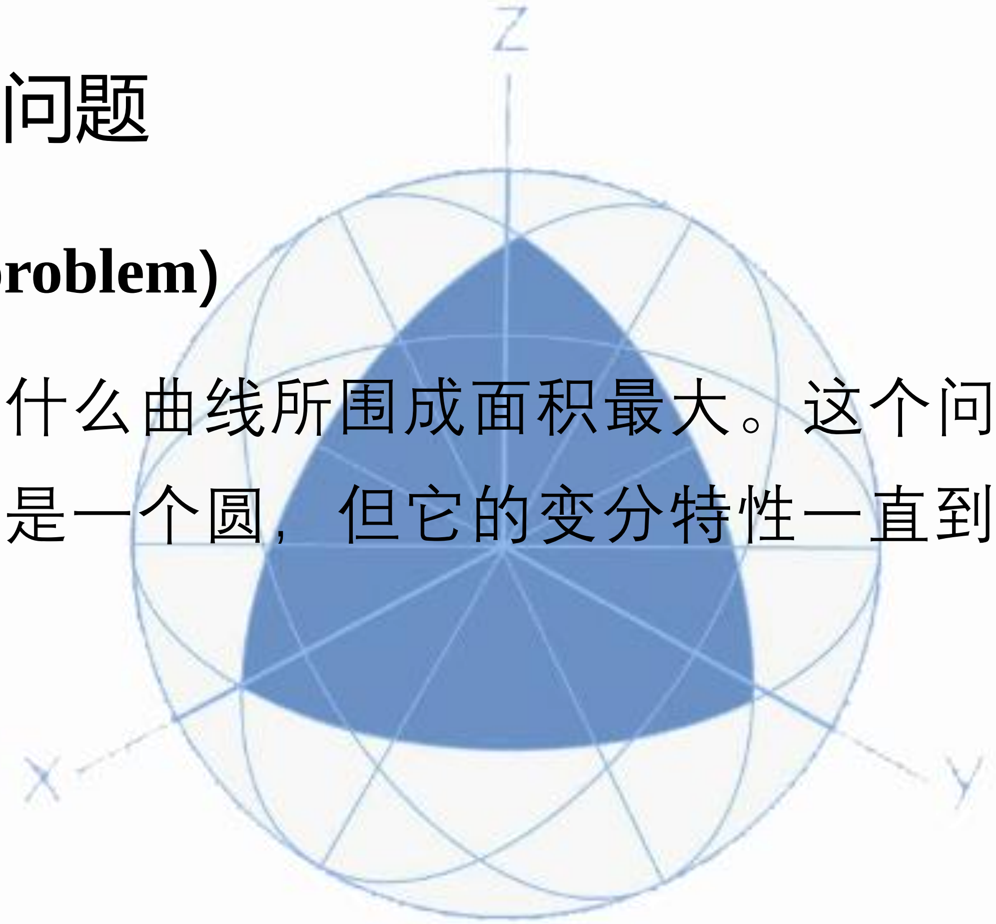
8.1.1催生变分学产生的源头问题

这个问题已经在1697年约翰·伯努利所解决。但这一类问题的普遍理论直到1744年通过欧拉以及 1762 年拉格朗日的努力才解决的。

8.1.1催生变分学产生的源头问题

例(等周问题)(isoperimetric problem)

在长度一定的封闭曲线中，什么曲线所围成面积最大。这个问题在古希腊时已经知道答案是一个圆，但它的变分特性一直到1744 年才被欧拉察觉出来。



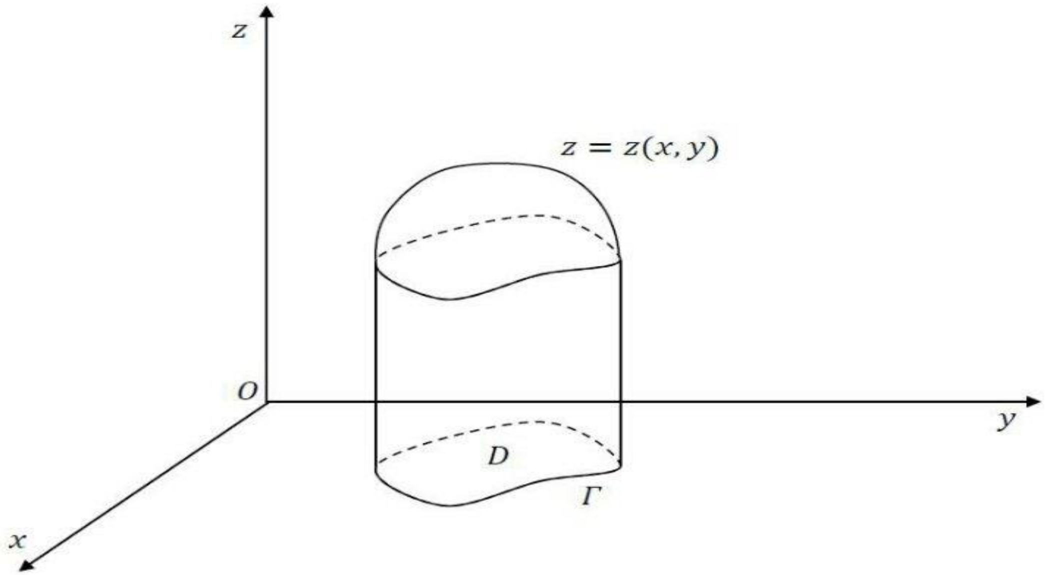
8.1.1催生变分学产生的源头问题

以上所有例子均来自于物理现象，变分模型的另一个来源是几何问题。

如1760年的Lagrange的极小曲面方程和1755年的蒙日（Monge）-安培(Ampere)方程。

8.1.1催生变分学产生的源头问题

例(极小曲面问题)



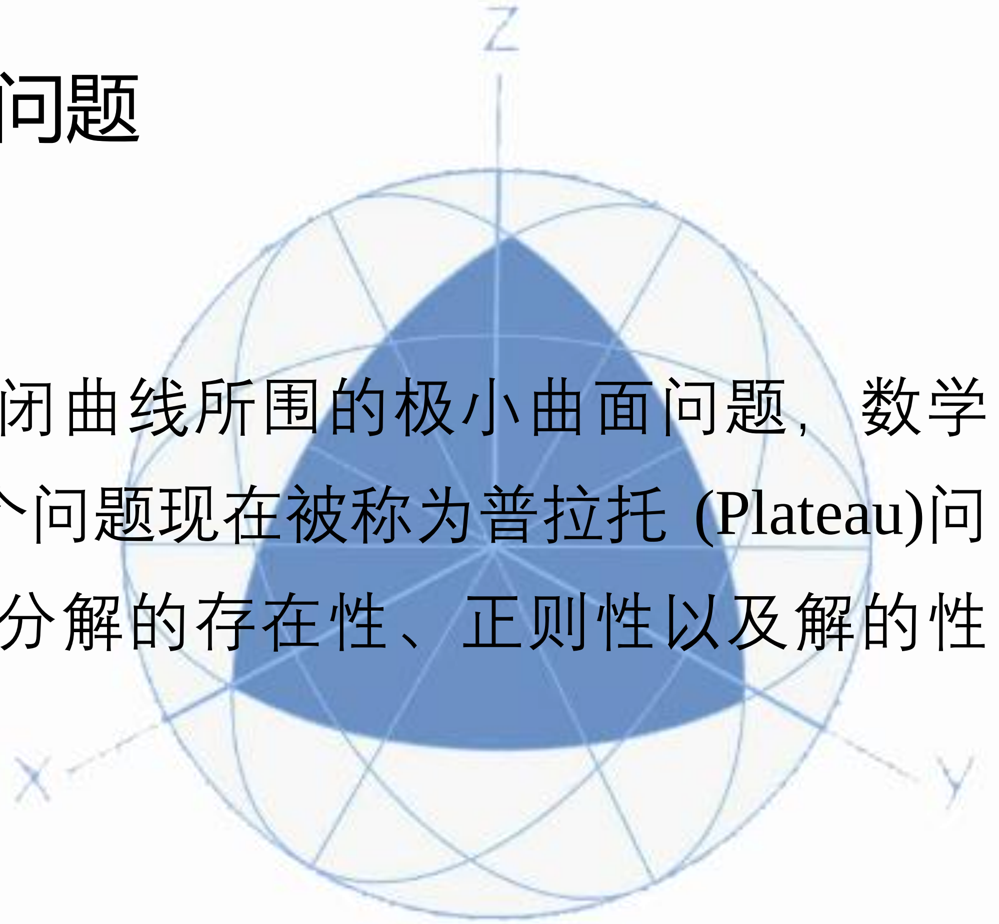
以空间中一条简单的闭曲线为界张成的曲面中有没有一个面积最小的曲面?

8.1.1催生变分学产生的源头问题

背景问题：极小曲面(Plateau)问题

比利时物理学家普拉托 (Plateau)在 1873 年写了一本书，书中指出将具有闭曲线形状的金属丝，浸到甘油溶液或肥皂水中，然后把金属丝取出来，那么肥皂水以金属丝为边界张成的具有最小面积的曲面形状的肥皂薄膜。

8.1.1催生变分学产生的源头问题



于是，为了研究由一条空间闭曲线所围的极小曲面问题，数学家们找到了新的源动力。这个问题现在被称为普拉托 (Plateau)问题，由此导致了关于变分积分解的存在性、正则性以及解的性质的研究。

8.1.2变分学的当今应用

变分法在最优化问题中发挥着重要作用。人们在处理实际问题时，都希望获得最佳的处理结果，如何获取最佳处理结果的问题称为**最优化问题**。

针对最优化问题，如何选取满足要求的方案和措施，使所得结果最佳的方法称为**最优化方法**。

8.1.2变分学的当今应用

最优化问题大体分为两类，一类是求函数的极值；另一类是本章的求泛函的极值。求函数极值的方法称为**数学规划**，包括**线性规划**和**非线性规划**。

求函数极值问题又被称为**静态最优化问题**。

8.1.2变分学的当今应用

求泛函极值问题需要应用变分法、最小 (大)值原理或动态规划来处理，这一类问题称为**动态最优化问题**，通常称为**最优控制问题**。

8.1.2变分学的当今应用

例

物体在液体中作直线运动时它所受到的阻力与运动速度的平方成正比。现假设该物体要在规定的时间$[0,t_f]$内，从起点$x(0)=0$到达终点 $x(t_f)=S$, 且终点速度不受限制，问该物体采用什么运动方式 $x(t)$，它所消耗的能量最少?

8.1.2变分学的当今应用

消耗的能量等于克服阻力所做的功，为速度的平方乘一个比例常数，由于该常数在求极值的过程中不起作用。因此，目标函数为 $\min J = \int_0^{t_f} \dot{x}^2(t)dt$ ，约束(边界)条件为$x(0) = 0, x(t_f) = S$。

该例的目标函数的自变量是表示物体运动方式的时间函数。

8.1.2变分学的当今应用

静态最优化和动态最优化问题并无截然的界限，但是，在数学基础上分属两个不同范畴，静态最优化问题属于运筹学范畴，而动态最优化问题属于变分学范畴，其基础理论框架不一样。

最优化问题的三个基本要素是目标函数、约束条件和求解方法。

8.1.2变分学的当今应用

目标函数：就是用数学方法描述处理问题所能够达到结果的函数，该函数的自变量是表示可供选择的方案及具体措施的一些参数或函数，最佳结果表现为目标函数取极值。在处理实际问题时，通常会受到诸多因素的限制，这些限制的数学描述称为**最优化问题的约束条件**。**求解方法**是使目标函数取极值，所得结果称为**最优解**。

8.1.2变分学的当今应用

例（火箭飞行问题）

设有一质量为 m的火箭作水平飞行，用 $s(t)$表示飞行距离，其升力L与重力mg(g为重力加速度)相平衡，空气阻力R与火箭飞行速度 $v=\dfrac{ds}{dt}$ 及升力 L有右边的关系： $R=av^2+bL^2$

式中 a>0,b>0 为常数，试求火箭飞行的最大距离。

8.1.2变分学的当今应用

例 (产品价格最佳调整)

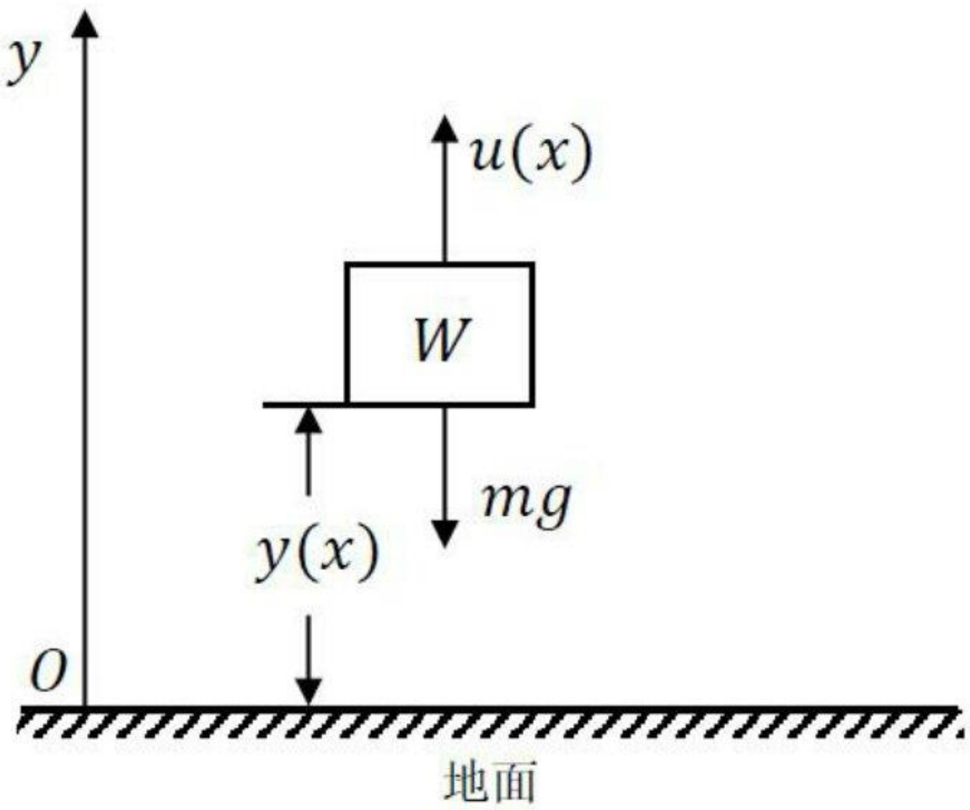
物价管理部门根据市场预测和经济协调发展的需要，决定将A产品的价格$p(t)$由现在的$p_0=70$元调整到$p_1=100$元，便要求各公司自行在一年内完成这一调价任务。某公司经营A产品多年，知道该产品的销售量S和其价格p以及价格变化率p'的关系，利用这种关系为使得总利润最大，如何制定最佳调价方案？

8.1.2变分学的当今应用

例（升降机的最速降落问题）

设有一升降机w，其质量为m。

如右图所示



8.1.2变分学的当今应用

它一方面受重力的作用，其值为mg（g为重力加速度），另一方面受控制器作用力的作用，其值为$u(x)$，并且$u(x)$满足下列不等式

$$u(x) \le u_M$$

其中，u_M 为大于 mg的常数。

设$y(x)$是升降机W离地面的高度，$\dot{y}(x)$是升降机W的垂直运动的速度 。

8.1.2变分学的当今应用

假定在初始时刻 x_0 时，升降机 W 离地面的高度与垂直运动的速度分别为

$$y(x_0) = y_{10}, \dot{y}(x_0) = y_{20}$$

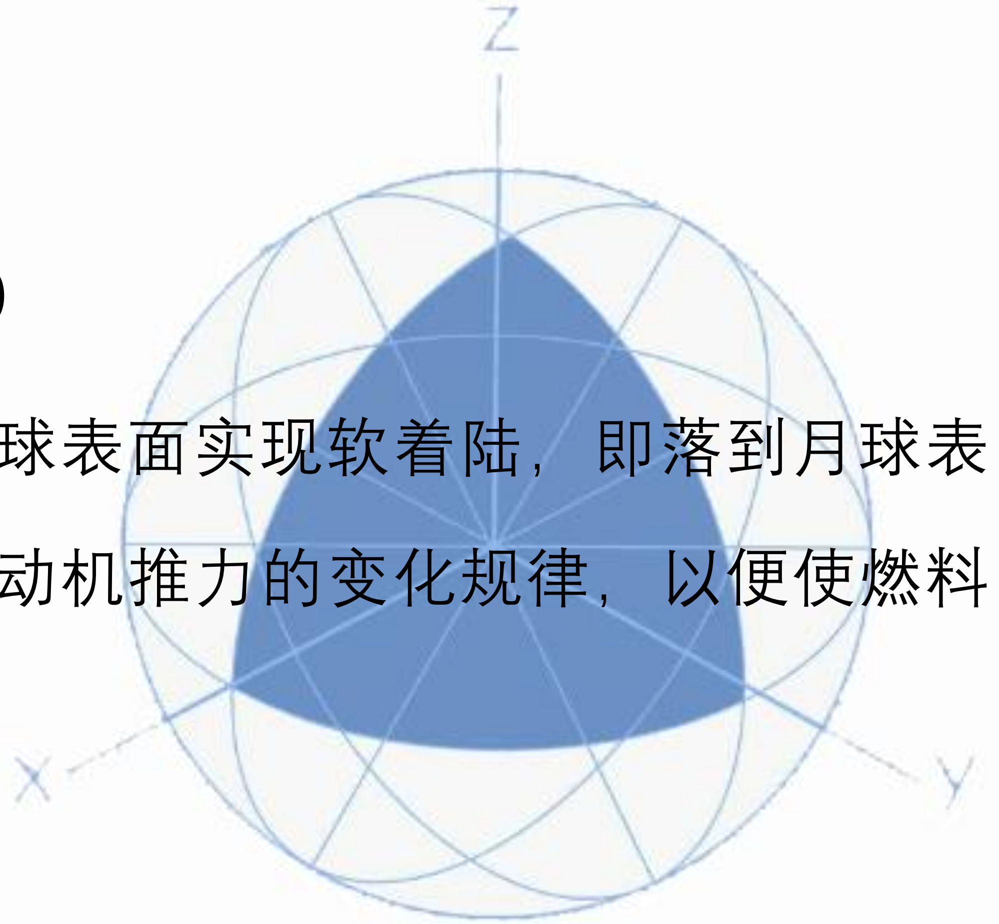
问：如何选择控制作用 $u(x)$ 的变化规律使得升降机 W 最快地到达地面，并且要求到达地面的速度为零，即要求

$$y(x_f) = 0, \dot{y}(x_f) = 0$$

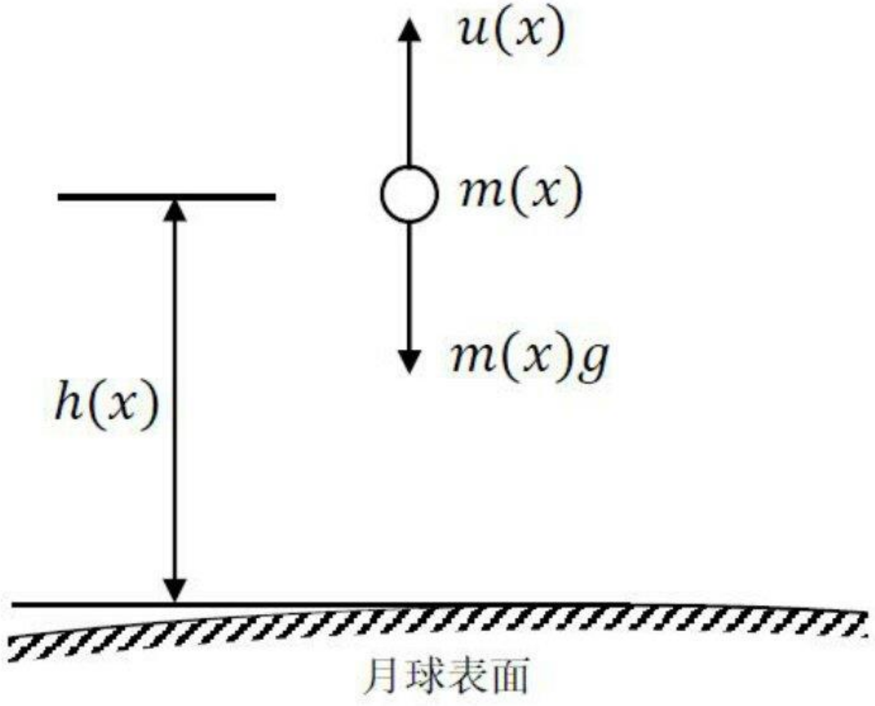
8.1.2变分学的当今应用

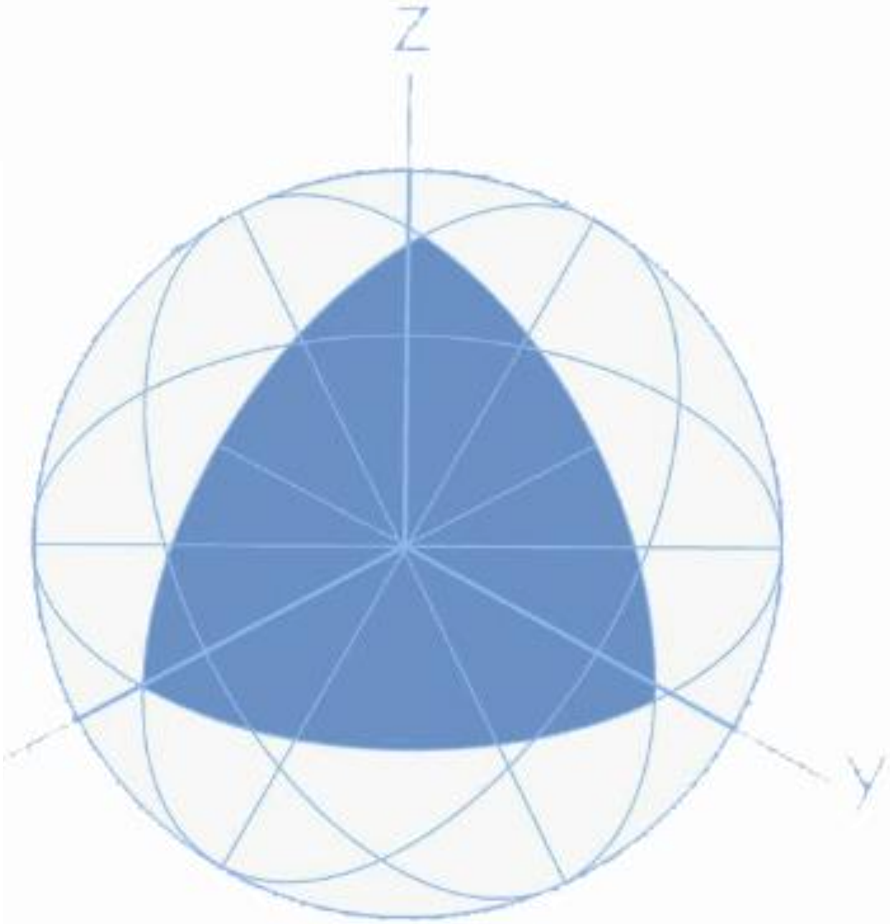
例(登月舱的月球软着陆问题)

为了使宇宙飞船登月舱在月球表面实现软着陆，即落到月球表面的速度为零，需要选择发动机推力的变化规律，以便使燃料消耗量为最少。如下图所示



8.1.2变分学的当今应用





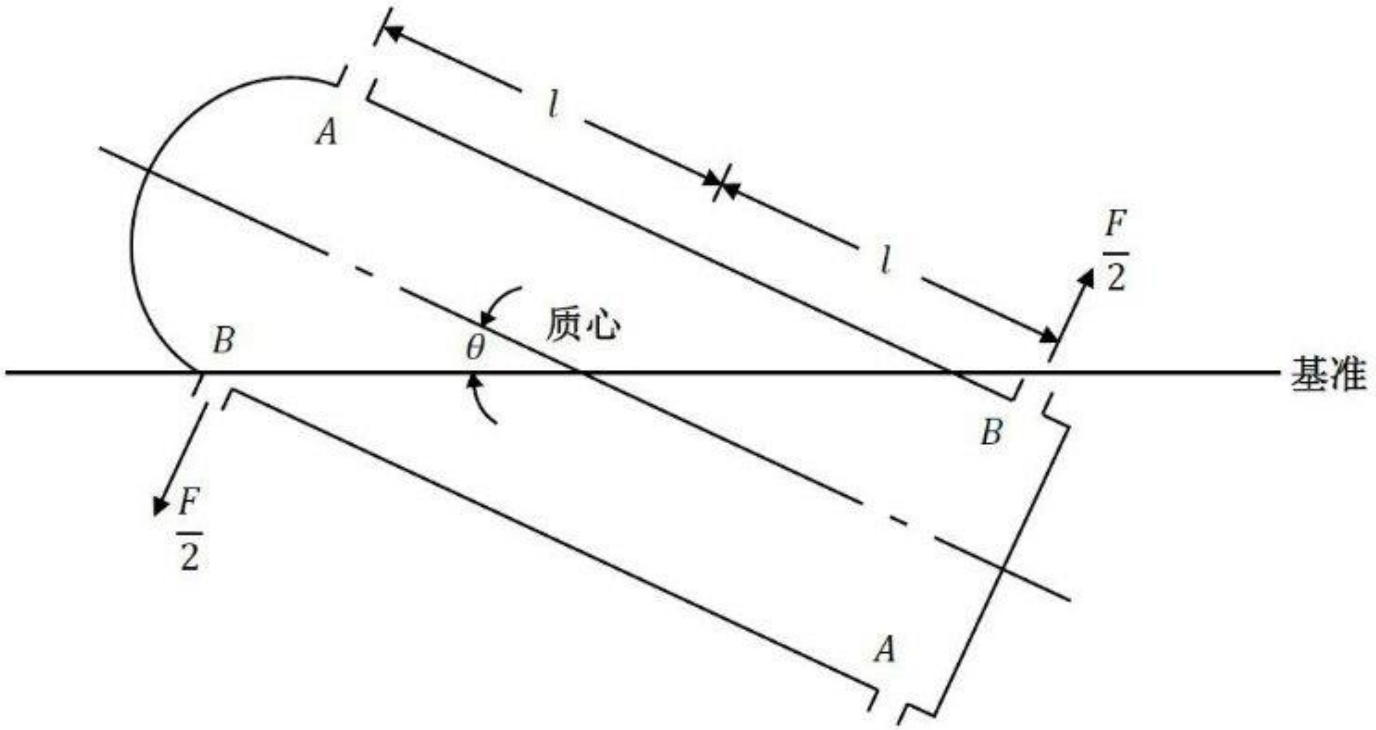
8.1.2变分学的当今应用

设登月舱的质量为$m(t)$，它离月球表面的高变为 $h(t)$，垂直运动速度为$v(t)$，发动机的推力为 $u(t)$，月球表面的引力加速度为常数 g，设登月舱自身的质量为 M_1，所携带的燃料质量为M_2，初始高度为h_0，初始的垂直速度为v_0，登月舱自某时刻 $t_0=0$开始进入登月着陆过程，问如何选择发动机推力的变化规律，以使燃料消耗量为最少。

8.1.2变分学的当今应用

例（姿态控制问题）

右图是人造卫星姿态控制示意图。



8.1.2变分学的当今应用

小喷嘴喷出燃料时产生的反作用力可以使卫星体旋转并进入要求的姿态。用 A 和 B 表示的两组斜对称配置的喷嘴是成对工作的。

如果在某时刻 t_0 卫星体偏离要求的姿态一个 $\theta(t_0)$ 角，并且正以 $\dot{\theta}(t_0)$ 的角速度继续偏离。要求从 t_0 时刻起加上适当的控制力，使卫星经过最短时间重新回到要求的姿态。

8.1.2变分学的当今应用

如果用t_f表示终端时间，则要求$\theta(t_f)=0,\dot{\theta}(t_f)=0$，并且使$J=t_f-t_0$最小。

这就是上述姿态最优控制问题的性能泛函 (指标)。这是一个最短时间问题。在姿态控制问题中还可以从另外一种观点对控制系统提出要求，例如要求在控制过程中消耗燃料最少。

8.1.2变分学的当今应用

反作用力F是由于从小喷嘴喷射出高速燃料（推进剂)产生的，其大小与单位时间里喷射出燃料的数量成正比。若由A喷射出时F为正，则由B喷射出时F为负．但是，单位时间里消耗的燃料总是正的，它与F的绝对值成正比，因而与 $u(t)$ 的绝对值也成正比。

8.1.2变分学的当今应用

于是，最省燃料问题的性能泛函可以定义为

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

达到最小。这是一个最少燃料问题。如果在要求少消耗燃料的同时，还要兼顾时间也要短，那么，性能泛函可以定义为

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_f} [\rho + |u(t)|] dt$$

8.1.2变分学的当今应用

式中权系数ρ的大小表示了燃料同时间的相对重要性。若要求动作快，则加大ρ；若强调省燃料，则减小ρ。基于性能指标的最优控制问题，称为燃料-时间问题。

许多现实问题都可以应用变分方法建模解决。

Part 2

变分思想与建模方法

8.2.1变分模型的构建

一、泛函的定义

回顾**函数的定义**：如果对于变量 x 的某一区域中的每一x值，y 有一值与之对应，或者数y 对应于x 的关系成立，则称变量y 是变量 x 的函数，即 $y=y(x)$ 。

8.2.1变分模型的构建

具有某种共同性质的函数构成的集合称为函数类(Function Class)。

例如，在例8.1中，所有平面曲线都通过点 A 和 B ，而过点 A 和 B 就是这个函数集合所具有的共同性质。

8.2.1变分模型的构建

已经学过的常见函数类有:

在开区间(x_0, x_1)内连续的函数集，称为在区间(x_0, x_1)上的连续函数类，记为$C(x_0, x_1)$。

8.2.1变分模型的构建

在闭区间$[x_0, x_1]$上连续的函数集，称为在区间$[x_0, x_1]$上连续函数类，记为$C[x_0, x_1]$，其中函数在区间的左端点右连续，在区间的右端点左连续。

8.2.1变分模型的构建

在开区间(x_0,x_1) 内n 阶连续可微的函数集，称为在区间(x_0,x_1)上n阶连续可微的函数类，记为$C^n(x_0,x_1)$，并约定$C^0(x_0,x_1)=C(x_0,x_1)$。

如果对于每个n，都有$y(x)\in C^n(x_0,x_1)$，那么$y(x)$ 称为无穷可微函数，记作$y(x)\in C^\infty(x_0,x_1)$。

8.2.1变分模型的构建

在闭区间 $[x_0,x_1]$上 n 阶连续可微的函数集，称为区间 $[x_0,x_1]$ 上 n阶连续可微的函数类，记为 $C^n[x_0,x_1]$，其中函数的 n 阶导数在区间端点单边连续，并约定 $C^0[x_0,x_1]=C[x_0,x_1]$

对于记号 C和 C^n，同样也适用于多元函数，只要把上述区间换成函数所依赖的区域。

8.2.1变分模型的构建

泛函的定义：

设 S 为一函数集合，若对于每一个函数$y(x)\in S$，有一个实数J与之对应，则称J是对应在S上的泛函，记作$J[y(x)]$。S称为J的**容许函数集**。

8.2.1变分模型的构建

即泛函就是“函数的函数”。

函数是变量和变量的关系，泛函是变量与函数的关系。

如果一个函数类中的某个函数能够使某个泛函取得极值或可能取得极值，则该函数类称为变分问题的**容许函数类** (Admissible Function Class)。

8.2.1变分模型的构建

容许函数类对应的曲线（曲面)称为**容许曲线（曲面)类(或族)**。

函数类中能使泛函取得极值或可能取得极值的函数(或曲线)称为**极值函数**或**极值曲线**，也称为**变分问题的解**。

8.2.1变分模型的构建

如果可取曲线类的端点预先给出且为定值，则所求则所求泛函极值的问题称为**固定端点的变分问题**(Variational Problem with Fixed end point)。

比如：在 $C([a,b])$ 上考虑积分 $J[y(x)]=\int_a^b y(x)dx$，任取一个在 $C([a,b])$ 上连续的函数 $y(x)$ 有唯一确定的值与它对应，J 可视为 $y(x)$ 的函数，因此是泛函。

8.2.1变分模型的构建

再比如：给定函数 $y(x)$, $x_1 \le x \le x_2$ ，在 $x = x_a(x_1 \le x_a \le x_2)$ 时的值 $J = y(x)|_{x=x_a}$ 为一泛函。因为当函数$y(x)$给定后, $y(x_a)$是一确定的值。

比如：考察函数的不定积分 $J = \int_0^x y(\tau)d\tau$, 因为当函数 $y(x)$ 给定后，上述不定积分仍是一个函数，而不等于某个确定的值，因此不是泛函。

8.2.1变分模型的构建

变分法中有三类基本问题，即拉格朗日（Lagrange)问题、马耶耳 (Mayer)问题和波尔札 (Bolza)问题。

这三类问题在最优控制问题中都会遇到，它们之间的主要区别在于性能泛函的形式不同。

8.2.1变分模型的构建

(1)拉格朗日问题

拉格朗日问题的性能泛函表示为

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_f} F[x,y(x),y'(x)]dx$$

这里$F[x,y(x),y'(x)]$是三个独立变量x, $y(x)$, $y'(x)$在区间$[x_0,x_f]$上的已知函数，且二阶连续可微。

前边例子提到的最小燃料问题就是拉格朗日问题。

8.2.1变分模型的构建

(2)马耶耳问题

马耶耳问题的性能泛函表示为

$$J[y(x)] = \Phi_1(x_f, y(x_f)) - \Phi_2(x_0, y(x_0))$$

前边的例子最短时间控制问题就是马耶耳问题的特例

8.2.1变分模型的构建

(3)波尔札问题

波尔札问题的性能泛函是

$$J[y(x)] = \Phi_1(x_f, y(x_f)) - \Phi_2(x_0, y(x_0)) + \int_{x_0}^{x_f} F[x, y(x), y'(x)]dx$$

在姿态控制问题中，如果在要求少消耗燃料的同时，还要兼顾时间也要短，那么性能泛函就是波尔札问题的一个实例。

8.2.1变分模型的构建

从上面的分析可以看出，拉格朗日问题的性能泛函是一个积分，马耶耳问题的性能泛函是关于初始时间、初始状态和终端时间、终端状态的某个函数，而波尔札问题的性能泛函则是两者之和。

8.2.1变分模型的构建

可见，波尔札问题具有更一般的形式。但是，在这三类问题之间常可互相转化。

比如， 把泛函 $J = x_f - x_0$ 改写成 $J = \int_{x_0}^{x_f} dx$ 。

8.2.1变分模型的构建

二、固定边界变分模型的构建

(1)最简泛函的变分模型的构建

具有一个一元函数的泛函的变分模型称为最简泛函的变分模型，建立这样的变分模型只用到一元微积分。

8.2.1变分模型的构建

$F[x,y(x),y'(x)]$是三个独立变量x, $y(x)$, $y'(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的已知函数，且二阶连续可微。则泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y(x),y'(x)]dx$$

称为**最简单的积分型泛函**，简称**最简泛函**。

8.2.1变分模型的构建

因对F的积分得到的$J[y(x)]$值取决于函数$y(x)$的形式，故$J[y(x)]$是$y(x)$的泛函，也称为**变分积分**。

$J[y(x)]$不仅仅只是$y(x)$的函数，还是x和$y'(x)$的函数，但是只要求出了$y(x)$, $y'(x)$也能求出来了，于是只需要写成为$J[y(x)]$的形式。下面我们就前面提出的问题，应用微积分思想建立变分模型。

8.2.1变分模型的构建

例 最速降线问题（brachistochrone）的建模:

设A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连结A和B的平面曲线中，求一曲线，使质点仅受重力作用，初速度为零时，沿此曲线从A滑行至B的时间最短。

8.2.1变分模型的构建

【问题分析】

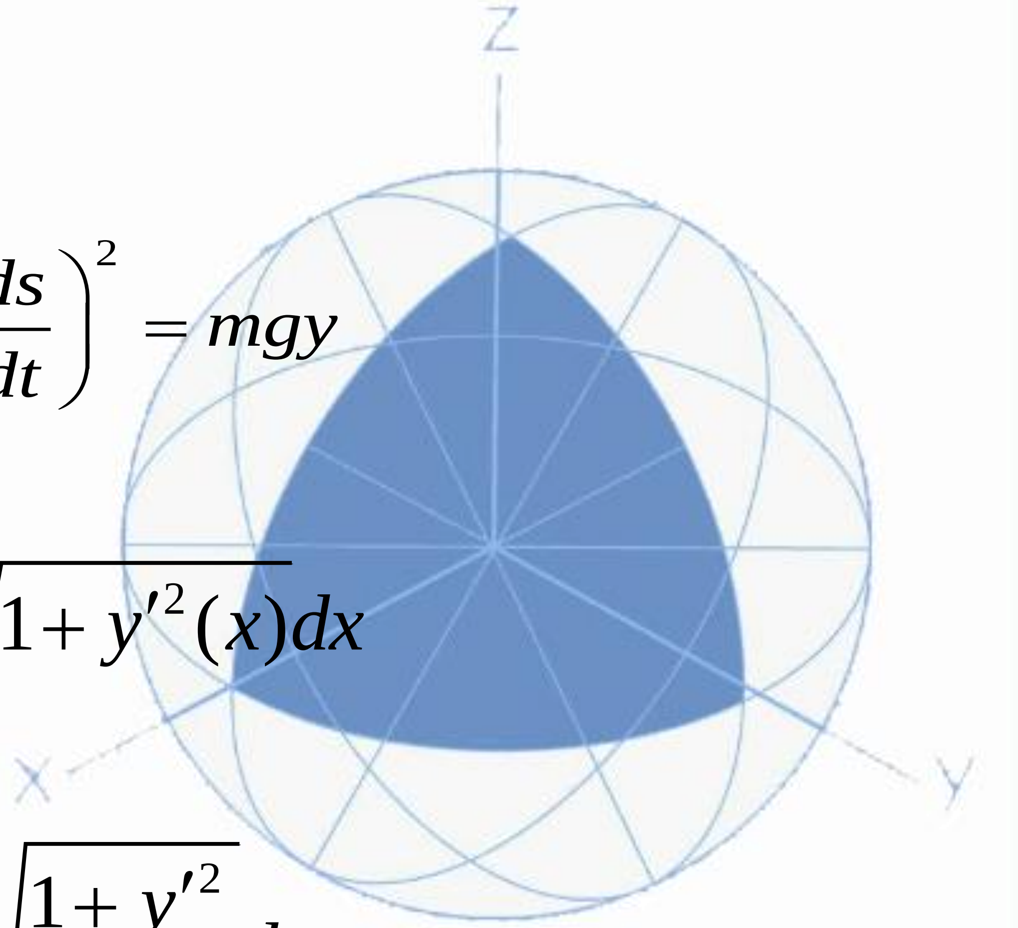
显而易见，最快的路线决不是连结A，B两点的直线段．当然，这条直线段在A，B两点间的路程最短，但沿这条直线自由下落时，运动速率的增长是比较慢的。如果我们取一条较陡的路程，则虽然路程是加长了，但在路程相当大的一部分中，物体的运动速率较大，所需时间反而较少。

8.2.1变分模型的构建

【模型构建】

在过 A 和 B 两点的铅直平面上建立坐标系，将 A 点取为坐标原点，B 点取 $B(x_1, y_1)$ ， 根据能量守恒定律，质点在 A 点的势能将转化为动能，设在曲线 $y(x)$ 上任一点处的速度 $\dfrac{ds}{dt}$ (s 为弧长)满足下式：

8.2.1变分模型的构建



$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mgy$$

弧长微元可以表示为

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

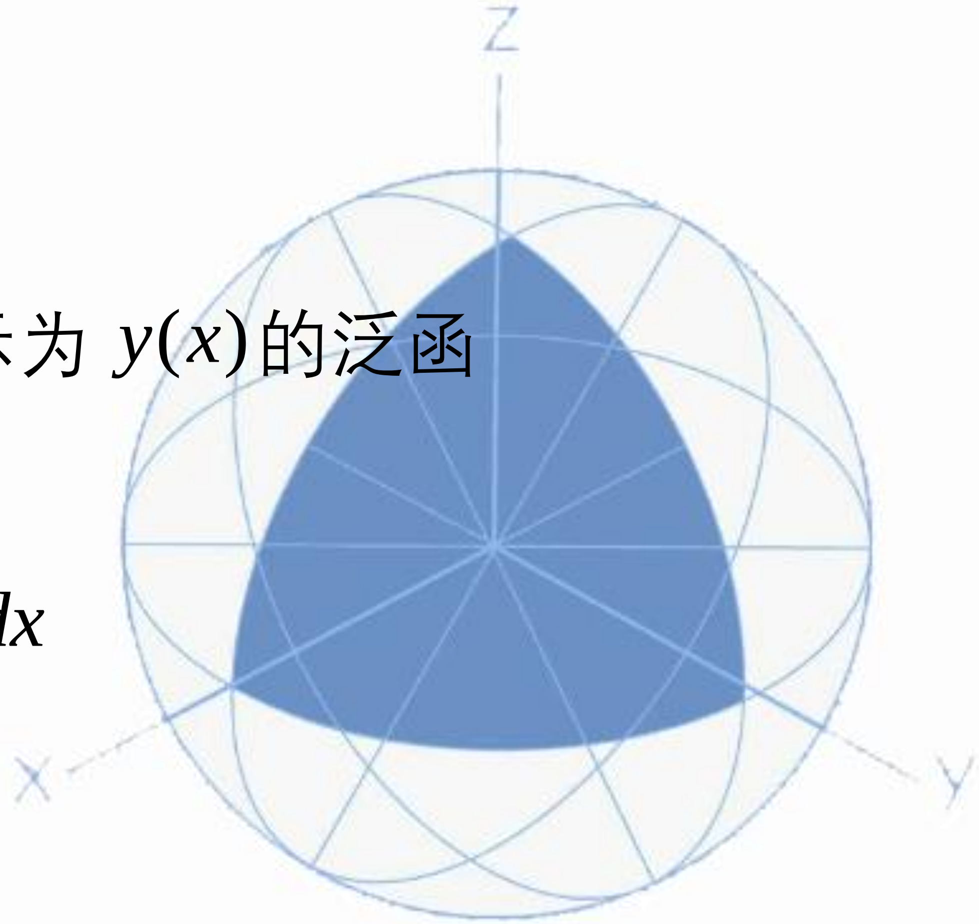
代入动势能守恒式中得

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}dx$$

8.2.1变分模型的构建

于是质点滑行时间应表示为 $y(x)$ 的泛函

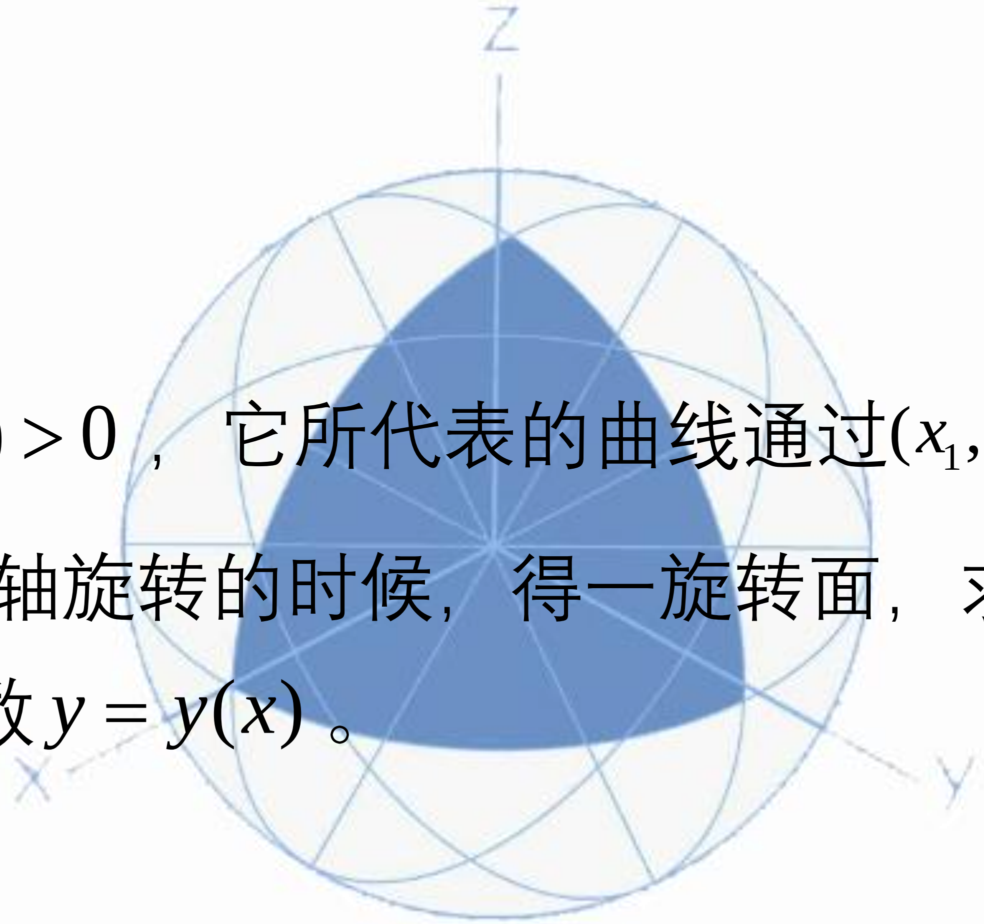
$$J[y(x)] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$



8.2.1变分模型的构建

例 最小旋转面问题建模

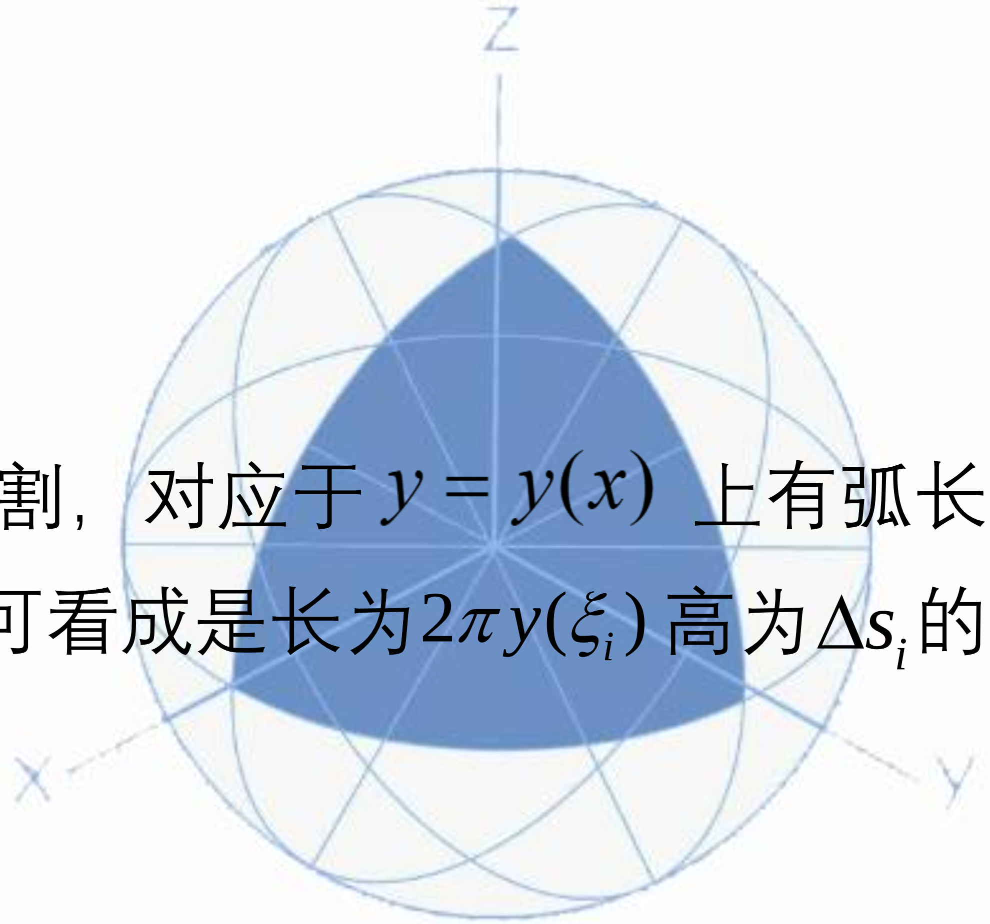
设有一正值函数 $y = y(x) > 0$ ， 它所代表的曲线通过$(x_1, y_1),(x_2, y_2)$两点，当这条曲线绕 x 轴旋转的时候，得一旋转面，求使旋转面的面积最小的那个函数$y = y(x)$。



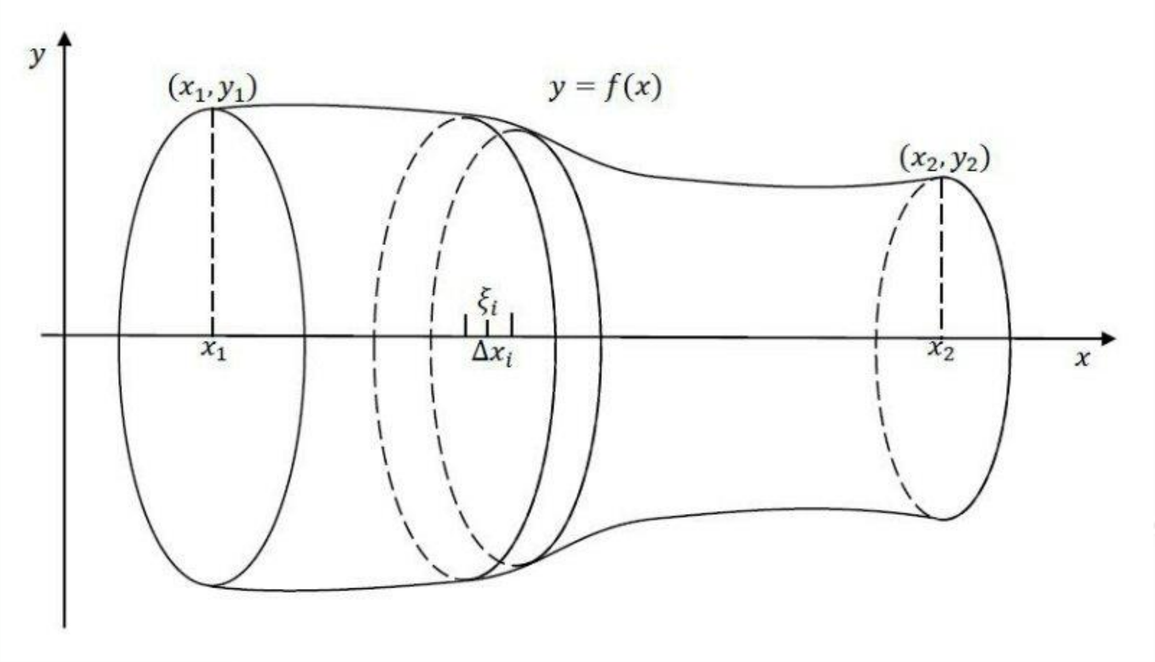
8.2.1变分模型的构建

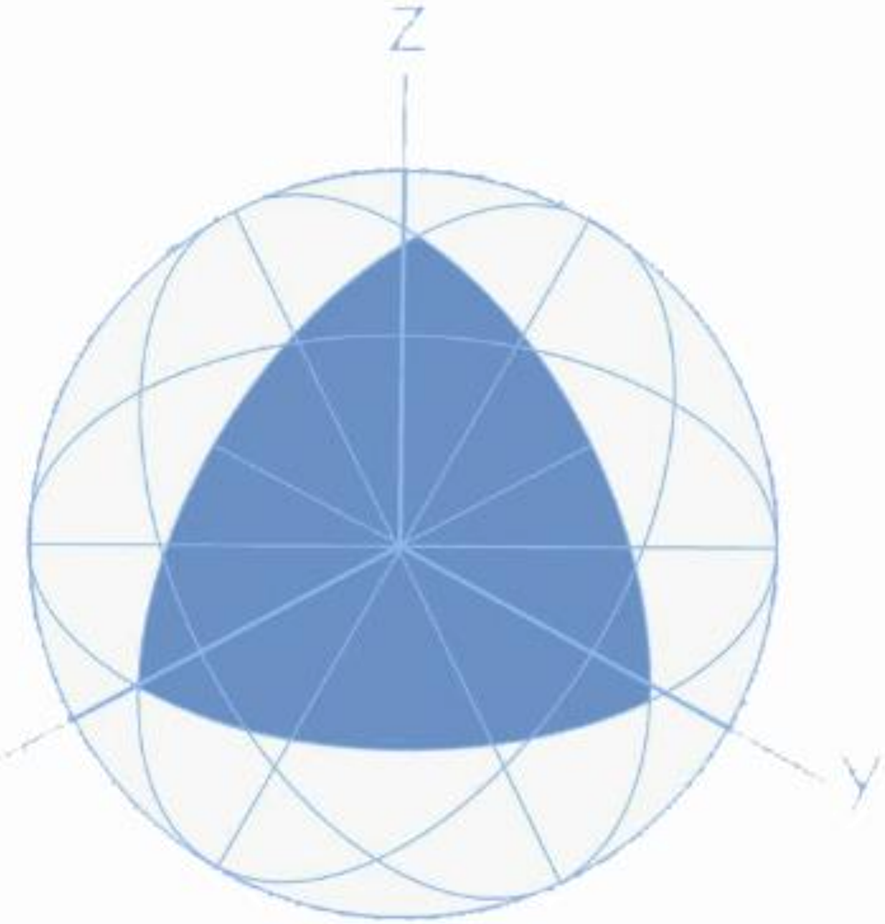
【问题分析】

在$y = y(x)$上对$[x_1, x_2]$分割，对应于$y = y(x)$上有弧长微元为ΔS_i，它旋转一周可看成是长为$2\pi y(\xi_i)$高为Δs_i的长方形带状物体。

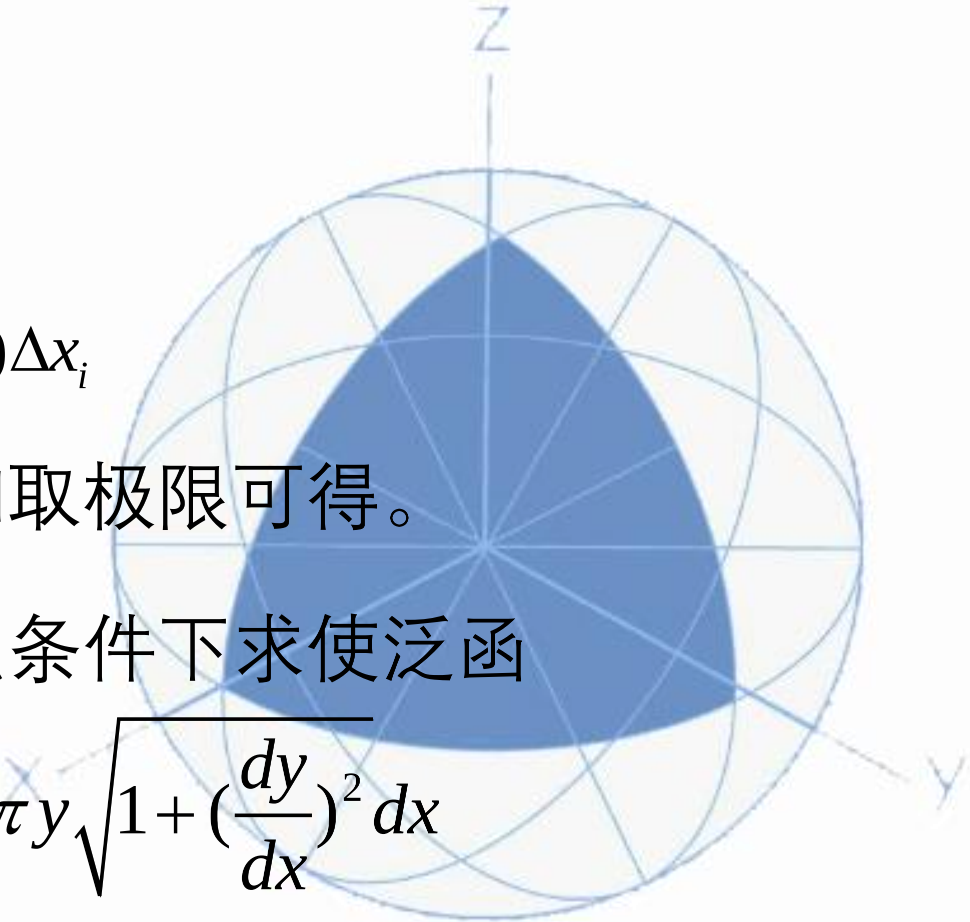


8.2.1变分模型的构建





8.2.1变分模型的构建



因此，微元面积为 $2\pi y(\xi_i)\Delta x_i$

将所有微元面积累积求和取极限可得。

即在 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ 的端点条件下求使泛函

$$S=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

最小的函数 $y(x)$。

8.2.1变分模型的构建

例 悬索形状问题建模

求长度已知的均匀悬索的悬线形状。

【问题分析】

悬线形状是由悬线达到最低位能的要求来决定的，而悬线的位能则由悬线的重心决定。

8.2.1变分模型的构建

【模型构建】

设悬线各点铅垂线坐标为 $y(x)$，并通过 $A(0,y_0),B(x_1,y_1)$两点，

悬线长度为

$$L=\int_0^{x_1}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx \quad (1)$$

悬索重心高度为

$$y_c=\frac{1}{L}\int_0^L yds$$

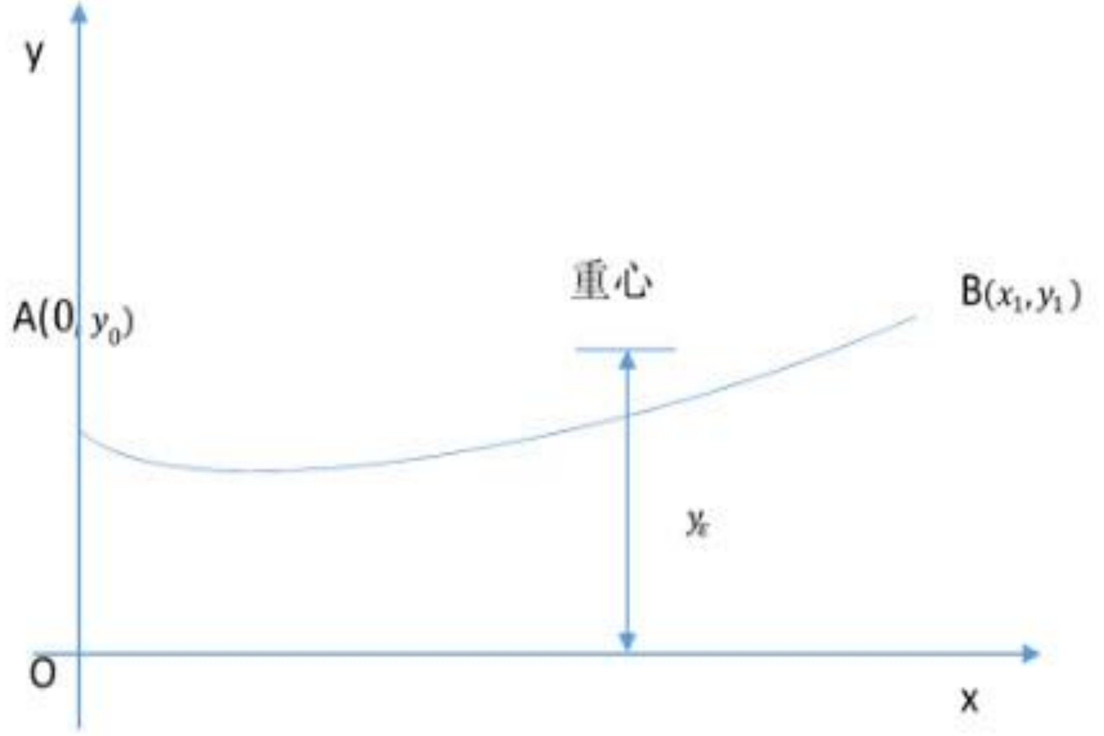
$$=\frac{1}{L}\int_0^{x_1} y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx \quad (2)$$

8.2.1变分模型的构建

问题变为：在通过 $y(0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 两点，并满足(1)式的一切曲线 $y=y(x)$ 中，求使(2)式中的 y_c 为极小的函数 $y=y(x)$，这是一个端点已定不变的条件变分命题。

8.2.1变分模型的构建

悬索的形状和坐标



8.2.1变分模型的构建

归纳起来，我们可以把最简单的边界已定不变的变分命题写为：在通过 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ 两点的条件下，选取 $y(x)$ 使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)]dx$$

为极值。

8.2.1变分模型的构建

其中 $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$,$F(x,y,y')$为一已知的 x,y,y'的函数，$F(x,y,y')$还有一些可微的条件。$y(x)$也视所处理的问题的不同而有一些可微的条件，它是在变分法的发展过程中，欧拉和拉格朗日所最先处理的变分命题。

8.2.1变分模型的构建

例 费马(Fermat)原理建模

通过介质的光路，使光线通过这一段光路所需时间为最小值。

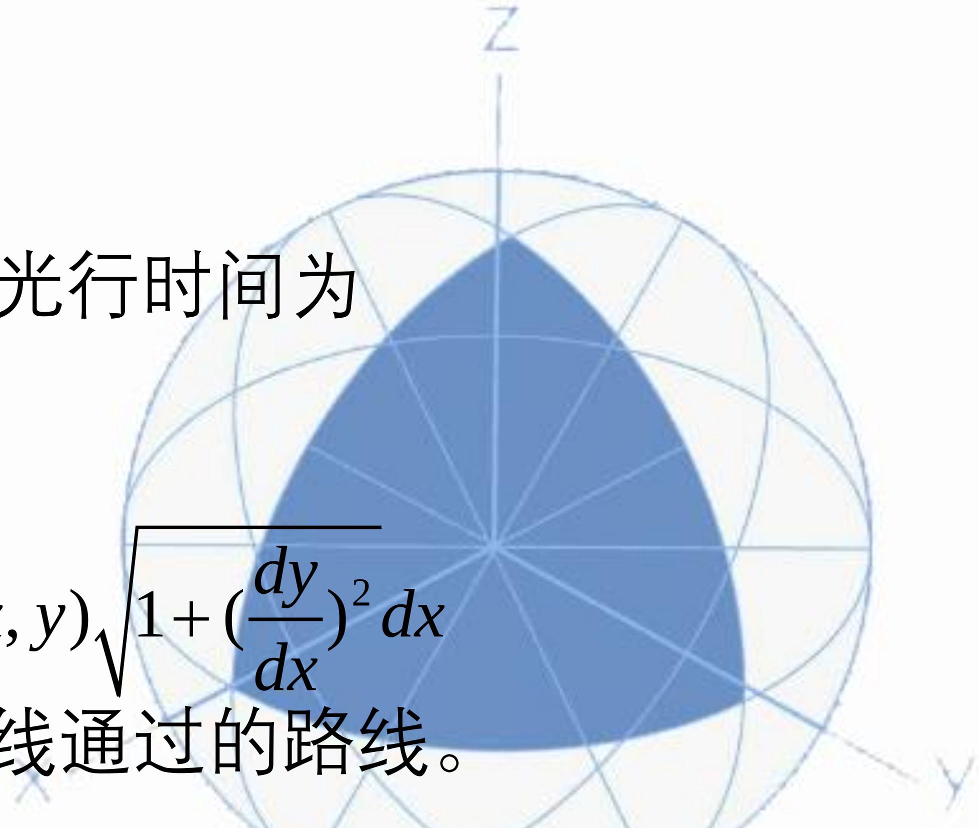
解：以二维空间为例。设介质的折光率为 $u(x,y)$ ，而光线通过介质的速度 $v(x,y)=\dfrac{c}{u(x,y)}$ ，其中c为真空光速。

8.2.1变分模型的构建

从原点$(0,0)$到(x,y)点的光行时间为

$$T=\int_0^t \frac{ds}{v}$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^{x_1} u(x,y)\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$



其中 $y=y(x)$ 为待定的光线通过的路线。

费马定理成为“求$y=y(x)$ 使上式中泛函T成为最小值”

8.2.1变分模型的构建

(2)具有高阶导数的变分模型

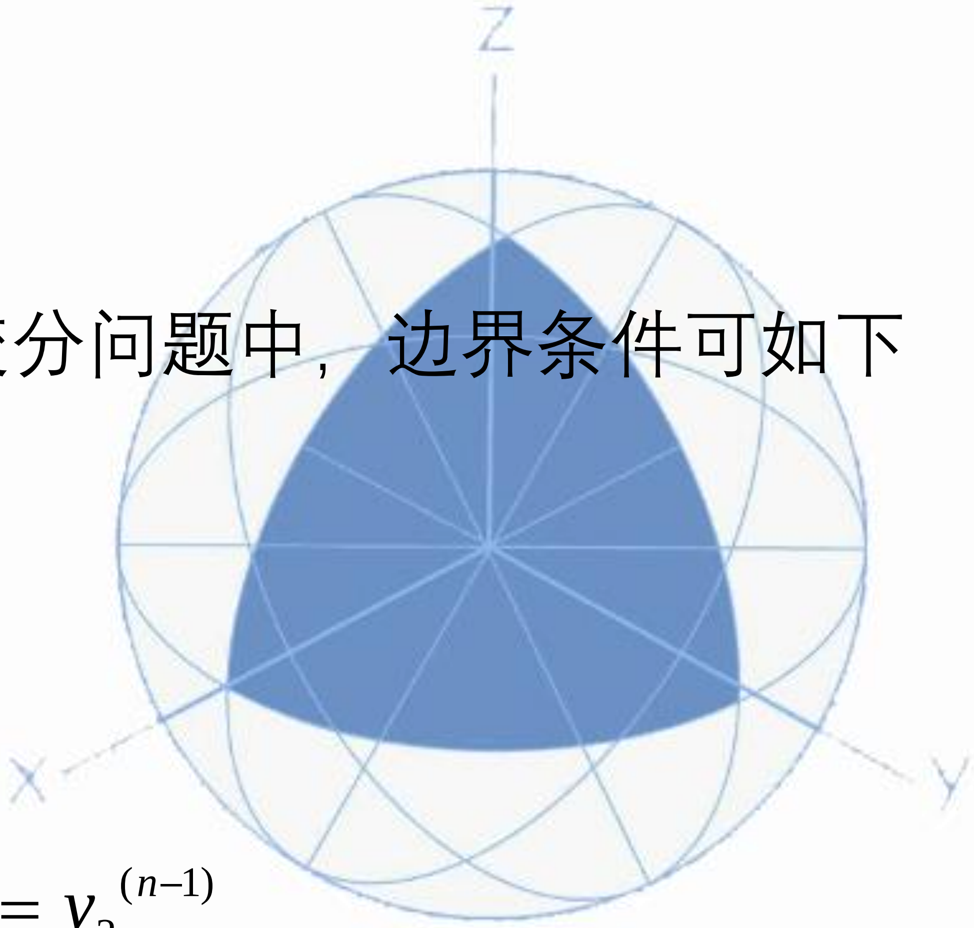
上述泛函还可以推广为包括$y(x)$的高阶导数

$y''(x), y'''(x), y^{(n)}(x)$ 等。

例如对泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)]dx$$

8.2.1变分模型的构建



的变分问题，在这样的变分问题中，边界条件可如下

$$y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$$

$$y'(x_1)=y_1', y'(x_2)=y_2'$$

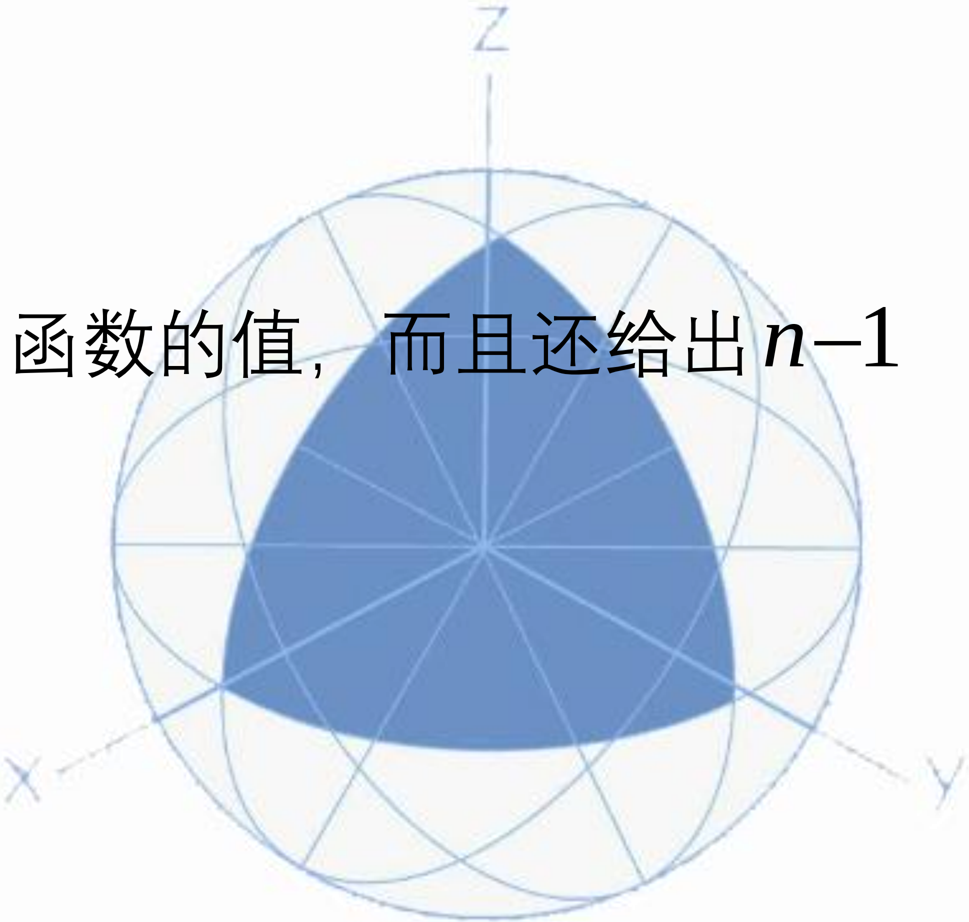
$$y''(x_1)=y_1'', y''(x_2)=y_2''$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}, y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)}$$

8.2.1变分模型的构建

亦即在边界点上不仅给出函数的值，而且还给出 $n-1$ 阶以下的导数值。

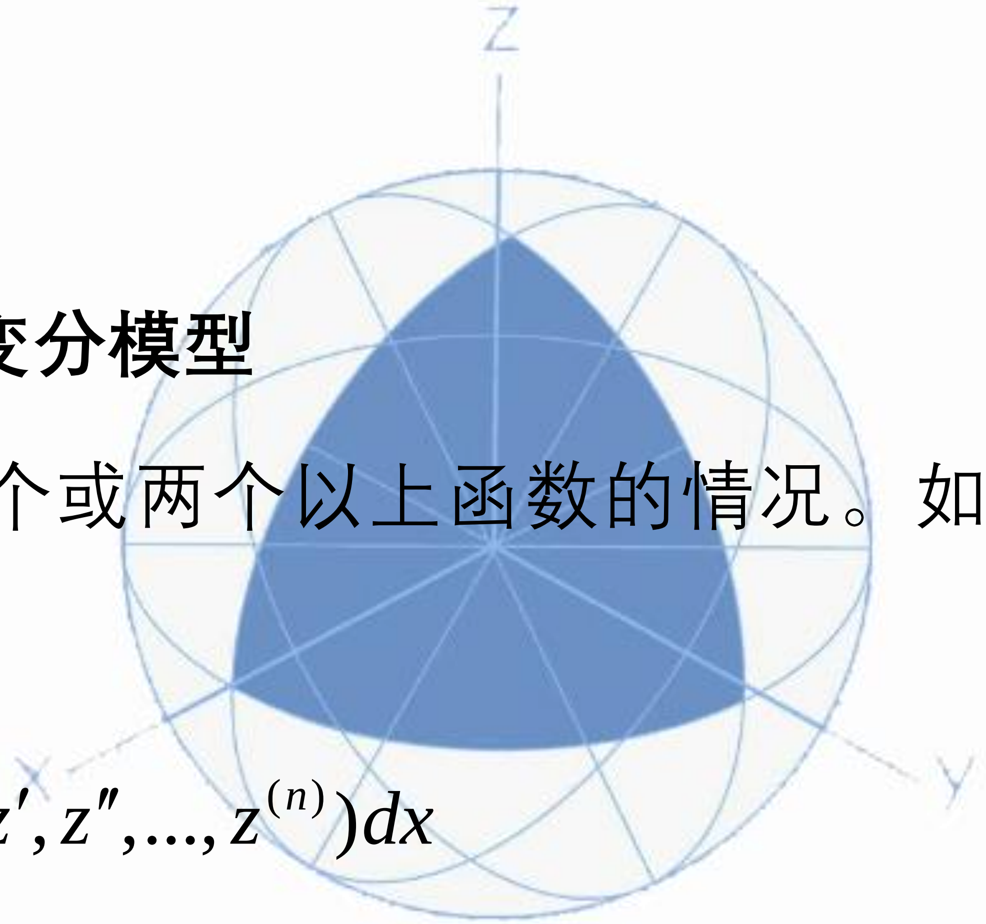


8.2.1变分模型的构建

(3)具有多个一元函数的变分模型

还可以推广到泛函有两个或两个以上函数的情况。如泛函形式为

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',\ldots,y^{(n)};z,z',z'',\ldots,z^{(n)})dx$$



8.2.1变分模型的构建

(4)具有多元函数的变分模型

也可以推广到含有多个自变量的函数的泛函。这时，泛函是一个重积分，例如二个自变量的泛函为

$$J=\iint_{\Omega} F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

所有函数$z(x,y)$在域Ω的边界$\partial\Omega$上的值已给出，即所有容许曲面都要经过$\partial\Omega$。

8.2.1变分模型的构建

例 极小曲面问题的建模

考虑平面上有界区域Ω，在边界$\partial\Omega$上给定空间闭曲线

$$l:\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ u = \varphi(s) \quad (0 \le s \le s_0) \end{cases}$$

这里$x = x(s), y = y(s)$为平面曲线$\partial\Omega$的方程。

8.2.1变分模型的构建

求一张定义在 $\bar{\Omega}$ 上的曲面 S，使得

(1) S 以 l 为界

(2) S 的表面积最小。

换言之，在所有定义在 $\bar{\Omega}$ 上并以 l 为周界的曲面中，要寻求一张曲面，使它的表面积最小。

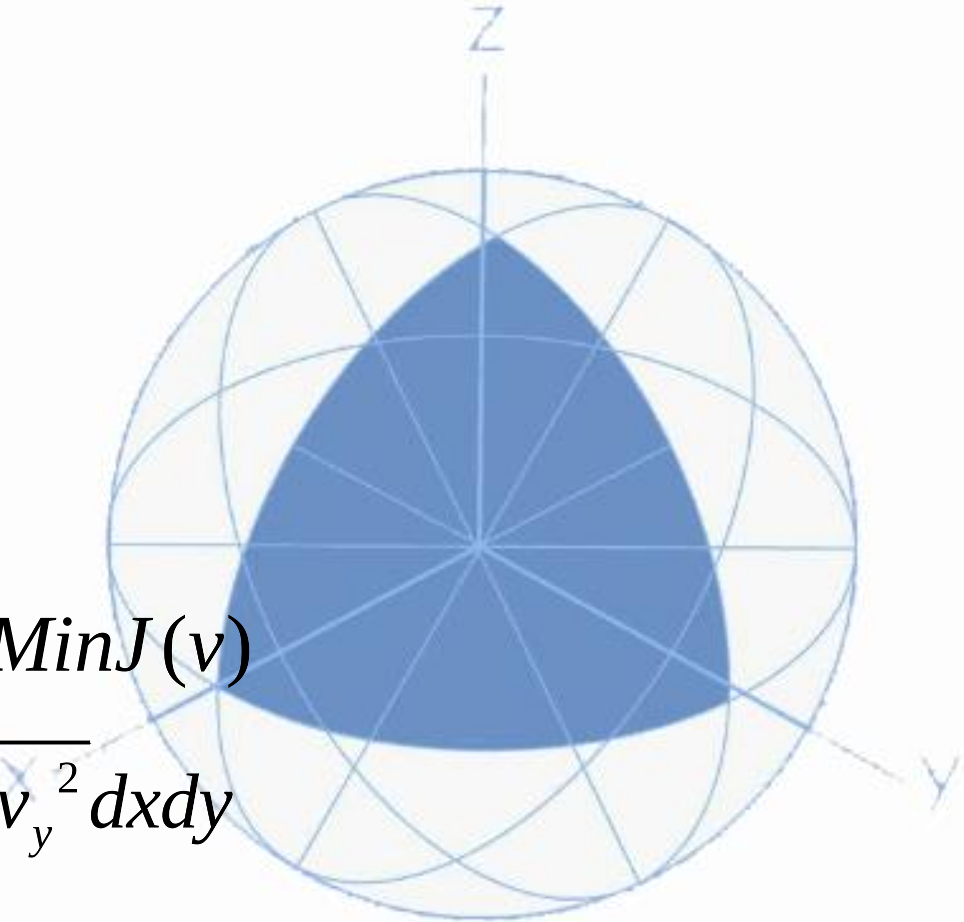
8.2.1变分模型的构建

即给定函数集合

$$M_{\varphi}=\{v\,|\,v\in C^{1}(\bar{\Omega}),v|_{\partial\Omega}=\varphi\}$$

求$u\in M_{\varphi}$， 使得 $J(u)=MinJ(v)$

其中 $J(v)=\iint_{\Omega}\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}\,dxdy$

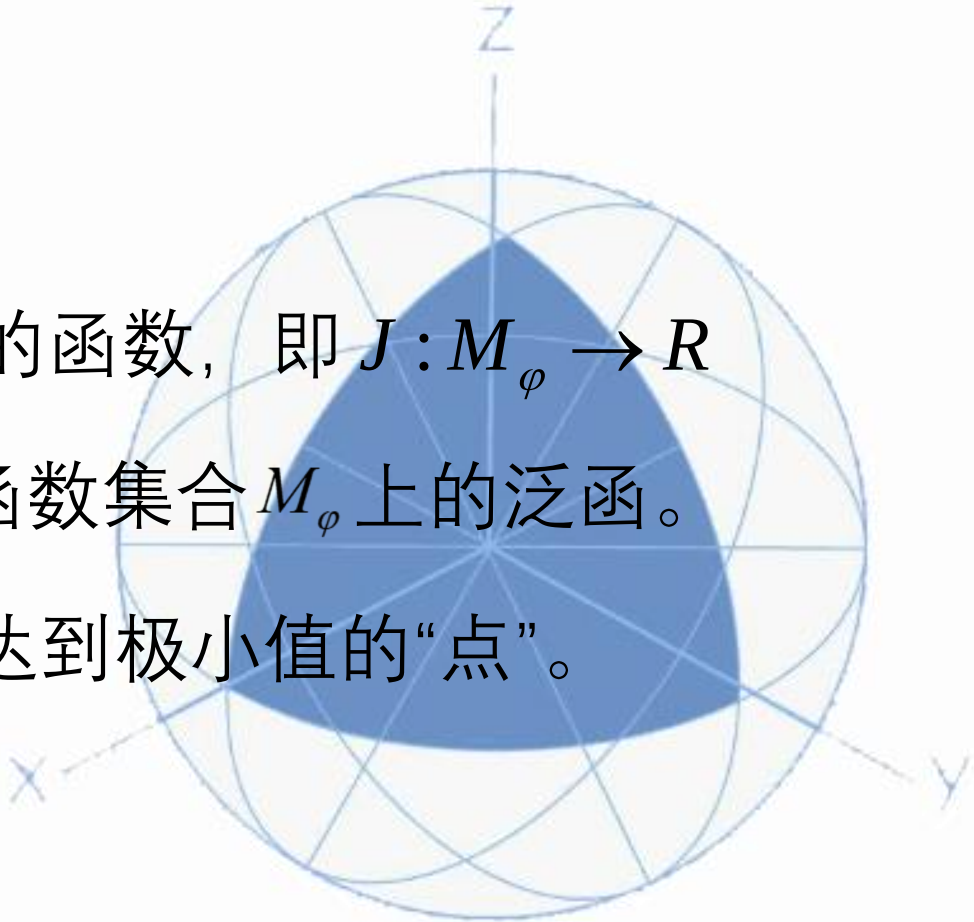


8.2.1变分模型的构建

J 是一个从 M_φ 到实数轴的函数，即 $J: M_\varphi \to R$

这里 $J(v)$ 成称为定义在函数集合 M_φ 上的泛函。

u 是泛函 $J(v)$ 在集合 M_φ 达到极小值的“点”。



8.2.1变分模型的构建

(三)可动边界变分模型的构建

前面在研究泛函的极值问题时，都假设其积分限固定不变，即其容许曲线都通过A, B这两个固定端点。但在许多实际问题中，泛函的积分限既可以固定，也可以变动。

8.2.1变分模型的构建

如果泛函的积分限可变，或积分区域固定而缺少边界条件，则这样的变分问题称为**可动边界的变分问题**。当泛函的容许曲线在边界上的值没有明显给出时，这样的变分问题称为**无约束变分问题**。

XIAMEN UNIVERSITY

8.2.1变分模型的构建

设泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$

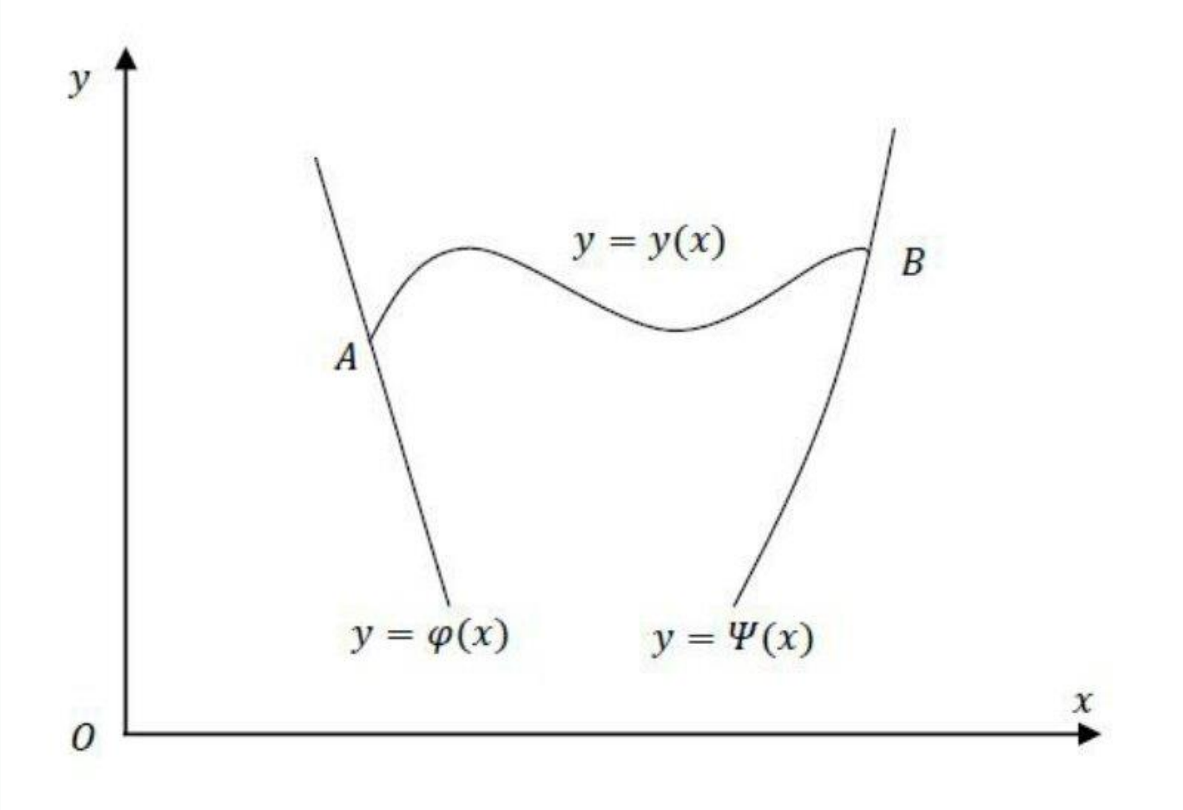
其可取曲线 $y=y(x)\in C^2$ 函数，且两个端点 $A(x_0,y_0),B(x_1,y_1)$

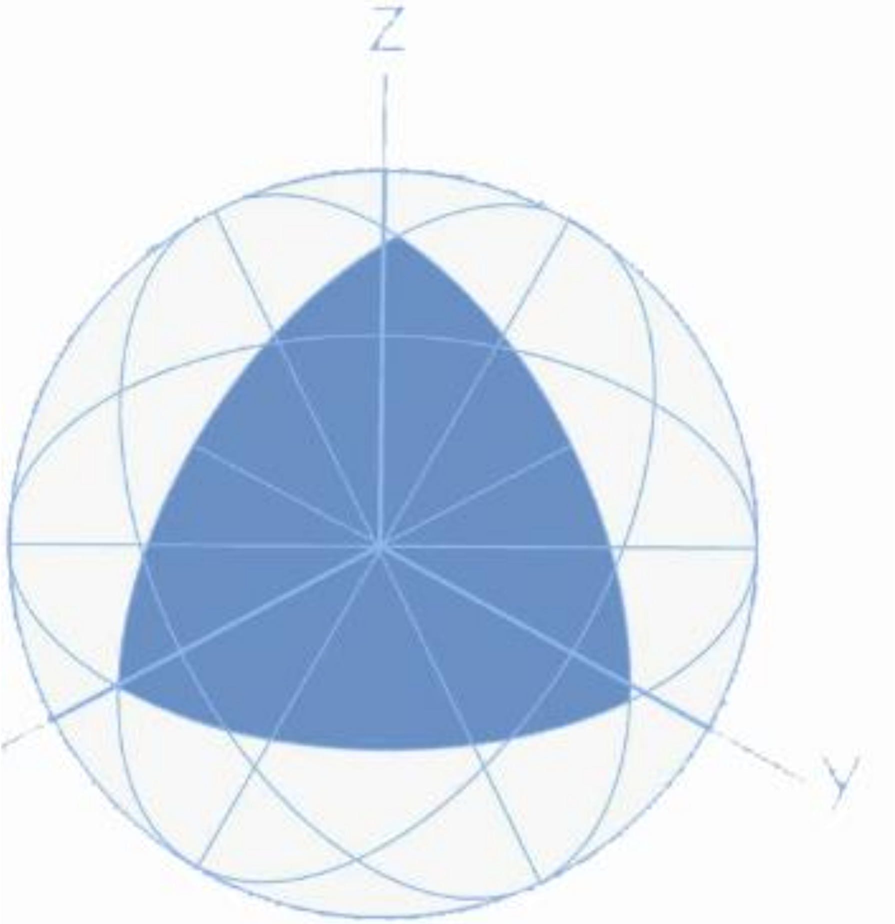
分别在两个给定的 C^2 函数 $y=\phi(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 上移动，

这个泛函称为**可动边界的最简泛函**。

见下图

8.2.1变分模型的构建





8.2.1变分模型的构建

(四)条件极值变分模型的构建

在自然科学和工程技术中所遇到的变分问题，有时要求极值函数除满足给定的边界条件外，还要满足一定的附加约束条件，这就是泛函的条件极值问题。

8.2.1变分模型的构建

在泛函所依赖的函数上附加某些约束条件来求泛函的极值问题称为**条件极值的变分问题**。

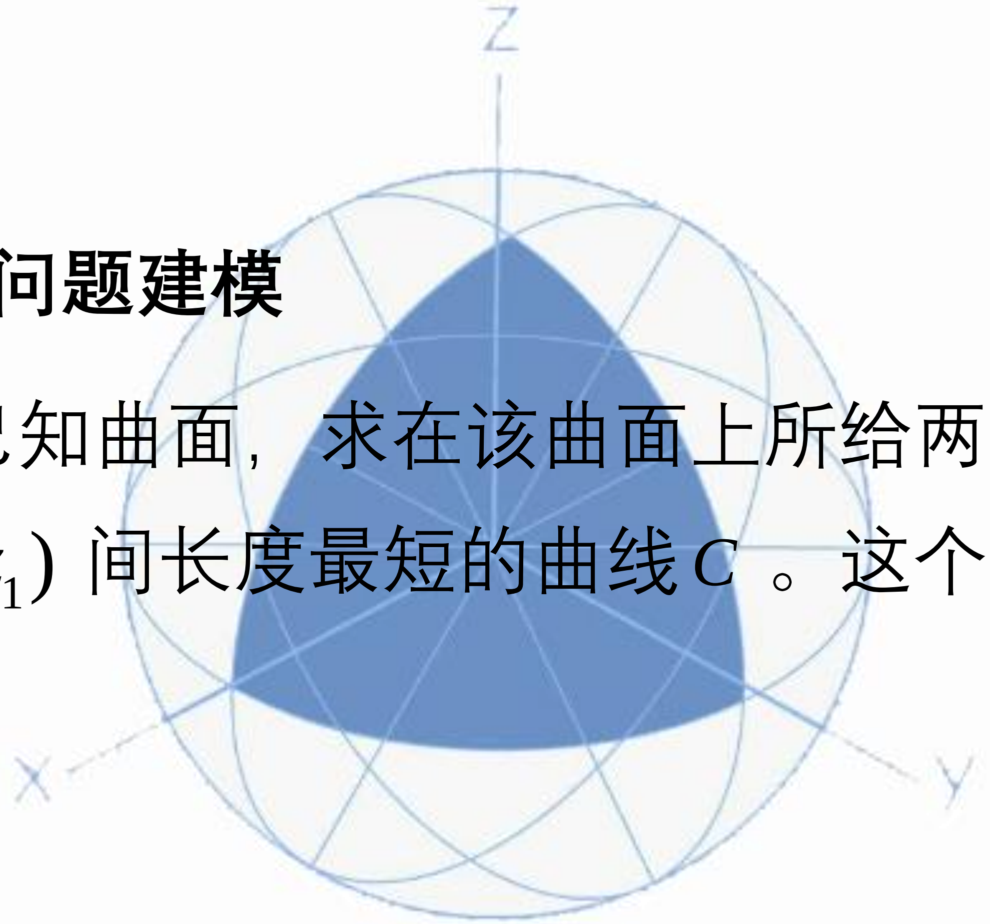
8.2.1变分模型的构建

泛函的条件极值的计算方法与函数的条件极值的计算方法类似，可用拉格朗日乘数法来实现，这就是，选一个新的泛函，使原泛函的条件极值问题转化为与之等价的无条件极值问题。

8.2.1变分模型的构建

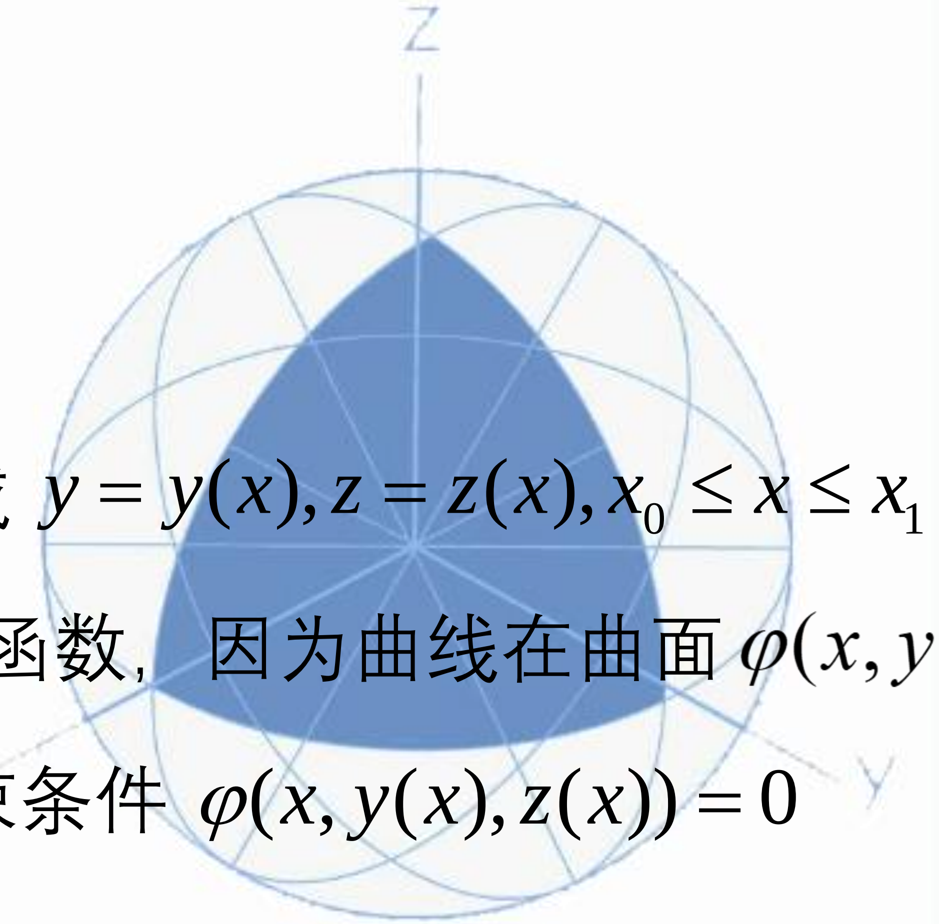
例 测地线(Geodesic line)问题建模

设 $\varphi(x, y, z) = 0$ 是一已知曲面，求在该曲面上所给两点 $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$ 间长度最短的曲线 c 。这个最短曲线叫测地线。



8.2.1变分模型的构建

【问题分析】

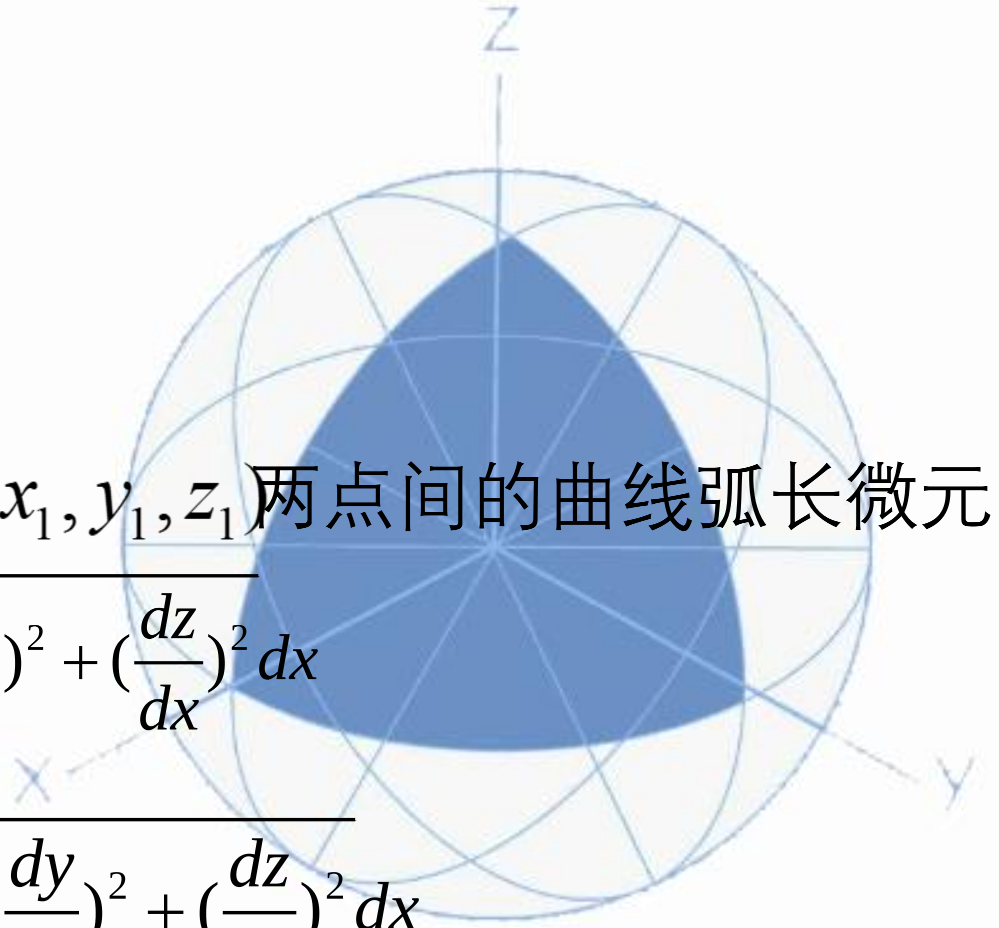


设这条曲线的方程可以写成 $y = y(x), z = z(x), x_0 \le x \le x_1$

式中，$y(x), z(x)$ 是连续可微函数，因为曲线在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$

上，所以 $y(x), z(x)$满足约束条件 $\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$

8.2.1变分模型的构建



【模型构建】

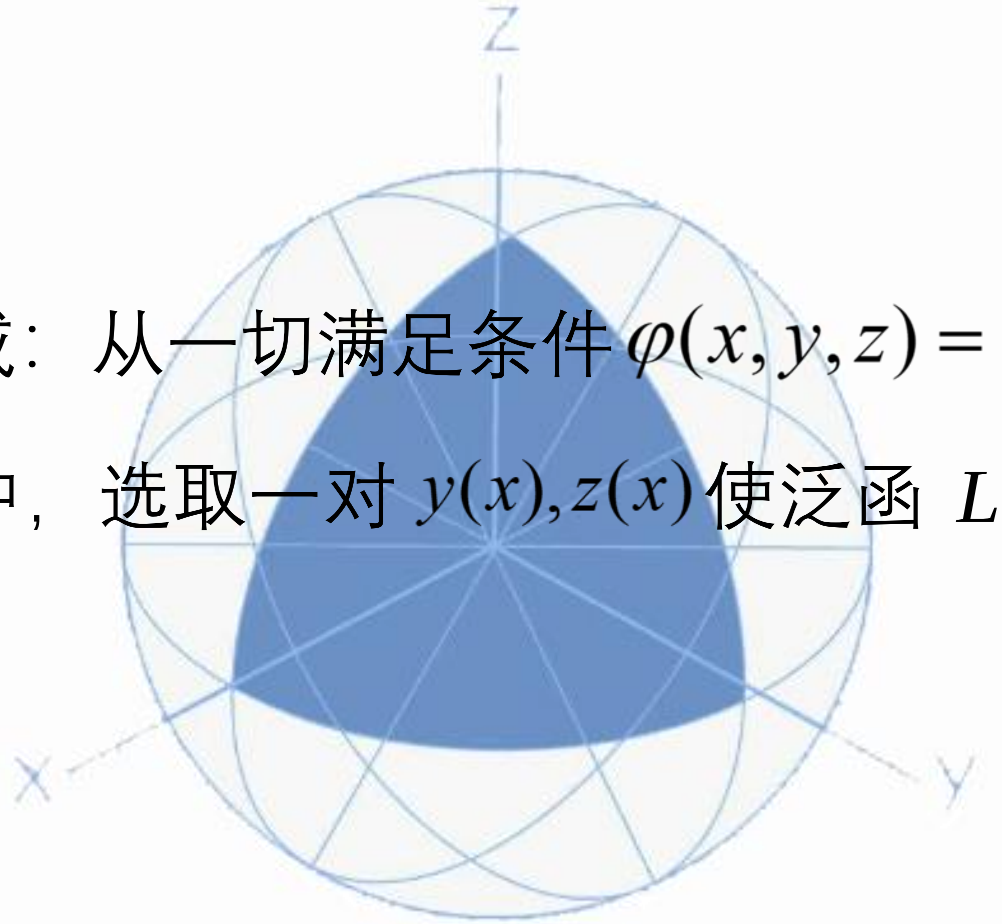
在曲面上 $A(x_0,y_0,z_0),B(x_1,y_1,z_1)$两点间的曲线弧长微元

$$ds=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dz}{dx})^2}\,dx$$

长度为

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dz}{dx})^2}\,dx$$

8.2.1变分模型的构建

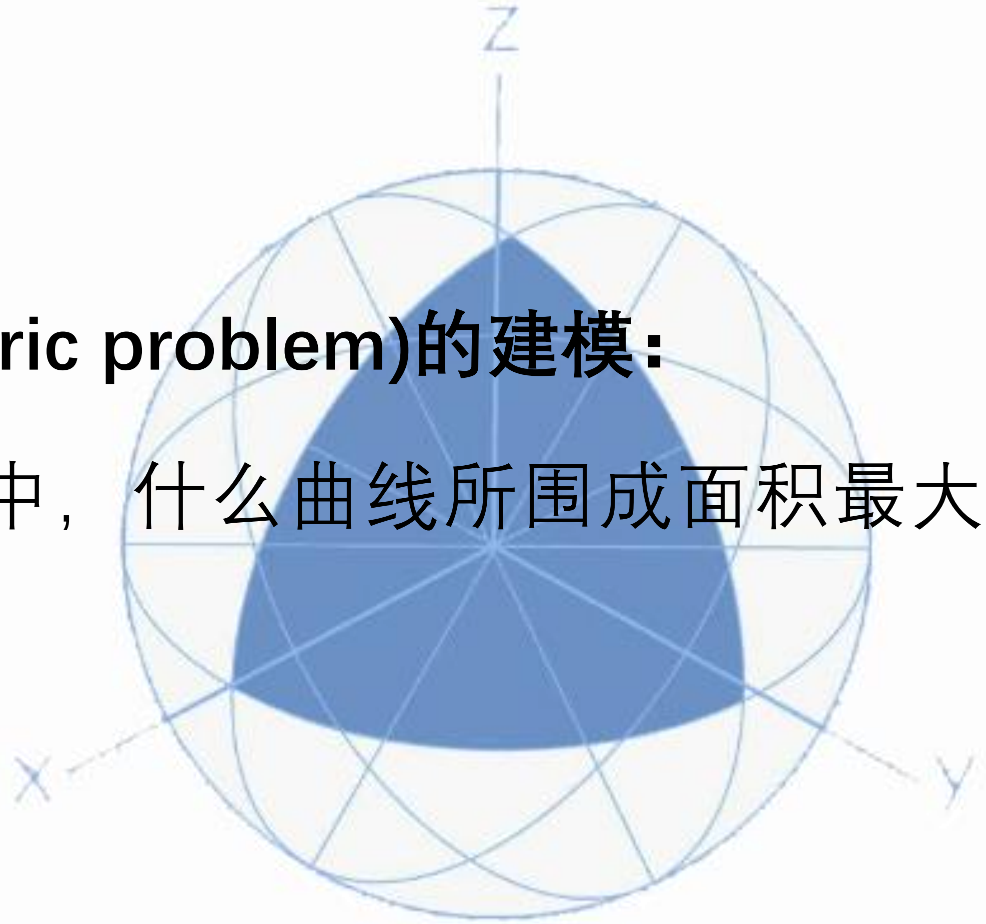


于是，变分模型可以写成：从一切满足条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 的一切 $y(x),z(x)$ 的函数中，选取一对 $y(x),z(x)$ 使泛函 L 为最小。

8.2.1变分模型的构建

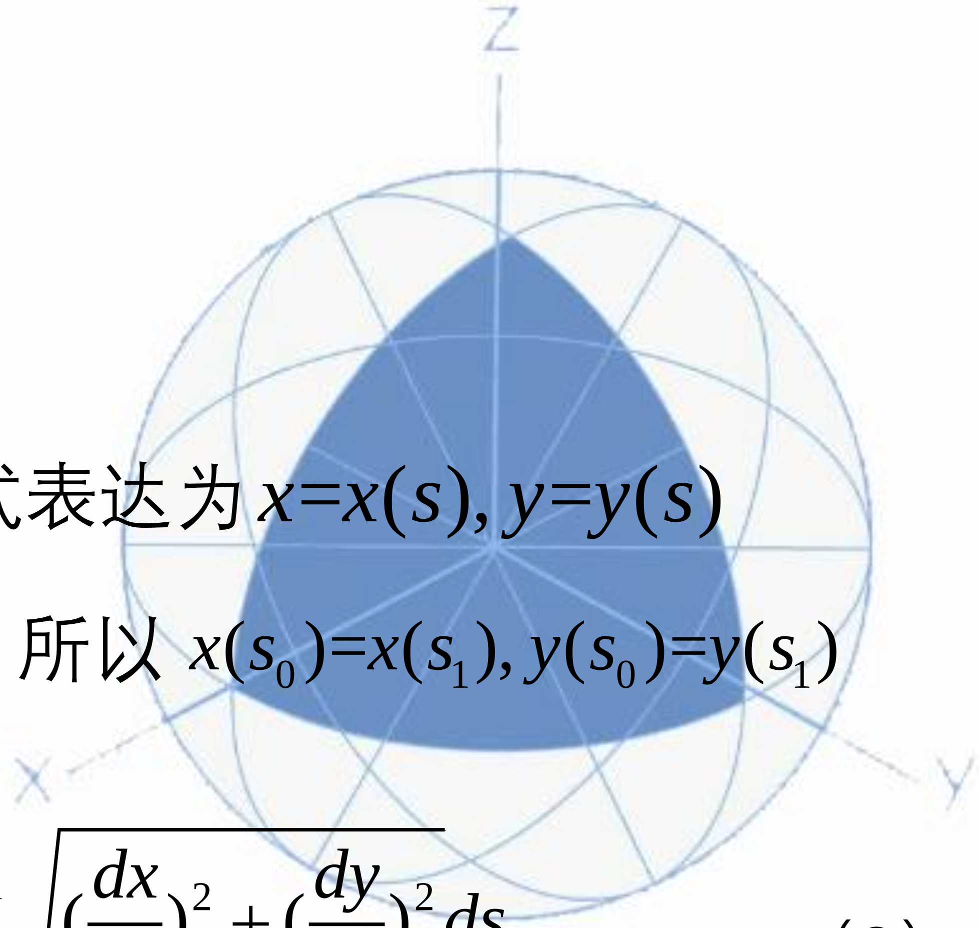
例 等周问题(isoperimetric problem)的建模：

在长度一定的封闭曲线中，什么曲线所围成面积最大。



8.2.1变分模型的构建

【问题分析】



将所给曲线 C 用参数形式表达为 $x=x(s), y=y(s)$

因为这条曲线是封闭的，所以 $x(s_0)=x(s_1), y(s_0)=y(s_1)$

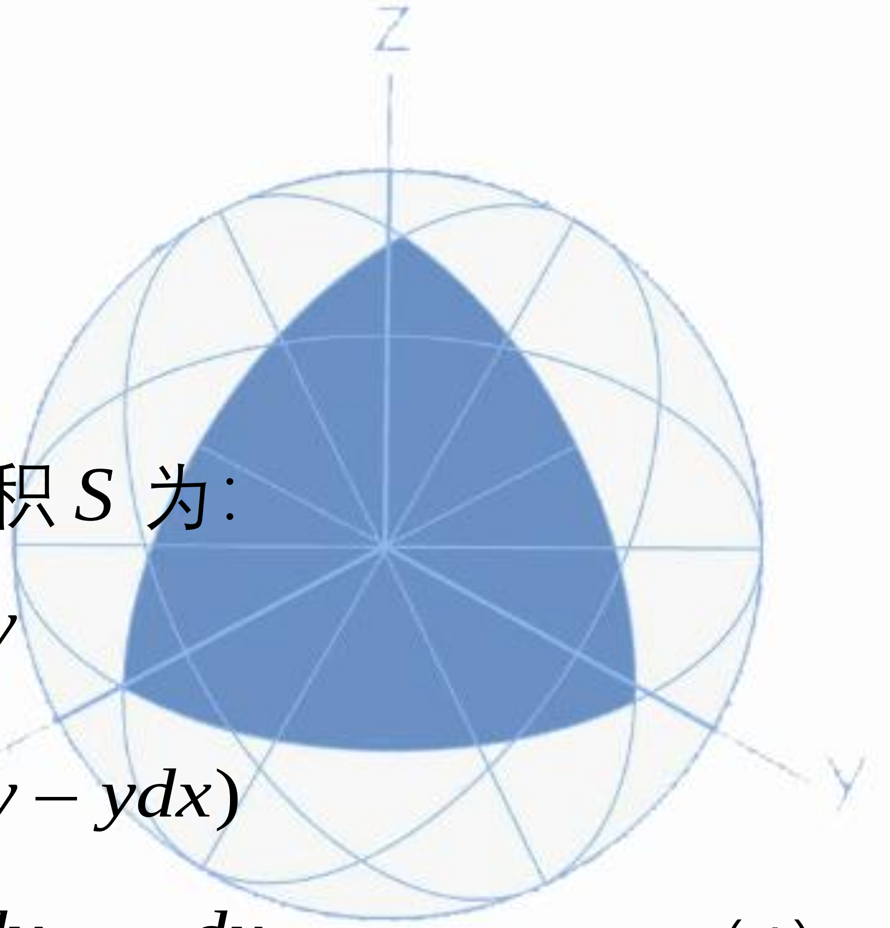
这条曲线的周长为：

$$L=\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{(\frac{dx}{ds})^2+(\frac{dy}{ds})^2}ds \qquad (3)$$

8.2.1变分模型的构建

【模型构建】

根据格林公式，其所围成面积 S 为：



$$
\begin{aligned}
S &= \iint_R dxdy \\
&= \frac{1}{2}\oint_c (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1} \left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

8.2.1变分模型的构建

等周问题于是可以写成：

在满足 $x(s_0)=x(s_1), y(s_0)=y(s_1)$ 和(3)式条件的一切 $x=x(s), y=y(s)$ 的函数中选取一对 $x=x(s), y=y(s)$ 函数，使(4)式中的泛函 S 为最大。同时，其边界（这里是端点）也已固定不变；而且它是两个函数 $x=x(s), y=y(s)$ 所确定的泛函。

8.2.2变分学的基本概念

一、函数的连续和泛函的连续

如果对于变量x的微小改变，有相对应的函数$y(x)$的微小改变，则就说函数$y(x)$是连续的，亦即是说：如果对于一个任给的正数ε，可以找到一个δ，当$|x-x_1|<\delta$时，能使$|y(x)-y(x_1)|<\varepsilon$，就说$y(x)$在$x=x_1$处连续。

8.2.2变分学的基本概念

对于泛函也有相类似的定义。为了研究泛函的连续与极值，需引入函数的距离和邻域的概念。

设函数 $y(x), y_0(x)$ 在区间$[a,b]$ 上有连续的n 阶导数，则这两个函数0到n 阶导数之差的绝对值中最大的那个数

$d_n[y(x), y_0(x)] = \max\limits_{0\le i\le n} \max\limits_{a\le x\le b} |y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)|$称为函数$y(x), y_0(x)$

8.2.2变分学的基本概念

在区间$[a,b]$上的n **阶距离或**n**级距离**。

特别，当$n=0$时，$$d_0[y(x),y_0(x)]=\max_{a\le x\le b}|y^{(0)}(x)-y_0^{(0)}(x)|$$
$$=\max_{a\le x\le b}|y(x)-y_0(x)|$$

称为函数$y(x),y_0(x)$在区间$[a,b]$上的零阶距离或零级距离。

两条曲线重合的充要条件是两条曲线间的零阶距离等于零。

8.2.2变分学的基本概念

当 $n=1$ 时，

$$d_1[y(x),y_0(x)]=\max_{0\le i\le 1}\max_{a\le x\le b}|y^{(i)}(x)-y_0^{(i)}(x)|$$

称为函数 $y(x),y_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一阶距离或以及一级距离。

8.2.2变分学的基本概念

设已知函数$y_0(x)$在区间$[a,b]$上有连续的n阶导数，则所有与函数$y_0(x)$在区间$[a,b]$上的n级距离小于正数δ的函数$y(x)$所组成的集合称为函数$y_0(x)$在区间$[a,b]$上的n级δ邻域，记为$N_n[\delta,y_0(x)]$

即$N_n[\delta,y_0(x)]=\{y(x)\mid y(x)\in C^n[a,b],d_n[y(x),y_0(x)]<\delta\}$

8.2.2变分学的基本概念

根据上述定义，函数$y_0(x)$的n级δ邻域内的任一函数$y(x)$应在所讨论的区间内同时满足下列不等式：

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$

$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,\cdots\cdots$$

$$|y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)|<\delta$$

8.2.2变分学的基本概念

函数 $y_0(x)$ 的零级 δ 邻域由所有满足 $|y(x)-y_0(x)|<\delta$ 的函数 $y(x)$ 所组成。

而函数 $y_0(x)$ 的一级 δ 邻域则由所有满足 $\begin{aligned}&|y(x)-y_0(x)|<\delta,\\&|y'(x)-y_0'(x)|<\delta\end{aligned}$ 的函数 $y(x)$ 所组成。

所以 $y_0(x)$ 的一级 δ 邻域是 $y_0(x)$ 的零级 δ 邻域的一部分。

8.2.2变分学的基本概念

若 $y(x)\in N_n[\delta, y_0(x)]$，则 $y(x)$ 与 $y_0(x)$称为具有 n 阶 δ 接近度。

若对于任意给定的一个正数 ε，总可以找到一个 $\delta>0$，只要 $d_n[y(x), y_0(x)]<\delta$ ，即 $y(x)\in N_n[\delta, y_0(x)]\subset F$

8.2.2变分学的基本概念

都有

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$$

成立，则称$J[y(x)]$称为在函数$y_0(x)$处具有n阶δ接近度的连续泛函。

8.2.2变分学的基本概念

二、函数的微分和泛函的变分

函数的微分有两个定义，一个通常的定义，对函数y=$y(x)$

定义域中的一点x_0，若存在一个只与x_0有关，而与Δx

无关的数$A(x_0)$，使得当$\Delta x \to 0$,

函数的增量 $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$

8.2.2变分学的基本概念

可以展开为线性项和非线性项 $\Delta y = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

于是，就称 $y(x)$ 是可微的，此时,Δx称为自变量的微分

记为 dx 。而将Δy线性主要部分就称为因变量（函数）

的微分，记为 $dy = A(x)\Delta x = y'(x)\Delta x$

8.2.2变分学的基本概念

这是因为根据定义，$A(x)=y'(x)$ 是函数的导数，而且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$$

所以，函数的微分是函数增量的主部，这个主部对于Δx来说是线性的。

8.2.2变分学的基本概念

同样，设 ε 为一小参数，并将 $y(x+\varepsilon\Delta x)$ 对 ε 求导数，

即得

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\Delta x) = y'(x+\varepsilon\Delta x)\Delta x$$

当 ε 趋近于零时

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon\to 0} = y'(x)\Delta x = dy(x)$$

8.2.2变分学的基本概念

这就证明了 $y(x+\varepsilon\Delta x)$ 在 $\varepsilon=0$ 处对 ε 的导数就等于 $y(x)$ 在 x 处的微分。

这就是函数微分的第二种定义。

泛函的变分也有类似的两个定义:

8.2.2变分学的基本概念

对于$y(x)$在 $y_0(x)$ 的增量记为 $\delta y(x)=y(x)-y_0(x)$

也称为函数的变分。

由它所引起的泛函的增量，定义为

$$\Delta J = J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]$$

8.2.2变分学的基本概念

可以展开为线性的泛函项和非线性的泛函项

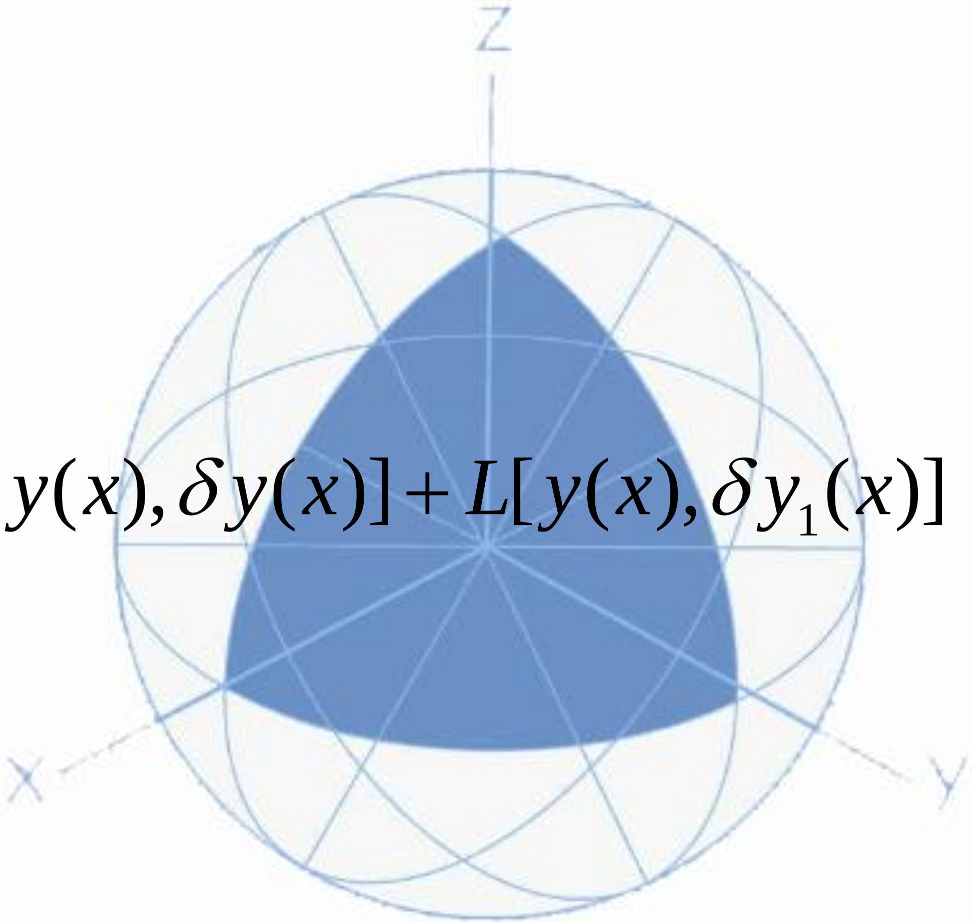
$$\Delta J = L[y(x),\delta y(x)] + r[(y(x),\delta y(x))] \qquad (5)$$

其中 $L[y(x),\delta y(x)]$ 对 $\delta y(x)$ 来说是线性的泛函项，即

$$L[y(x),C\delta y(x)] = CL[y(x),\delta y(x)]$$

其中 C 是任意常数

8.2.2变分学的基本概念



$$L[y(x),\delta y(x)+\delta y_1(x)]=L[y(x),\delta y(x)]+L[y(x),\delta y_1(x)]$$

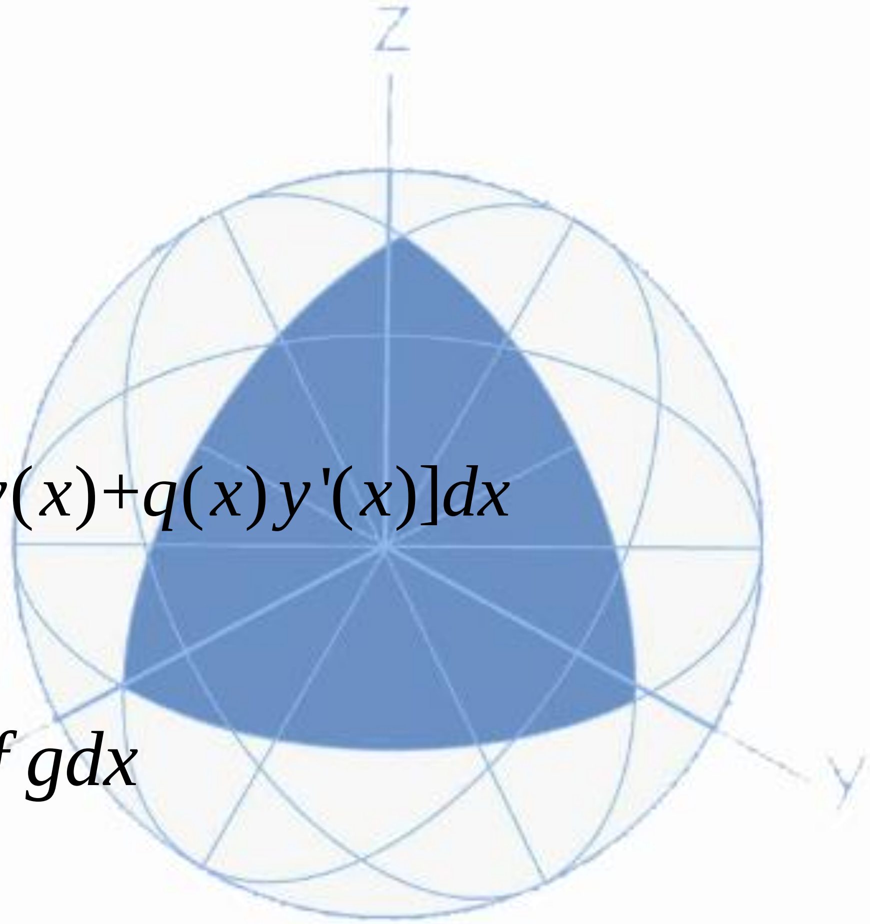
8.2.2变分学的基本概念

例：典型的线性泛函有

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y(x)+q(x)y'(x)]dx$$

例：内积

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fg\,dx$$



8.2.2变分学的基本概念

例： $J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} y^3(x)dx$ 不是线性泛函。

（5）式中的 $r(y(x),\delta y(x))$是$\delta y(x)$的高阶无穷小项。

于是（5）式中泛函增量 ΔJ 对于$\delta y(x)$ 说是线性主要部分，即$L[y(x),\delta y(x)]$ 就叫做泛函 $J[y(x)]$ 在$y(x)$上的一阶变分，用$\delta J[y(x)]$或 δJ 来表示。

8.2.2变分学的基本概念

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)]$$

所以，泛函的变分是泛函增量的线性主部，而且这个主部对于变分$\delta y(x)$来说是线性的。

同样也有拉格朗日的泛函变分定义：泛函变分是$J[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$对$\varepsilon$的导数$\varepsilon = 0$时的值。

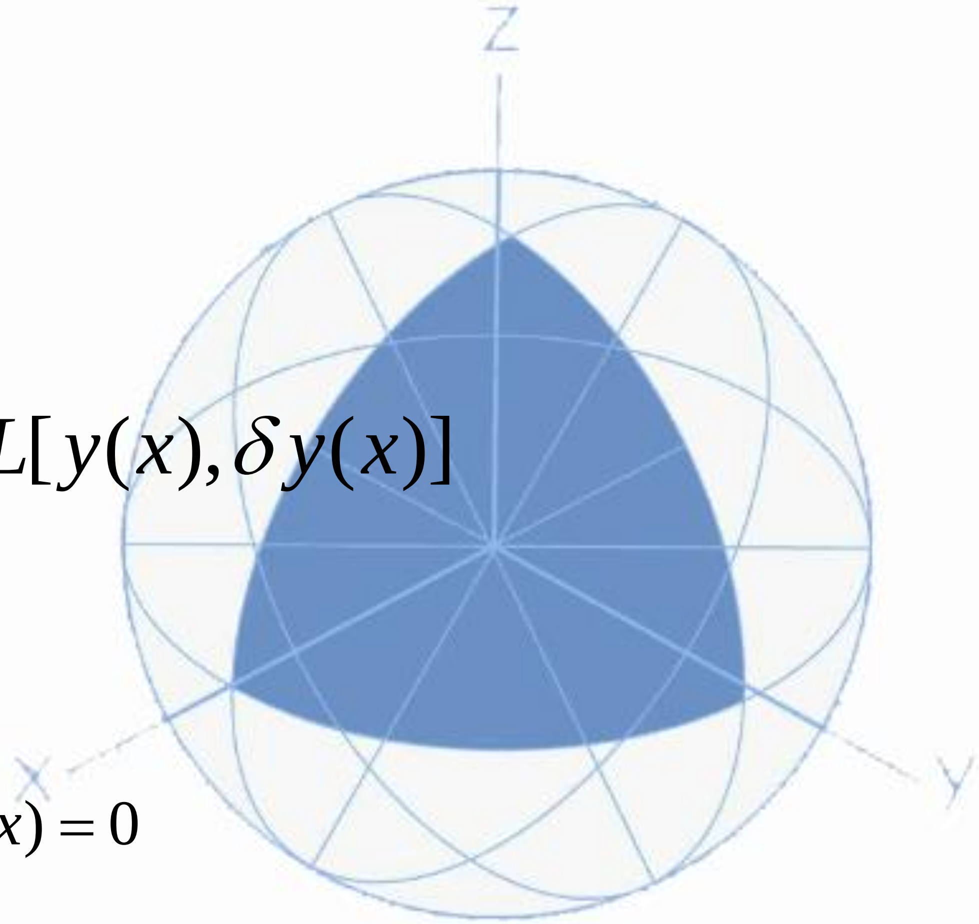
8.2.2变分学的基本概念

因为根据（5）式，我们有

$$J[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]=J[y(x)]+L[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$$
$$+r(y(x),\varepsilon\delta y(x))$$

而且根据L和r的性质

8.2.2变分学的基本概念



$$L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]=\varepsilon L[y(x),\delta y(x)]$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r(y(x),\varepsilon\delta y(x))}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r(y(x),\varepsilon\delta y(x))}{\varepsilon\delta y(x)}\delta y(x)=0$$

8.2.2变分学的基本概念

于是有 $$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]-J[y(x)]}{\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]+r(y(x),\varepsilon\delta y(x))}{\varepsilon}\\&=L[y(x)+\delta y(x)]\\&=\delta J[y(x)]\end{aligned}$$

8.2.2变分学的基本概念

就证明了拉格朗日的泛函变分定义为

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J[y(x) + \varepsilon \delta y(x)]\big|_{\varepsilon \to 0} \qquad (6)$$

通常我们应用这个定义来求泛函的一阶变分。

8.2.2变分学的基本概念

例：试求泛函 $J[y(x)] = y^2(x_0) + \int_{x_1}^{x_2} (xy + y'^2(x))dx$ 的变分。

解：根据变分的定义

$$J[y(x) + \varepsilon\delta y]$$

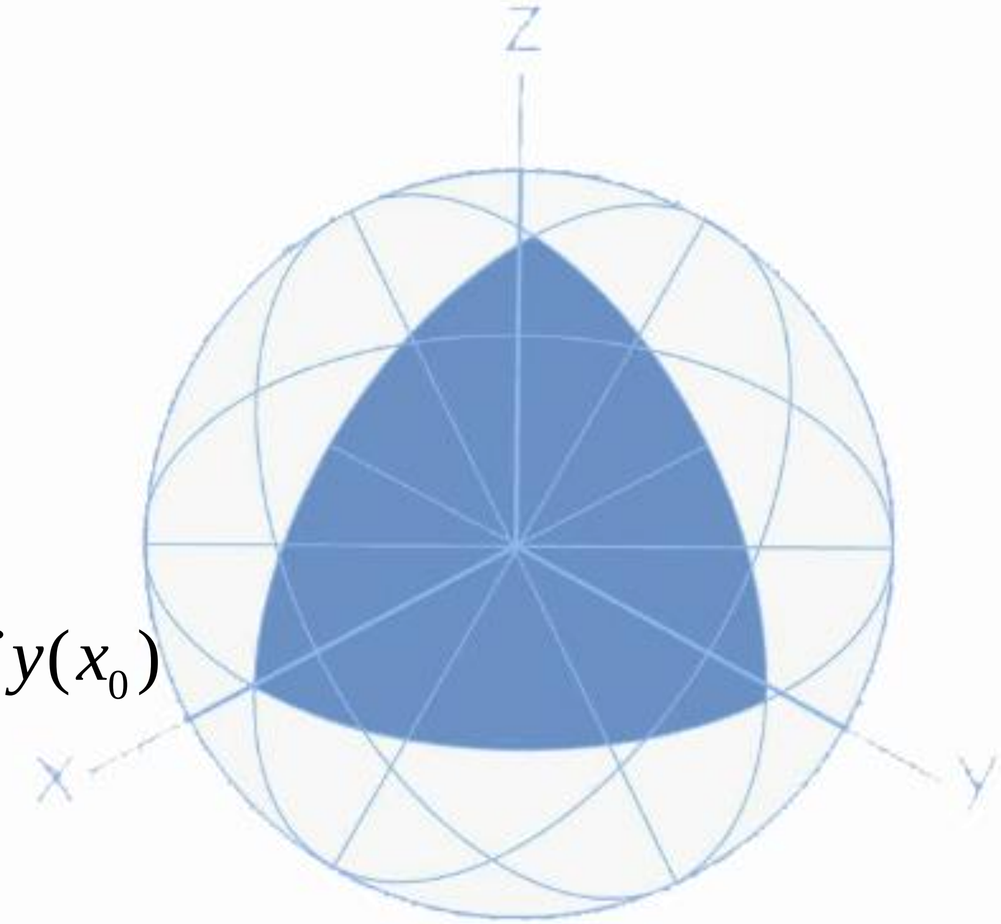
$$= [y(x_0) + \varepsilon\delta y(x_0)]^2$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} [x(y+\varepsilon\delta y)+(y'+\varepsilon\delta y')^2]dx$$

8.2.2变分学的基本概念

于是

$$\frac{\partial J[y(x)+\varepsilon\delta y]}{\partial \varepsilon}$$
$$=2[y(x_0)+\varepsilon\delta y(x_0)]\delta y(x_0)$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}(x\delta y+2y'\delta y')dx$$



8.2.2变分学的基本概念

三、极值与变分

如果函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 的附近的任意点上的值都不大(小)于 $y(x_0)$，也即 $dy = y(x) - y(x_0) \le 0 (\ge 0)$ 时，则称函数 $y(x)$ 在 $x=x_0$ 上达到极大（极小）值。

若在 x_0 处可导，则 $dy = 0$ 。

8.2.2变分学的基本概念

对于泛函$J[y(x)]$而言，也有相类似的定义：

设$J[y(x)]$为某一容许函数类$F=\{y(x)\}$中定义的泛函，

$y_0(x)$为F中任一函数$y(x)$，如果对于F中任一函数$y(x)$

都有$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geq 0$或$\leq 0$

8.2.2变分学的基本概念

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$ 上取得**绝对极小值**或**绝对极大值**。

绝对极小值与绝对极大值统称为**绝对极值**(**Absolute Extremum**)。

8.2.2变分学的基本概念

如果函数$y(x)$仅限于$y_0(x)$的某个邻域，且有

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \geq 0 \text{ 或 } \leq 0$$

则泛函$J[y(x)]$ 称为在$y_0(x)$上取得**相对极小值** (或**相对极大值**)。相对极小值与相对极大值统称为**相对极值** (**Relative Extremum**)。

8.2.2变分学的基本概念

利用变分的表达式(6)可以得到泛函极值与变分的关系。

若$J[y(x)]$在$y_0(x)$达到极值(极大或极小)，则

$$\delta J[y_0(x)]=0 \qquad (7)$$

这是因为对任意给定的δy，$J(y_0+\varepsilon\delta y)$是$\varepsilon$的函数，

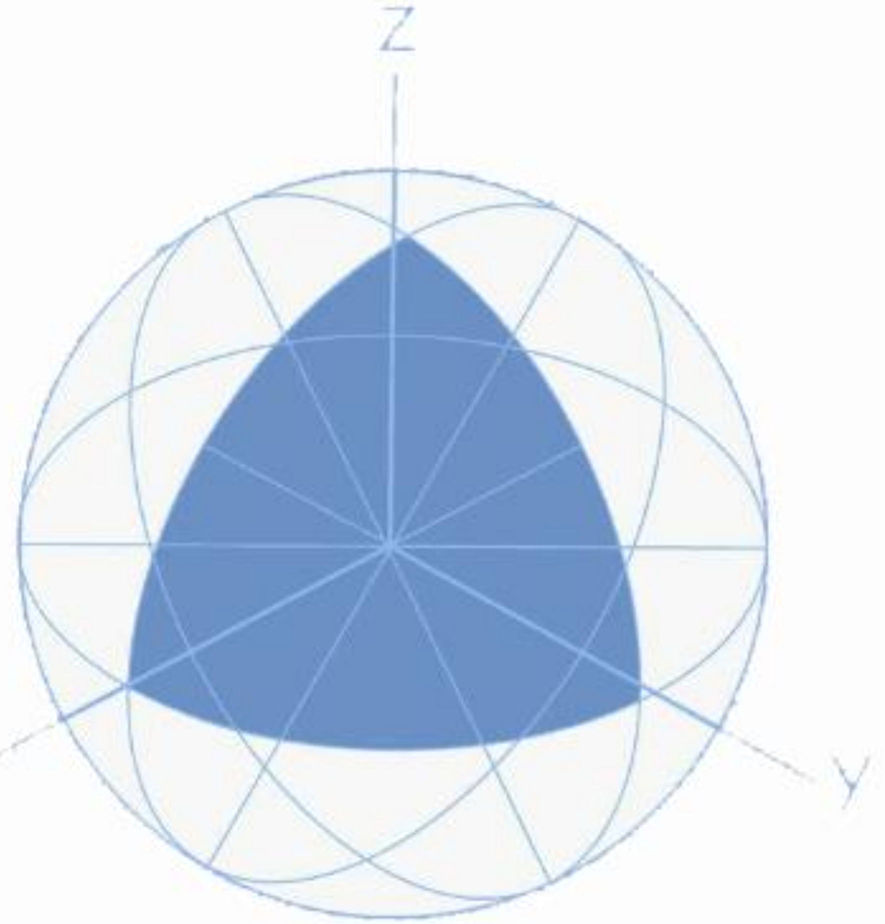
该函数在$\varepsilon=0$处达到极值。

8.2.2变分学的基本概念

根据函数极值的必要条件知

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y_0(x)+\varepsilon\delta y(x))|_{\varepsilon=0}=0$$

于是由(6)式直接得到(7)式。



8.2.2变分学的基本概念

若泛函 $J[y(x)]$在 $y=y(x)$上达到极值，则它在 $y=y(x)$ 上的变分 δJ等于零。

泛函的变分δJ等于零称为泛函极值的必要条件，也称为泛函$J[y(x)]$的欧拉方程。

8.2.3变分学的求解

变分问题的求解有两种方法，一种是归结为求解对应的欧拉方程的边值问题，称为**变分问题的间接方法**。但由于只有一些特殊情形的欧拉方程才求得出精确解，因此需要另外的求解方法，这就形成了**变分问题的直接方法**。

8.2.3变分学的求解

1900年8月，著名数学家希尔伯特在巴黎举行的第二届国际数学家大会上，提出了23个重大数学问题，其中最后一个问题就是关于变分问题的直接求解问题，是指不通过求解欧拉方程而直接从泛函出发，求出使泛函取得极值的近似表达式。

8.2.3变分学的求解

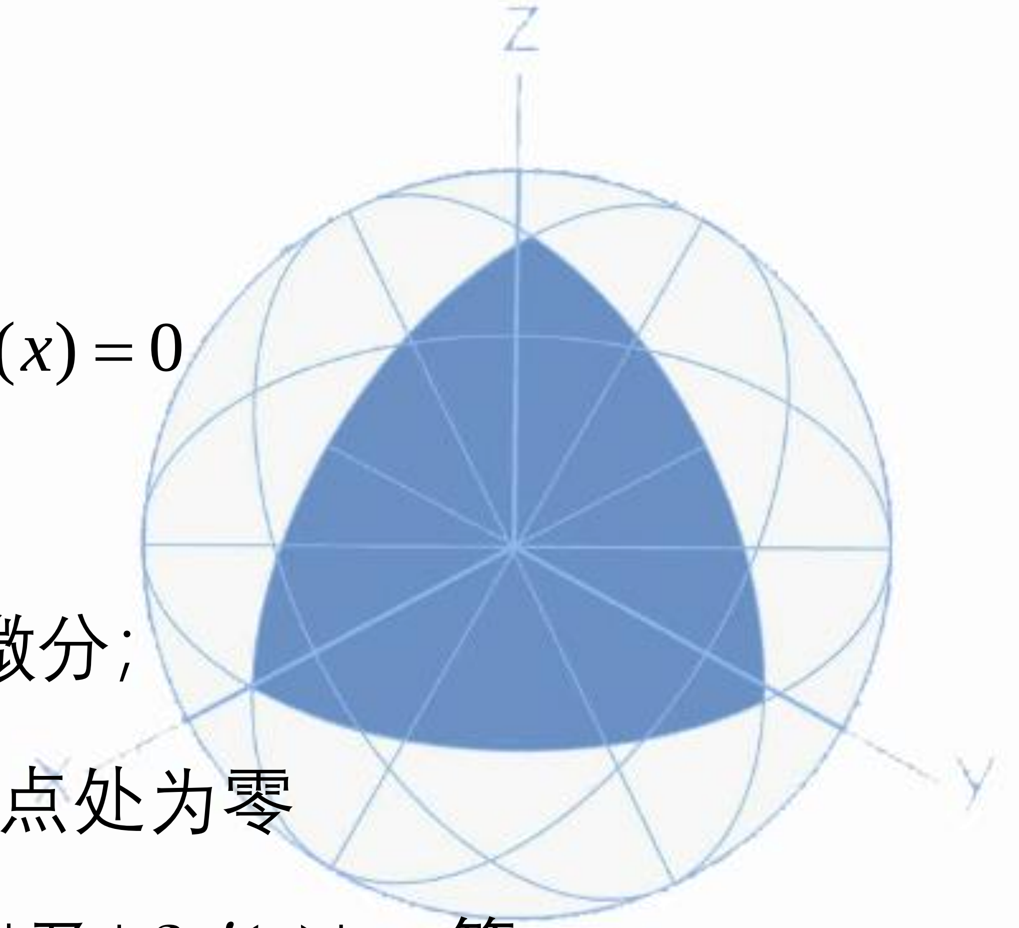
一、变分问题的间接方法

为了后面的推导，我们先给出下面的预备定理：

变分法的基本预备定理： 如果函数$F(x)$在线段(x_1, x_2)上连续，且对于只满足某些一般条件的$\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)dx = 0 \qquad (8)$$

8.2.3变分学的求解



则在线段(x_1, x_2)上，有 $F(x)=0$

$\delta y(x)$一般条件为：

（一）一阶或若干阶可微分；

（二）在线段(x_1, x_2)的端点处为零

（三）$|\delta y(x)|<\varepsilon$或$|\delta y(x)|$及$|\delta y'(x)|<\varepsilon$等。

8.2.3变分学的求解

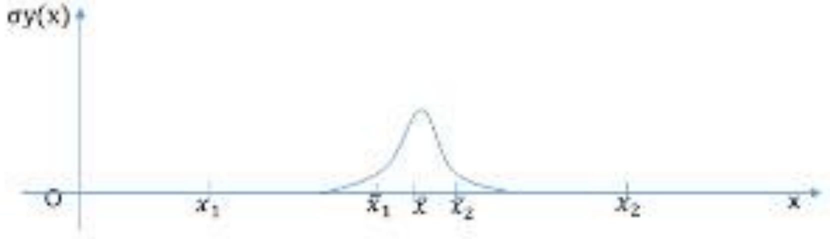
证明

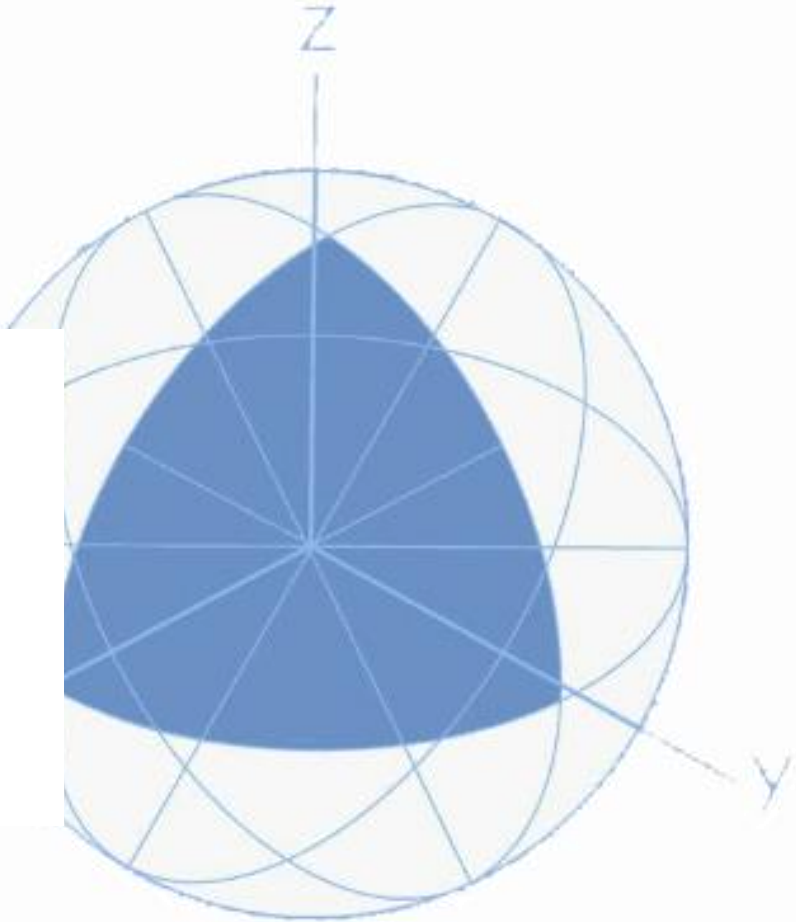
用反证法：

假设 $F(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 处不等于零，则我们可以选取区域

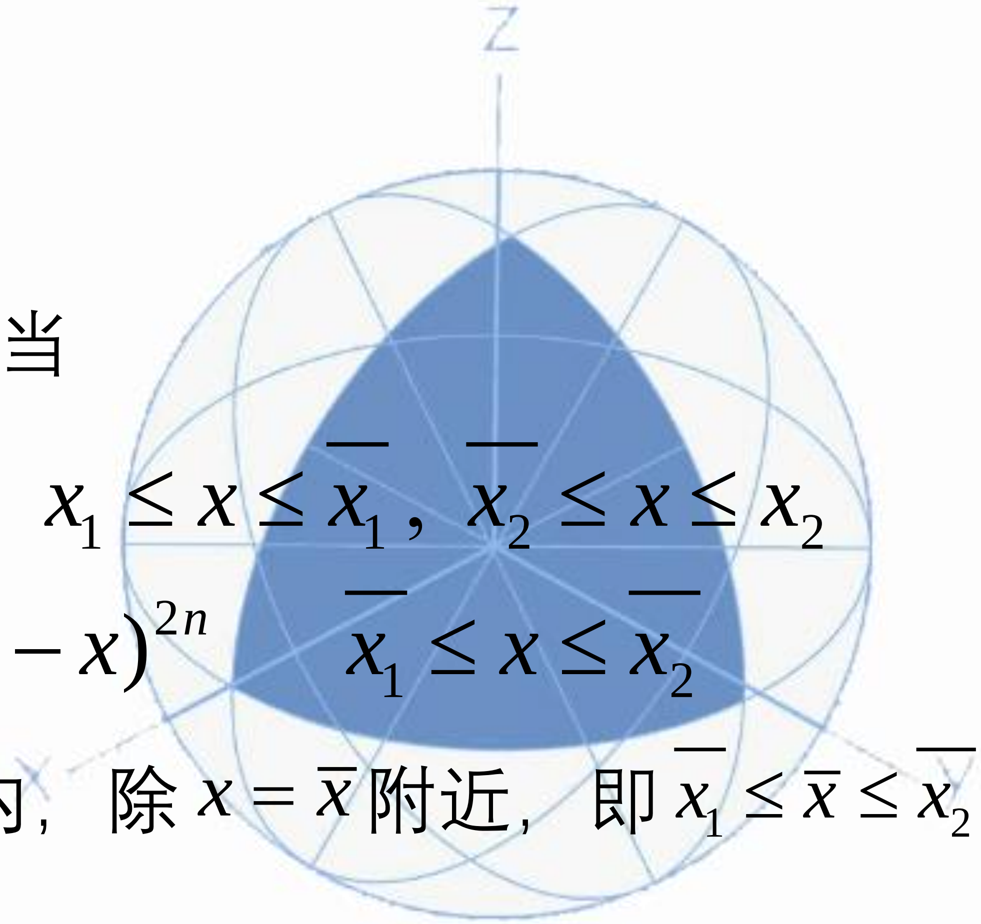
$\overline{x_1} \le \bar{x} \le \overline{x_2}$，使得在这个区域内 $F(x)$ 的正负号不变。

8.2.3变分学的求解





8.2.3变分学的求解



如图，选取函数$\delta y(x)$使当

$$\begin{cases} \delta y(x)=0 & x_1 \le x \le \overline{x_1},\ \overline{x_2} \le x \le x_2 \\ \delta y(x)=k(x-\overline{x_1})^{2n}(\overline{x_2}-x)^{2n} & \overline{x_1} \le x \le \overline{x_2} \end{cases}$$

这个函数$\delta y(x)$在(x_1,x_2)内，除$x=\overline{x}$附近，即$\overline{x_1} \le \overline{x} \le \overline{x_2}$外都等于零。

8.2.3变分学的求解

满足

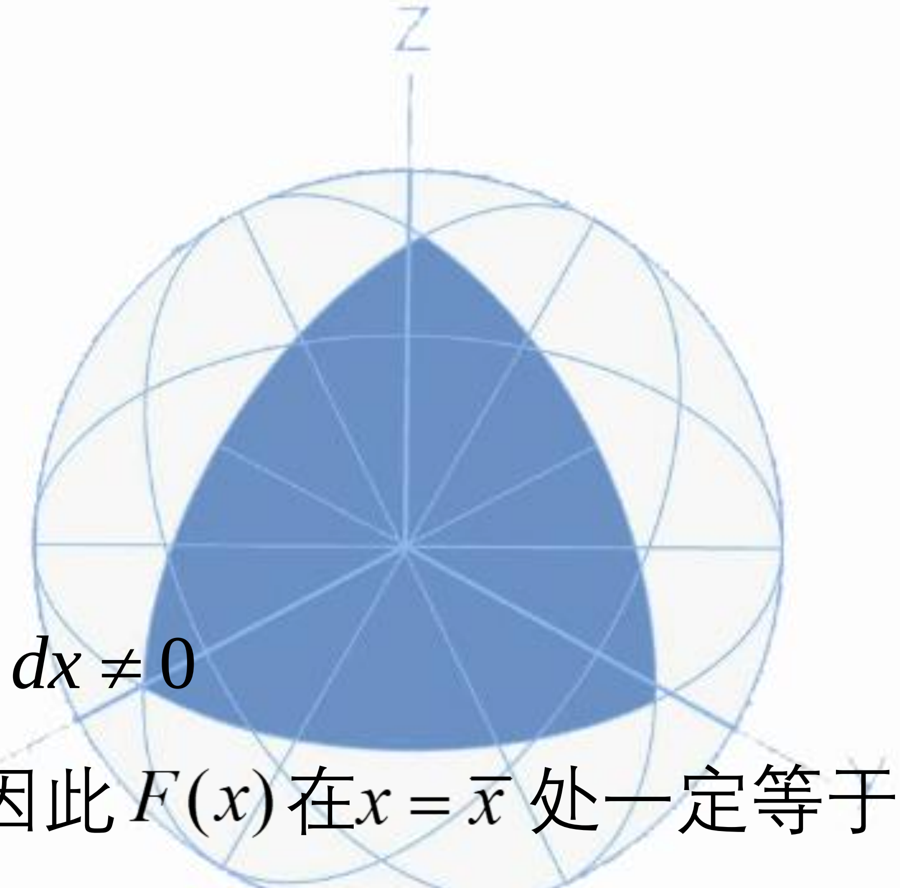
（一）到处都 $2n$-1阶可导;

（二）在 (x_1, x_2) 的端点都等于零;

（三）如果选取一个很小的 k，则一定能使 $|\delta y(x)| < \varepsilon$

或 $|\delta y(x)|$ 及 $|\delta y'(x)| < \varepsilon$ 得到满足。

8.2.3变分学的求解



于是又

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)dx$$

$$=\int_{\overline{x_1}}^{\overline{x_2}} F(x)k(x-\overline{x_1})^{2n}(\overline{x_2}-x)^{2n}dx \neq 0$$

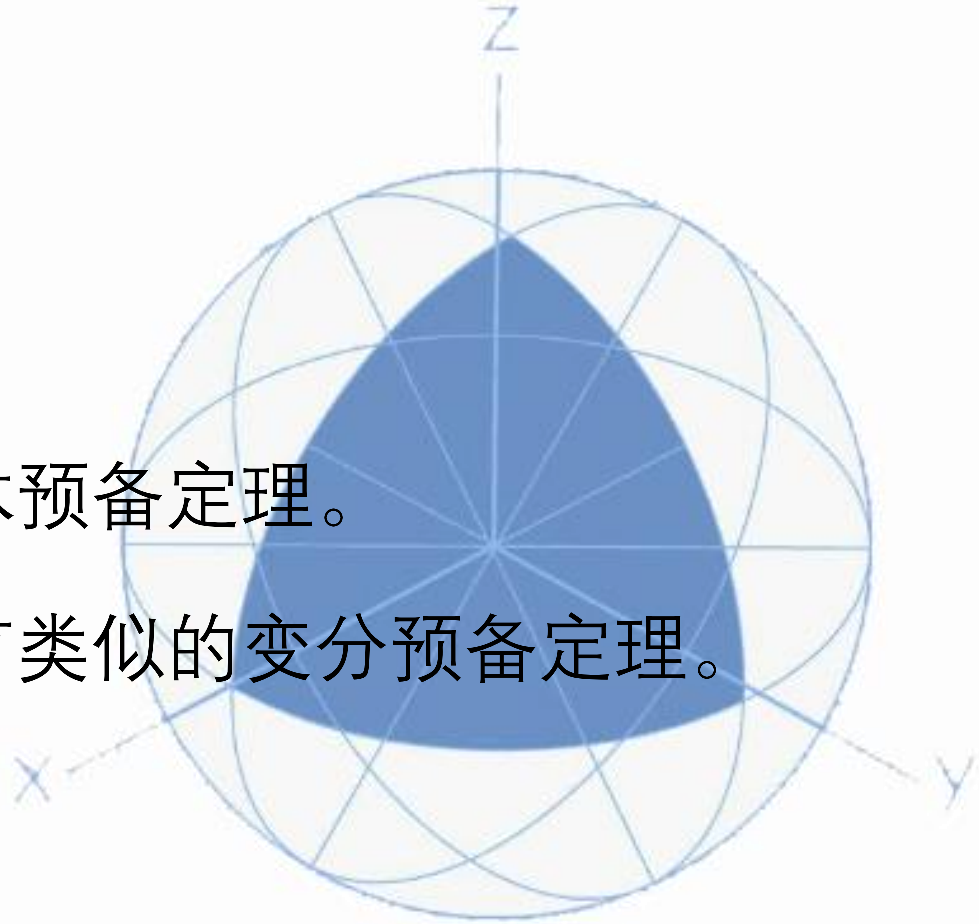
这和（8）式的条件矛盾，因此$F(x)$在$x=\bar{x}$处一定等于零，但 $x=\bar{x}$ 是任意选取的，所以 $F(x)$ 到处都等于零

8.2.3变分学的求解

即 $F(x)=0, x_1<x<x_2$

这就证明了变分法的基本预备定理。

对于多变量的问题，也有类似的变分预备定理。



8.2.3变分学的求解

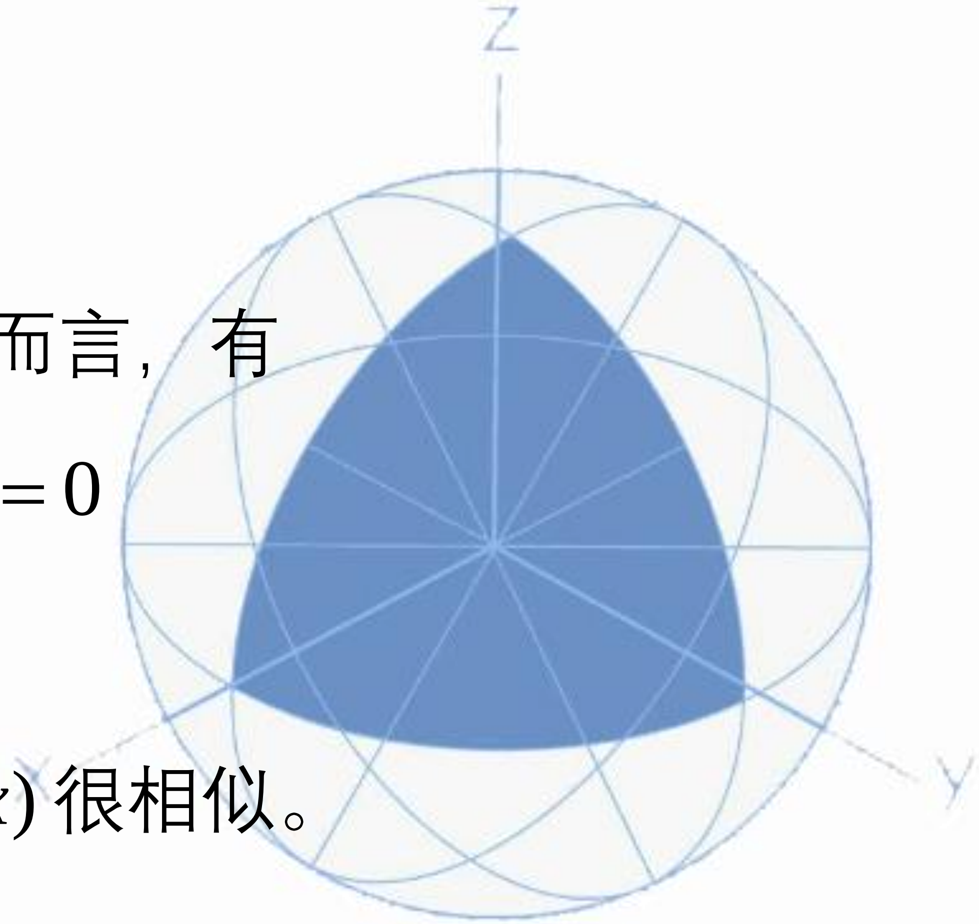
例如：如果$F(x,y)$在(x,y)平面内S域内中连续，$\delta z(x,y)$

在S域的边界上为零，

$|\delta z|\le \varepsilon, |\delta z'_x| < \varepsilon, |\delta z'_y| < \varepsilon$，

还满足连续性及一阶或若干阶的可微性，

8.2.3变分学的求解



对于这样选取的$\delta z(x,y)$而言，有

$$\iint_S F(x,y)\delta z(x,y)dxdy=0$$

则在域S内 $F(x,y)\equiv 0$

其证明方法与单变量$F(x)$很相似。

8.2.3变分学的求解

二、端点固定的最简泛函的欧拉方程

求泛函 $J=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y(x),y'(x))dx$

的极值，一般是用泛函极值的必要条件去寻找一条曲线 $y(x)$ 使给定的二阶连续可微函数 F 沿该曲线的积分达到极值。常称这条曲线为**极值曲线**（或**轨线**）,记为 y^*

8.2.3变分学的求解

现在研究最简单的泛函式的极值问题，所得到的欧拉方程，其中能够确定泛函的极值曲线$y=y(x)$的边界是已定不变的，而且 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ ，函数 $F(x,y,y')$ 将认为是三阶可微的。

8.2.3变分学的求解

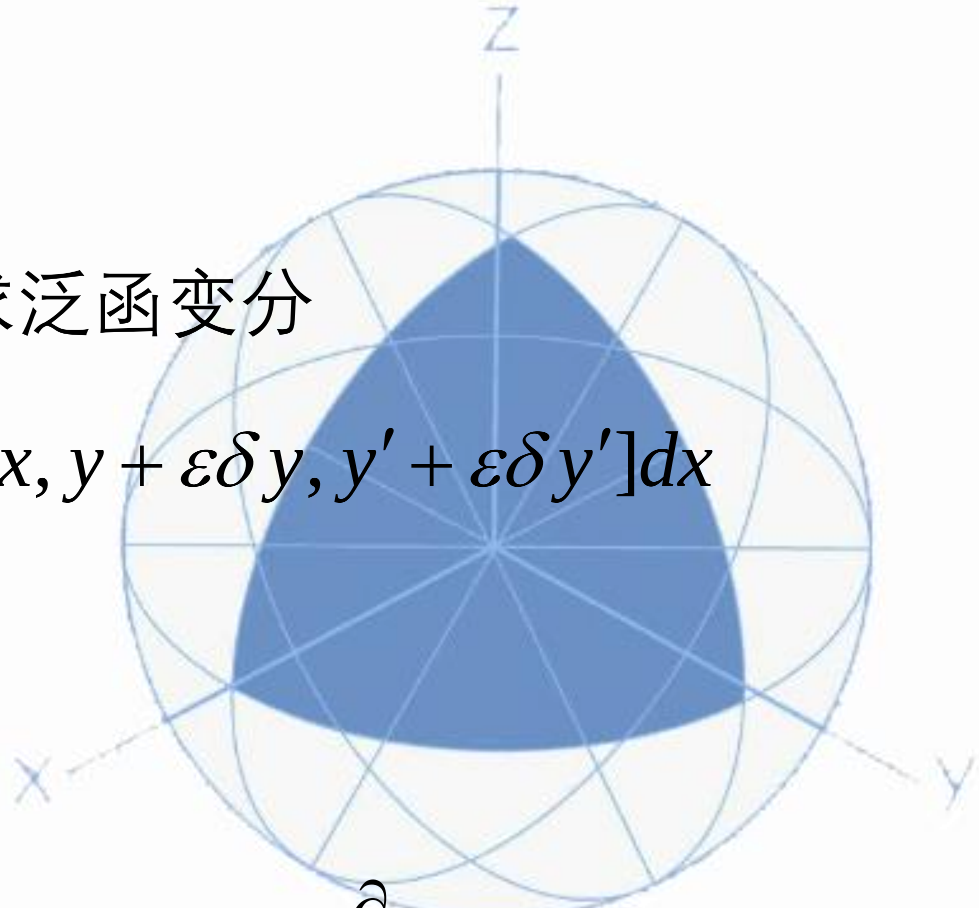
首先让我们用拉格朗日求泛函变分

$$J[y+\varepsilon\delta y]=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y+\varepsilon\delta y,y'+\varepsilon\delta y']dx$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J[y+\varepsilon\delta y]$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}F[x,y+\varepsilon\delta y,y'+\varepsilon\delta y']\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}F[x,y+\varepsilon\delta y,y'+\varepsilon\delta y']\delta y'\right\}dx$$

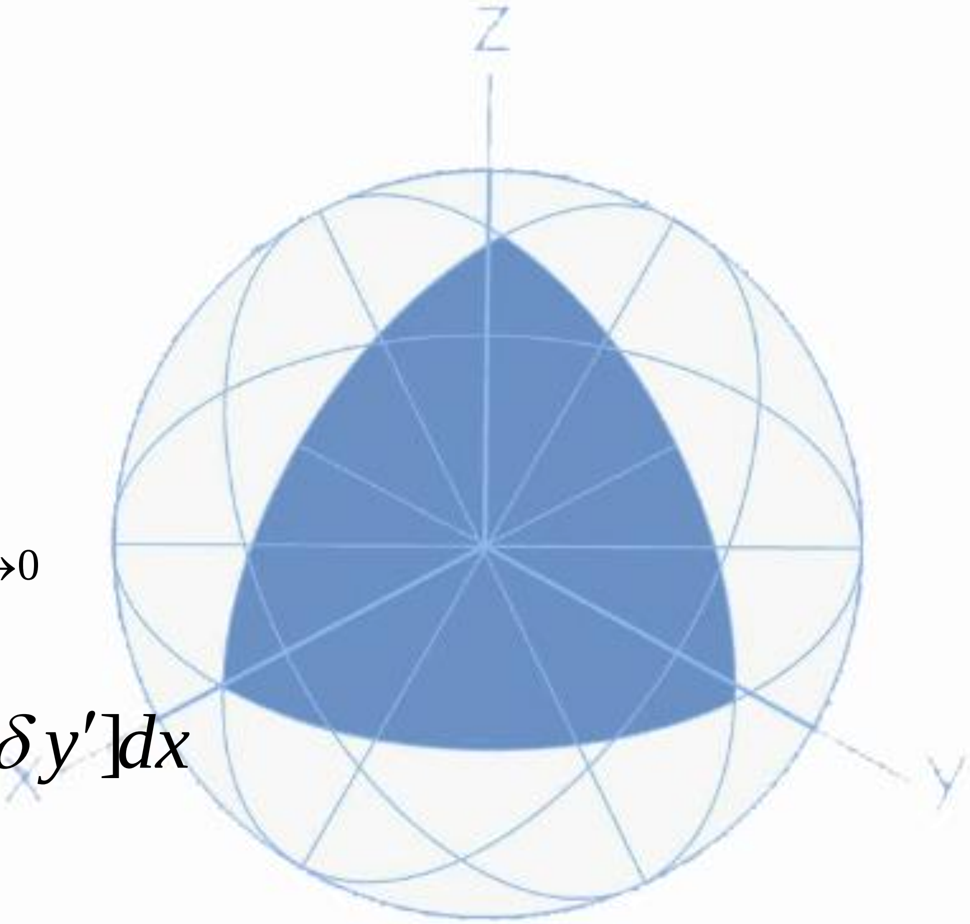


8.2.3变分学的求解

让 $\varepsilon \to 0$，得

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J[y + \varepsilon \delta y]|_{\varepsilon \to 0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'] dx$$

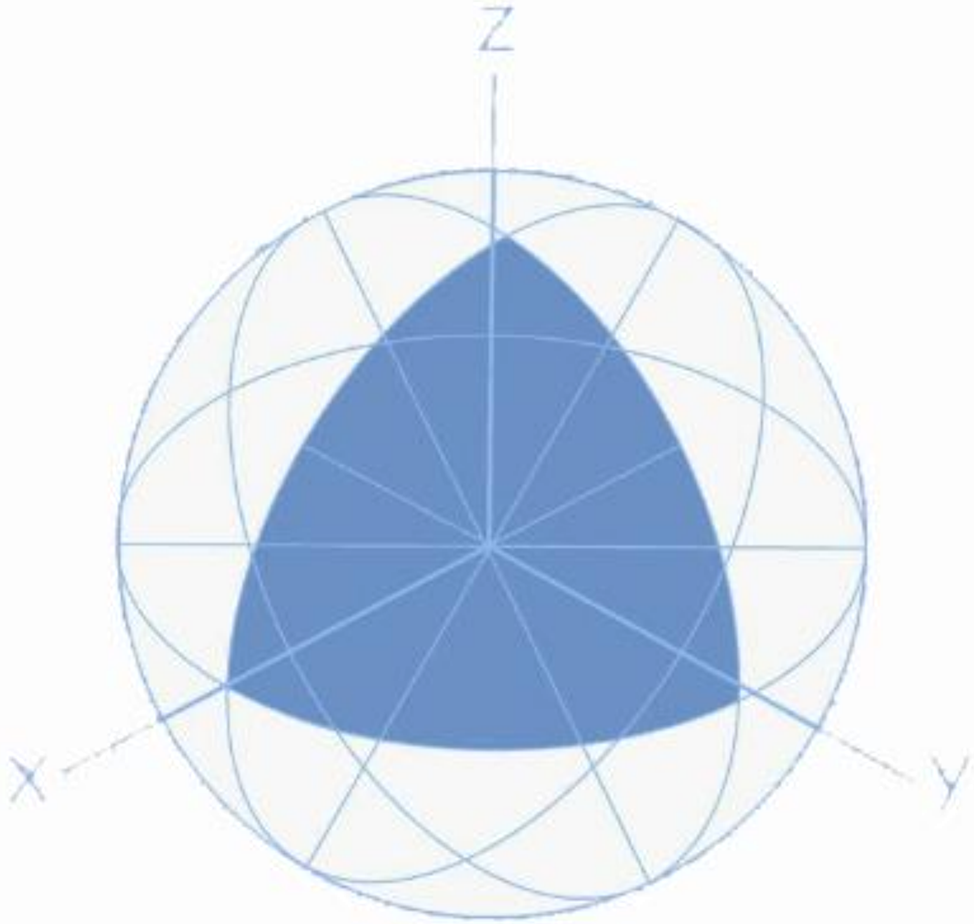


8.2.3变分学的求解

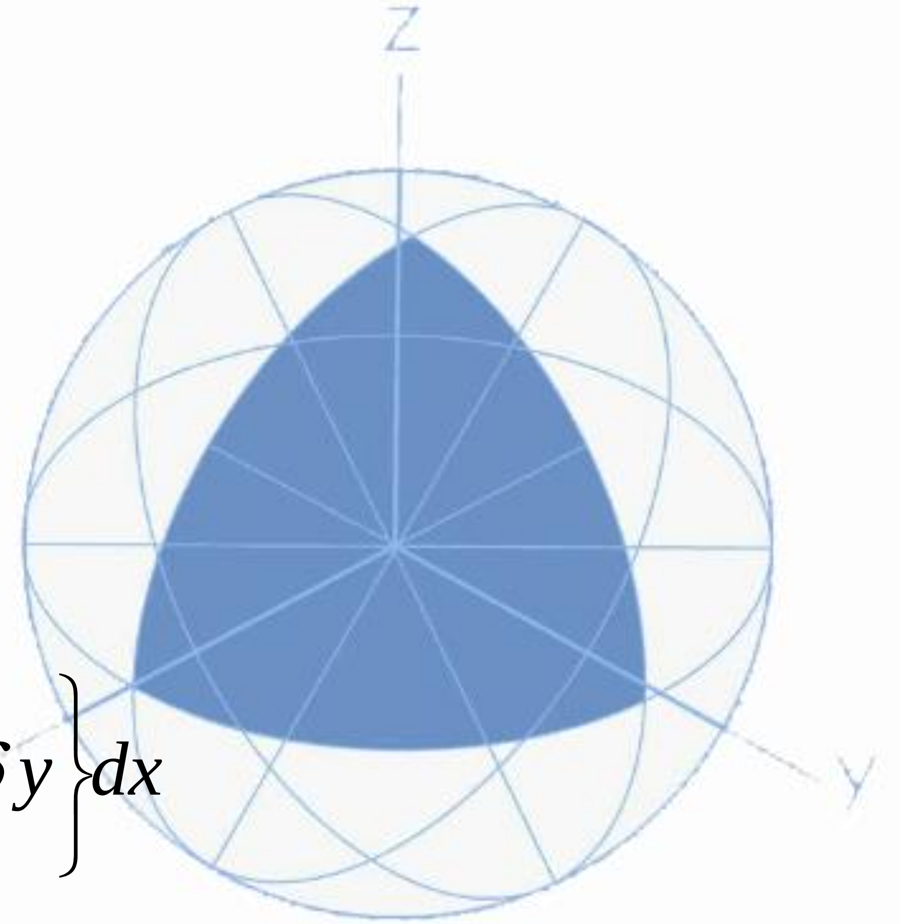
其中

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y')$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y')$$



8.2.3变分学的求解



而且

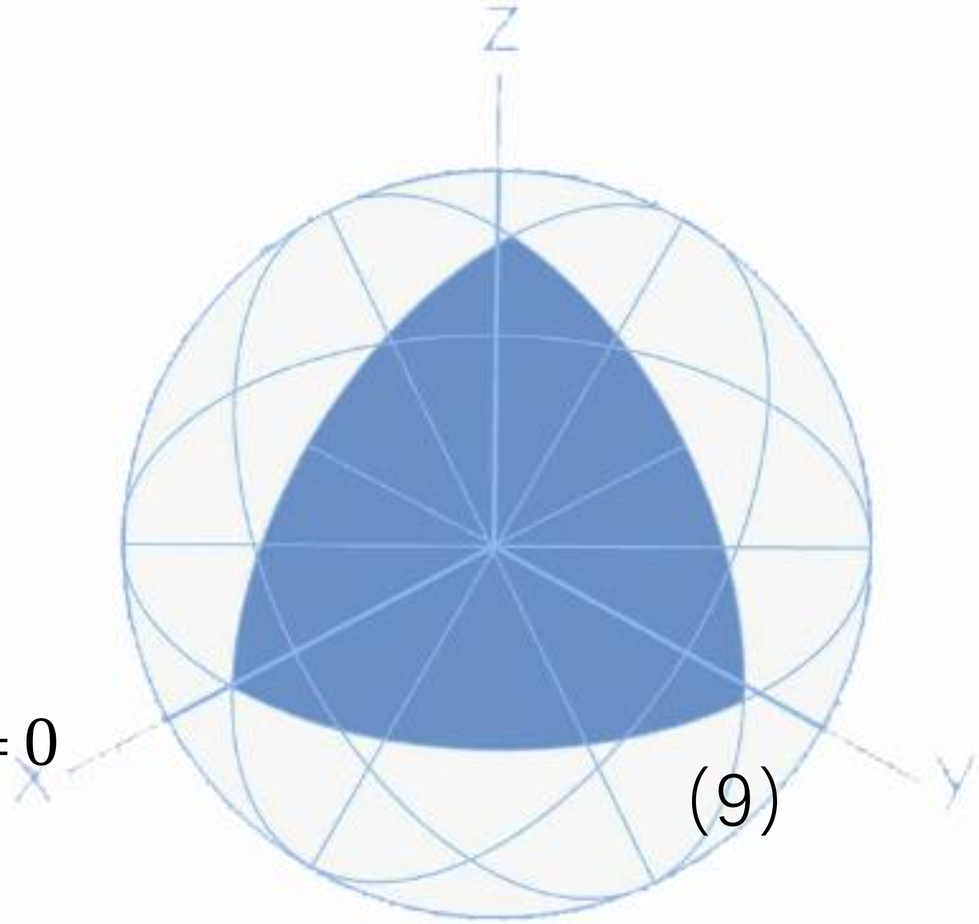
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} [\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y] - \frac{d}{dx} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \delta y \right\} dx$$

8.2.3变分学的求解

所以，得

$$\delta J=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\,\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\delta y\,dx=0 \tag{9}$$



8.2.3变分学的求解

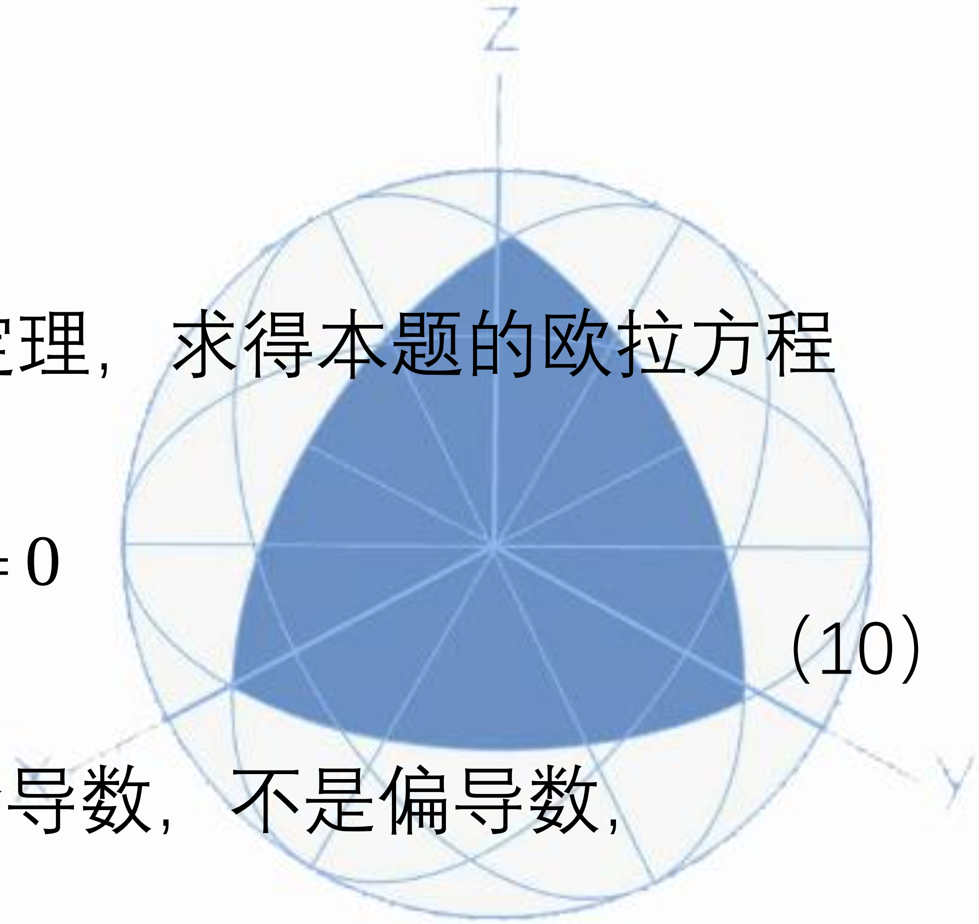
但这是固定的边界条件，$\delta y(x_2)=\delta y(x_1)=0$，所以得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\delta ydx$$

最后，从（9）式得变分极值条件

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\right\}\delta ydx=0$$

8.2.3变分学的求解



根据变分法的基本预备定理，求得本题的欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{10}$$

这里的第二项是对 x 的全导数，不是偏导数，

而且 $F=F(x,y,y')$

8.2.3变分学的求解

所以

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx}$$

$$=F''_{xy'}+F''_{yy'}y'+F''_{y'y'}y''$$

其中 $F''_{xy'},F''_{yy'},F''_{y'y'}$ 都是 $F=F(x,y,y')$ 对 x,y,y' 的二阶偏导数，$y'=\frac{dy}{dx},y''=\frac{d^2y}{dx^2}$

8.2.3变分学的求解

所以欧拉方程（10）也可写成

$$F_y' - F_{xy'}'' - F_{yy'}'' y' - F_{y'y'}'' y'' = 0$$

这是 1744 年欧拉方程所得出的著名的方程。

8.2.3变分学的求解

欧拉原著(1744)用了很迂回繁琐的推导过程，拉格朗日用了现在称为拉格朗日法的方法简捷地得到了相同的结果(1755)，所以现在也有人称这个方程为**欧拉-拉格朗日方程**。

8.2.3变分学的求解

这是 $y(x)$ 的一个二阶微分方程。其积分有两个常数 C_1, C_2

它的积分曲线 $y=y(x,C_1,C_2)$ 叫做极值曲线。

只有在这族极值曲线上，泛函才能达到极值。

积分常数是极值曲线通过 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$ 这两个端

点条件所决定的。

8.2.3变分学的求解

二、最简泛函的几种特殊情形

(1) F不依赖于 $\dot{y}$，即 $F = F(x, y)$

这时 $F_{\dot{y}} \equiv 0$，欧拉方程为 $F_y(x, y) = 0$，这是是一个函数方程，以隐函数形式给出 $y(x)$，

其不满足边界条件: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$，因此变分问题无解。

8.2.3变分学的求解

(2) F 不依赖 y，即 $F=F(x,\dot{y})$，欧拉方程为 $\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}(x,\dot{y})=0$

将上式积分便得 $F_{\dot{y}}(x,\dot{y})=c_1$

由此可求出 $\dot{y}=\varphi(x,c_1)$

积分后得到可能的极值曲线族 $y=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,c_1)dx$

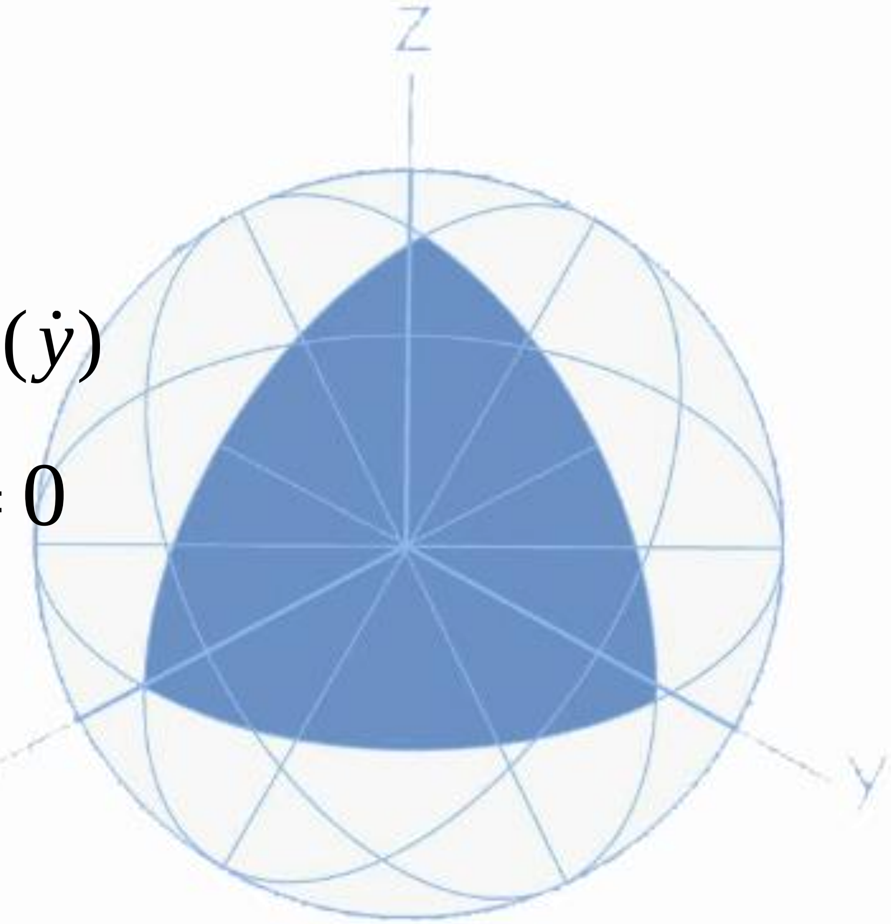
8.2.3变分学的求解

(3) F 只依赖于 $\dot{y}$，即 $F=F(\dot{y})$

这时 $F_y=0, F_{x\dot{y}}=0, F_{y\dot{y}}=0$

欧拉方程为 $\ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}=0$

由此可设 $\ddot{y}=0$ 或 $F_{\dot{y}\dot{y}}=0$



8.2.3变分学的求解

如果 $\ddot{y}=0$，则得到含有两个参数的直线族 $y=c_1x+c_2$

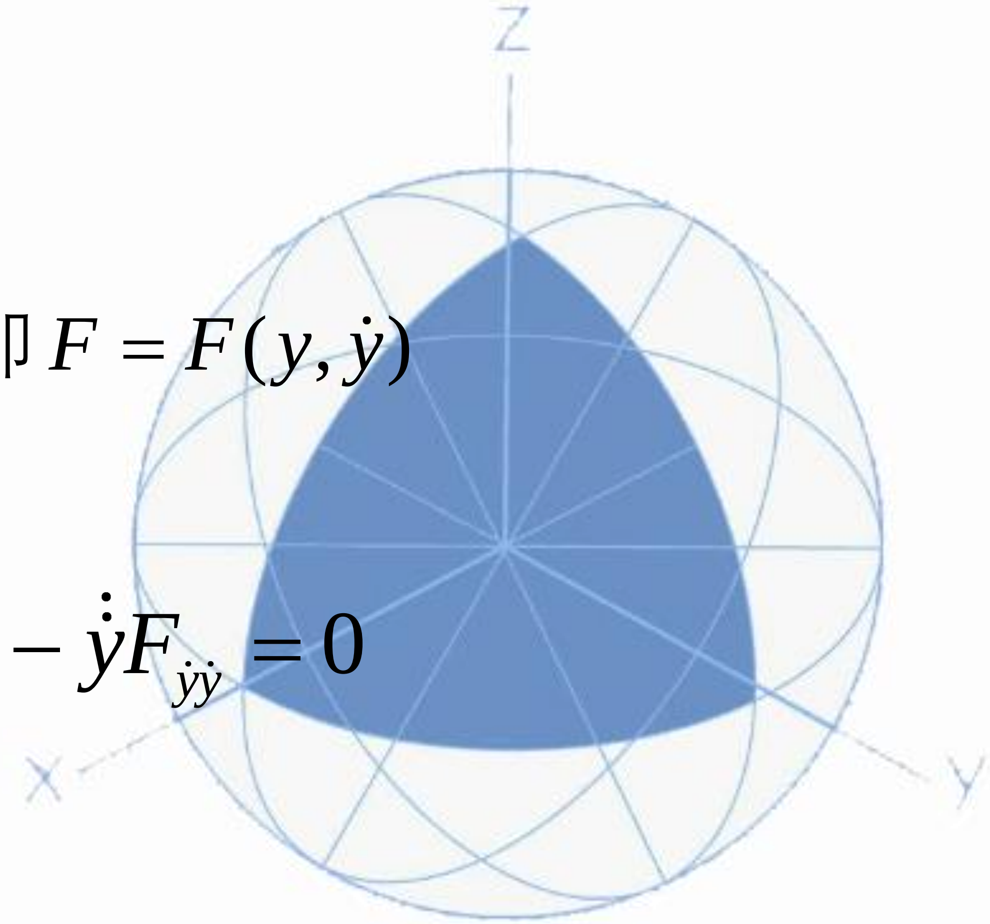
另外若 $F_{\dot{y}\dot{y}}=0$，有一个或几个实根时，则除了上面的

直线族外，又得到含有一个参数 c 的直线族 $y=kx+c$

它包含于上面含有两个参数的直线族 $y=c_1x+c_2$ 中，

于是，在 $F=F(\dot{y})$ 情况下，极值曲线必然是直线族。

8.2.3变分学的求解



(4) F 只依赖于 y和$\dot{y}$，即 $F=F(y,\dot{y})$

这时有 $F_{x\dot{y}}=0$，

故欧拉方程为 $F_y-\dot{y}F_{y\dot{y}}-\ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}=0$

注意到 F 不依赖于x

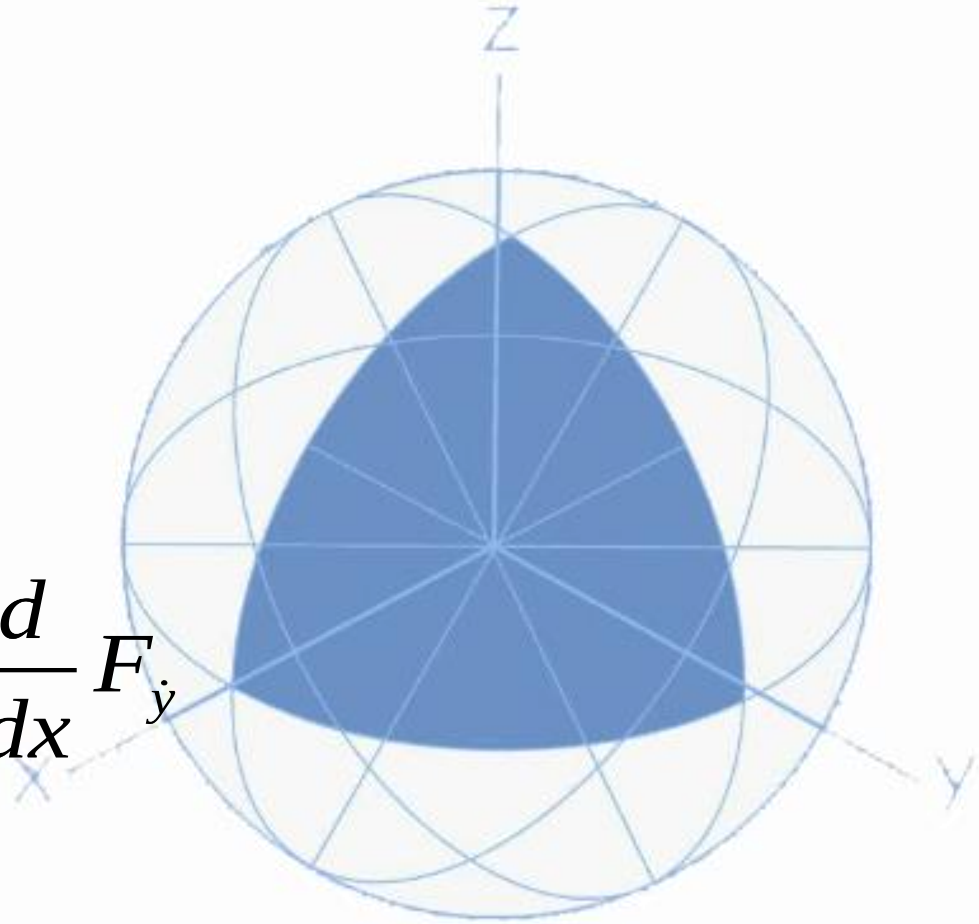
8.2.3变分学的求解

于是有

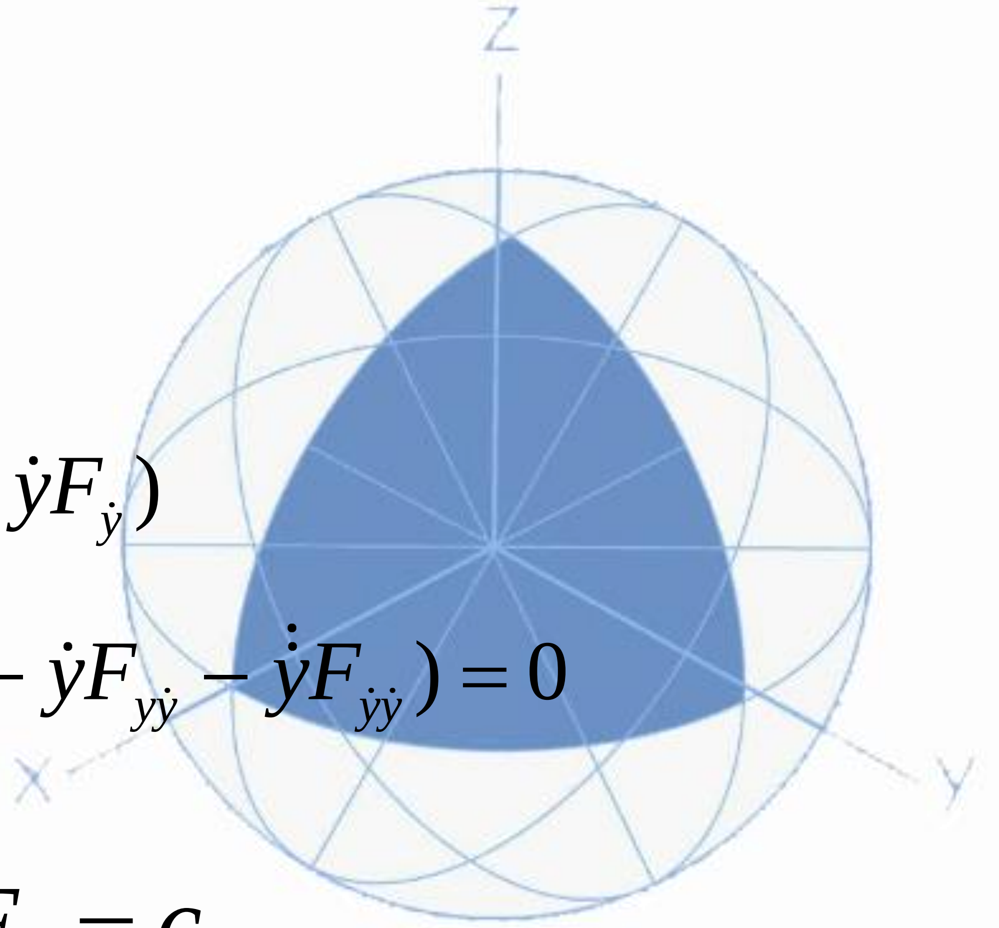
$$\frac{d}{dx}(F-\dot{y}F_{\dot{y}})$$

$$=F_y\dot{y}+F_{\dot{y}}\ddot{y}-\ddot{y}F_{\dot{y}}-\dot{y}\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}$$

$$=\dot{y}(F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}})$$



8.2.3变分学的求解



展开 $\dfrac{d}{dx}F_{\dot{y}}$ 得到

$$\frac{d}{dx}(F-\dot{y}F_{\dot{y}})$$

$$=\dot{y}(F_y-\dot{y}F_{y\dot{y}}-\ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}})=0$$

由此方程积分得

$$F-\dot{y}F_{\dot{y}}=c_1$$

8.2.3变分学的求解

例 最速降线问题求解

设A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连结A和B的平面曲线中，求一曲线，使质点仅受重力作用，初速度为零时，沿此曲线从A滑行至B的时间最短。

8.2.3变分学的求解

解：将A点取为坐标原点，X轴水平向右，Y轴水平向下

B点为$B(x_2, y_2)$。

根据能量守恒定律，质点在曲线$y(x)$上任一点处的速度

$\frac{ds}{dt}$满足

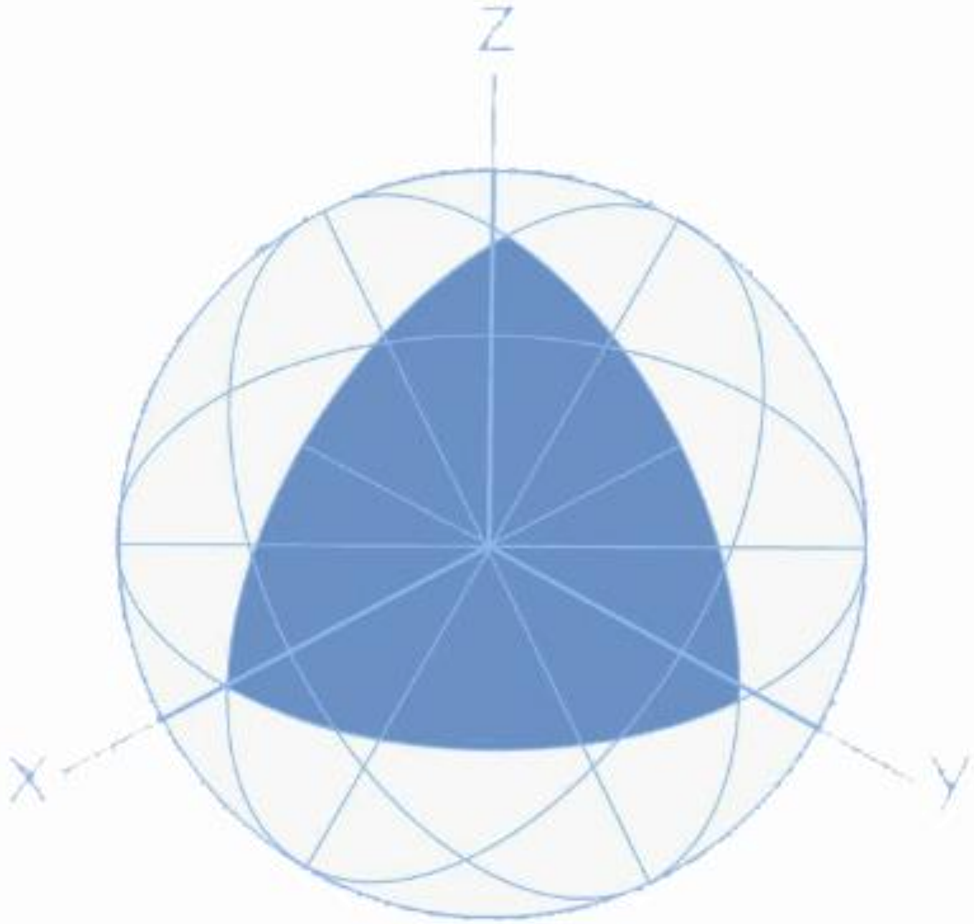
$$\frac{1}{2}m(\frac{ds}{dt})^2 = mgy \qquad （s\text{ 为弧长}）$$

8.2.3变分学的求解

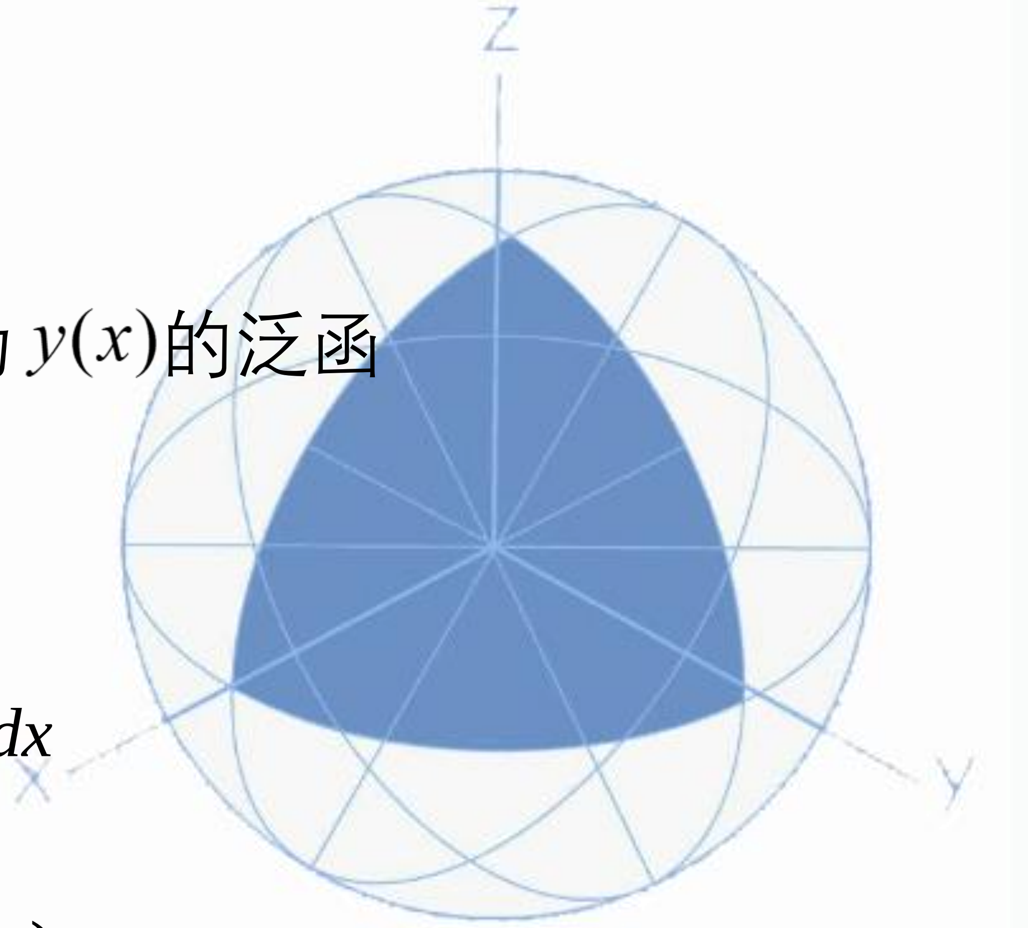
将 $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

代入上式得

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$



8.2.3变分学的求解



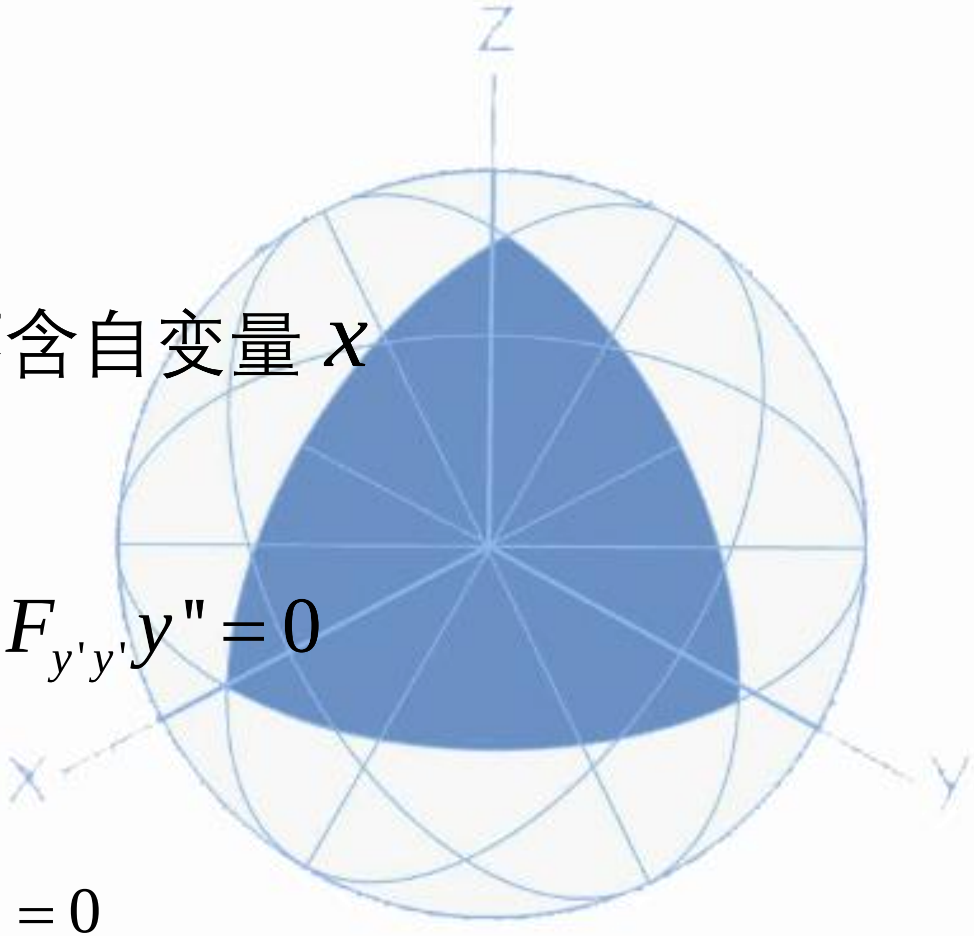
于是质点滑行时间应表为 $y(x)$ 的泛函

$$J[y(x)] = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2gy}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

端点条件为 $y(0)=0, y(x_2)=y_2$

8.2.3变分学的求解



因为 $F(y,y')=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$ 不含自变量 x

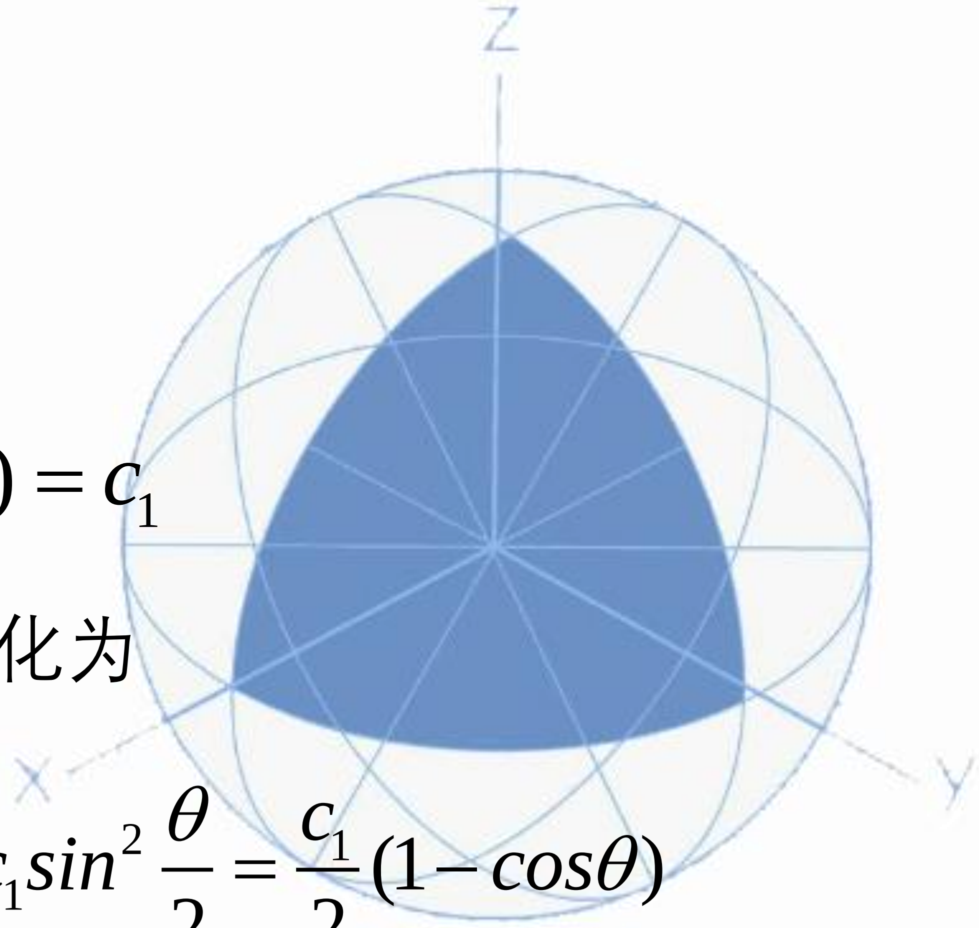
所以欧拉方程可以写作

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$$

8.2.3变分学的求解



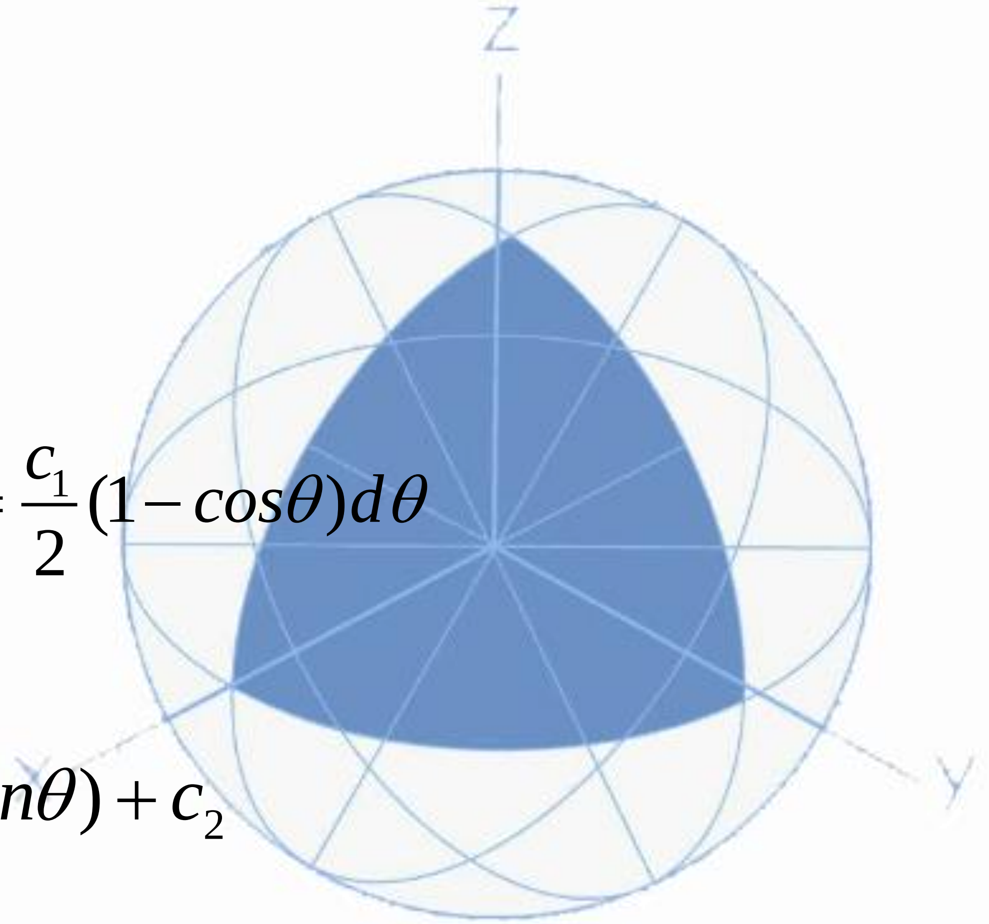
作一次积分得

$$y(1+y'^2)=c_1$$

令 $y'=cot\dfrac{\theta}{2}$ ，则方程简化为

$$y=\frac{c_1}{1+y'^2}=c_1 sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c_1}{2}(1-cos\theta)$$

8.2.3变分学的求解

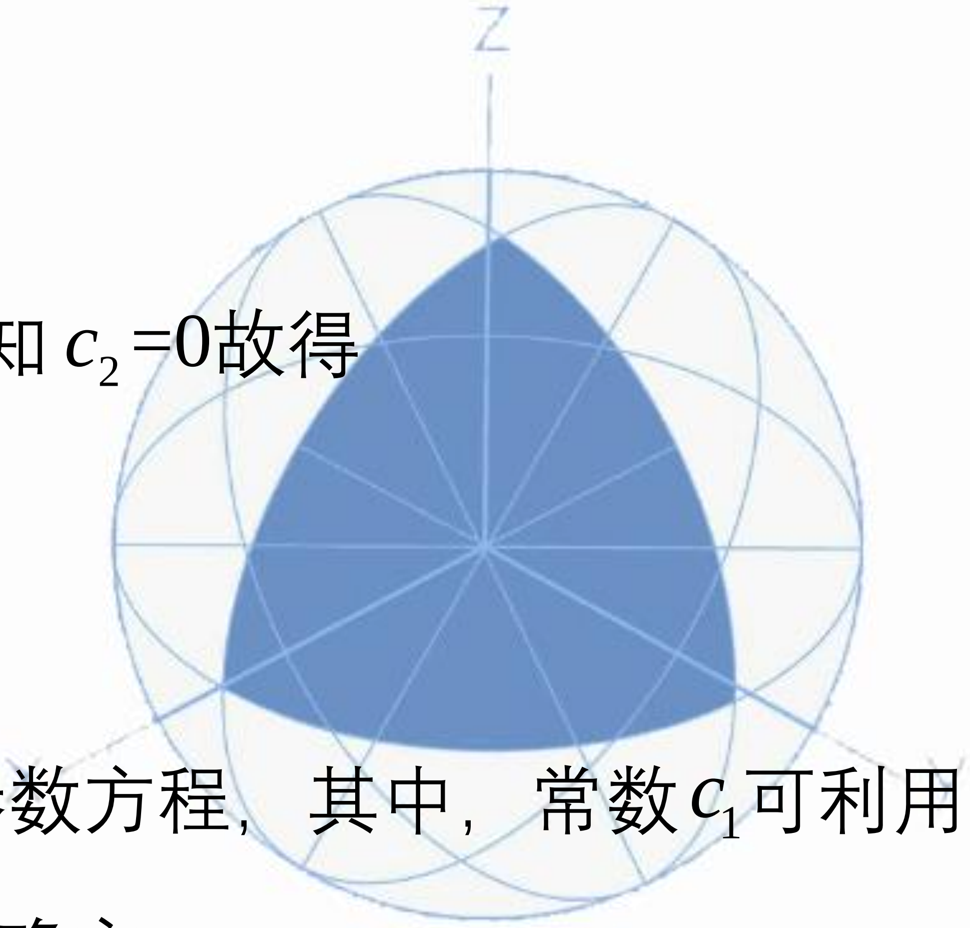


又因

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{\cot\frac{\theta}{2}} = \frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)d\theta$$

积分之，得 $x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) + c_2$

8.2.3变分学的求解



由边界条件 $y(0)=0$，可知 $c_2=0$ 故得

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

这是摆线（圆滚线）的参数方程，其中，常数 c_1 可利用另一边界条件 $y(x_2)=y_2$ 来确定。

8.2.3变分学的求解

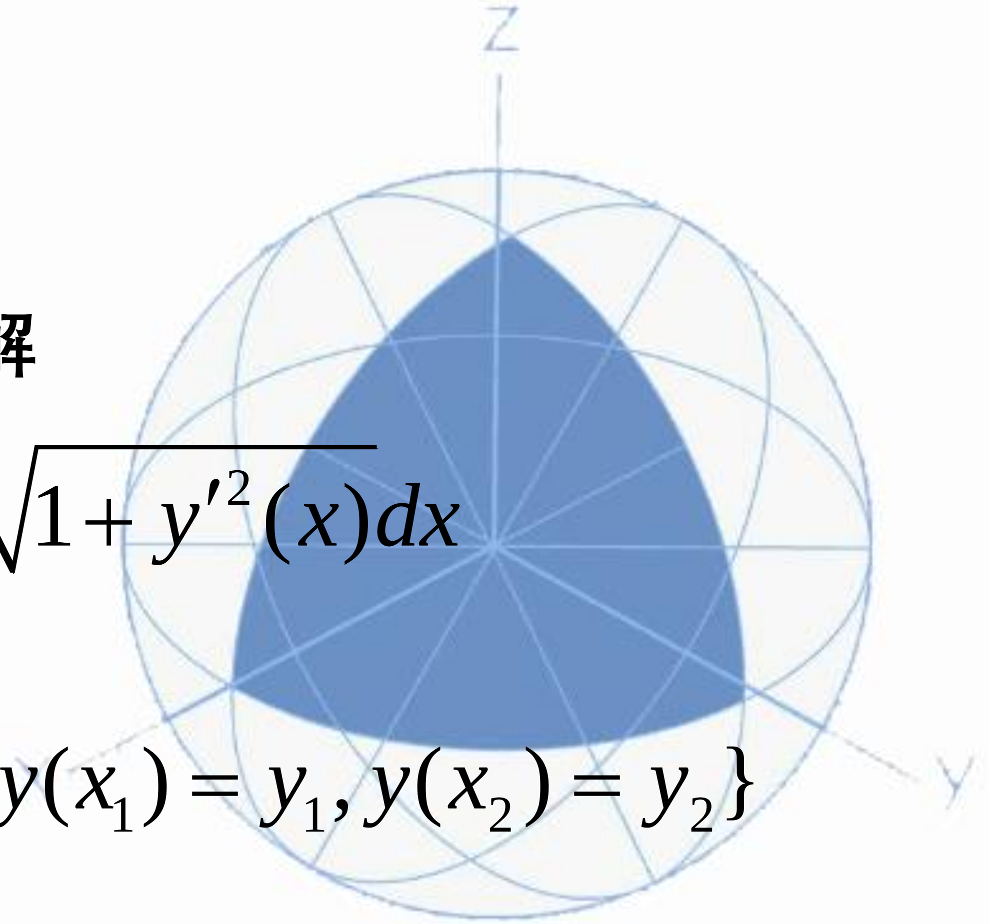
从这个最速降线的泛函变分极值问题上，我们可以看到变分法的几个主要步骤：

（1）从背景问题上建立泛函及其条件；

（2）通过泛函变分，利用变分法基本预备定理求得欧拉方程；

（3）求解欧拉方程，这是微分方程的求解问题。

8.2.3变分学的求解



例 最小旋转面问题的求解

$$J[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

$$S = \{y \mid y \in C^1[x_1, x_2], y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\}$$

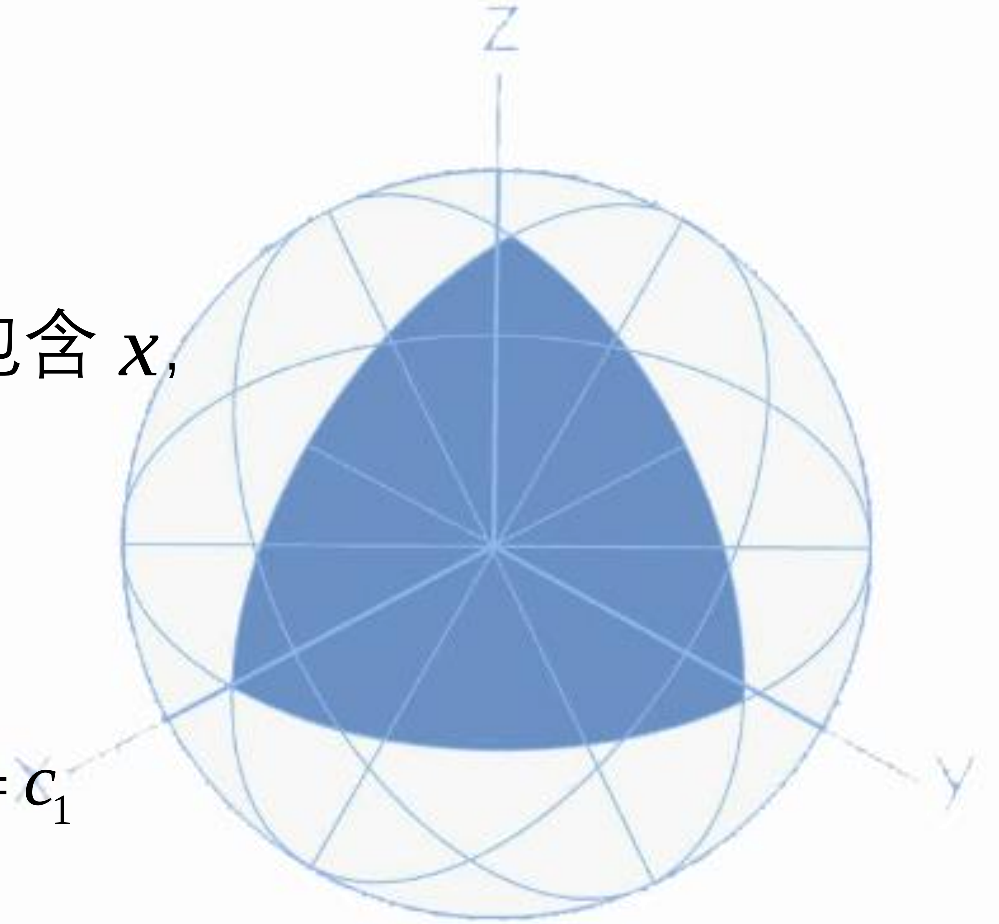
8.2.3变分学的求解

解 因 $F = y\sqrt{1+y'^2(x)}$ 不包含 x,

故由欧拉方程积分得

$F - y'F_{y'}$

$= y\sqrt{1+y'^2} - y'y\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$



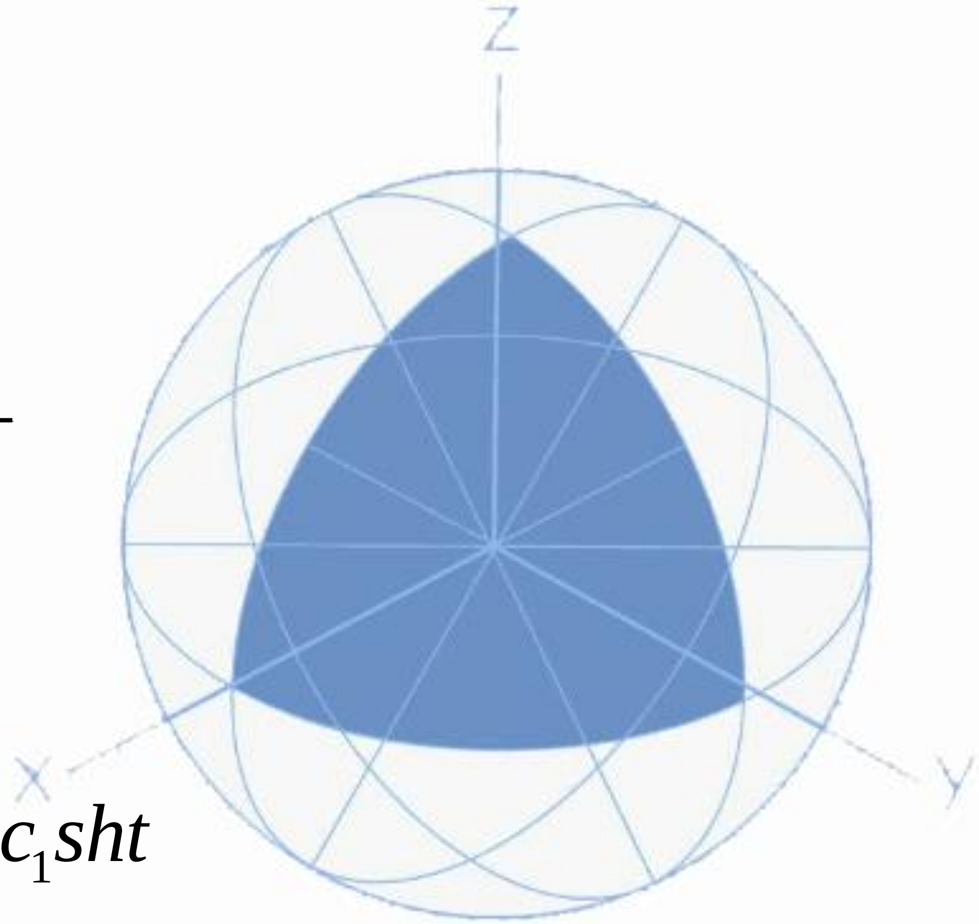
8.2.3变分学的求解

化简得

$$y = c_1\sqrt{1+y'^2}$$

令 $y'=sht$，代入上式得

$$y = c_1\sqrt{1+sh^2t} = c_1 sht$$



8.2.3变分学的求解

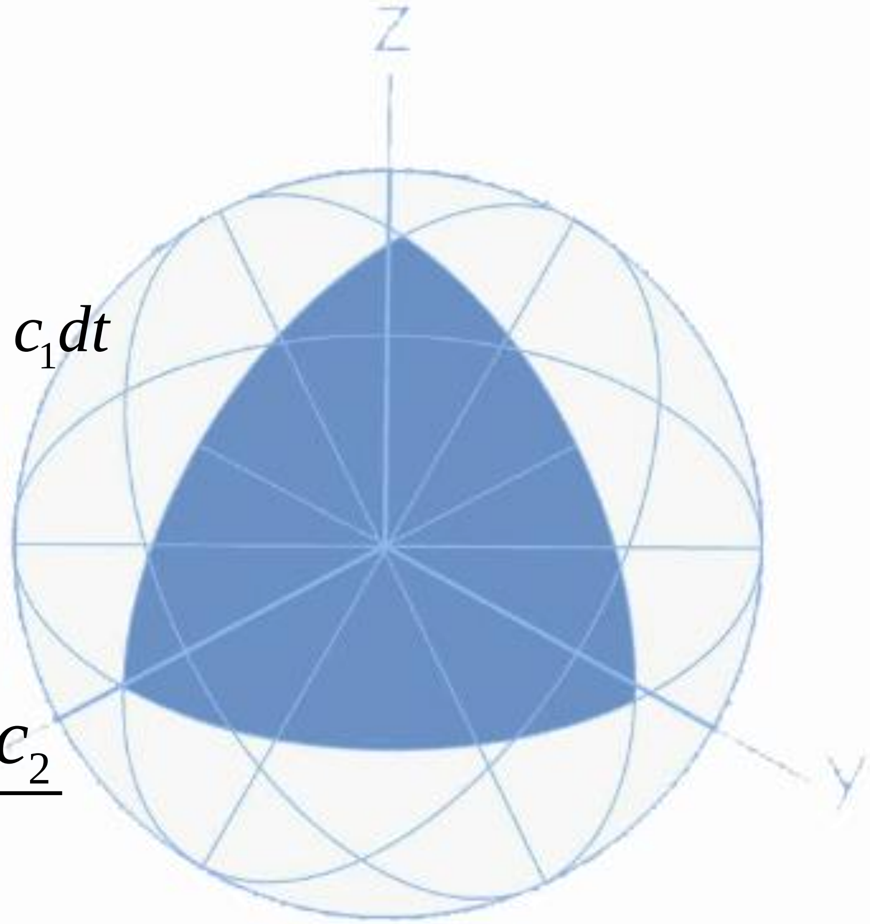
由于 $$dx=\frac{dy}{dy'}=\frac{c_1 shtdt}{sht}=c_1 dt$$

积分之，得

$$x=c_1 t+c_2$$

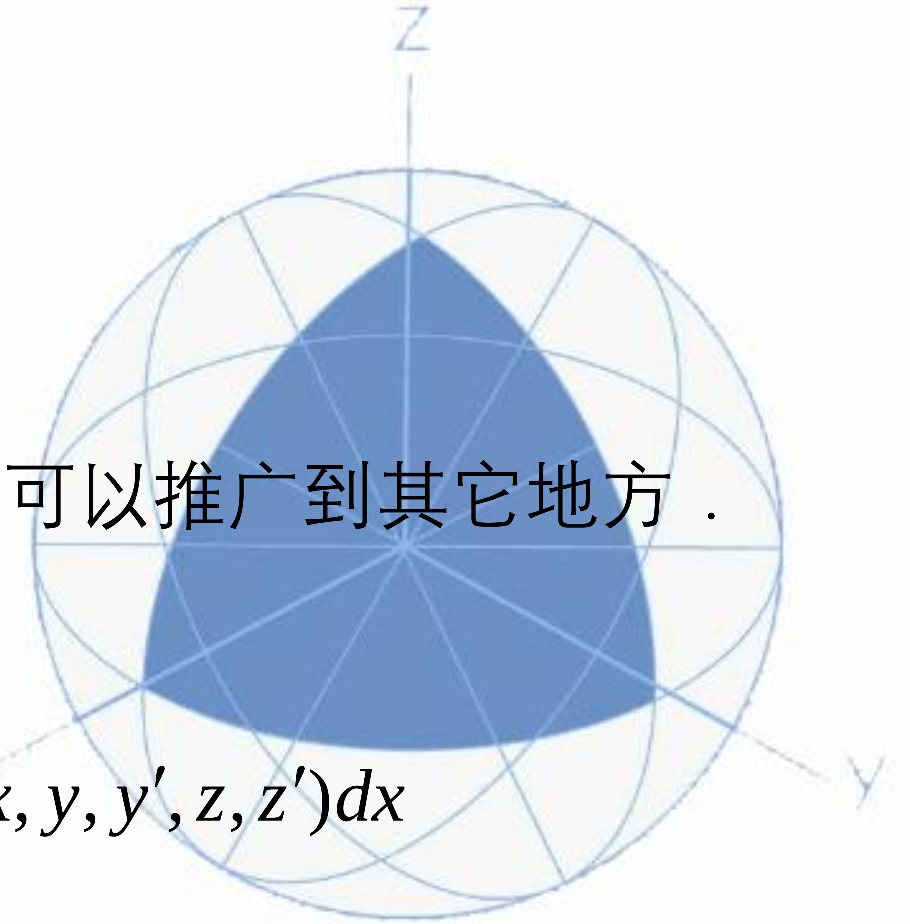
消去t，就得到 $$y=c_1 ch\frac{x-c_2}{c_1}$$

这就是悬链线方程。



8.2.3变分学的求解

三、最简泛函的推广



最简泛函取极值的必要条件可以推广到其它地方 .

（1）含多个函数的泛函

使泛函 $J[y(x),z(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',z,z')dx$

取极值且满足

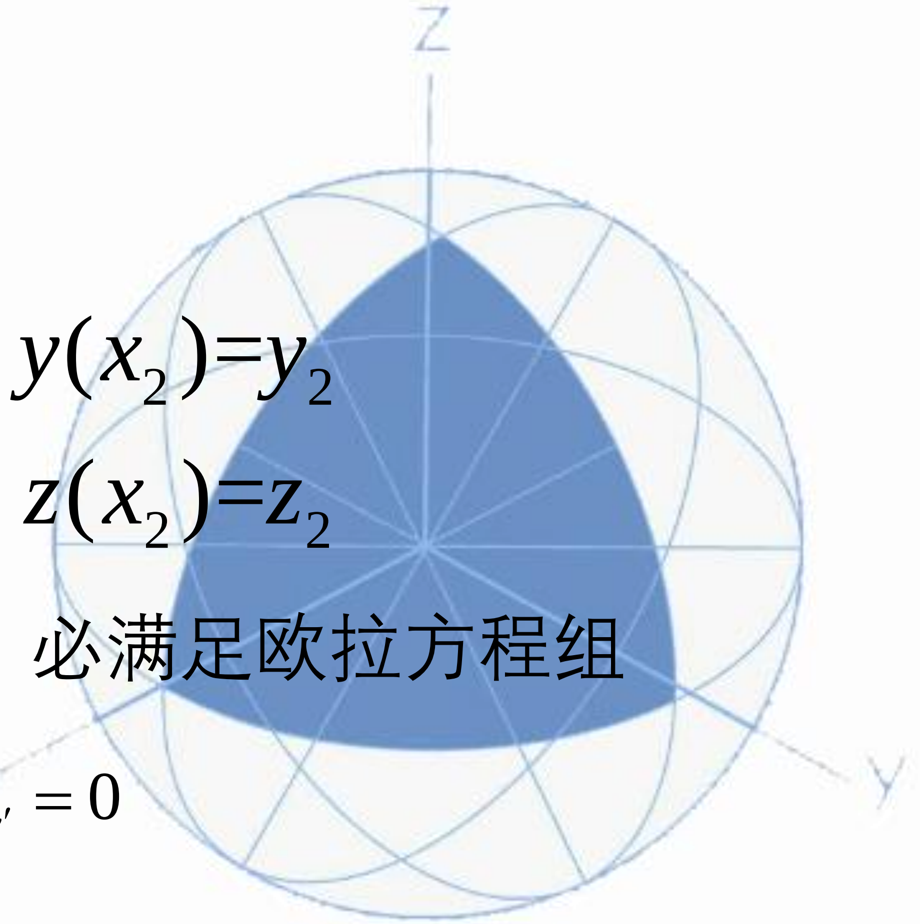
8.2.3变分学的求解

固定边界条件 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$

$z(x_1)=z_1,\ z(x_2)=z_2$

的极值曲线 $y=y(x), z=z(x)$ 必满足欧拉方程组

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}F_{z'} = 0 \end{cases}$$



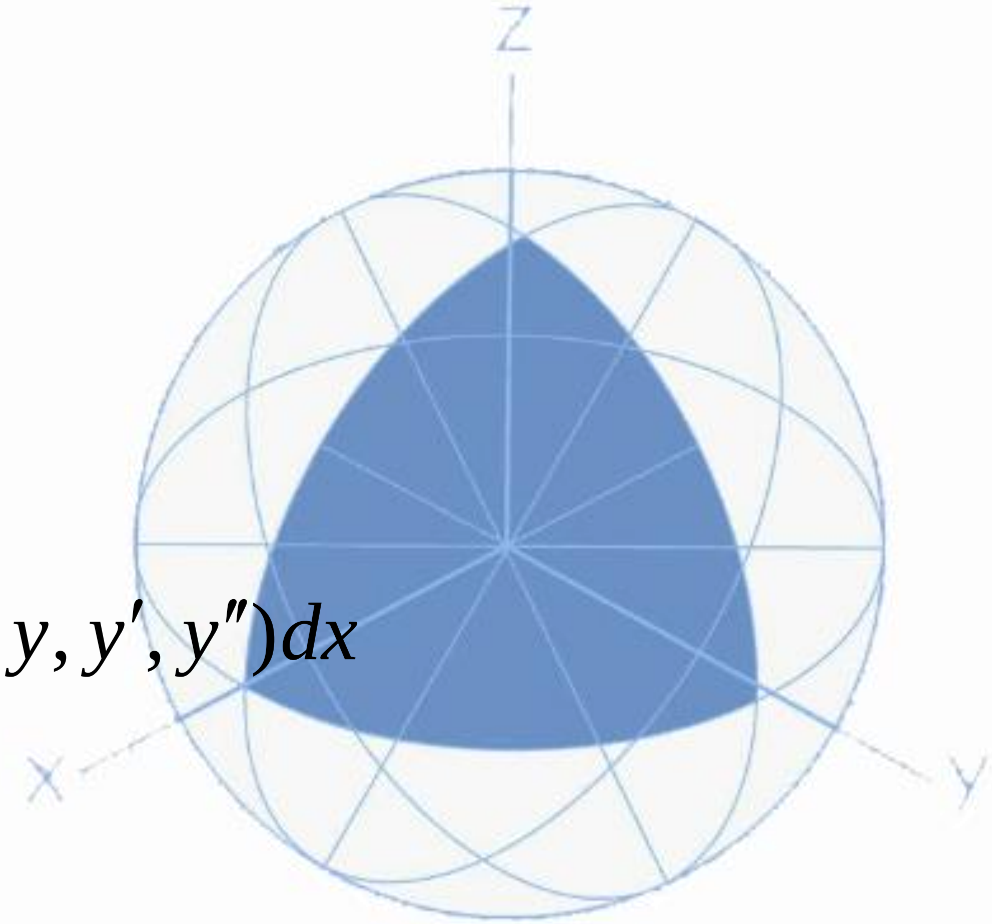
8.2.3变分学的求解

（2）含高阶导数的泛函

使泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$$

取极值且满足



8.2.3变分学的求解

固定边界条件 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$

$y'(x_1)=y_1', y'(x_2)=y_2'$

的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

8.2.3变分学的求解

（3）含多元函数的泛函

设 $z(x,y)\in C^2,(x,y)\in D$， 使泛函

$$J[z(x,y)]=\iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

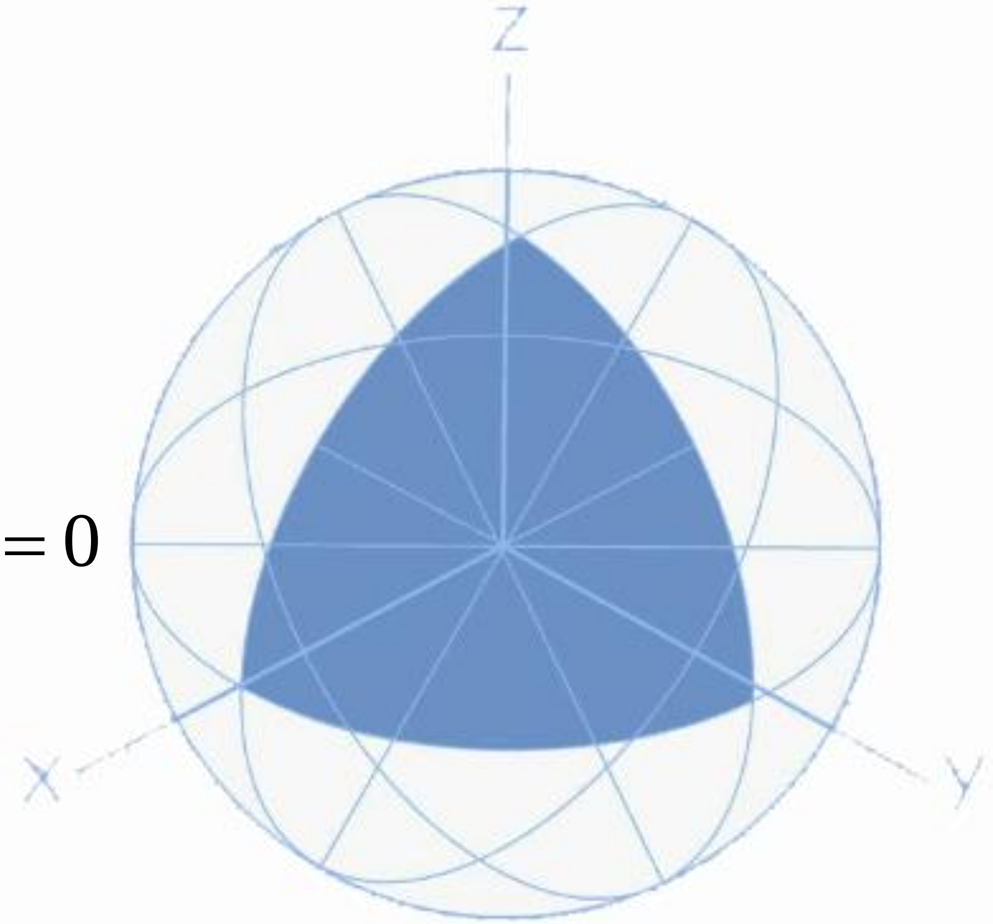
取极值且在区域 D 的边界线 l 上取已知值的极值函数 $z=z(x,y)$

8.2.3变分学的求解

必须满足方程

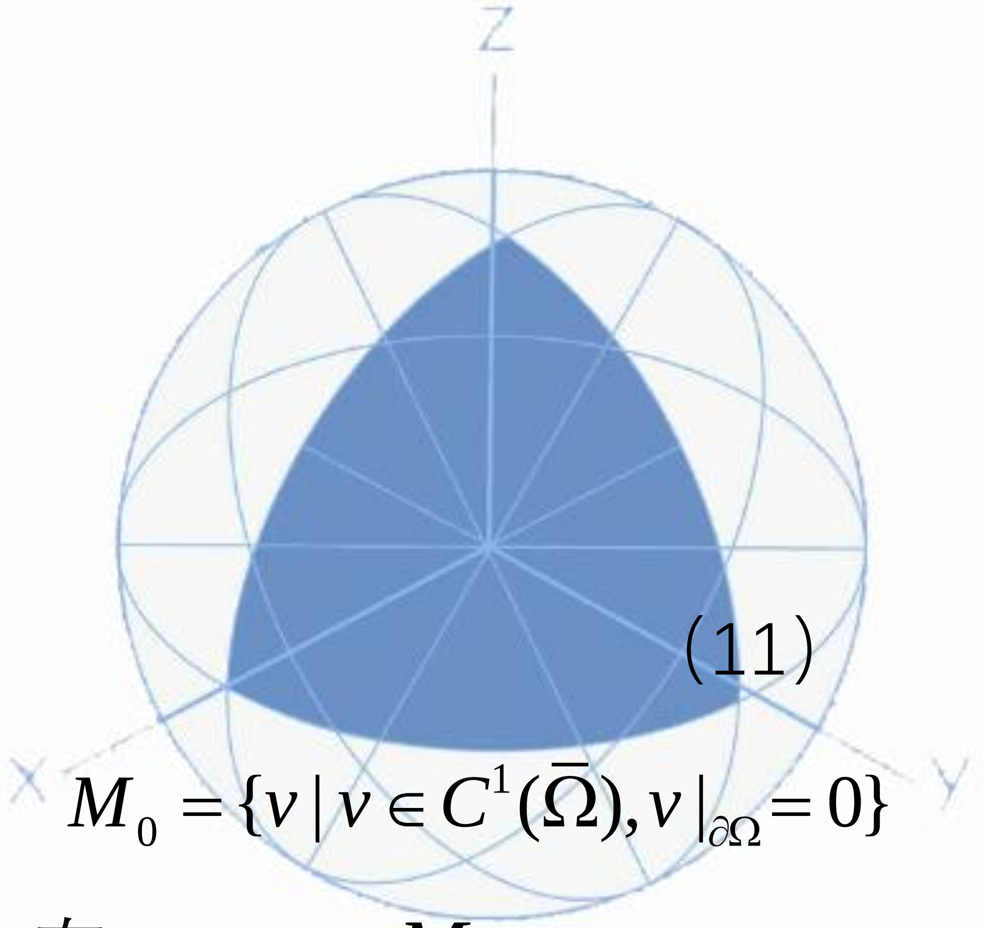
$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

上式称为奥氏方程。



8.2.3变分学的求解

例 极小曲面问题的求解



设u是变分问题

$$\min_{v\in M_\varphi}\iint_\Omega\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}\,dxdy \qquad (11)$$

的解，现任意取定$v\in M_0$ $\quad M_0=\{v\,|\,v\in C^1(\bar{\Omega}),v|_{\partial\Omega}=0\}$

则对任意 $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$，有$u+\varepsilon v\in M_\varphi$

8.2.3变分学的求解

记 $j(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v)$

它是一个定义在 R 上的可微函数，由（11）知

$$j(\varepsilon)\geq j(0),\forall\varepsilon\in R^{1}$$

即函数 $j(\varepsilon)$ 作为 ε 的常义函数在 $\varepsilon=0$ 达到最小值，

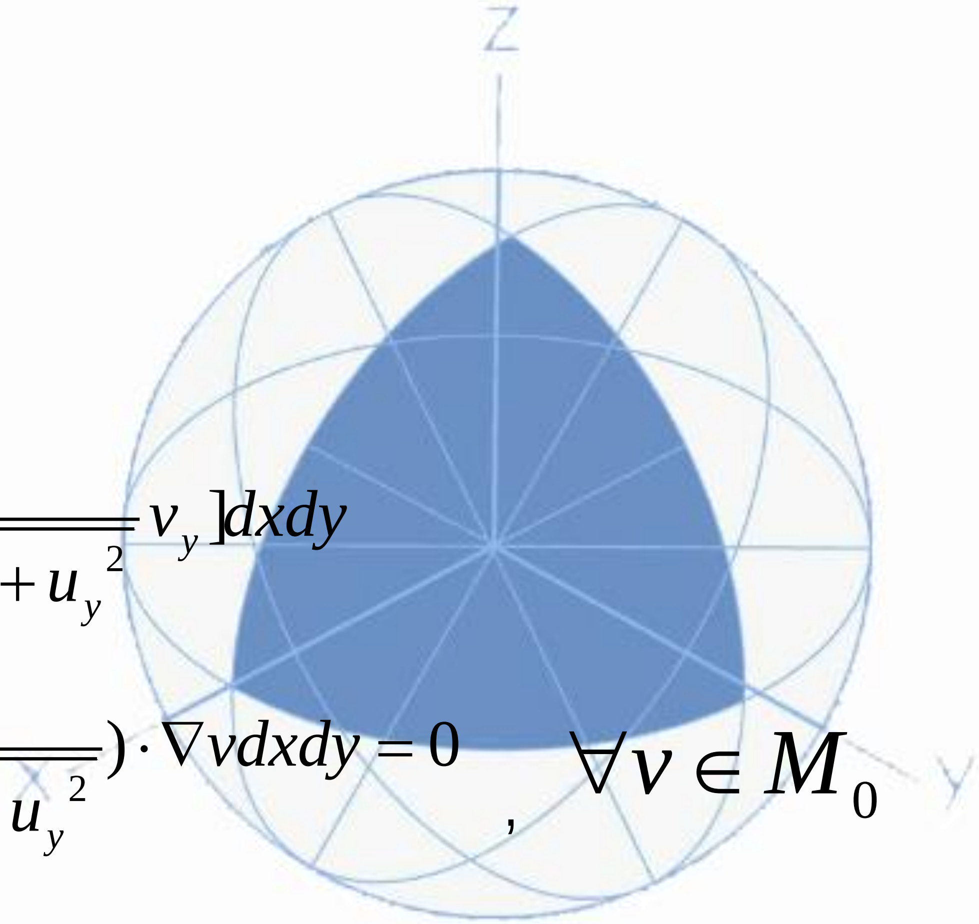
8.2.3变分学的求解

从而有 $j'(0)=0$

不难计算出

$$j'(\varepsilon)=\iint_{\Omega}\frac{(u+\varepsilon v)_x\cdot v_x+(u+\varepsilon v)_y\cdot v_y}{\sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2}}dxdy$$

8.2.3变分学的求解



利用（11）式得

$$\iint_\Omega \left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} v_x + \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} v_y\right] dxdy$$

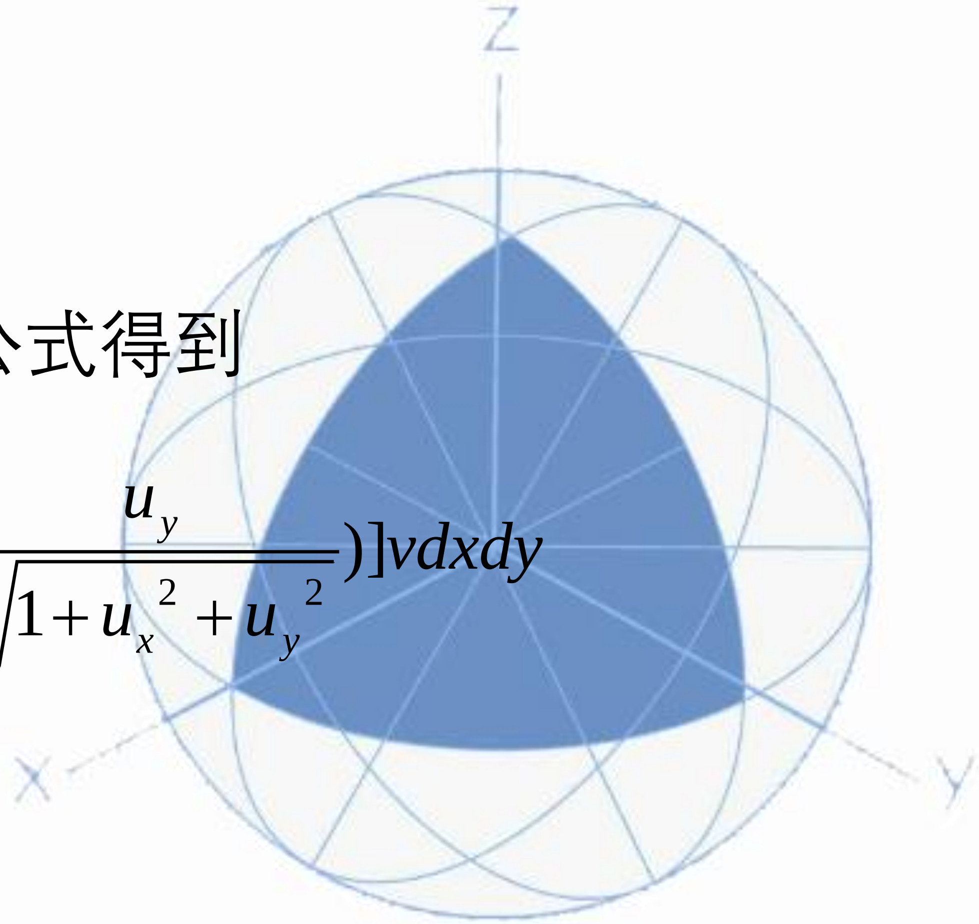
$$= \iint_\Omega \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) \cdot \nabla v dxdy = 0, \quad \forall v \in M_0$$

8.2.3变分学的求解

如果$u \in C^2(\bar{\Omega})$，由格林公式得到

$$-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x{}^2+u_y{}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x{}^2+u_y{}^2}}\right)\right]v\,dxdy$$

$$+\int_{\partial\Omega}\frac{v}{\sqrt{1+u_x{}^2+u_y{}^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \nu}ds=0$$



8.2.3变分学的求解

由于$v|_{\partial\varphi}=0$。因此上式左端第二个积分为零。从而由被积函数的连续性以及 v 的任意性，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^{\ 2}+u_y^{\ 2}}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^{\ 2}+u_y^{\ 2}}}\right]=0 \qquad (12)$$

它称为变分问题（11）的Euler方程。

8.2.3变分学的求解

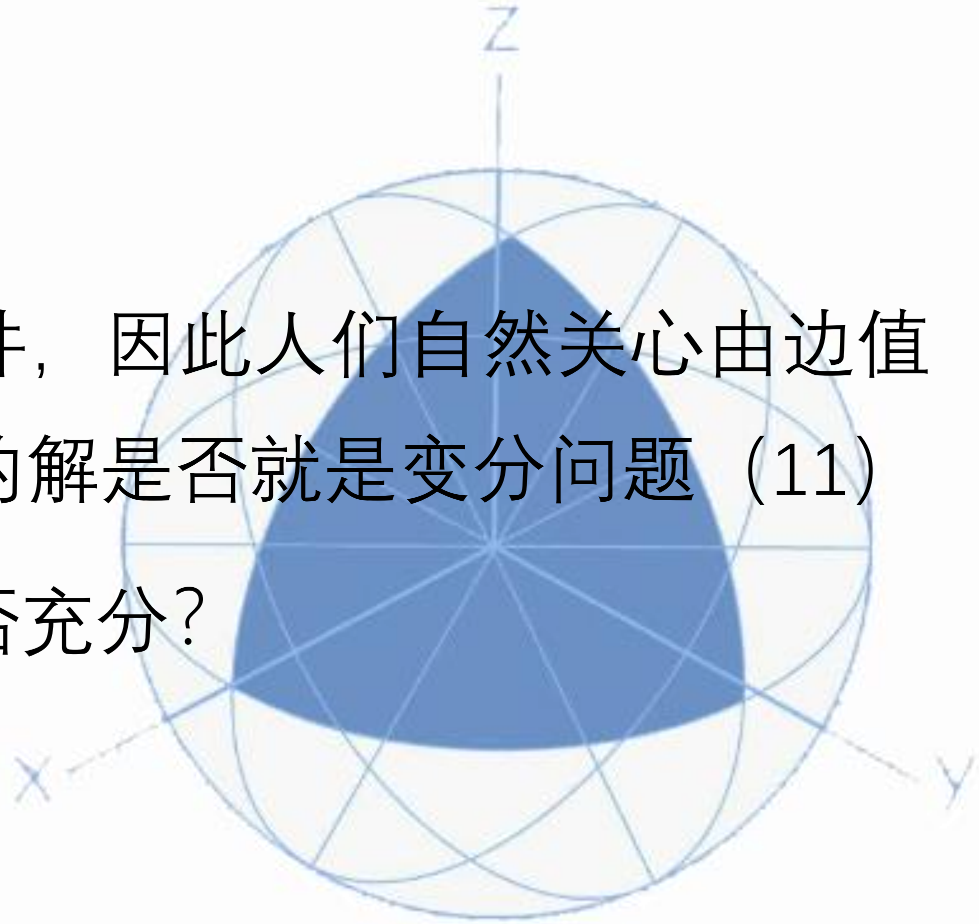
因此定义在 $\bar{\Omega}$ 上且以空间曲线 l 为边界的极小曲面 $u=u(x,y)$

必定在 Ω 内适合方程（12）

和在 $\partial\Omega$ 上适合边界条件

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y) \qquad (13)$$

8.2.3变分学的求解



由于（12）只是必要条件，因此人们自然关心由边值问题（12）（13）解出的解是否就是变分问题（11）的解，也就是（11）是否充分？

为此计算 j"

8.2.3变分学的求解

不难得到

$$j''(\varepsilon)$$

$$=\iint_{\Omega}\frac{v_x{}^2+v_y{}^2+[v_y[u_x+\varepsilon v_x)-v_x(u_y+\varepsilon v_y)]^2}{[1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2]^{3/2}}dxdy$$

因此 $j''>0$,

8.2.3变分学的求解

故对于上面提出的问题，回答肯定，即如果边值问题（12)、(13）的解 $u(x,y)$存在且属于 $C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$

那么它必是变分问题（11）的解，

这就证明了变分问题（11）与边值问题（12)、(13）等价。

8.2.3变分学的求解

四、端点变动的情形（横截条件）的欧拉方程

在上一节研究泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_f} F(x,y(x),y'(x))dx \qquad (14)$$

的极值问题时，曾假定极值曲线 $y(x)$的两端点

$A(x_0,y_0),B(x_f,y_f)$是固定不变的。

8.2.3变分学的求解

但是，实际上却常常遇到极值曲线的一个或两个端点不是固定的，而是可以变动的情况，那么，当极值曲线的端点为可变时，泛函（14）达到极值的必要条件将如何呢？

8.2.3变分学的求解

在这一节里，先讨论端点时间固定，但函数$y(x)$在端点的值是自由的泛函问题。

这种端点条件的变分问题称为**自由端点问题**。即在给定x_0, x_f的情况下，求$y(x)$使泛函（14）达到极值。

8.2.3变分学的求解

设自由端点问题的解是y^*，它在端点的值为$y^*(x_0)$和$y^*(x_f)=y_f$。

显然，y^*也应是以$y^*(x_0)$和$y^*(x_f)=y_f$为边界值的固定端点问题的解，即满足欧拉方程（10）

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (10)$$

8.2.3变分学的求解

代入式（9）

$$\delta J=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_f}+\int_{x_0}^{x_f}\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\}\delta y dx=0 \qquad (9)$$

得到

$$\frac{\partial F}{\partial y^*}\delta y\Big|_{x_0}^{x_f}=0$$

8.2.3变分学的求解

由于在自由端点条件下，$\delta y(x_0)$ 和$\delta y(x_f)$ 是相互独立变化的，因此得到正交条件

$$\frac{\partial F}{\partial y^*}\delta y=0,\forall x=x_0,x_f$$

考虑到$\delta y(x_0)$和$\delta y(x_f)$的任意性，得到欧拉方程式的边界

$$\frac{\partial F}{\partial y^*}=0,\forall x=x_0,x_f \qquad (15)$$

8.2.3变分学的求解

该条件通常称为**自然边界条件**。

自由端点问题的解 y^* 需要满足的必要条件归纳为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y^*} = 0, \forall x = x_0, x_f \end{cases} \tag{16}$$

8.2.3变分学的求解

例：求取下列泛函为极小值的极值曲线（自由端点）

$$J[y(x)]=\int_0^2 (y'^2(x)+y'(x)+y(x)y'(x)+y(x))dx$$

8.2.3变分学的求解

解：欧拉方程及由欧拉方程导出的二阶微分方程为

$$y' + 1 - (2y' + 1 + y)' = 0, 2x - 1 = 0$$

得到通解

$$y(x) = 0.25x^2 + c_1 x + c_2$$
$$y'(x) = 0.5x + c_1$$

8.2.3变分学的求解

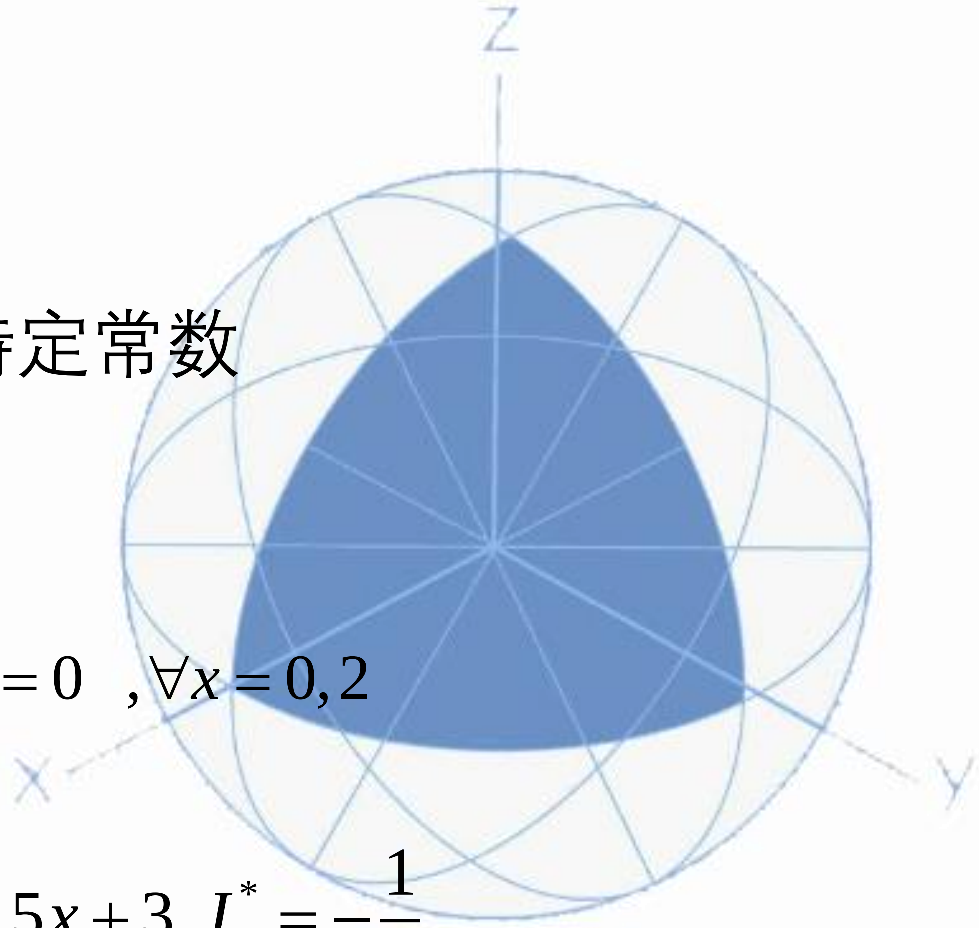
再由自然边界条件确定待定常数

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + 1 + y$$

$$= 0.25x^2 + (1 + c_1)x + 2c_1 + c_2 = 0 \quad , \forall x = 0, 2$$

得到极值曲线

$$y^*(x) = 0.25x^2 - 1.5x + 3, J^* = -\frac{1}{6}$$



8.2.3变分学的求解

下面考虑端点可变的情形:

如果函数 $y^*(x)$ 能使泛函（14）在端点可变的情况下达到极值，若函数 y=$y(x)$ 能在可动边界的容许函数类中使泛函（14）取得极值，那么必能在固定边界的容许函数类中使泛函取得极值，

8.2.3变分学的求解

这是因为可动边界泛函的容许函数类的范围扩大了，

当然包含了固定边界泛函的容许曲线，而在固定边界情况下使泛函取得极值的函数必须满足欧拉方程，所以函数$y=y(x)$在可动边界情况下也应当满足欧拉方程。

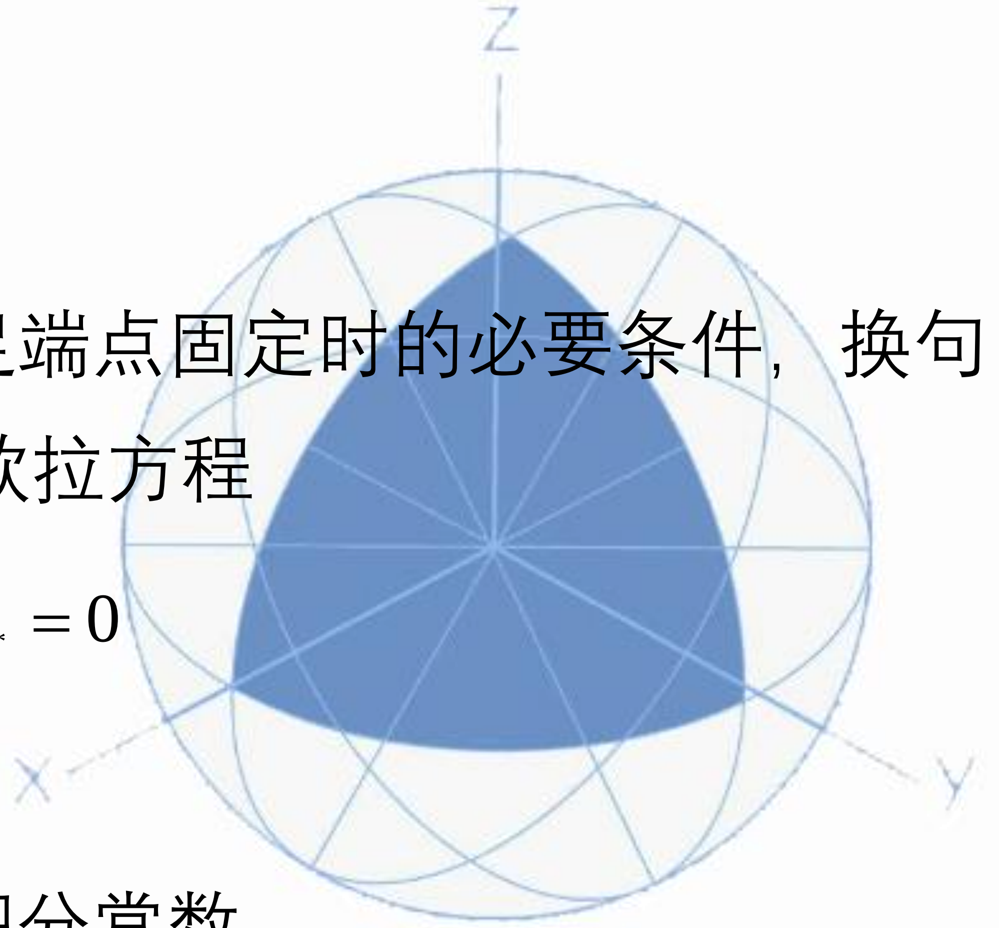
8.2.3变分学的求解

所以，函数$y^*(x)$应当满足端点固定时的必要条件，换句话说，函数$y^*(x)$应当是欧拉方程

$$F_{y^*}-\frac{d}{dx}F_{y^{*}}=0$$

的解。

该解中包含两个待定的积分常数。

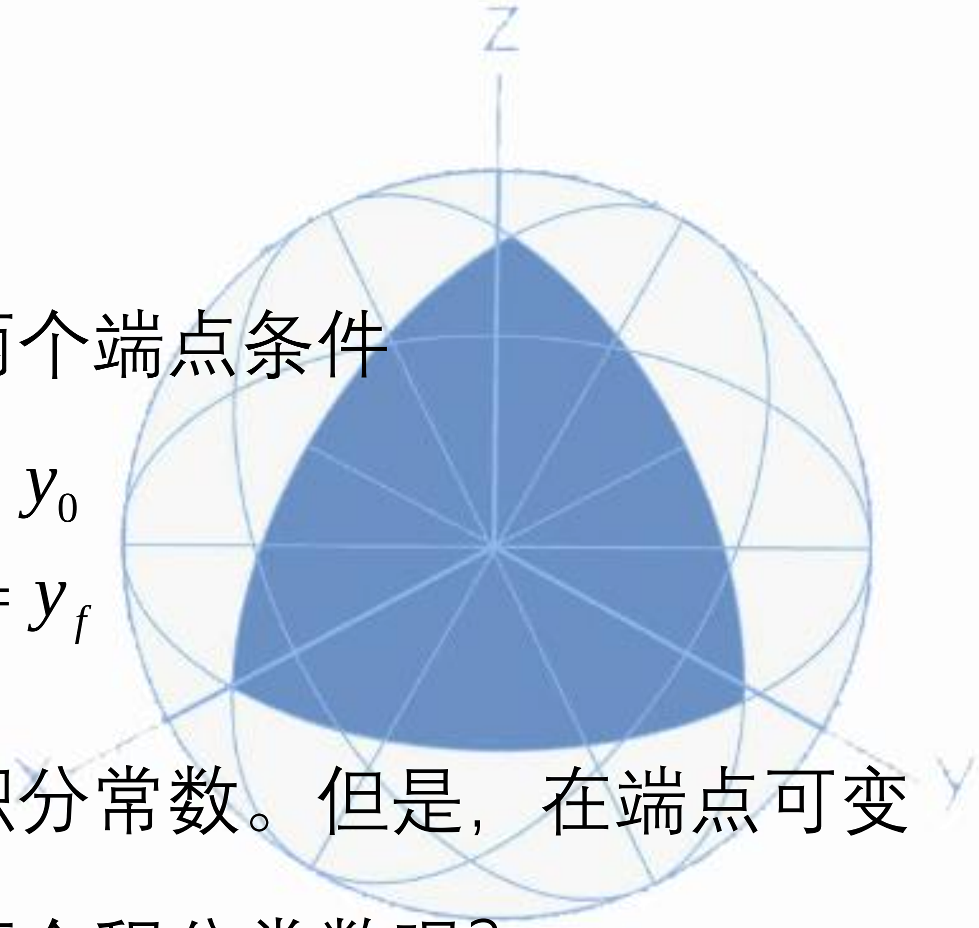


8.2.3变分学的求解

在端点固定的情况下，两个端点条件

$$y(x_0)=y_0$$
$$y(x_f)=y_f$$

恰好可以用来确定两个积分常数。但是，在端点可变的情况下，如何确定这两个积分常数呢?



8.2.3变分学的求解

下面就来回答这个问题。

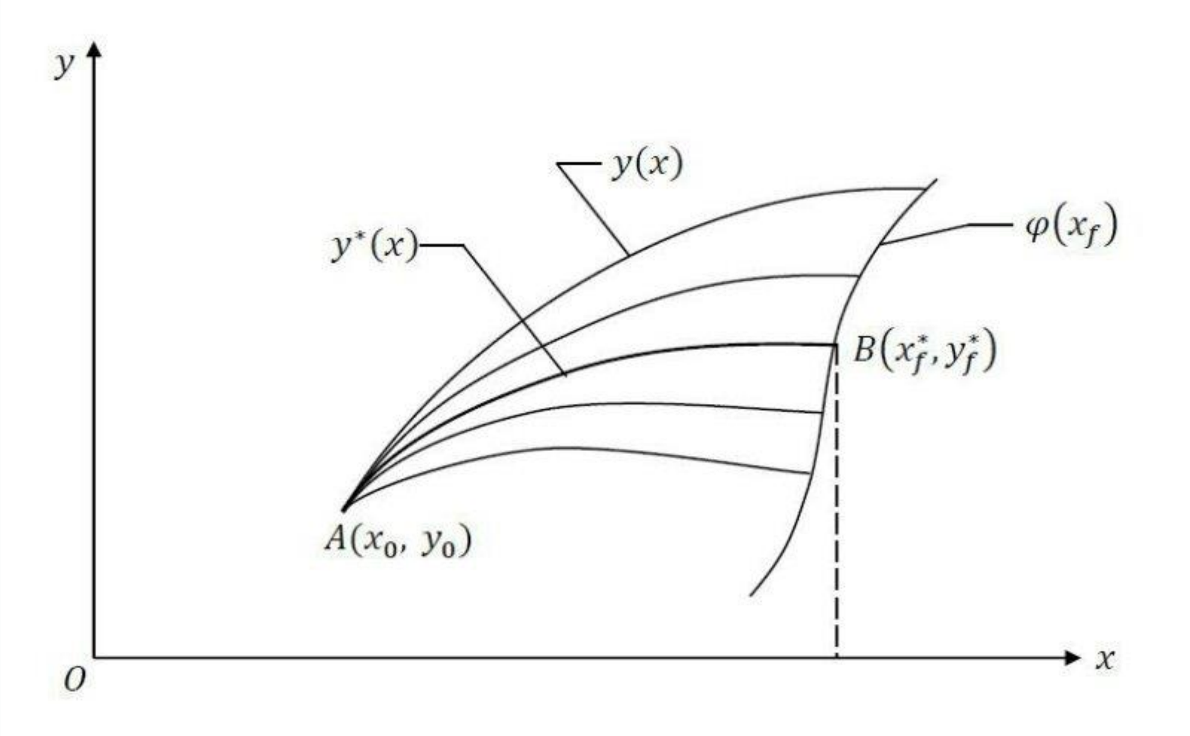
为了简化问题，又不失一般性，我们假定极值曲线的始端 $A(x_0, y_0)$ 是固定的，而终端 $B(x_f, y_f)$ 是可变的，并沿着给定的曲线

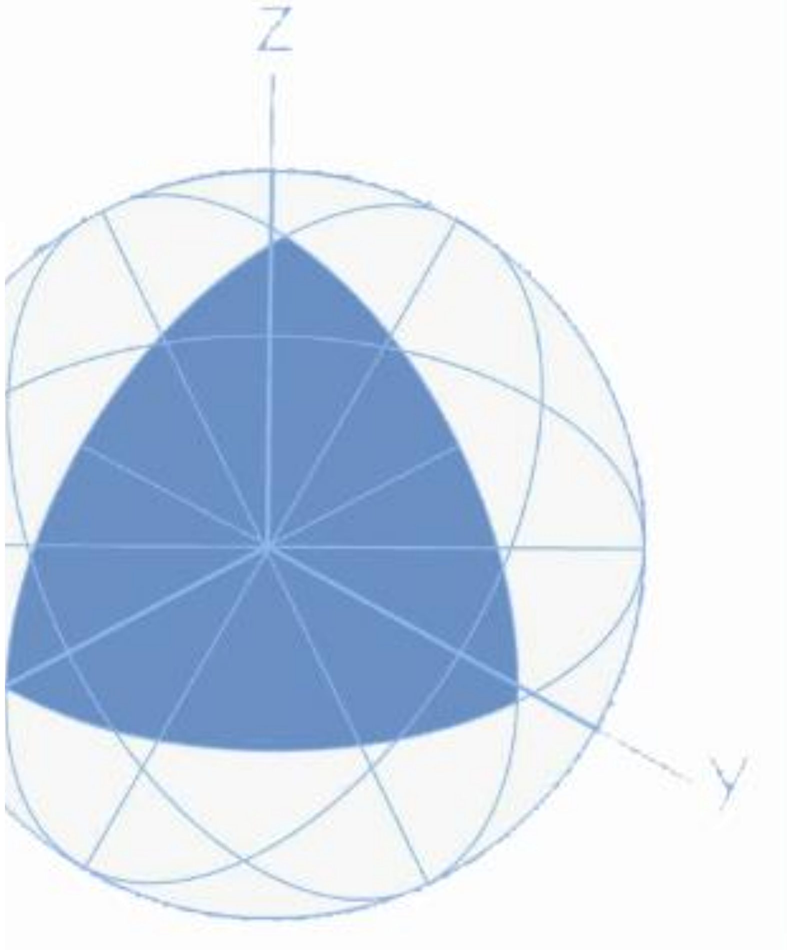
$$y(x_f) = \varphi(x_f) \qquad (17)$$

变动，如下图所示。

XIAMEN UNIVERSITY

8.2.3变分学的求解





8.2.3变分学的求解

现在的问题是，需要确定一条从给定的点 $A(x_0, y_0)$ 到给定的曲线（17）上的某一点 $B(x_f, y_f)$ 的连续可微的曲线 $y(x)$使泛函（14）达到极小值。

8.2.3变分学的求解

设 $y^*(x)$是泛函（14）的极值曲线。

$y^*(x)$的邻域曲线可以表示为

$$y(x) = y^*(x) + \alpha\delta y(x) \qquad (18)$$

$$\dot{y}(x) = \dot{y}^*(x) + \alpha\delta \dot{y}(x) \qquad (19)$$

8.2.3变分学的求解

由图可见，每一条邻域曲线 $y(x)$ 都对应一个终端时刻 x_f

设极值曲线 $y^*(x)$ 所对应的终端时刻为 x_f^* ，则邻域曲线

$y(x)$所对应的终端时刻 x_f 可以表示为

$$x_f = x_f^* + \alpha dx_f \tag{20}$$

XIAMEN UNIVERSITY

8.2.3变分学的求解

将式（18）（20）代入到（14），则得

$$J=\int_{x_0}^{x_f^*+\alpha dx_f} F[x,y^*(x)$$

$$+\alpha\delta y(x),\dot{y}^*(x)+\alpha\delta\dot{y}(x)]dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_f^*} F[x,y^*(x)+\alpha\delta y(x),\dot{y}(x)+\alpha\delta\dot{y}(x)]dx$$

$$+\int_{x_f^*}^{x_f^*+\alpha dx_f} F[x,y^*(x)+\alpha\delta y(x),\dot{y}^*(x)+\alpha\delta\dot{y}(x)]dx$$

8.2.3变分学的求解

根据泛函达到极值的必要条件

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)]|_{\alpha=0} = 0$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_0}^{x_f^*} F[x, y^*(x) + \alpha\delta y(x), \dot{y}^*(x) + \alpha\delta\dot{y}(x)]dx|_{\alpha=0}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_f^*}^{x_f^*+\alpha dx} F[x, y^*(x) + \alpha\delta y(x),$$

$$\dot{y}^*(x) + \alpha\delta\dot{y}(x)]dx|_{\alpha=0} = 0 \qquad (21)$$

8.2.3变分学的求解

式（21）左边第一项相当于x_f固定时泛函的变分，

按照上一节推导的结果可得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_f^*} F[x, y^*(x)+\alpha\delta y(x), \dot{y}^*(x)+\alpha\delta\dot{y}(x)]dx\,|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_f^*}(F_x-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}})\delta y(x)dx+F_{\dot{y}}\delta y(x)|_{x_0}^{x_f^*} \quad (22)$$

8.2.3变分学的求解

式（22）左边第二项先利用中值定理，然后再求导，

则得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_f^*}^{x_f^*+\alpha dx_f} F[x, y^*(x)+\alpha\delta y(x), \dot{y}^*(x)+\alpha\delta\dot{y}(x)]dx\,|_{\alpha=0}$$

$$= F[x, y^*(x), \dot{y}^*(x)]|_{x=x_f^*}\, dx_f$$

（23）

8.2.3变分学的求解

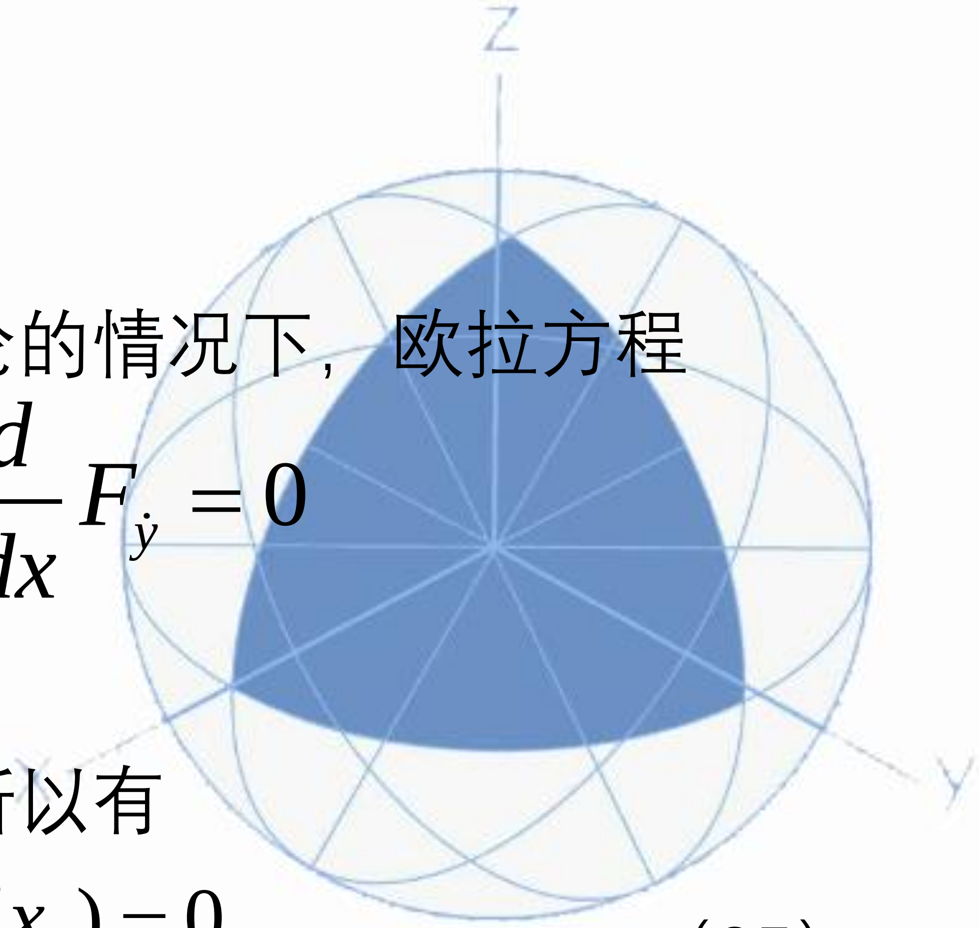
将式（22）和式（23）代入式子（21），得

$$\int_{x_0}^{x_f^*}(F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}})\delta y(x)dx$$

$$+F_{\dot{y}}\delta y(x)|_{x_0}^{x_f^*}$$

$$+F[x,y^*(x),\dot{y}^*(x)]|_{x=x_f^*}\ dx_f=0 \qquad (24)$$

8.2.3变分学的求解



前面已经指出，在所讨论的情况下，欧拉方程

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$$

仍然成立。

又因为始端时固定的，所以有

$$\delta y(x_0) = 0 \tag{25}$$

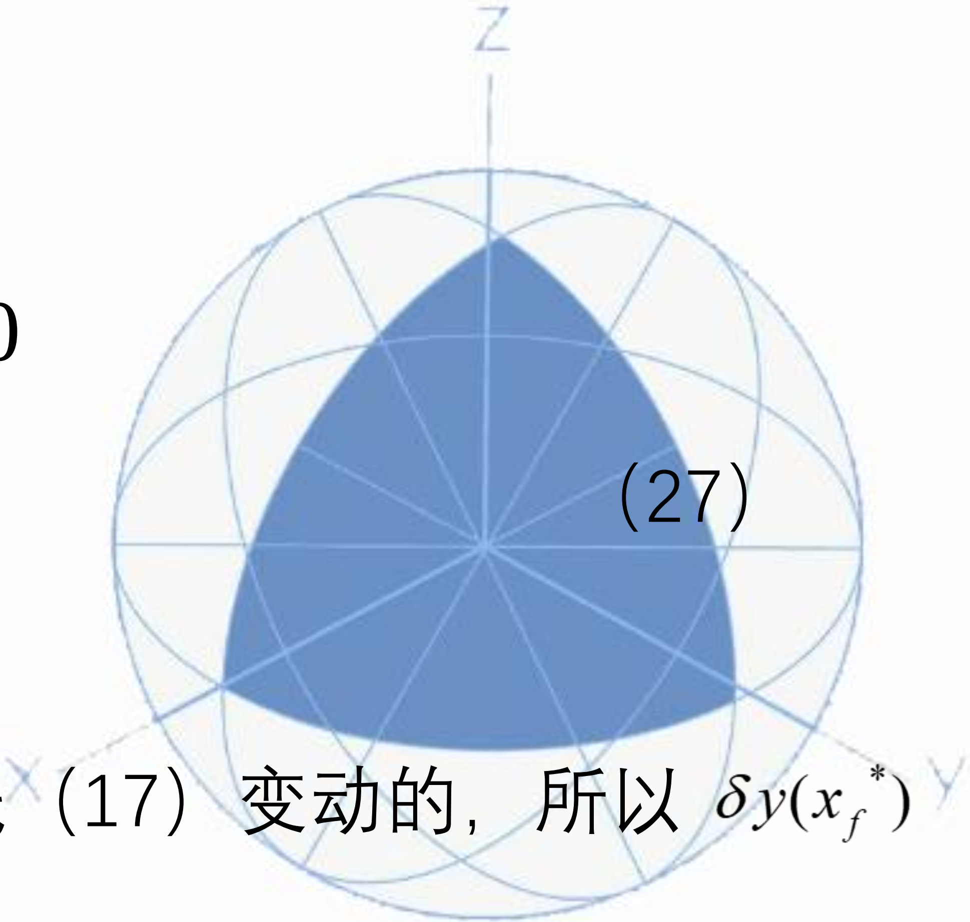
8.2.3变分学的求解

考虑到式（25），则式（24）变为

$$[F_{\dot{y}}|_{x=x_f^{\,*}}\ \delta y(x_f^{\,*}) \\ +F[x,y^*(x),\dot{y}^*(x)]|_{x=x_f^{\,*}}\ dx_f=0 \tag{26}$$

若 $\delta y(x_f^{\,*})$与 dx_f互不相关，则由上式得

8.2.3变分学的求解



$$F_{\dot{y}}\,|_{x=x_f}=0$$
$$F\,|_{x=x_f}=0 \qquad (27)$$

但是，终端点是沿着曲线（17）变动的，所以 $\delta y(x_f^{\,*})$ 与 dx_f 是相关的。

8.2.3变分学的求解

为进一步简化式（26），应当求出 dx_f 与 $\delta y(x_f^*)$ 之间的关系。

根据终端约束条件（17），应有

$$y^*(x_f+\alpha dx_f)+\alpha\delta y(x_f^*+\alpha dx_f)$$

$$=\varphi(x_f^*+\alpha dx_f)$$

8.2.3变分学的求解

将上式对 α 取偏导数，并令 $\alpha=0$ ，则得

$$\dot{y}(x_f^*)dx_f+\delta y(x_f^*)=\dot{\varphi}(x_f^*)dx_f$$

或

$$\delta y(x_f^*)=[\dot{\varphi}(x_f^*)-\dot{y}(x_f^*)]dx_f$$

8.2.3变分学的求解

将上式代入（26），可得

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{y})F_{\dot{y}}]\big|_{x=x_f^*}\ dx_f=0$$

由于 dx_f 是任意的，所以

$$[F+(\dot{\varphi}-\dot{y})F_{\dot{y}}]\big|_{x=x_f^*}=0 \qquad (28)$$

8.2.3变分学的求解

上式建立了极值曲线终端斜率 $\dot{y}$ 与给定曲线斜率 $\dot{\varphi}$ 之间的关系，这种关系通常称为**横截条件**。

8.2.3变分学的求解

综上所述，可得如下定理:

定理 若曲线$y(x)$由一给定的点(x_0, y_0)到给定的曲线$y(x_f)=\varphi(x_f)$上的某一点(x_f, y_f)，则泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_f} F[x, y(x), \dot{y}(x)]dx$$

达到极值的必要条件是

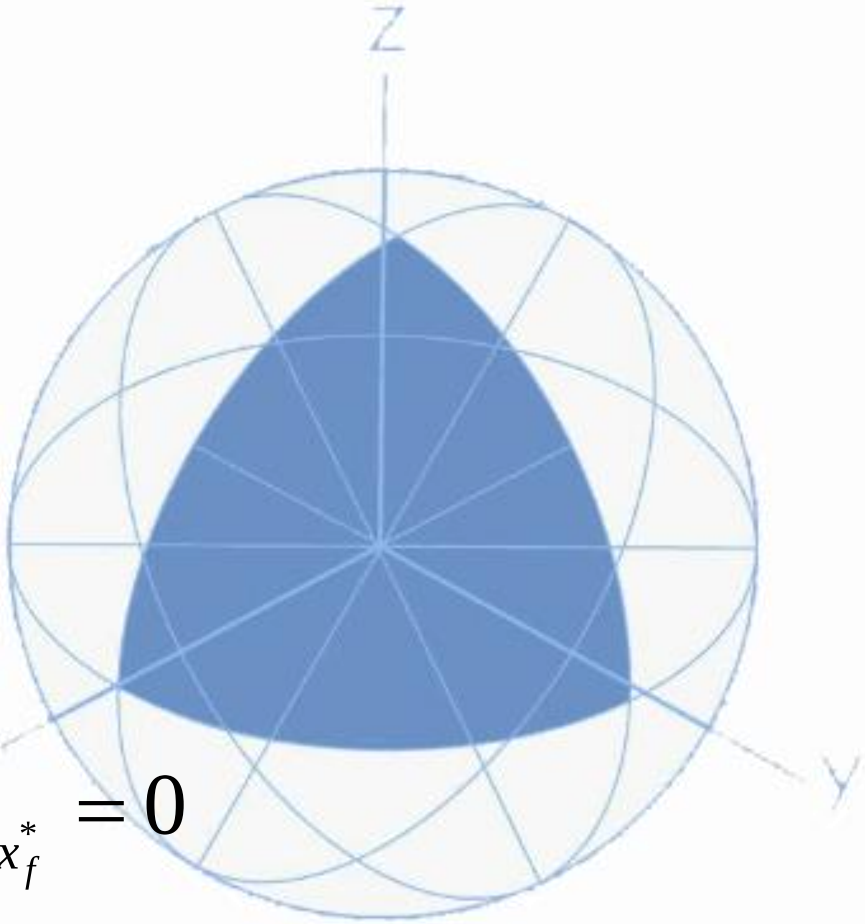
8.2.3变分学的求解

$y(x)$满足欧拉方程

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$$

和横截条件

$$[F + (\dot{\varphi} - \dot{y}) F_{\dot{y}}]_{x = x_f^*} = 0$$



8.2.3变分学的求解

其中 $y(x)$ 应有连续的二阶导数，$F[x, y(x), \dot{y}(x)]$ 至少应是二次连续可微，而 $\varphi(t)$ 则应有连续的一阶导数。

若极值曲线的始端不是固定的，并沿着曲线 $y(x_0)=\Psi(x_0)$ 变动，则同样可以推导出始端的横截条件

$$[F+(\dot{\Psi}-\dot{y})F_{\dot{y}}]\big|_{x=x_0^*}=0 \qquad (29)$$

8.2.3变分学的求解

当 x_0 和 x_f 可变时，而 $y(x_0)$ 和 $y(x_f)$ 是固定的，

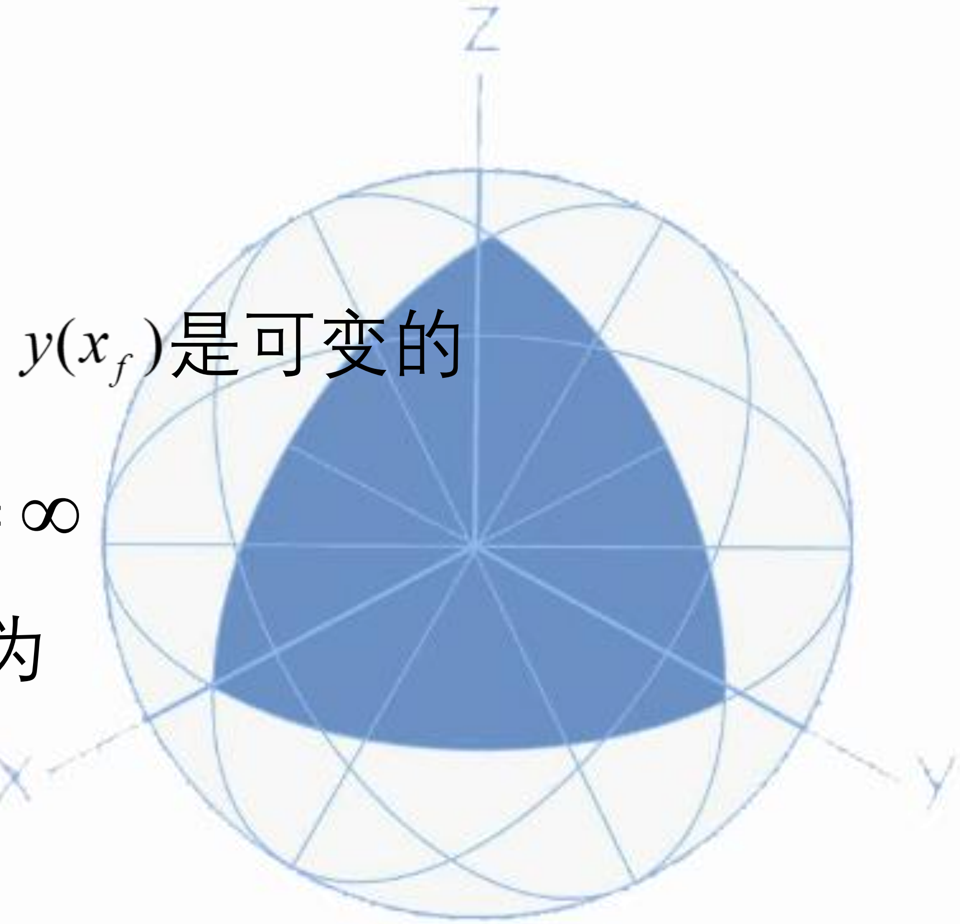
这时 $\dot{\varphi} = \dot{\Psi} = 0$

则式（28）（29）变为

$$(F - \dot{y}F_{\dot{y}})|_{x=x_f^*} = 0$$

$$(F - \dot{y}F_{\dot{y}})|_{x=x_0^*} = 0$$

8.2.3变分学的求解



当x_0和x_f固定，而$y(x_0)$和$y(x_f)$是可变的

这时 $\dot{\varphi}=\infty,\ \dot{\Psi}=\infty$

则横截条件（28）(29)变为

$$F_y|_{x=x_f^*}=0$$

$$F_{\dot{y}}|_{x=x_0^*}=0$$

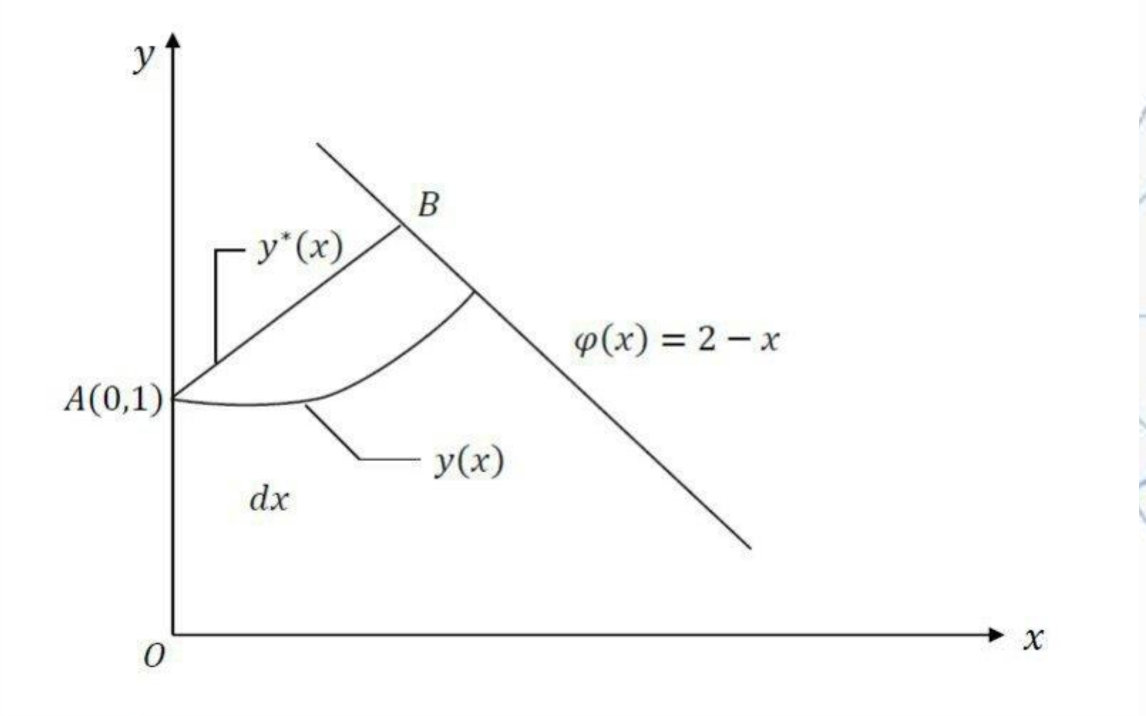
8.2.3变分学的求解

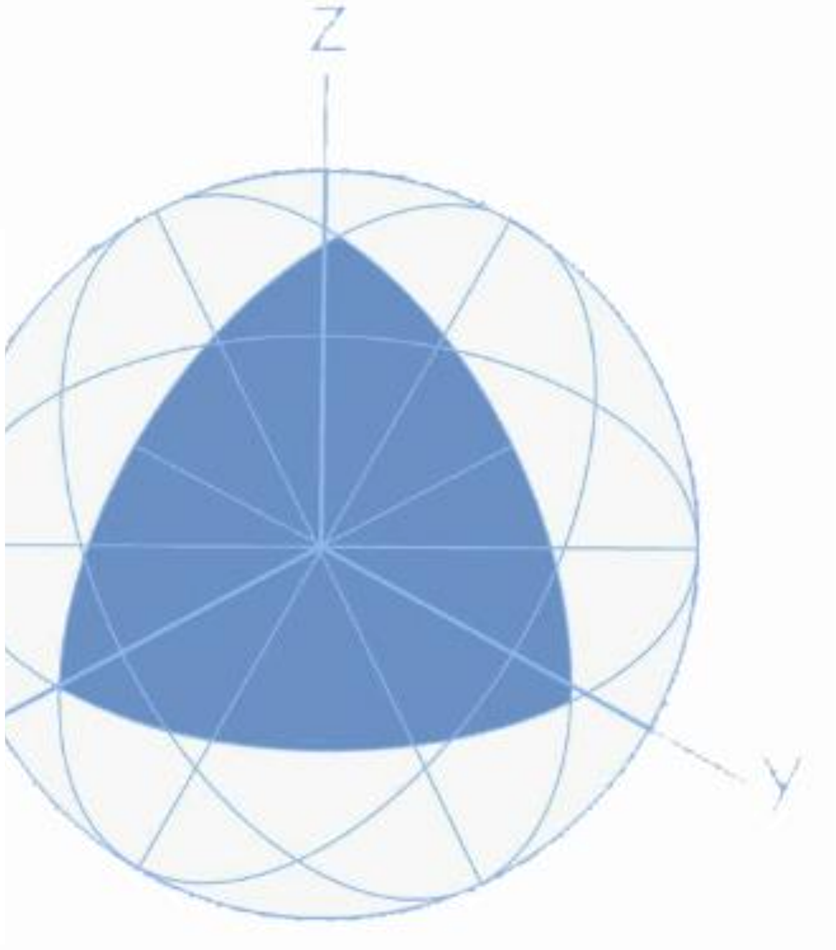
例: 求 $x-y$ 平面上的一固定点 $A(0,1)$ 到直线

$\varphi(x)=2-x$ 的最短弧长的曲线,

如下图所示

8.2.3变分学的求解



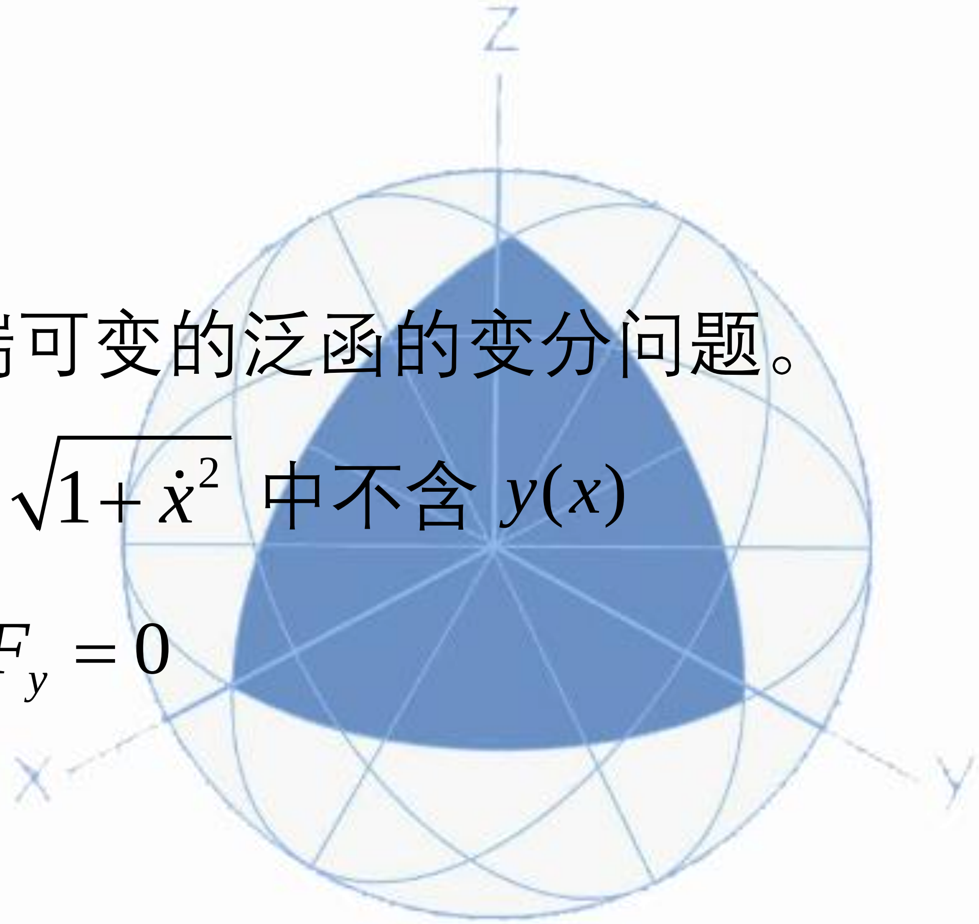


8.2.3变分学的求解

解：我们所要求解的问题是，从始发点 $A(0,1)$，终止于曲线 $\varphi(x)=2-x$ 上的点 B 的连续可微的曲线中确定一条曲线 $y(x)$，使得连接 A,B的弧长

$$J=\int_{x_0}^{x_f}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dt$$ 为最短。

8.2.3变分学的求解



这是一个始端固定，终端可变的泛函的变分问题。

由于泛函的被积函数 $L=\sqrt{1+\dot{x}^2}$ 中不含 $y(x)$

所以欧拉方程为 $$\frac{d}{dx}F_y=0$$

即 $$\frac{d}{dx}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=0$$

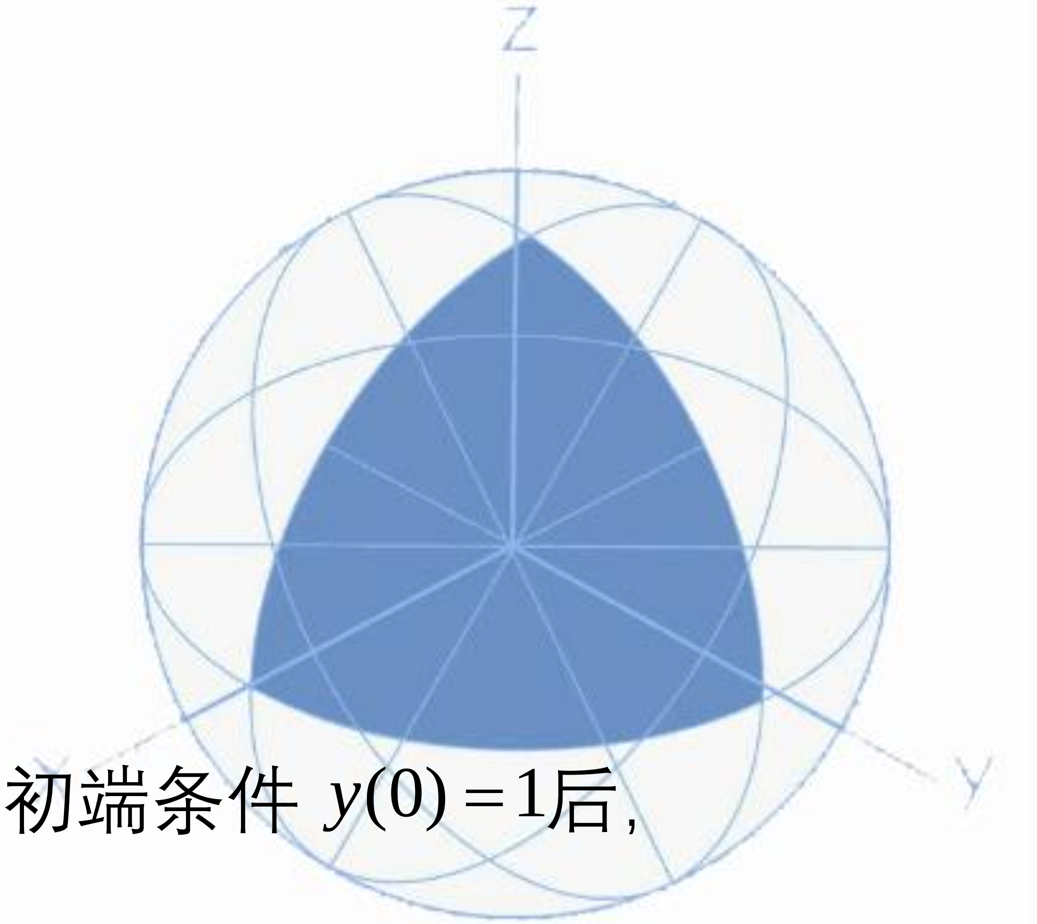
8.2.3变分学的求解

由此得 $$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=0$$

经变换得 $$\dot{y}=c_1$$

所以 $y(x)=c_1x+c_2$ 代入初端条件 $y(0)=1$后,

得 $c_2=1$

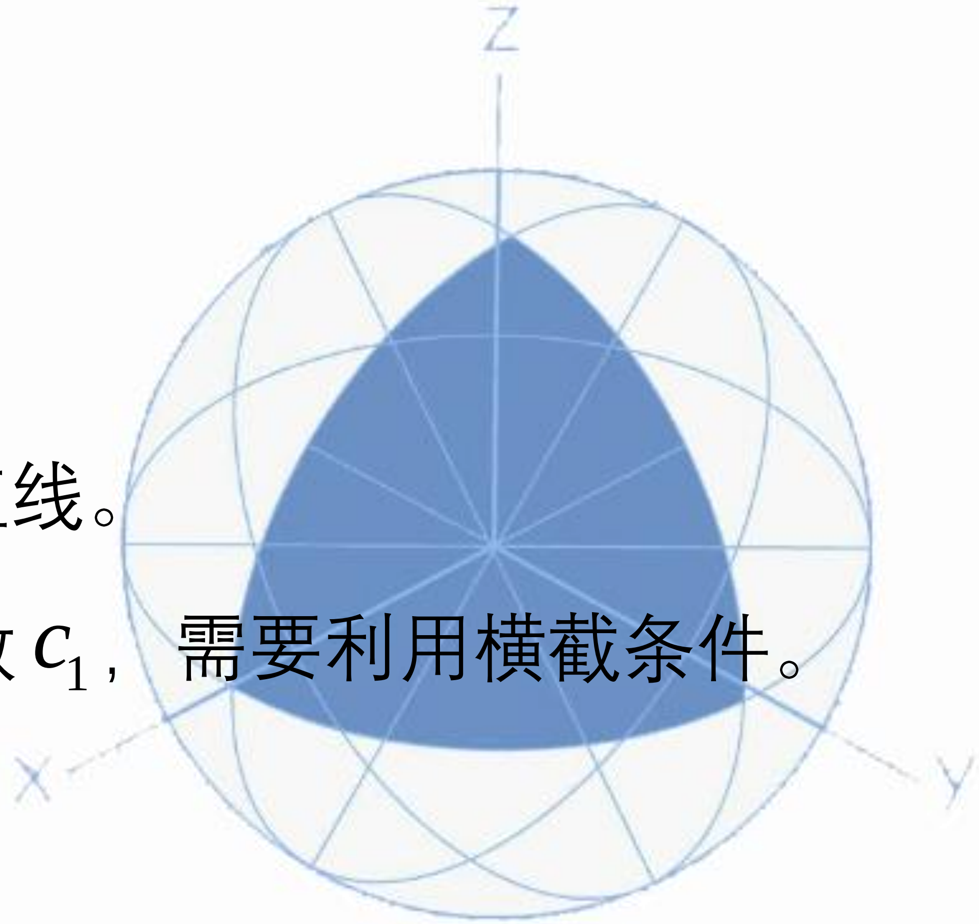


8.2.3变分学的求解

于是 $y(x)=c_1x+1$

它是一条通过点$(0,1)$的直线。

为了确定另一个积分常数c_1，需要利用横截条件。



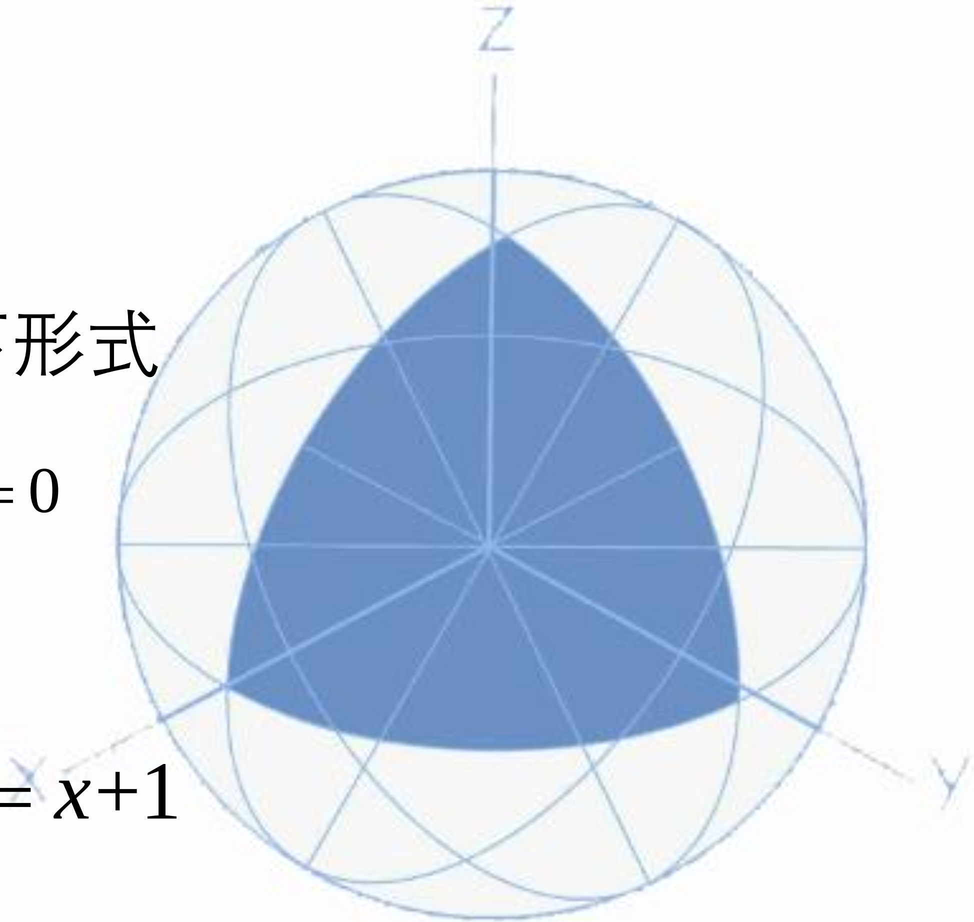
8.2.3变分学的求解

本例的横截条件具有如下形式

$$\sqrt{1+c_1^2}+(-1-c_1)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=0$$

由此解得 $c_1=1$

所以，极值曲线为 $y(x)=x+1$



8.2.3变分学的求解

由于所求泛函的极值曲线 $y(x)$ 实际上为一直线,

即 $y(x)=x+1$

其斜率为 $\dot{y}=1$ ，而给定直线 $\varphi(x)=2-x$

的斜率 $\dot{\varphi}=-1$，它们之间互为负倒数，所以 $y(x),\varphi(x)$

互相垂直。

8.2.3变分学的求解

由此可见，由直线外一点到该直线的最短距离是由该点到直线的垂线。

这个在平面几何中广为人知的问题，在这里又通过变分法予以证实了。

8.2.3变分学的求解

五、有约束条件的泛函极值问题

在自然科学和工程技术中所遇到的变分问题，有时要求极值函数除满足给定的边界条件外，还要满足一定的附加条件，这就是泛函的条件极值问题。泛函在满足一定附加条件下取得的极 值称为**条件极值**。

8.2.3变分学的求解

在泛函所依赖的函数上附加某些约束条件来求泛函的极值问题称为**条件极值的变分问题**。

涉及完整约束、微分约束和等周问题的泛函的条件极值。它们的计算方法与函数的条件极值的计算方法类似，可用拉格朗日乘数法来实现。

Part3 案例分析

8.3案例分析

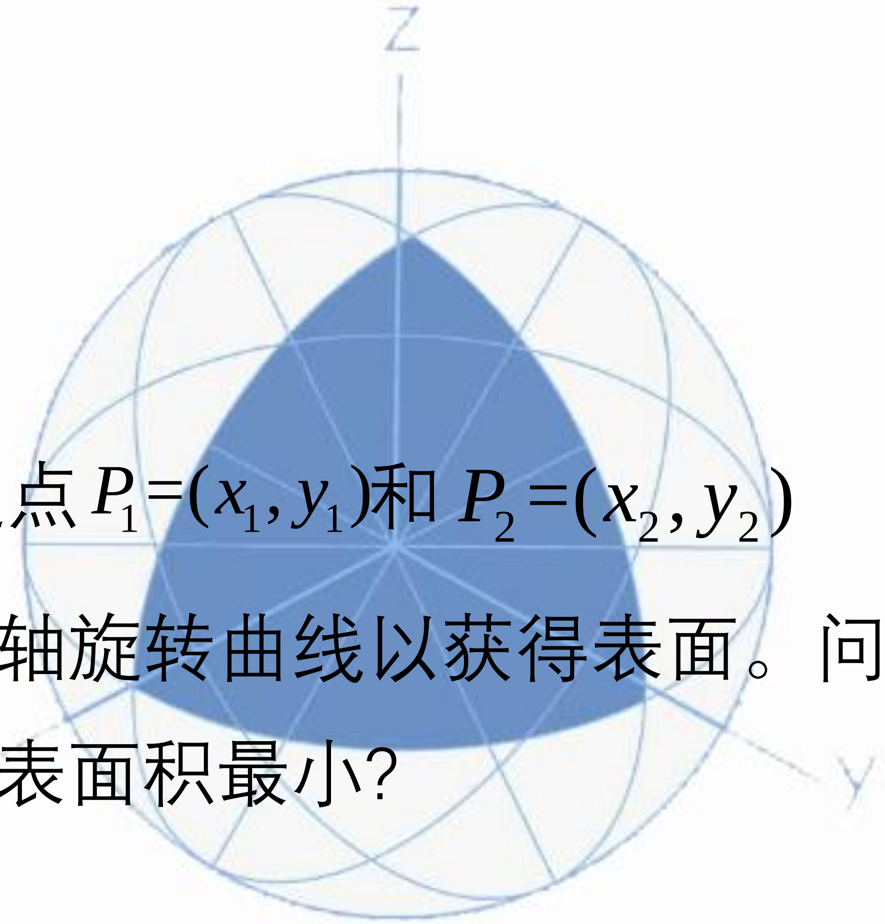
案例一、巧妙的蘑菇

问题背景：考虑生长中的蘑菇要使水分损失减小，它们应该为表面积最小以减少水分蒸发量。根据这个假设，试通过解数学建模的方法寻找蘑菇的最佳形状，并与实际蘑菇作比较。

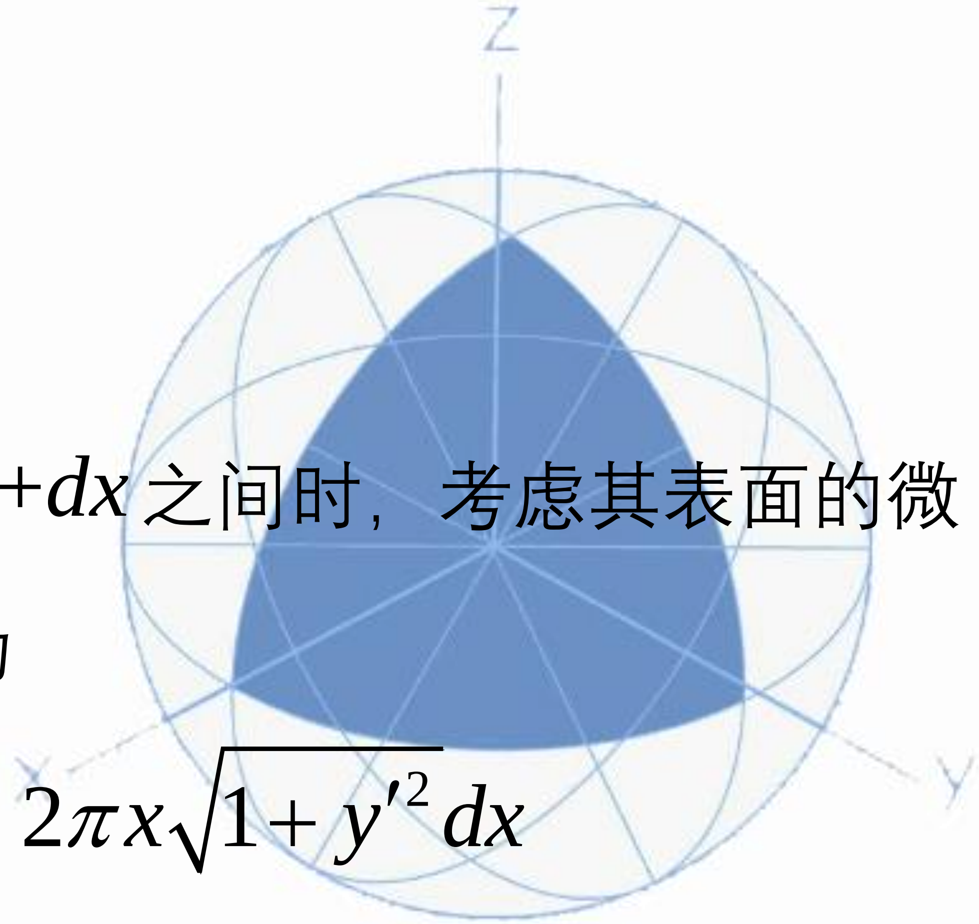
8.3案例分析

【问题分析】

考虑在(x,y)平面的连接固定点$P_1=(x_1,y_1)$和$P_2=(x_2,y_2)$的曲线$y=y(x)$。我们绕 x 轴旋转曲线以获得表面。问题在于哪个曲线使其旋转的表面积最小?



8.3案例分析



【模型构建】

当变量 x 介于变量 x 和 $x+dx$ 之间时，考虑其表面的微元带。其微元带的面积为

$$2\pi x ds = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

8.3案例分析

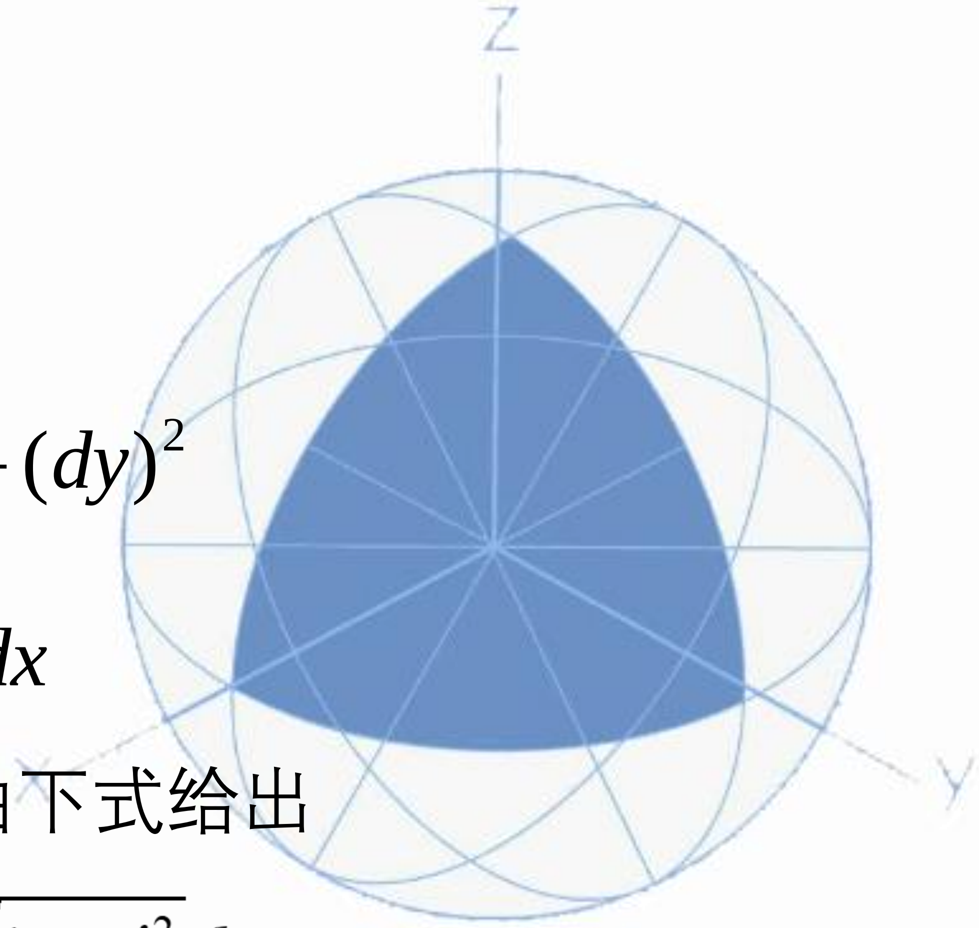
这是因为

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$$

从而 $$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$$

因此，旋转面的总面积由下式给出

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1+y'^2}dx$$



8.3案例分析

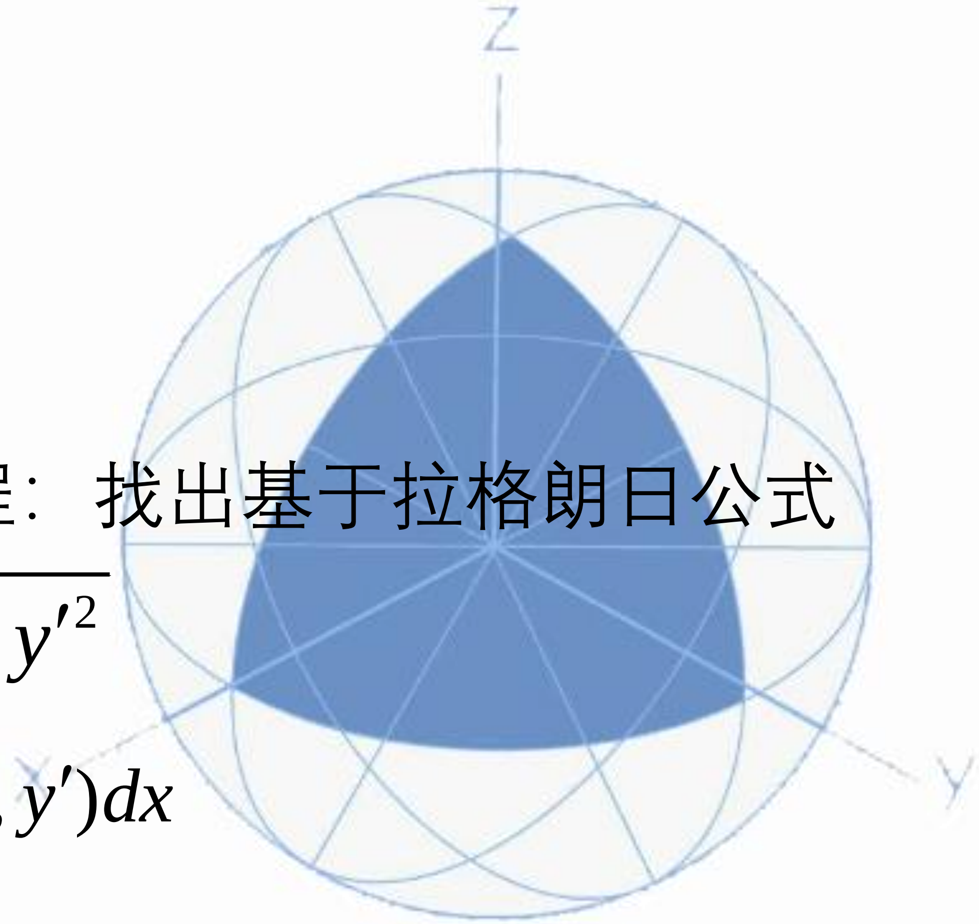
【模型求解】

从而，得到如下变分方程：找出基于拉格朗日公式

$$L = x\sqrt{1+y'^2}$$

的变分积分曲线 $\int L(x,y,y')dx$

其取极值的必要条件



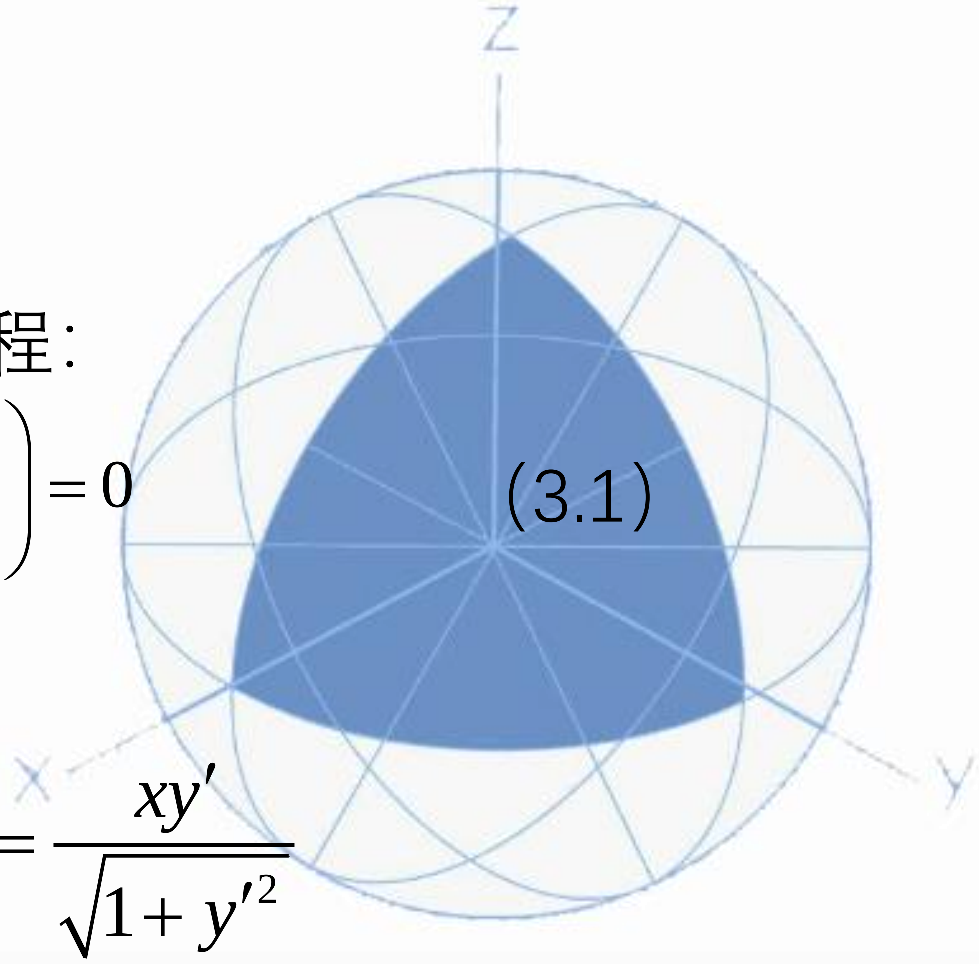
8.3案例分析

等同于欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

因为在我们的例子里有

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$



8.3案例分析

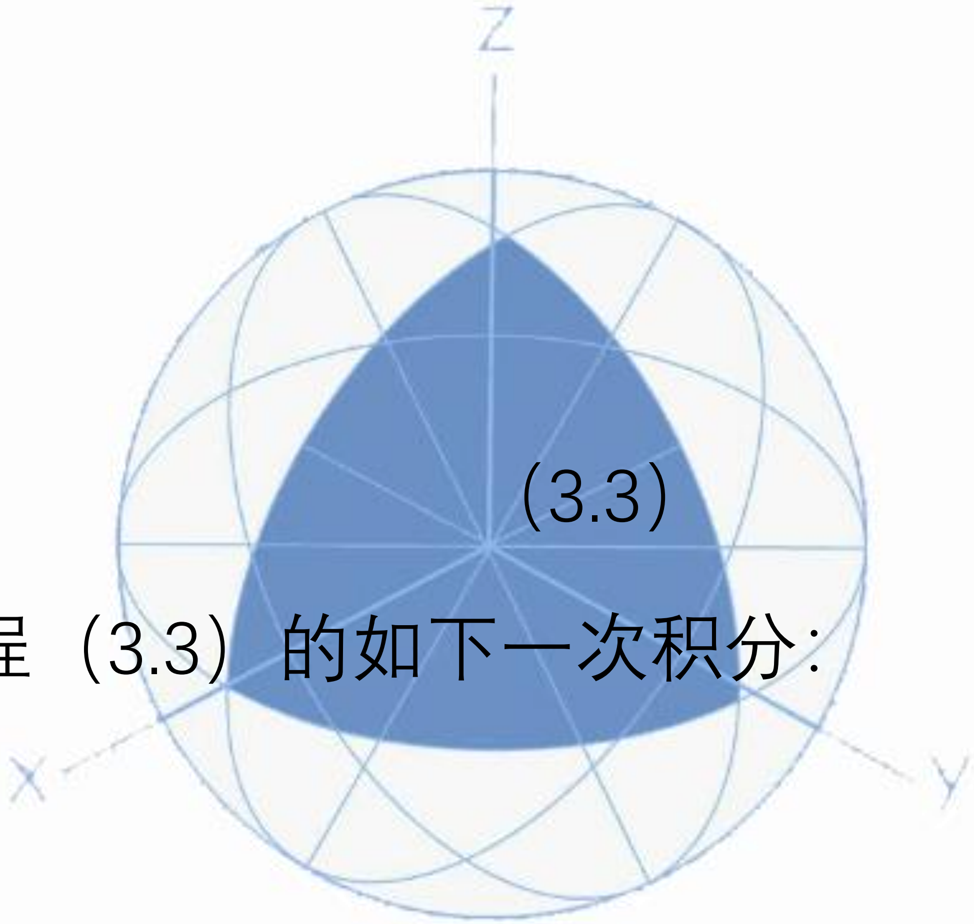
方程（3.1）写成守恒定律的形式：

$$D_x\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0 \qquad (3.2)$$

因此，经微分后，我们得到如下的二阶非线性微分方程。

8.3案例分析

$$y'' + \frac{1}{x}(y' + y'^3) = 0 \qquad (3.3)$$



守恒定律（3.2）满足方程（3.3）的如下一次积分:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = A = \text{常数}$$

8.3案例分析

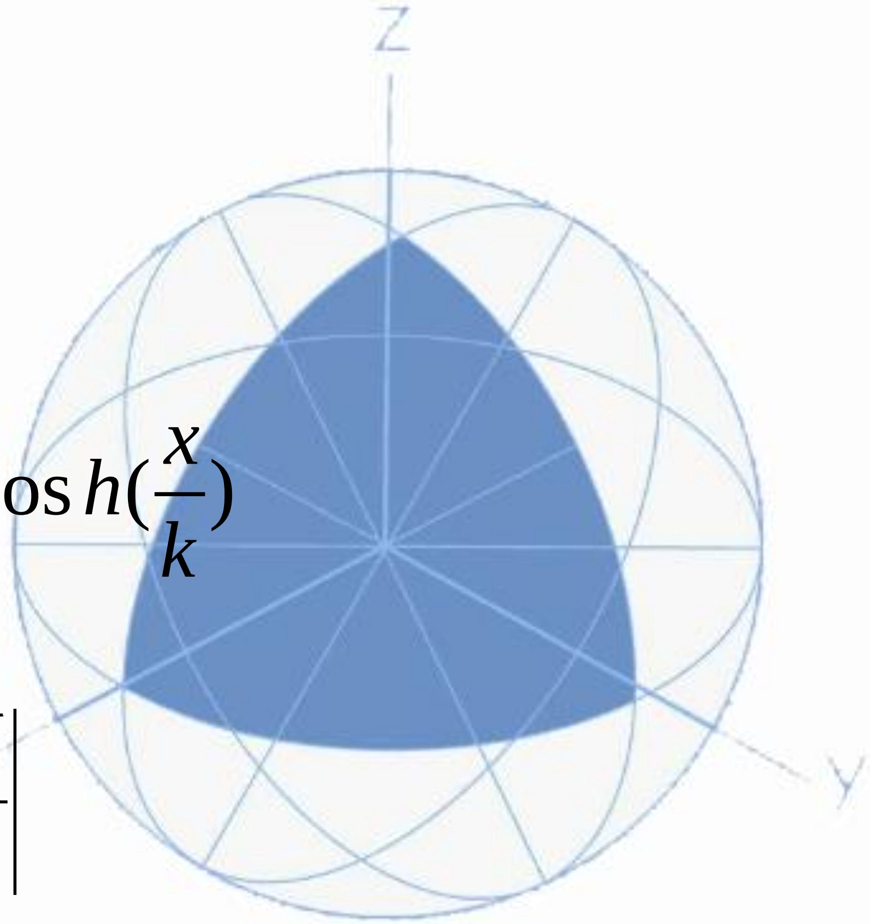
解以上关于y'的方程，

积分得到通解 $y = B + k\operatorname{arccos}h(\dfrac{x}{k})$

其中包含两个积分常数 B, k

将解写为 $y = B + k\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}\right|$

$$= C + k\ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|$$



8.3案例分析

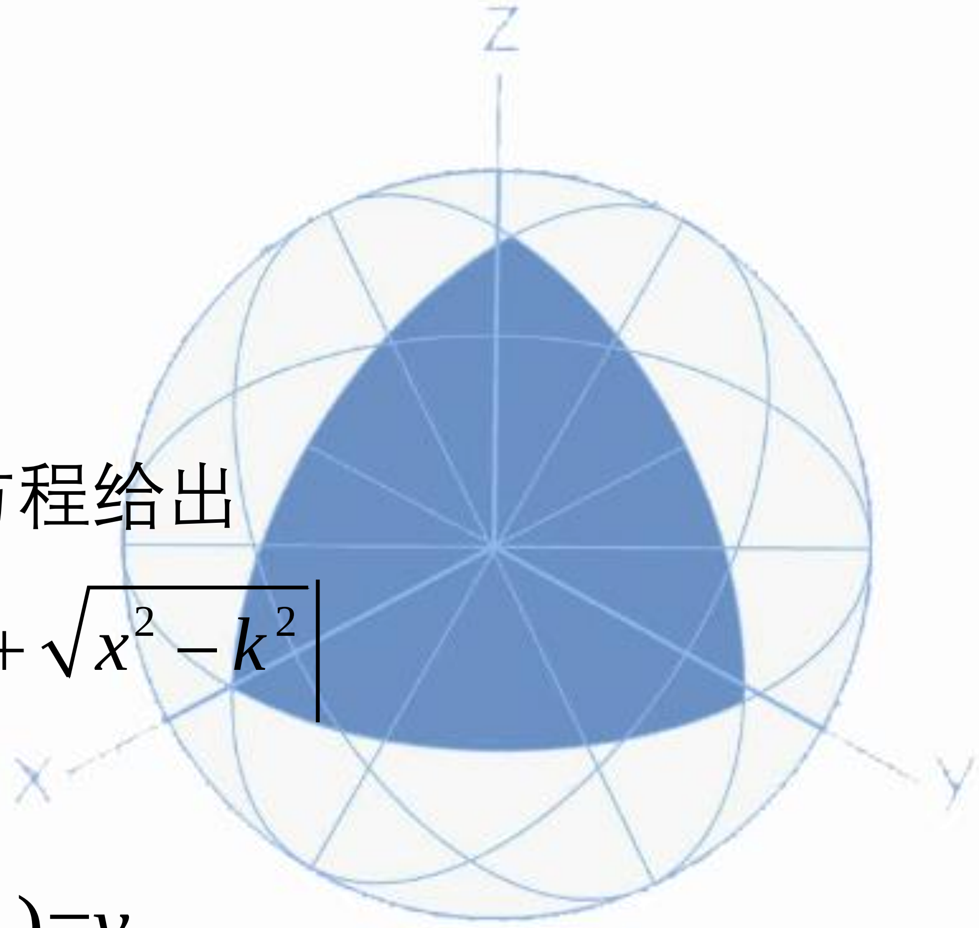
其中 $C=B-k\ln|k|$

因此，所求曲线由以下方程给出

$$y=C+k\ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|$$

满足方程边界条件

$$y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$$



THANK YOU