厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

存储论方法

谭　忠

目录
CONTENTS

Part 1 源头问题与当今应用

案例引入：包舱的合作协议问题

中国货运航空公司签订了包舱协议，包舱的合作协议一般为一年签订一次，包舱与不包舱利润差为6元/公斤，如果不能完成包舱重量，则缺货部分仍需按10元/公斤支付给中国货运航空公司，而实际货运需求量大于包量时，可以采用航空公司公布的市场价格运输，由于竞争的激烈，操作成功的透明化导致超出部分的货运利润接近于0.

3.1源头问题与当今应用

根据以往经验，可认为每周平均运货需求量的概率分布是已知的，需求量为0公斤，3000公斤，6000公斤，9000公斤，12000公斤，15000公斤，18000公斤的概率分别为0.01、0.05、0.10、0.29、0.30、0.25. 根据需求量概率分布来计算包舱数量，使得此数量的盈利最大.

该问题可以利用存储论中的经典模型———报童问题来解答，下面我们就来介绍存储论方法的基本模型.

Part 2

存储论思想与建模方法

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

知识介绍

01 存储模型的基本要素

02 存储模型的基本费用

3.2存储论思想与建模方法

存储论是研究存储系统的性质、运行规律以及如何寻求最优存储策略的一门学科，人们在日常生活和生产实践中往往将所需的物资、用品和食物储存起来，以备将来使用或消费，这种储存物品的现象是为了解决供应(生产)与需求(消费)之间的不协调的一种措施. 如何使得存储物品既满足需求，又使所需要的费用最小，这是存储论研究的主要问题.

在实际中，不管是生产还是销售，往往都需要存储一些原料或者一定数量的物品，将这些存储物品简称存储. 需要时要从存储中取出，使存储减少，到一定时候就要进货以补充存储. 一般情况下，存储因需求而减少，因补充而增加.

1. 存储模型的基本要素

(1)需求率：单位时间内对某种物品的需求量，用R 表示.

(2)订货批量：一次订货中，所订某种货物的数量，用Q 表示.

(3)订货间隔期：相邻两次订货之间的时间间隔，用t 表示.

2. 存储模型的基本费用

(1)存储费：所有用于存储的全部费用，包括所占资金应付的利息、使用仓库、保管货物、货物损坏变质等费用，通常与存储货物的多少和时间长短有关，记为$C1$.

(2)订货费：包括两项费用，一项是订购费用(固定费用，记为$C3$)，如手续费，电信往来等. 第二项是货物成本费，与订货数量有关.

3.2存储论思想与建模方法

(3)生产费：在出现缺货需要补充存储时，如果不向外订货，而自行安排生产，就需要一定的生产费用，它同样也是包含两种费用：装配费(固定费用)和与生产数量有关的的费用(如材料费等).

(4)缺货费：由于货物短缺所引起的一切损失费用，如失去销售时机的损失、停工待料的损失，以及不能履行合同而缴纳的罚金等，一般与货物短缺的多少和短缺的时间有关，记为$C2$.

注意，在不允许缺货的情况下，在费用上处理的方式是缺货费为无穷大.

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 3 案例分析

案例分析

案例一 确定性存储模型

案例二 随机性存储模型

案例三 带约束的存储模型

3.3案例分析

案例一： 确定性存储模型

模型一 不允许缺货，货物能够得到及时补充的存储模型情形

模型的前提假设：

(1)缺货费为无穷大，即$C2=\infty$;

(2)当存储量降为零后，可以立即得到补充

(3)需求是连续均匀的，且设需求速度是R(为常数)，则t时间的需求量是Rt;

(4)每次订货量不变，订购费不变，记为$C3$；

(5)单位存储费不变，记为$C1$.

由上述假设，存储量的变化情况如图1 所示.

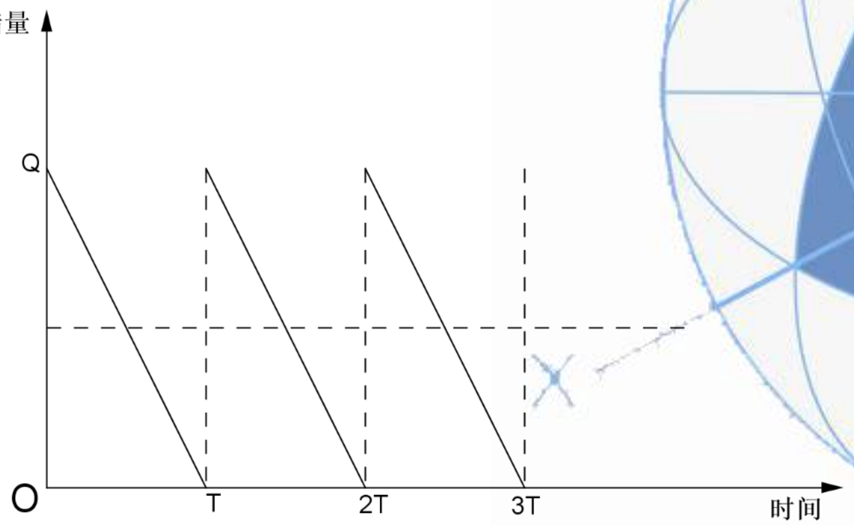


图1

在这些假设条件下，我们将用**总平均费用**来衡量存储模型的好坏.

假定每隔T 时间补充一次存储，那么订货量必须满足T时间的需求RT，记订货量为Q，则有$Q = RT$，订购费为$C3$，货物单价为K，则订货费为

$$C_3 + KQ = C_3 + KRT$$

则T时间的平均订货费为$\frac{1}{T}C_3 + KR$

在一个周期T 内，最大存储量为Q，最小存储量为0，且需求是连续均匀的，因此在T 时间，其平均存储量为

$$\frac{1}{T}\int_0^T Rtdt = \frac{1}{2}RT$$

（此结果说明平均存储量为最大存储量的一半）

存储费用为 $\frac{1}{2}C_1RT.$

所以一个周期T内的平均总费用为

$$C(T) = \frac{1}{2}C_1RT + \frac{C_3}{T} + KR \qquad (3.1)$$

要求出T，使费用函数C(T)最小. 利用微积分求最小值的方法. 对T 求导，并令其导数等于零，可求出T. 即令

$$\frac{dC(T)}{dT} = \frac{1}{2}C_1R - \frac{C_3}{T^2} = 0$$

得 $T_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$. 即每隔 T0 时间订货一次可使费用最小，此时每次的订货量为

$$Q_0=RT_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \tag{3.2}$$

由于T_0和Q_0皆与K无关，所以在费用函数（3.1）中可以去掉KR这一项费用，则费用函数改写为

$$C(T)=\frac{1}{2}C_1RT+\frac{C_3}{T} \tag{3.3}$$

将 T_0式代人(3.3)式得最小费用为

$$C(T_0)=\sqrt{2C_3C_1R} \tag{3.4}$$

(3.2)式是经济理论中著名的**经济订货批量公式(economic ordering quantity，EOQ).** 不允许缺货的存储模型也称为**经济订货批量存储模型**.

由(3.2)式表明：订购费$C3$ 越高，需求量R 越大，订货批量Q 也就越大；存储费$C1$ 越高，订货量Q 就越小，这些关系是符合实际的.

注意，在费用的表达式(3.3)中还可以用订货量Q 作为变量，即

$$C(Q)=\frac{1}{2}C_1Q+C_3\frac{R}{Q}$$

同样可以求出最佳订货量与(3.2)式相同. 实际中，一般以年为单位，订货周期 $T=\frac{R}{Q}$，每年的订货次数为n(整数)，此时n 取$[\frac{1}{T}]$或$[\frac{1}{T}]+1$，使费用最小. 如$n=3.5867$，这时只要比较当$n=3$和$n=4$时，取费用最小的那一个即可.

模型二 不允许缺货，生产需要一定时间的情形

在模型一的前提假设下，通过生产来补充缺货时，生产需要一定时间. 如果已知需求率为R，生产批量为Q，生产率为P，生产时间为t，则$P = Q/t$，且$P > R$. 此模型存储量的变化曲线如图2 所示.

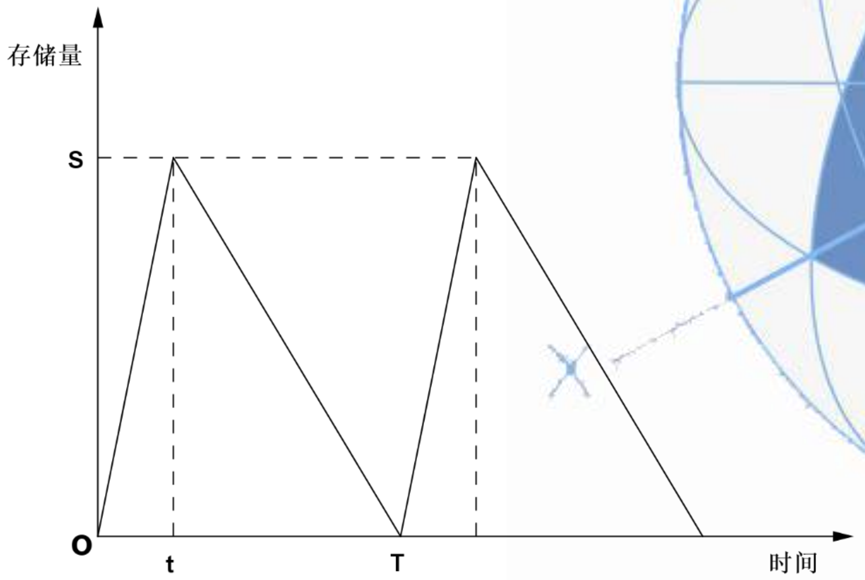


图2

在 t 时间段内，存储量以$P-R$速度上升，并在段末达到最大存储量. 在 $T-t$ 时间段内存储量以需求率R 下降，并在段末降为零，然后进入下一个周期.

在一个时间周期T 内，最大存储量为$S=(P-R)t=R(T-t)$，由此得生产时间为$t=RT/P$，平均生产装备费为$C3/T$，且满足生产批量$Q=RT$.

T 时间内的平均存储量是: $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}(P-R)t$

T 时间内的平均存储费用是 $\frac{1}{2}C_1(P-R)t$

T 时间内的装配费为 $C3$

故一个周期的平均总费用为

$$C(T) = \frac{1}{T}[\frac{1}{2}C_1(P-R)tT + C_3]$$

即

$$C(T) = \frac{1}{T}[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{RT^2}{P} + C_3]$$

同样利用微积分方法可求得最优生产批量、最佳周期、最佳生产时间、最大存储量及相应的最小存储费用分别为

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

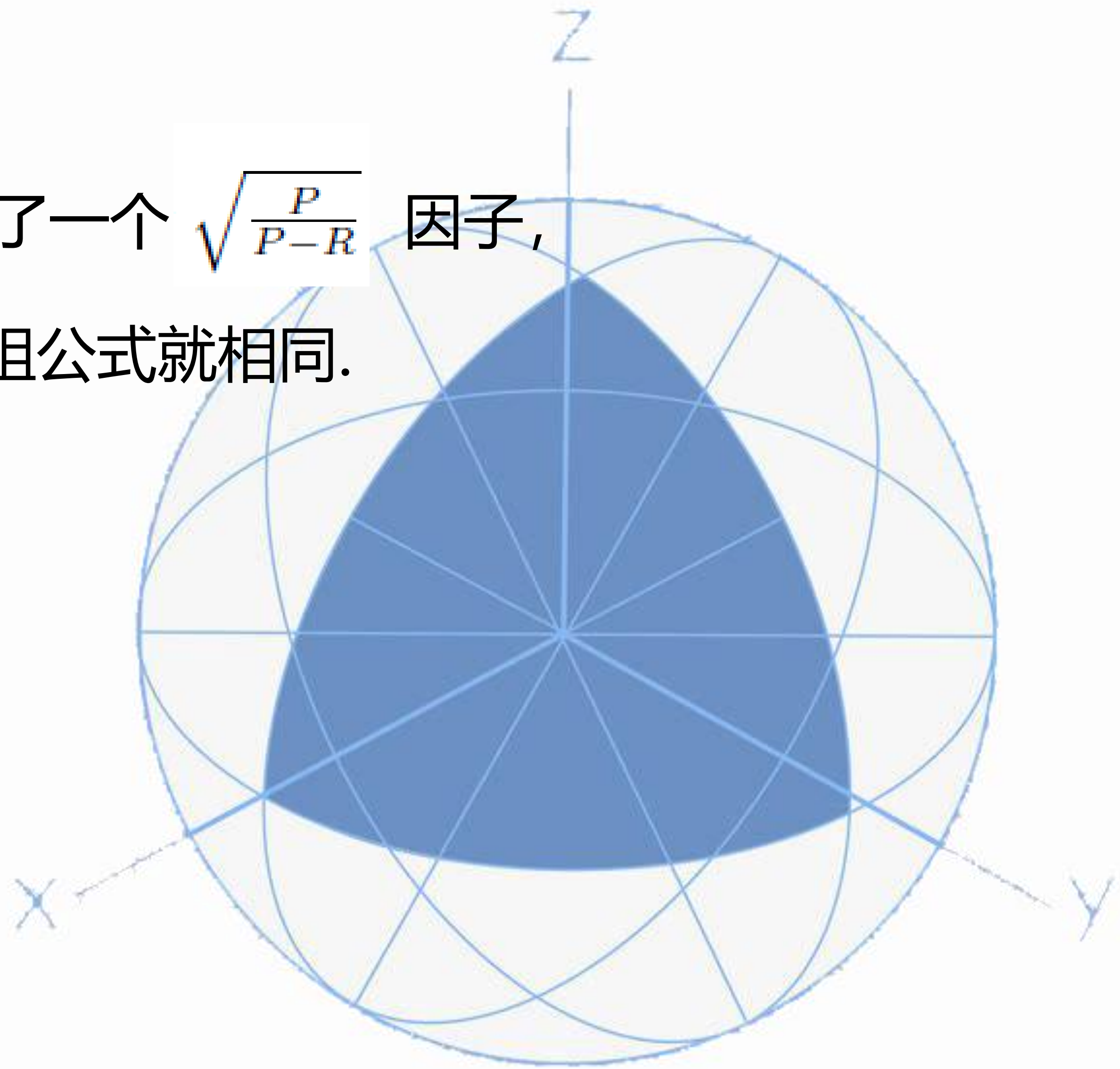
$$T_0=\sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1P(P-R)}},S_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

$$C(Q_0)=\sqrt{2C_3C_1R\frac{P-R}{P}}.$$

与模型一相比较，他们之间都相差了一个 $\sqrt{\frac{P}{P-R}}$ 因子，

当P 充分大时， $\frac{P}{P-R} \to 1$. 则两组公式就相同.



例3.1 军工企业的生产存储策略问题

某军工企业有一条生产线，若全部用于某种型号的军用产品生产时，其年生产能力为600万件. 据预测，对该型号产品的年需求量为26 万件，并在全年内需求量基本保持平衡. 因此，为了产生更多的效益. 该生产线也可用于多种民用产品的生产，为地方建设服务. 已知在生产线上更换一种产品时，需设备准备费1350 元，该产品每件成本为45 元，年存储费用为产品成本的24%，不允许发生供货短缺，试求使费用最小的该均匀产品的生产批量.

解 根据题意，该问题属于不允许缺货，生产需要一定时间的确定性模型. 已知生产能力 P = 6000000 件/年，需要量 R = 260000 件/年，设备费 $C3$ = 1350 元，存储费 $C1$ = 45x0.24 =10.8(元/件).

由模型二知，问题的总费用为

$$C(t) = \frac{1}{t}[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{Rt^2}{P} + C_3]$$

即

$$C(Q) = \frac{1}{2}C_1(1-\frac{R}{P})Q + \frac{C_3R}{Q}$$

该问题是求最佳的生产批量Q^*使总费用C(Q)最小. 在这里用LINGO 软件求解，其程序如下：%a

```
model:
min=0.5*C1*(1-R/P)*Q+C3*R/Q;
data:
C1=10.8;
C3=1350;
R=260000;
P=6000000;
enddata
end
```

运行该程序结果为 $Q^* = 8242.83$， $C^* = 85164.92$. 即每次组织生产8243 件，使总费用达到最小，其总费用为85164.92 元/年.

Solution Report - a

```
8  Local optimal solution found.
   Objective value:                              85164.92
   Infeasibilities:                              0.000000
   Extended solver steps:                               5
   Total solver iterations:                           190

   Model Class:                                       NLP

   Total variables:                     2
   Nonlinear variables:                 1
   Integer variables:                   0

   Total constraints:                   2
   Nonlinear constraints:               1

   Total nonzeros:                      2
   Nonlinear nonzeros:                  1

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    C1        10.80000            0.000000
                                     R        260000.0            0.000000
                                     P        6000000.            0.000000
                                     Q        8242.830            0.000000
                                    C3        1350.000            0.000000
```

模型三 允许缺货，备货时间很短的模型

所谓允许缺货是指企业在存储量降为零后，还可以等待一段时间后再订货. 事实上，在这种情况下，如果对顾客而言不受损失或损失很小，而企业除了支付少量的缺货费外，也无其他损失，那么这时发生缺货现象可能对企业是有利的.

在模型一的前提假设下，还假设允许缺货．在此，仍设T 表示时间周期，$T1$ 表示T 中不缺货的时间，则缺货的时间为$T-T1$. B 表示最大缺货量，$C2$ 表示缺货损失单价，$C1$ 表示单位产品的存储费，订购费为$C3$，需求速度为R，Q 表示每次的最大进货量，则最大存储量为$S = Q - B$. 允许缺货模型的存储曲线如图3 所示.

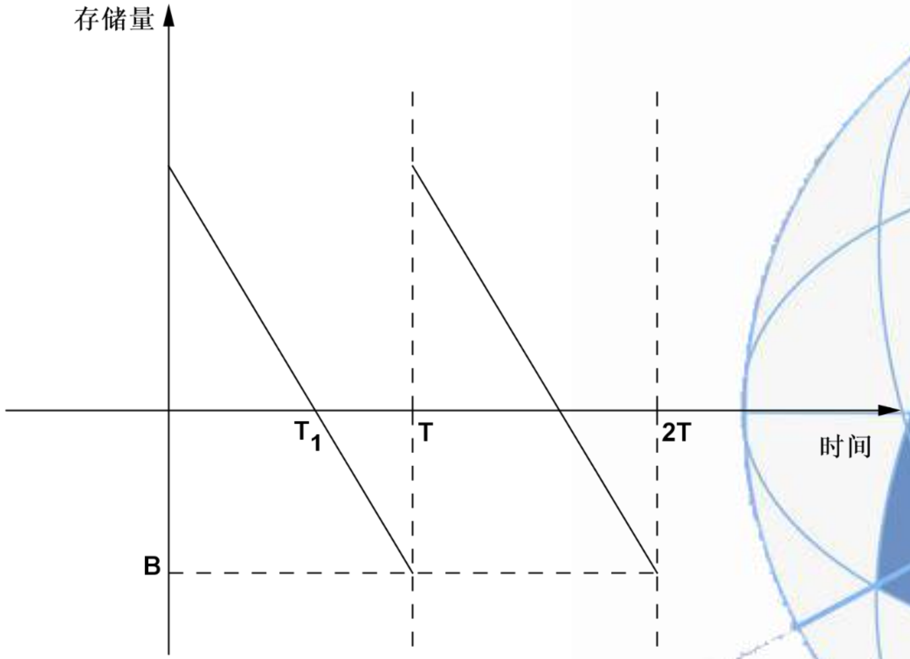


图3

在[0,*T*1] 时间内平均存储量为 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}RT_1$，平均存储费 $C_1\frac{1}{2}RT_1$，

T 时间内的平均存储费为$C_1\frac{1}{2}RT_1^2/T$

在[*T*1, *T*] 时间内存储量为零. 最大缺货量为B. 缺货量以R 的速度在增加，所以$B=R(T-T1)$.

在[*T*1, *T*] 时间内平均缺货量为$\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}R(T-T_1)$，平均缺货费为 $C_2\frac{1}{2}R(T-T_1)$，T 时间内的平均缺货费为$C_2\frac{1}{2}R(T-T_1)^2/T$

一个时间周期T 内的总平均费用为

$$C(T,T_1)=\frac{1}{T}\left(C_1\frac{1}{2}RT_1^2+C_2\frac{1}{2}R(T-T_1)^2+C_3\right)$$

利用多元函数求极值的方法，令 $\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T}=0$， $\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T_1}=0$，解得

$$T_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{RC_1C_2}}$$

$$T_1=\sqrt{\frac{2C_3C_2}{RC_1(C_1+C_2)}}$$

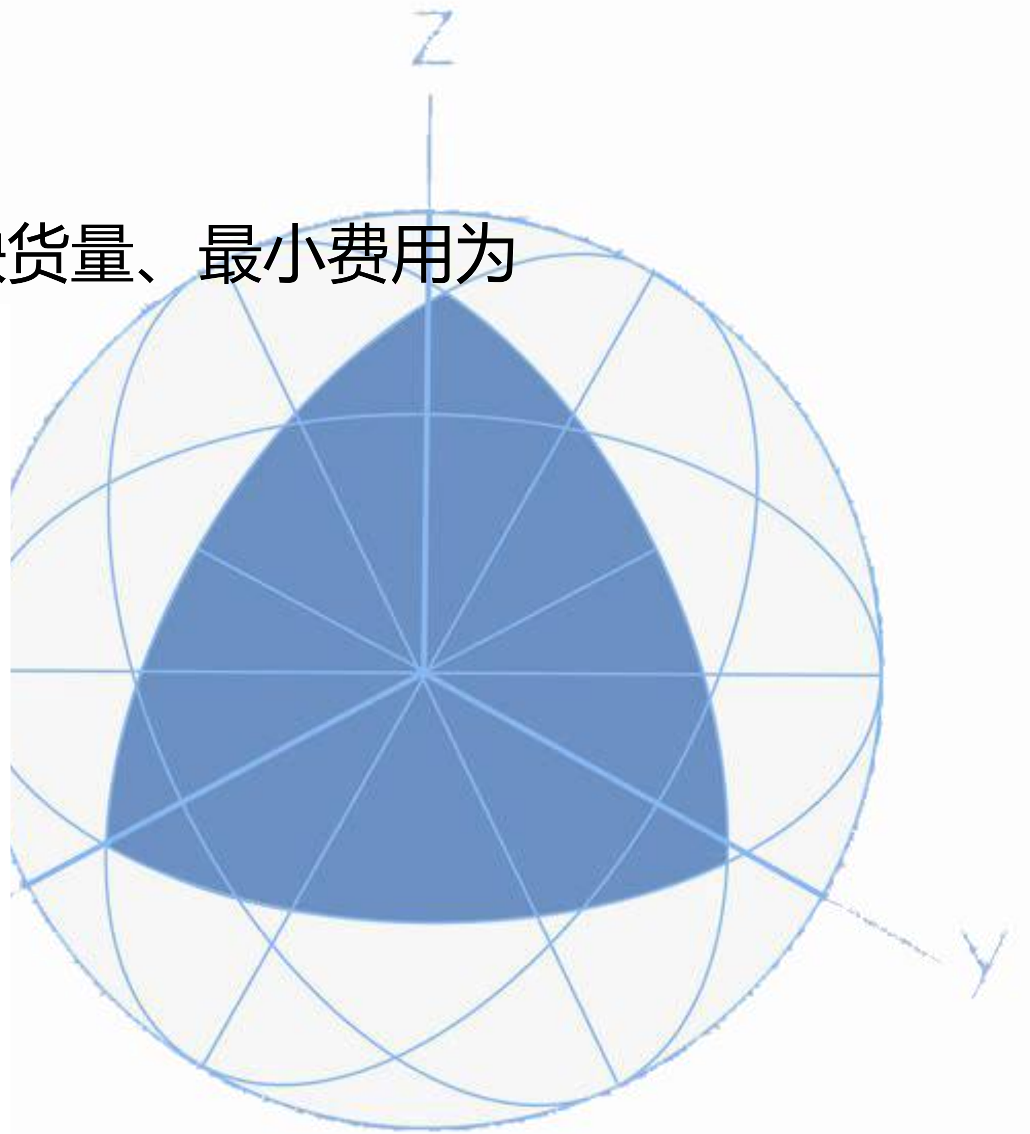
相应的最大订货量、最大存储量、最大缺货量、最小费用为

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R(C_1+C_2)}{C_1C_2}}$$

$$S_0 = T_1R = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_2+C_1}}$$

$$B_0 = Q_0 - S_0 = \sqrt{\frac{2C_3RC_1}{C_2(C_1+C_2)}}$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{2C_1C_3C_2R}{C_1+C_2}}$$



当不允许缺货时，*C*2 无穷大，此时 $\frac{C_1+C_2}{C_2}\to 1$，与模型一的情况相同. 当允许缺货时，因为 $\frac{C_1+C_2}{C_2}>1$，所以两次订货的时间间隔变长了，与事实相符.

在允许缺货的条件下，得到的最优存储策略是每隔 *T*0 时间订货一次，订货量为 *Q*0，用 *Q*0的一部分补足所缺货物，剩余部分进入存储. 而且在相同的时间段里允许缺货的订货次数比不允许缺货的订货次数减少了.

模型四 允许缺货，生产需要一定时间的情形

假设条件允许缺货，生产需要一定时间，其余条件与模型一相同. 其模型的存储量变化曲线如图4 所示.

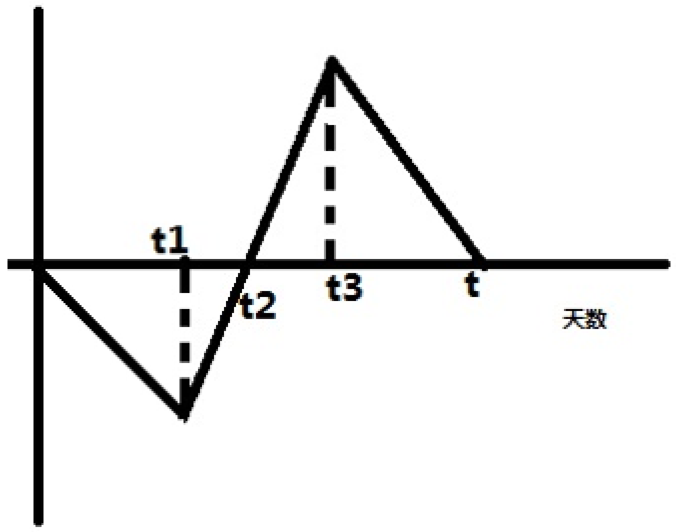


图4

设t 是一个生产存储周期，S 是最大存储量，B 是最大缺货量，R 是需求率，P 是生产率，Q 是生产批量($Q = Rt$). 设 $t1$ 时刻开始生产.

[0, $t2$] 时间内存储为0，B 表示最大缺货量. $B = Rt1$，

或 $B = (P - R)(t_2 - t_1)$.

即 $Rt_1 = (P - R)(t_2 - t_1)$，得

$$t_1 = \frac{P - R}{P} t_2$$

由最大存储量 $S=(P-R)(t_3-t_2)=R(t-t_3)$，得 $t_3=\frac{R}{P}t+(1-\frac{R}{P})t_2$

在[0, t] 时间内，所需要的存储费为$\frac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)$，

由于 $t_3-t_2=\frac{R}{P}(t-t_2)$，所以得到 $\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2$

缺货费为 $\frac{1}{2}C_2Rt_1t_2$，由于 $t_1=\frac{P-R}{P}t_2$ 代入得 $\frac{1}{2}C_2R\frac{P-R}{P}t_2^2$

装配费为 $C3$

在[0, t] 时间内总平均费用为：

$$C(t,t_2)=\frac{1}{t}[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2+\frac{1}{2}C_2R\frac{P-R}{P}t_2^2+C_3]$$

令 $\dfrac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=0$，$\dfrac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=0$，联立求出

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)P}{C_1C_2R(P-R)}}$$

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2+C_1}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

$$B_0=\sqrt{\frac{2C_1C_3(P-R)R}{(C_1+C_2)C_2P}}$$

$$C(t_0,t_2)=\sqrt{2C_1C_3R}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{1-\frac{R}{P}}$$

例3.2 公司的生产与销售问题

某公司主要生产和销售某种专用设备，基于以往的销售记录和今后市场的预测，估计下一年度需求量为4900 台. 由于占用资金的利息、存储库房和其他的人力物力资源的费用，存储一台该设备一年需要1000 元. 这种设备每年的生产能力为9800 台，而组织一次生产要花设备调试等生产准备费500 元，发生缺货时的损失2000 元/(台.年). 该公司为了把成本降到最低，应如何安排生产？求出最佳的生产批量和生产周期及最佳缺货量，最少的平均费用又是多少?

解 根据题意， 该问题属于允许缺货， 生产需要一定时间的确定性模型.

已知需求量 R = 4900 台/年， 生产能力 P = 9800 台/年， 存储费 C_1 = 1000 元(台.年)， 生产准备费 C_3 = 500 元/次，缺货损失费 C_2 = 2000 元(台.年)

由模型四可直接计算出结果：最佳生产批量 Q_0 =121.24≈121 台，最佳缺货量 B_0≈20 台，每次的生产时间 t_2≈4.5 天，最佳生产周期 t≈09 天，最小费用为 C_0 = 40414.52 元.

模型五 价格有折扣的存储模型

该模型的假设除了所订购货物的单价随订购量变化以外，其余假设条件件与模型一相同. 在这里设货物的单价为K(Q)，一般应是一个分段函数：

$$K(Q)=\begin{cases} K_1, & 0\le Q<Q_1,\\ K_2, & Q_1\le Q<Q_2,\\ \vdots & \\ K_m, & Q_{m-1}\le Q<Q_m. \end{cases}$$

其中 $Q_i<Q_{i+1}, K_i>K_{i+1} (i=1,2,\cdots,m-1).$

根据模型一，则有折扣的存储模型在一个周期内的平均费用为

$$C_i(Q) = \frac{1}{2}C_1Q + \frac{C_3R}{Q} + K_iR \ \ (i = i = 1, 2, \cdots, m) \tag{3.5}$$

因为事先并不知道最佳订货量Q^*落在哪个区间段，所以对于(3.5)式，如果不考虑Q 的定义域，每一种情况只是相差一个常数，对Q 求导数都是相同的.

令导数为零，求得 $Q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$.

当 $Q_0\in[Q_{j-1},Q_j)(1\leq j\leq m)$ 时，则求使得

$$min\{C_j(Q_0),C_{j+1}(Q_j),\cdots,C_m(Q_{m-1})\}$$

成立的Q^*作为最佳的存储量即可.

例3.3 海鲜产品的订货问题

某水产批发公司准备在春节前一个月进一批海鲜产品，预计这个月的销售量为50t，每月的存储费为150 元/t，每批订货费为100 元. 进货的单位价格(单位：元/t)为

$$K = \begin{cases} 1200, & 0 \le Q < 10, \\ 1000, & 10 \le Q < 20, \\ 800, & 20 \le Q. \end{cases}$$

求最优存储订货量.

解 该问题应采用有折扣的存储模型，已知需求率R = 50，存储费$C1$ = 150 元/t，订货费$C3$ = 100 元/批.

由模型五得最佳的订货量为 $Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times100\times50}{150}}\approx8.2(t).$

其值介于0~10 之间，故进货单价为K = 1200 元/t，平均总费用

$$C^{(1)}=\sqrt{2C_3C_1R}+KR=61224.7(\text{元})$$

又因为当订货量分别为10t 和20t 时，平均总费用分别为

$$C^{(2)}=\frac{1}{2}\times150\times10+\frac{100\times50}{10}+1000\times50=51520(\text{元})$$
$$C^{(3)}=\frac{1}{2}\times150\times20+\frac{100\times50}{20}+800\times50=41750(\text{元})$$

经比较可知，该公司的最佳订货量为20t，最佳订货周期为$t = Q/R$ = 20/50 = 0.4 个月= 12 天，最小平均总费用为41750 元/月.

案例二： 随机性存储模型

随机性存储问题可供选择的存储策略主要有三种：

(1) **定期订货策略** 该策略是每隔T 时就订一次货，不管是否有存储. 这种订货策略称为**定期订货策略.**

(2) **定点订货策略** 该策略是根据存储量降到某一确定的数量时即订货，而不再考虑间隔的时间. 相应的订货量称为订货点，每次订货的数量不变. 这种订货策略称为**定点订货策略.**

(3) **定期订货与定点订货综合策略** 该策略是间隔一定的时间检查一次存储量，如果存储量高于一个数值s，则不订货；如果存储量小于s 时，则需要订货补充存储，订货量要使存储量达到数量S，这种策略称为**(s,S)存储策略.**

模型六 需求是随机离散的存储模型

例3.4 报童问题：一个报童每天售报数量是个随机变量. 每售出一份报纸赚k 元，若当天报纸未售出则每份赔h 元. 根据以往经验，每天报纸的需求量为r 的概率是p(r)，问报童每天应准备多少份报纸为宜?

这个问题是报童每日报纸的订货量Q 为何值时，赚钱的期望值最大？反过来想也就是，如何选取适当的Q 值，使得因不能出售的报纸的损失和因缺货失去销售机会的损失，两者的期望值之和最小.

赚钱的期望值最大 ⇔ 损失的期望值最小

设报童每天应准备Q 份报，卖出r 份，若$Q \geq r$，则供过于求，造成的损失为$h(Q-r)$；若$Q < r$，则失去销售机会，造成机会损失为$k(r-Q)$.

损失的期望值为:

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

为了使订货量Q 损失的期望值最小，应满足下列关系式：

$$C(Q) \le C(Q+1) \tag{3.6}$$

和

$$C(Q) \le C(Q-1) \tag{3.7}$$

从（3.6）出发进行推导有：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r) \le$$

$$h\sum_{r=0}^{Q+1}(Q+1-r)P(r)+k\sum_{r=Q+2}^{\infty}(r-Q-1)P(r)$$

经化简得

$$(k+h)\sum_{r=0}^{Q} P(r) - k \geq 0$$

即

$$\sum_{r=0}^{Q} P(r) \geq \frac{k}{k+h}$$

从（3.7）出发进行推导有：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r) + k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r) \leq$$

$$h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)P(r) + k\sum_{r=Q-}^{\infty}(r-Q+1)P(r)$$

经化简得

$$(k+h)\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) - k \geq 0$$

即

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leq \frac{k}{k+h}$$

即Q 应满足:

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leq \frac{k}{k+h} \leq \sum_{r=0}^{Q} P(r) \tag{3.8}$$

若按盈利期望值最大来考虑报童应准备的报纸数量.

当$r<Q$时，只能卖出r 份报纸，所以此时盈利为$kr-(Q-r)h$.

当$r\geq Q$时，能卖出Q 份报纸，所以此时盈利为kQ.

所以盈利的期望值为：

$$C(Q)=\sum_{r=0}^{Q} kr-(Q-r)hP(r)+\sum_{r=Q+1}^{\infty} kQP(r) \qquad (3.9)$$

为了使订货量Q 盈利的期望值最大，应满足下列关系式：

$$C(Q+1)\leq C(Q)$$

$$C(Q-1)\leq C(Q)$$

读者可以自行证明，最佳订货量Q 仍应满足(3.8)式. 不管是以利润的期望最大还是以损失的期望最小为目标，确定最佳订货量Q 值满足的条件都是一样的.

包航的合作协议问题(续)

问题分析：我们可以将此问题看成是报童问题，将包舱舱位看成买入报纸，未能售出的舱位类似于未能售出的报纸，然后根据需求量概率分布来计算包舱数量，使得此数量的盈利最大.

模型建立：从题目中我们可以知道：包舱的利润是$k = 6$ 元，由于未售出包舱的损失是$h = 10$ 元，则

$$N = \frac{k}{k+h} = \frac{6}{16}$$

根据报童问题所得公式：

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \le \frac{k}{k+h} \le \sum_{r=0}^{Q} P(r)$$

得出：$Q = 4$

即该航空货运代理在此航班上每周包航9000 公斤，且中国货运航空公司能够满足此要求时，期望盈利最大.

例3.5 报亭售报问题

在某个街头报亭，每售出一份报纸能赚0.2 元，如果报纸当天未能售出，则只能当作废纸处理，每份将赔0.4 元. 根据以往的销售数据，每天平均售出报纸份数r 的概率P(r)如表1 所示，问该报亭每日最好应准备多少份报纸使得利润最大?

表 1 每天售出报纸份数的概率

需求量 r/百份	0	1	2	3	4	5
概率 P(r)	0.05	0.10	0.15	0.35	0.25	0.10

解由题意知，每百份报纸的利润k = 20 元，可能的损失每百份为h = 40 元，于是有 $\frac{k}{k+h}=0.333.$

再由表1的数据和(3.8)式得

$$\sum_{r=0}^{2} P(r)=0.3<0.333<\sum_{r=0}^{3} P(r)=0.65$$

由此可知该报亭每天应准备300 份报纸，将订货量Q = 300 代入（3.9）可计算出最大期望利润为30 元.

模型七 需求连续的随机变量的存储模型

设 货物单位成本是K，货物单位售价为P，单位存储费为$C1$，需求r 是连续的随机变量，密度函数为$\phi(r)$，分布函数为 $F(a)=\int_0^a \phi(r)dr, a>0,$

问如何确定生产或订购数量Q，使得赢利的期望值最大?

解 当 $r \le Q$ 时，也就是供过于求的时候，只能销售出r 份产品，剩余的$Q-r$份需要提供存储费. 但当$r>Q$时，Q 份产品都能卖出去. 所以当订购数量为Q 时，实际销售的数量为 $\min[r,Q]$.

货物的成本为KQ，销售价格为$P\min[r,Q]$，则本阶段订货量为Q的赢利为$W(Q)$，

$$\begin{cases} c_1 & r \le Q \\ 0 & r > Q \end{cases}$$

$$W(Q) = P\min[r,Q] - (Q-r)C_1 - KQ$$

赢利的期望值为$E(W(Q))$，即

$$E(W(Q)) = \int_0^Q Pr\phi(r)dr + \int_Q^\infty PQ\phi(r)dr - \int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr - KQ$$

$$= \int_0^\infty Pr\phi(r)dr - \int_Q^\infty Pr\phi(r)dr + \int_Q^\infty PQ\phi(r)dr - \int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr - KQ$$

$$= PE(r) - \{P\int_Q^\infty (r-Q)\phi(r)dr + \int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)dr + KQ\}$$

可以看出：

总利润的期望值= 总的销售利润的期望值- 未售完的损失-缺货的损失.

我们记

$$E(C(Q))=P\int_{Q}^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr+\int_{0}^{Q}C_1(Q-r)\phi(r)dr+KQ$$

为损失的期望值。

要使赢利的期望值最大，即要算$E(C(Q))$最小，可利用微积分方法最小：

$$\frac{dE(C(Q))}{dQ} = C_1 \int_0^Q \phi(r)dr - P\int_Q^\infty \phi(r)dr + K$$

令

$$\frac{dE(C(Q))}{dQ} = 0, \text{记} F(Q) = \int_0^Q \phi(r)dr$$

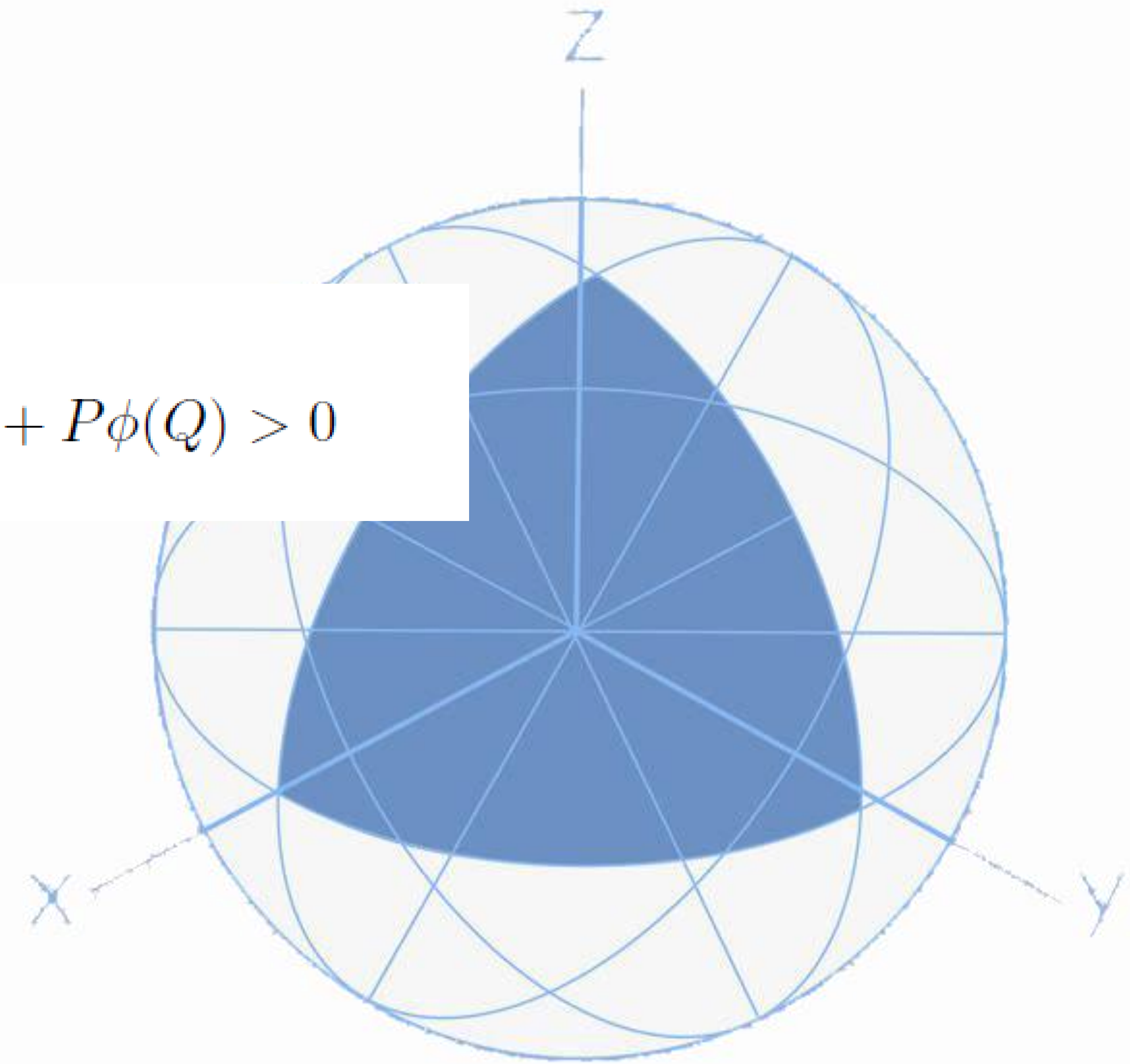
可以得到：

$$F(Q) = \frac{P-K}{C_1+P}$$

从中解出$Q0$，又因为：

$$\frac{d^2E(C(Q))}{dQ^2}=C_1\phi(Q)+P\phi(Q)>0$$

知道$Q0$为$E(C(Q))$的最小值.



模型八 (s，S)的存储模型(多周期的随机存储模型)

设货物单位成本为K，单位存储费为$C1$，单位缺货费为$C2$，每次订购费为$C3$，需求r是连续的随机变量，密度函数为f(r). 期初原有存储量为I，订货量为Q，此时期初存储达到$S = I + Q$. 问如何确定订货量Q使得损失的期望值达到最小，而盈利的期望值达到最大?

如果期初存储量I 在该周期是常量，订货量为Q，即这个时期期初存储量为$S = I + Q$. 则该周期费用的期望值应该包括：订货费、存储费的期望值和缺货费的期望值三部分之和，即

$$\bar{C}(S) = C_3 + KQ + \int_0^S C_1(S-r)f(r)dr + \int_S^{+\infty} C_2(r-S)f(r)dr$$

利用极值原理，求出使总费用 $C(S)$ 最小的订货量 Q ($Q = S - I$) 应满足如下关系:

$$\int_0^S f(r)dr = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} \tag{3.9}$$

实际中，订货需付订购费，如果本周期不订货，则可以省去订购费. 因此试想是否存在这样一个数值 s ($s \le S$)，使得下式成立:

$$Ks+\int_0^s C_1(s-r)f(r)dr+\int_s^{+\infty} C_2(r-s)f(r)dr$$

$$\leq C_3+KS+C_1\int_0^S (S-r)f(r)dr+C_2\int_S^{+\infty} C_2(r-S)f(r)dr,$$

当$s=S$时，上式显然成立，于是上式可改写为

$$C_3+K(S-s)+C_1[\int_0^S (S-r)f(r)dr-\int_0^s (s-r)f(r)dr]+$$

$$C_2[\int_S^{+\infty} (r-S)f(r)dr-\int_s^{+\infty} (r-s)f(r)dr]\geq 0 \qquad (3.10)$$

首先由(3.9)式计算出S，再确定使(3.10)式成立的最小的s，然后在每个周期期初检查其库存，当存储量$I < s$时，就需要订货，且订货量为Q=S-I；当存储量$I \geq s$，该周期就不需要订货.

这种存储策略就称为定期订货(s,S)策略. 但订货量是不确定的，订货量Q 的多少视周期末存储量I 的大小来决定.

在实际操作时，人们也可以利用计算机随时对存储的货物进行清点，存储量一旦小于s期末即需订货. 如果不小于s，期末无需订货.

当需求是离散的随机变量时，方法与连续性的一样，只是表示方法不同而已.

设需求r 的取值为 $r_0, r_1, \cdots, r_m$，其概率分别为 $P(r_0), P(r_1), \cdots, P(r_m)$，且 $\sum_{i=0}^{m} P(r_i)$ =1.如果期初的原始存储量为I，订货量为Q，则此时的存储量就达到S=I+Q. 于是该周期各种费用的总和的期望值为:

$$\bar{C}(S) = C_3 + K(S-I) + \sum_{r \le S} C_1(S-r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r-S)P(r).$$

由此可确定出存储量S 的数值使得总费用 $C(S)$ 达到最小. 具体的计算步骤如下:

（1）将需求r 的随机值按大小顺序排列为

$$r_0, r_1, \cdots, r_i, r_{i+1}, \cdots, r_m,$$

其中 $r_i < r_{i+1}, r_{i+1} - r_i = \Delta r_i \neq 0, (i = 0, 1, \cdots, m-1).$

(2) S 只从 $r_0, r_1, \cdots, r_m$ 中取值. 当S 取值为ri时，记为 $S_i (0 \le i \le m).$

（3）为确定出 $C(S)$ 的最小值，则 Si 应满足 $\bar{C}(S_{i+1}) \geq \bar{C}(S_i)$ 和 $\bar{C}(S_{i-1}) \geq \bar{C}(S_i)$.

由此可得 Si，应满足如下的不等式：

$$\sum_{r \leq S_{i-1}} P(r) < \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} \leq \sum_{r \leq S_i} P(r) (0 \leq i \leq m) \quad (3.11)$$

例3.6 原材料的合理订购与存储问题

现有某生产加工厂，因生产需要购进某种原材料，其购进单价为每箱800 元，且订购手续费为85 元，每箱的存储保管费45 元. 如果要是发生缺货现象，就不得不用高价来购进新的原材料，即每箱原材料的购入费将高达1100 元. 已知在生产开始时，原有存储量为12 箱，根据以往生产记录的分析，对原材料需求的概率如表2 所示，试为该厂制定相应的(s,S)存储策略.

表 2 加工生产产品的需求量与概率

需求量 r/箱	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
概率 P(r)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.10	0.20	0.20	0.15	0.10

解 由题意知，这个问题是一个多周期的随机存储问题. 已知通常情况下的单位购进价K=800 元，单位存储费为$C1$ = 45 元，高价购置费为$C2$ = 1100 元. 由模型八和(3.11)式有

$$\sum_{r\leq S_{i-1}} P(r) < \frac{1100-800}{45+1100} = 0.262 \leq \sum_{r\leq S_i} P(r).$$

由于 $\sum_{r\leq 45} P(r) = 0.25, \sum_{r\leq 50} P(r) = 0.35$，故最佳的存储量为S=50 箱.

另一方面，原存储量达到多少时可以不订货，也即s 应是多少?由模型八，应是使下式成立的最小值:

$$Ks + \sum_{r\leq s} C_1(s-r)P(r) + \sum_{r\geq s} C_2(r-s)P(r)$$

$$\leq C_3 + KS + C_1\sum_{r\leq S}(S-r)P(r) + C_2\sum_{r\geq S}(r-S)P(r)$$

案例三： 带约束的存储模型

在实际中，经常需要考虑多种不同物品的存储问题. 尤其是在资金和库存容量有限的情况下，如何确定最优的存储策略？这是一个需要研究的问题.

现在，我们就有m 种不同物品的情况进行讨论. 首先引入下列记号：

(1)用Di，Qi，Ci $(i = 1,2,\ldots m)$ 分别表示第i 种物品的需求量、每次订购的批量和相应的订购单价；

(2)用CD表示实施一次订货的订货费，无论所订货物是否相同，总是假设订货费相同；

(3)用Cpi $(i=1,2,\ldots m)$表示第i 种物品的单位存储费；

(4)用J，WT分别表示每次订货可占用的资金额和库存总容量；

(5)用wi $(i=1,2,\ldots m)$表示第i种物品的单位库存占用量.

下面以不允许缺货模型为例进行讨论，对于允许缺货的情况只要将费用函数作相应的调整即可.

1、具有资金约束的EOQ 模型

模型九 具有资金约束的存储模型

具有资金约束就是每次订货可占用的资金数额有限制，比如不能超过J.

根据不允许缺货存储模型，对于第i (i = 1,2,...m)种物品，当每次的订货

量为Q_i时，单位周期内的平均总费用为

$$\bar{C}_i = \frac{1}{2} C_{Pi} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i}.$$

如果每种物品的单价为*Ci*，则*CiQi*是该种物品占用的资金额. 因此，资金约束为

$$\sum_{i=1}^{m} C_i Q_i \leq J$$

综上所述，得到具有资金约束的EOQ 模型为

$$min\ \ C=\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2}C_{Pi}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i})$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} C_i Q_i \leq J, & \\ Q_i \geq 0 & (i=1,2,\cdots,m).\end{cases}$$

2、具有库存容量约束的EOQ 模型

模型十、具有库存容量约束的存储模型

设第i 种物品的单位库存占位大小为wi，则*wiQi*(*i* = 1,2,... ,*m*) 是该种物品的总的库存占位，因此具有库存容量约束的EOQ 模型为

$$minC = \sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2}C_{Pi}Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i})$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\omega_i Q_i \le W_T, & \\ Q_i \ge 0 & (i = 1, 2, \cdots, m). \end{cases}$$

其中*WT*为库存总容量上限值.

3、兼有资金与库存容量约束的EOQ 模型

模型十一 具有资金与库存容量约束的存储模型

假设订货量既可受订货资金数额的限制，又受库存容量的限制，即综合以上模型十和十一得到具有资金与库存约束的最佳批量存储模型为

$$min\ \ C=\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2}C_{Pi}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i})$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} C_i Q_i \le J, \\ \sum_{i=1}^{m} \omega_i Q_i \le W_T, \\ Q_i \ge 0 \qquad\qquad (i=1,2,\cdots,m). \end{cases}$$

例3.7 军工厂的订货策略问题

某军工厂是生产某种军用设备的专业厂家，共有5 种物资需要从地方订购，其供应和存储模式为确定性、周期补充、均匀消耗和不允许缺货模型. 设该军工厂的最大库容量 WT 为1500 $m3$，一次订货占用流动资金的上限(J)为40 万元，订货费(CD)为1000 元. 5 种物资的年需求量、物资单价、存储费用和单位占用库容量如表3 所示. 试为该军工厂制定最佳的订货策略，即各种物资的年订货次数、订货量和总的存储费用是多少?

表 3 物资需求单价、存储费用和单位占用库存容量

物资 i	年需求量 D_i/件	单价 C_i/(元/件)	存储费 C_{Pi}/(元/(件.年))	单位物资占用库存 $\omega_i/(m^3/件)$
1	600	300	60	1.0
2	900	1000	200	1.5
3	2400	500	100	0.5
4	12000	500	100	2.0
5	18000	100	20	1.0

解 设 N_i 是第 $i(i=1,2,\ldots,m)$ 种物资的年订货次数，根据兼有资金与库容约束的存储模型十一，则相应的最优模型为

$$minC=\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2}C_{Pi}Q_i+\frac{C_DD_i}{Q_i})$$

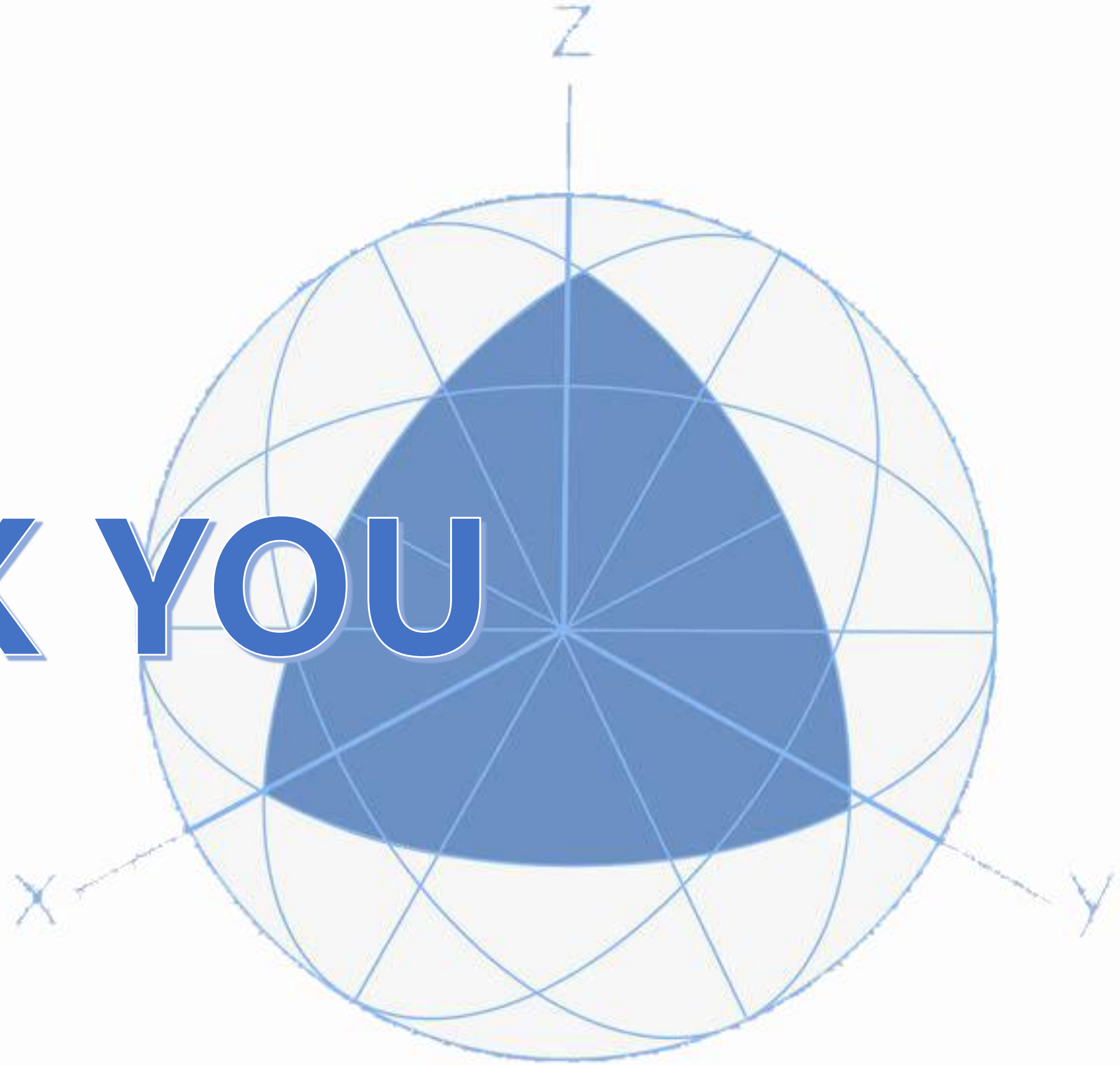
$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}C_iQ_i\le J,\\ \sum_{i=1}^{m}\omega_iQ_i\le W_T,\\ N_i=D_i/Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,5),\\ Q_i\ge 0,N_i\ge 0 \qquad (i=1,2,\cdots,5).\end{cases}$$

该模型为一个整数非线性规划模型，用*LINGO*软件来求解，其程序如下:

```
model:
sets:
numi/1..5/:c_p,d,c,w,Q,N;
endsets
data:
c_d=1000;
d=600,900,2400,12000,18000;
c=300,1000,500,500,100;
c_p=60,200,100,100,20;
w=1.0,1.5,0.5,2.0,1.0;
j=400000;
w_t=1500;
enddata
min=@sum(numi:0.5*c_p*Q+c_d*d/Q);
@sum(numi:c*Q)<=j;
@sum(numi:w*Q)<=w_t;
@for(numi:N=d/Q; @gin(N));
end
```

运行该程序，计算结果为如下：总费用为142278.3 元，其余结果如下表所示.

物资i	年订货量Q_i	年订货次数N_i
1	85.71	7
2	75.00	12
3	160.00	15
4	300.00	40
5	620.69	29



THANK YOU