第七周训练题解答

1. 已知 $a_n>0,b_0=0,b_n=\sqrt{a_n+b_{n-1}}$.求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在

证：一、"$\Leftarrow$".$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=B^2-B$

二、"$\Rightarrow$".

1. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.设 $x=\sqrt{A+x}$ 的一解为 $B>1$,即：$B=\sqrt{A+B}$

记 $a_n=A+\alpha_n,\beta_n=b_n-B,\gamma_n=2B+\beta_n>B>1$

$$b_n=\sqrt{a_n+b_{n-1}}\Rightarrow\beta_n(2B+\beta_n)=\alpha_n+\beta_{n-1}\Rightarrow|\beta_n|\le\frac{|\alpha_n|}{\gamma_n}+\frac{|\beta_{n-1}|}{\gamma_n}<\frac{|\alpha_n|}{B}+\frac{|\beta_{n-1}|}{B}$$

$$\Rightarrow|\beta_n|\le\frac{|\alpha_n|}{\gamma_n}+\frac{|\beta_{n-1}|}{\gamma_n}<\frac{|\alpha_n|}{B}+\frac{|\alpha_{n-1}|}{B^2}+\cdots+\frac{|\alpha_1|}{B^{n-1}}+\frac{|\beta_1|}{B^n}$$

$$\because\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B^n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{B}+\frac{|\alpha_{n-1}|}{B^2}+\cdots+\frac{|\alpha_1|}{B^{n-1}}+\frac{|\beta_1|}{B^n}=0\therefore\lim_{n\to\infty}|\beta_n|=0$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}b_n=B$$

2. 求：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 为曲面 $z=5-\frac{5(x-2)^2}{16}-\frac{5(y-1)^2}{9}(z\ge0)$ 的上侧.

解:取充分小的 ε,作曲面 $\Sigma_1:z=\sqrt{\varepsilon-x^2-y^2}$ 的下侧,

$\Sigma_2:z=0(\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\le1$且$x^2+y^2\ge\varepsilon^2)$ 的下侧

$$(1).P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

$$\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$(2)\ \iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$

(4) $\therefore I=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$

(5). 取$\sum_3: z=0(x^2+y^2\le\varepsilon^2)$的下侧

$$\begin{aligned}\therefore I&=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy\\&=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy+\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy\\&=-\frac{1}{\varepsilon^3}(-2\pi\varepsilon^3)=2\pi\end{aligned}$$

3．已知球面A与坐标面XOY相切于点$B(1,0,0)$，且与曲面$y^2+z^2=4x$只有一个交点C。求此球面A的半径。

解：设此球面A的半径为r，切点$C(x_0,y_0,z_0)$。

因为球面A与坐标面XOY相切于点$B(1,0,0)$，所以球心$A(1,0,r)$或$A(1,0,-r)$。

不妨设$A(1,0,r)$，则球面$A:(x-1)^2+y^2+(z-r)^2=r^2$

令$F(x,y,z)=y^2+z^2-4x\Rightarrow F_1'=-4,F_2'=2y,F_3'=2z$

所以椭圆抛物面$y^2+z^2=4x$在点C的切平面的法向量为$\vec{n}_1=(2,-y_0,-z_0)$。

同理球面A在点C的切平面的法向量为$\vec{n}_2=(x_0-1,y_0,z_0-r)$

依题意得：$\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2$

（1）. 当$y_0\ne0$时，$\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2\Rightarrow\frac{x_0-1}{2}=-1=-\frac{z_0-r}{z_0}\Rightarrow x_0=-1$（舍去）

（2）当$y_0=0$时，$\vec{n}_1\parallel\vec{n}_2\Rightarrow\frac{x_0-1}{2}=\frac{z_0-r}{z_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又$z_0{}^2=4x_0\cdots\cdots\cdots(2)$和$A:(x_0-1)^2+(z_0-r)^2=r^2\cdots\cdots\cdots(3)$

由（1）（2）（3）解得：$r=\frac{4\sqrt{3}}{9},x_0=\frac{1}{3},z_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$

当 $\frac{2}{2n+1}<x\le\frac{1}{n}$ 时，

$$\left[\frac{2}{x}\right]=2n,\left[\frac{1}{x}\right]=n\Rightarrow\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

当 $\frac{1}{n+1}<x\le\frac{2}{2n+1}$ 时，

$$\left[\frac{2}{x}\right]=2n+1,\left[\frac{1}{x}\right]=n\Rightarrow\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$\therefore\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{2}{2n+1}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx+\int_{\frac{2}{2n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots\right)$

$$=2(\ln 2-1+\frac{1}{2})$$

五、证明：$\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan(n+1)-\arctan(n-1)$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$ 的前 n 项和为

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}=\arctan 2-\arctan 0+\arctan 3-\arctan 1+\cdots+\arctan(n+1)-\arctan(n-1)$$

$$=\arctan 2+\arctan 3+\cdots+\arctan(n+1)-(\arctan 1+\arctan 2+\cdots+\arctan(n-1))$$

$$=-\arctan 1+\arctan n+\arctan(n+1)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(-\arctan 1+\arctan n+\arctan(n+1))=\frac{3}{4}\pi$.

37. 确定所有满足如下条件的函数 f，f 处处可微且对所有 $xy \neq 1$ 的实数 x, y，都有

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \tag{①}$$

解 设 $f(x)$ 满足 ①，对于 ① 分别求关于 x 和 y 的偏导，得

$$f'(x) = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \tag{②}$$

$$f'(y) = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \tag{③}$$

在 ② 和 ③ 中去掉公共的项，得

$$(1+x^2)f'(x) = (1+y^2)f'(y) \tag{④}$$

由于 ④ 的左端仅依赖于 x 而右端仅依赖于 y，故它们必为常数 C，于是有

$$f'(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

从而有常数 d 使

$$f(x) = C\arctan x + d$$

然而，在 ① 中取 $y = 0$ 得 $f(x) + f(0) = f(x)$，故 $f(0) = 0$，$d = 0$. 显然 $f(x) = C\arctan x$ 满足 ①，所以 ① 的全部解为

$$f(x) = C\arctan x$$

其中 C 为常数.

66. 令

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2$$

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的,并求出它的和.

解 $a_n = \int_0^1 (1 - x + x^2 - \cdots) + (-1)^{n-1}x^{n-1})\mathrm{d}x -$
$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} =$
$\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x$

因此对任 $N \geqslant 1$,有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}x^n\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 \frac{x + (-1)^{N+1}x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

故

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_0^1 x^{N+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{N+2}$$

令 $N \to \infty$ 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且和为

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

。

A－4　求两条直线方程，它们每一条都与四条直线

$$x=1,y=0;\quad y=1,z=0$$

$$z=1,x=0;\quad x=y=-6z$$

全部相交.

解　设所求直线 L 与已知的四条直线分别交于点 A,B,C,D，则有某些数 a,b,c,d 使得 $A(1,0,a)$，$B(b,1,0)$，$C(0,c,1)$，$D(6d,6d,-d)$. 它们共线的条件是向量

$$\overrightarrow{AB}=(b-1,1,-a)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,c,1-a)$$

$$\overrightarrow{AD}=(6d-1,6d,-d-a)$$

向量（与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{AD}$ 成比例）在这两种情形分别为 $(3,6,-2)$ $(-2,6,3)$，得两直线的参数表示

$$L_1:s\to(1,0,1/3)+s(3,6,-2)$$

$$L_2:t\to(1,0,-1/2)+t(-2,6,3)$$

当 $s=0,1/6,-1/3,1/3$；$t=0,1/6,1/2,1/8$. 它们依次交已知四直线. L_1 与 L_2 的非参数形式分别为

$$y=2(x-1)=1-3z\quad,\quad y=3(1-x)=2z+1$$

成比例. 由前面两个的比得

$$c=1/(1-b)=(a-1)/a \qquad ①$$

由一、三两个的比得

$$6d=(1-6d)/(1-b)=(a+d)/a$$

① 代入得　$$6d=(1-6d)\frac{a-1}{a}=\frac{a+d}{a}$$

去分母　$6ad=a+d,a+6d-1-6ad=a+d$

相加得 $4d=a+1$，故

$$6a(a+1)=24ad=4(a+d)=5a+1$$

二次方程 $6a(a+1)=5a+1$ 有根 $a=1/3,-1/2$. 其他未知量对应的值为：$b=3/2,2/3$；$c=-2,3$；$d=1/3,1/8$. 各直线的方向

向量（与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{AD}$ 成比例）在这两种情形分别为 $(3,6,-2)$ $(-2,6,3)$，得两直线的参数表示

$$L_1:s\to(1,0,1/3)+s(3,6,-2)$$

$$L_2:t\to(1,0,-1/2)+t(-2,6,3)$$

当 $s=0,1/6,-1/3,1/3$；$t=0,1/6,1/2,1/8$. 它们依次交已知四直线. L_1 与 L_2 的非参数形式分别为

$$y=2(x-1)=1-3z\quad,\quad y=3(1-x)=2z+1$$