# 练习题三

**一、计算积分** $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$.

**解：** $\displaystyle\int\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx=\int\frac{-2x}{(x^2+\frac{1}{2})^2}(-\frac{e^{-x^2}}{2x})dx$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{x}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}(-\frac{e^{-x^2}}{2x})'dx$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}+\frac{e^{-x^2}}{x}+2\int e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{xe^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}}+2\int e^{-x^2}dx$$

故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx=\left.\frac{xe^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}}\right|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$.

**二、计算定积分** $I_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx,n=1,2,\cdots$.

**解：** 令 $x=-t$，则 $I_n=-\displaystyle\int_{\pi}^{-\pi}\frac{\sin nt}{(1+2^{-t})\sin t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^t\sin nt}{(1+2^t)\sin t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$.

于是，$2I_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$，

故 $I_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$.

注意到 $I_{n+2}-I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+2)x-\sin nx}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi}\cos(n+1)xdx=0$，所以，

$$I_{2n}=I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}\mathrm{d}x=0,\ n=1,2,\cdots.$$

$$I_{2n-1}=I_1=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi,\ n=1,2,\cdots$$

**三、求：** $\iint\limits_{\Sigma}\left(f(x,y,z)+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2f(x,y,z)+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(f(x,y,z)+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$**，其中** $f(x,y,z)$ **是光滑函数，** $\Sigma$ **为平面** $\Pi: x-y+z=1$ **在第四卦限部分的上侧.**

**解：** 曲面 $\Sigma$ 的外法向量 $\vec{n}(1,-1,1)\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow I=\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(f(x,y,z)+x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2f(x,y,z)+y\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(f(x,y,z)+z\right)\right]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[x-y+z]\mathrm{d}S=\frac{1}{2}$$

**四、已知** $f(x)$ **在** $x_0$ **的某个邻域** $U(x_0)$ **内具有** $n+1$ **阶连续导数，求证：** $\forall x\in U(x_0)$**，**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

**证明：** $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t$

$$=f(x_0)+f'(t)(t-x)|_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}(t-x)f''(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2|_{x_0}^{x}+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x)^2f'''(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x)^2f'''(t)\mathrm{d}t$$

$$=\cdots$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

**五、求** $\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$**，其中** $\Sigma$ **为曲面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **被平面** $z=1,z=2$ **所截部分的外侧.**

**解一：** 曲面 $\Sigma$ 的外法向量 $\vec{n}=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$.

$$\Rightarrow I=\iint_{\Sigma}\left[y(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})-x(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})+z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{15\pi}{2}.$$

**解二：**补充曲面$\Sigma_1: z=1,\ x^2+y^2\le 1$，下侧；$\Sigma_2: z=2,\ x^2+y^2\le 4$，上侧.

$$\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_1}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_2}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi-4\pi\cdot 4\qquad (D_z: x^2+y^2\le z^2)$$

$$=2\pi\int_1^2 z^3\mathrm{d}z+\pi-4\pi\cdot 4=-\frac{15}{2}\pi.$$

**六、求曲线 $y=x^2$ 与 $y=mx\ (m>0)$ 所围成的图形绕 $y=mx$ 所成的旋转体的体积.**

**解：** $y=x^2$ 与 $y=mx$ 的交点为 $A(0,0)$， $B(m,m^2)$.

由公式得

$$V=\pi\int_0^m\frac{(x^2-mx)^2}{\sqrt{(1+m^2)^3}}|1+2mx|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{(1+m^2)^3}}\int_0^m(x^4-2mx^3+m^2x^2)(1+2mx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{(1+m^2)^3}}\left(\frac{1}{3}mx^6+\frac{1-4m^2}{5}x^5+\frac{2m^3-2m}{4}x^4+\frac{m^2}{3}x^3\right)\Big|_0^m$$

$$=\frac{m^5}{30\sqrt{1+m^2}}\pi.$$

**七、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数， $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，**

$f(x)\neq 0$，**那么** $\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq 4$.

**证明:** 记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，因为当 $x\in(0,1)$ 时， $f(x)\neq 0$，故 $M>0$.

由题设， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故存在 $c\in(0,1)$，使得 $|f(c)|=M$ .

由拉格朗日中值定理，存在正数 $\xi_1\in(0,c)$， $\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi_1)c\text{，}\ -f(c)=f(1)-f(c)=f'(\xi_2)(1-c).$$

于是， $f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=-\dfrac{M}{c(1-c)}$.

由题设，得

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq\frac{1}{M}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)dx\right|$$

$$=\frac{1}{M}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{c(1-c)}\geq 4.$$

**八、计算** $I=\int_0^{+\infty}(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots)dx$.

**解：** $I=\int_0^{+\infty}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2})dx$

注意到， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ 可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2n}tdt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n)!}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots\cdot(2n)^2}.$$

令 $u=t-\frac{\pi}{2}$， 则 $\int_0^{\pi}\cos^{2n-1}tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}udu=0$.

于是，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_0^{\pi}x^{2n}\cos^{2n}t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_0^{\pi}x^{2n}\cos^{2n}t\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{\pi}x^{2n-1}\cos^{2n-1}t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\cos^n t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x\cos t}\mathrm{d}t$$

故 $$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}+r\cos\theta}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_D\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D$ 为上半平面. 因此，

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\pi}\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\mathrm{e}}\ .$$