第四周

必做题：

一、已知Γ是平面Π: $Ax+By+Cz+D=0$上的一条光滑闭曲线，其中$A^2+B^2+C^2=1$，Γ所围成的区域Σ的面积为S.求证:

$$S=\left|\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(Bz-Cy)\mathrm{d}x+(Cx-Az)\mathrm{d}y+(Ay-Bx)\mathrm{d}z\right|$$

二、设$\vec{n}$为光滑闭曲面Σ的外法向量，$\vec{a}$为常向量.求: $\oiint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S$.

三、设函数$f(x,y)$在闭区域$D: x^2+y^2\le 1$上有二阶偏导数，且$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.求:

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

四、设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$2b>3a$，$a+b>0$，$f(a)=0$，$f\left(\dfrac{2a+2b}{5}\right)+f\left(\dfrac{3a+3b}{5}\right)=0$，证明存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

五、设平面Π: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和圆柱面Σ: $x^2+y^2=1$的交线为C，求：(1) C在yoz平面上的投影曲线方程；（2）C到xoy平面的最短距离.

六、求经过三条平行直线$L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$的圆柱面的方程.

选做题：

七、设$f(x)$可微，且满足$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求（1） $f(x)$的表达式；（2） $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left|f(t)\right|^n\mathrm{d}t$.

(其中$n=2,3,\cdots$).

八、设函数$f(x)$在$[a,b]$上有$2n$阶连续导数且$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$，$k=0,1,2,\cdots,2n-1$. 证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2n)}(x)\right|.$$