模糊数学方法

谭　忠

目录
CONTENTS

XIAMEN UNIVERSITY

Part 1 源头问题与当今应用

11.1源头问题与当今应用

长期以来，人们对于客观事物的认识习惯于追求其精准性或清晰性.一个命题要么是“真”，要么是“假”.而元素与集合之间的关系不是“属于”就是“不属于”，非此即彼，界限分明，毫不含糊，经典数学正好适应了人们处理这种问题的需求.

但是随着社会的发展和科技进步，人们需要处理的是大量的亦此亦彼、界限不分明的客观事物，用相应的精确数据来建立起反映其主要性质的数学模型.

然而在许多实际的问题中，它的主要因素与次要因素的标准是什么？建模时，因素取舍的依据是什么？等等.

如果这些问题得不到合理的解决，就用经典数学建模方法得到的解往往会与实际不符，更何况对于有些实际的问题，根本就无法建立起相应的数学模型呢!

Part 2 模糊思想与建模方法

1、模糊数学的兴起

用数学的眼光看世界，可把我们身边的现象划分为：

(1) 确定性现象：如水加温到 100◦C 就沸腾，这种现象的规律性靠经典数学去刻画；

(2) 随机现象：如掷筛子，观看哪一面向上，这种现象的规律性靠概率统计去刻画；

(3) 模糊现象：如“今天天气很热”，“小伙子很帅”...等等. 此话准确吗？有多大的水分？则需要靠模糊数学去刻画。

在客观世界中，存在着大量的模糊概念和模糊现象. 一个概念与其对立的概念无法划出一条明确的分界，它们是随着量变逐渐过渡到质变的. 例如“年轻“和”美貌“、”高与矮“、“胖与瘦”、“美与丑”等没有确切界限的一些对立概念都是所谓的**模糊概念**. 凡涉及模糊概念的现象被称为**模糊现象**.

例 秃子悖论：天下所有的人都是秃子.

设头发根数为 n，$n = 1$ 时显然是秃子，若 $n = k$ 是秃子，那么 $n = k + 1$ 也是秃子.

基本思想：用属于程度代替属于或不属于. 某个人属于秃子的程度为 0.8，另一个人属于秃子的程度为 0.3 等.

2、模糊数学的基本概念

1、模糊集

论域：谈到一个概念时，其外延总是有一个限定的范围，该范围称之为论域。论域是一个集合，一般用大写字母表示，如X、Y等，其内的对象称之为元素，一般用小写字母表示，如x，y，z等。

例如，当人们谈论白梨和鸭梨时，各种梨就是论域。不同论题涉及的论域不同，人们议论物价时，一切经济问题就成为论域，而医疗保健问题则是论域之外的客体。

模糊集的定义：

设 U 为一论域，如果给定了一个映射：

$$\mu_A : U \to [0,1]$$
$$x \to \mu_A(x) \in [0,1]$$

则该映射确定了一个模糊集合 A，其映射 μ_A 称为模糊集 A 的**隶属函数**， $\mu_A(x)$ 称为 x 对模糊集 A 的**隶属度**.

$\mu_A(x)$ 越接近于 0，表示 x 隶属于 A 的程度越小；$\mu_A(x)$ 越接近于 1，表示 x 隶属于 A 的程度越大；$\mu_A(x)=0.5$ 的点 x 称为模糊集 A 的过渡点，即是模糊性最大点.

一个隶属函数唯一确定一个模糊集合，一个模糊集合对应一个隶属函数。由于模糊集合比较抽象，所以以后常用隶属函数来表示模糊集合。

对一个确定的论域U可以有多个不同的模糊集合。如论域为人的身高时，那么模糊集合可以为“高个子”，“中等个子”或“矮个子”。

模糊幂集：论域 U 上的模糊集合的全体

$$F(U) = \{A|\mu_A : U \to [0,1]\}$$

注 1：F(U) 是一个普通集合.

注 2：当 μ_A 的取值为 0 或 1 时，μ_A 退化为普通集合的特征函数，因此普通集合是一个特殊的模糊集合，模糊集合是普通集合的推广.

2、模糊集的表示方法有：

(1) 对于有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，设 A ∈ F(U)

(a) Zadeh 表示法：

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

这里 “ $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ ” 它表示点 x_i 对模糊集 A 的隶属度是$\mu_A(x_i)$.

“+”不表示求和，只表示各项汇总，体现集合的概念.

(b) 序偶表示法：

$$A=\{(x_1,\mu_A(x_1)),(x_2,\mu_A(x_2)),\cdots,(x_n,\mu_A(x_n))\}$$

(c) 向量表示法：

$$A=(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\cdots,\mu_A(x_n))$$

(2) 如果 U 为无限论域，设 $A \in F(U)$，则

$$\boldsymbol{A} = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}$$

这里的“∫”表示各元素与其隶属度对应关系的总和，$\frac{\mu_A(x)}{x}$ 和前面的意思一样

例 有 100 名消费者，对 5 种商品评价结果为 x1, x2, x3, x4, x5，81 人认为 x1 质量好，53 人认为 x2 质量好，所有人认为 x3 质量好，没有人认为 x4 质量好；24 人认为 x5 质量好.

则模糊集 A(质量好)可以表示为：

$$A=\frac{0.81}{x_1}+\frac{0.53}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.24}{x_5}$$

3、模糊集合的运算

设X为论域，A，B ∈ F(X)，其中F(X)为模糊幂集：

包含：$B \subseteq A \Leftrightarrow \mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

相等：$B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \text{且} B \subseteq A$

并：$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

交：$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

补：$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$

4、隶属函数的确定方法

(1) 模糊统计方法

模糊统计方法主要是基于模糊统计试验的基础上根据隶属度的客观存在性来确定的.

模糊统计试验包含下面四个基本要素：

(a) 论域 U；

(b)U 中的一个固定元素 x_0 ；

(c)U 中包含一个随机变动的集合 A^*（A^* 为普通集)；

(d)U 中的一个以 A^* 作为弹性边界的模糊集 A，对 A^* 的变动起着制约作用，其中 $x_0 \in A^*$，或 $x_0 \notin A^*$，致使 x_0 对 A 的隶属关系是不确定的.

假设作 n 次模糊统计试验，可以算出

$$x_0\text{对A的隶属频率} = x_0 \in A^* \text{ 的次数}/n$$

事实上，当 n 不断增大时，隶属频率趋于稳定，其稳定值称为 x_0 对 A 的隶属度，即

$$\mu_A(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_0 \in A^*\text{的次数}/n$$

例 对 129 人进行调查，让他们给出“青年人”的年龄区间：

18-25	17-30	17-28	18-25	16-35
14-25	18-30	18-35	18-25	16-35
15-30	18-35	17-30	18-25	18-35
…	…	…	…	…
15-30	18-30	17-25	18-29	18-28

问年龄 u0 = 27 属于模糊集 A(青年人)的隶属度.

解：对年龄 27 作出如下的统计处理：

n	10	20	30	40	50	60	70
隶属次数	6	14	23	31	39	47	53
隶属频率	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76

n	80	90	100	110	120	129	
隶属次数	62	68	76	86	94	101	
隶属频率	0.78	0.76	0.77	0.78	0.78	0.78	0.78

得到： A(27) = 0.78

(2) 专家给定

现实生活中经常遇到排序问题，这实际上就是确定隶属函数. 常用的一种方法就是专家打分. 下面用一个例子来说明.

例如体操比赛中的鞍马项目. 假设由 10 人组成裁判组，评分方法是：评判时按满分 10 分打分，去掉最高分、最低分，另外 8 人打分求和，再除 8.

作为比赛，当然是排序，确定谁是第一，谁是第二等. 换一种考虑方式，这样的问题实质上就是确定模糊集合的隶属函数. 以全体参赛运动员为论域 U. “动作最完美的人”是 U 上的一个模糊集合 A. 每名运动员的得分都在 0 和 1 之间，得分可以理解为该名运动员属于动作最完美的人的程度.

许多问题与此类似，问题是要确定隶属函数，本质要求是排序. 因此排序就是确定隶属函数的一种方法.

5、模糊关系与模糊矩阵

5.1、模糊关系与模糊关系的运算

模糊关系：设 U，V 为论域，则称乘积空间 U × V 上的一个模糊子集 $\tilde{R} \in F(U \times V)$ 为从 U 到 V 的模糊关系

如果 $\widetilde{R}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\widetilde{R}} :(U \times V) \to [0,1]$$
$$(x,y) \to \mu_{\widetilde{R}}(x,y)$$

则称隶属度 $\mu_{\widetilde{R}}(x,y)$ 为 (x, y) 关于模糊关系 $\widetilde{R}$ 的相关程度. 模糊关系是普通关系的拓广，普通关系描述事物之间是否有关联，模糊关系描述事物之间关联有多少。

由于模糊关系 $\widetilde{R}$ 就是乘积空间 U × V 上的一个模糊子集，因此，模糊关系同样具有模糊集的运算及性质. 设 $\widetilde{R},\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2$ 均为从 U 到 V 的模糊关系：

包含：$\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R}_2 \Leftrightarrow \widetilde{R}_1(x,y) \le \widetilde{R}_2(x,y)$

相等：$\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_2 \Leftrightarrow \widetilde{R}_1(x,y) = \widetilde{R}_2(x,y)$

并：$\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$ 的隶属函数 $(\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2)(x,y) = \widetilde{R}_1(x,y) \vee \widetilde{R}_2(x,y)$

交：$\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$ 的隶属函数 $(\widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2)(x,y) = \widetilde{R}_1(x,y) \wedge \widetilde{R}_2(x,y)$

补：$\widetilde{R}^c$ 的隶属函数 $\widetilde{R}^c(x,y) = 1 - \widetilde{R}(x,y)$

$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)(x, y)$ 表示 (x,y)对模糊关系“ $\tilde{R}_1$ 或 $\tilde{R}_2$ ”的相关程度

$(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2)(x, y)$ 表示 (x,y)对模糊关系“ $\tilde{R}_1$ 且 $\tilde{R}_2$ ”的相关程度

$\tilde{R}^c(x, y)$ 表示 (x,y)对模糊关系“非 $\tilde{R}$ ”的相关程度.

5.2、模糊矩阵

对于有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 和 $V=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ ，则 U 到 V 的模糊关系 $\tilde{R}$ 可用m × n 阶**模糊矩阵**表示： $R=(r_{ij})_{m\times n}$

，其中 $r_{ij}=\tilde{R}(x_i,y_j)\in[0,1]$表示 (x_i,y_j)关于模糊关系 $\tilde{R}$ 的**相关程度**.

特殊情况：

(1) 如果 r_{ij} 只取 0 或 1 时，则称 R 为布尔（BOOL）矩阵.

(2) 当 m = 1 或 n = 1 时，则 相 应 的 模 糊 矩 阵 为 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$

或 $R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)^T$ ，分别称为模糊行向量和模糊列向量.

5.3、模糊关系的合成

设 $\tilde{R}_1$ 是 U 到 V 的关系，$\tilde{R}_2$ 是 V 到 W 的关系，则 $\tilde{R}_1$ 与 $\tilde{R}_2$ 的合成 $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ 是 U 到 W 的关系.

$$(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2)(x, z) = \vee\{[\tilde{R}_1(x, y) \wedge \tilde{R}_2(y, z)] | y \in V\}$$

当论域有限时，模糊关系的合成化为模糊矩阵的合成

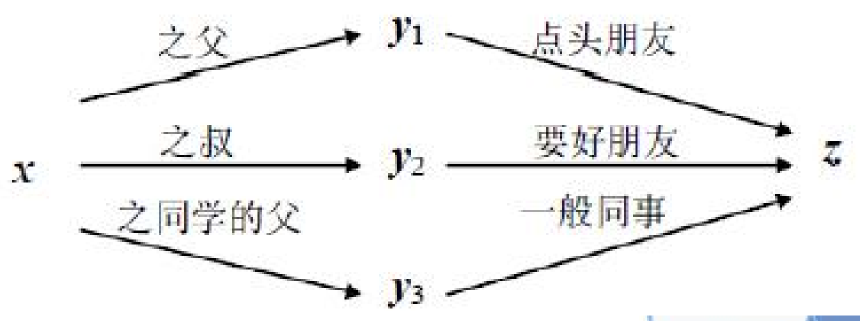
设$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$V=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$，$W=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$，且U到V的模糊关系$\tilde{R}_1=(a_{ik})_{m\times s}$，V到W的模糊关系$\tilde{R}_2=(b_{kj})_{s\times n}$，则U到W的模糊关系可表示为模糊矩阵的合成：

$$\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中：

$$c_{ij}=\vee\{(a_{ik}\wedge b_{kj})|1\leq k\leq s\}$$

例 设x,z两人的关系图如下图所示

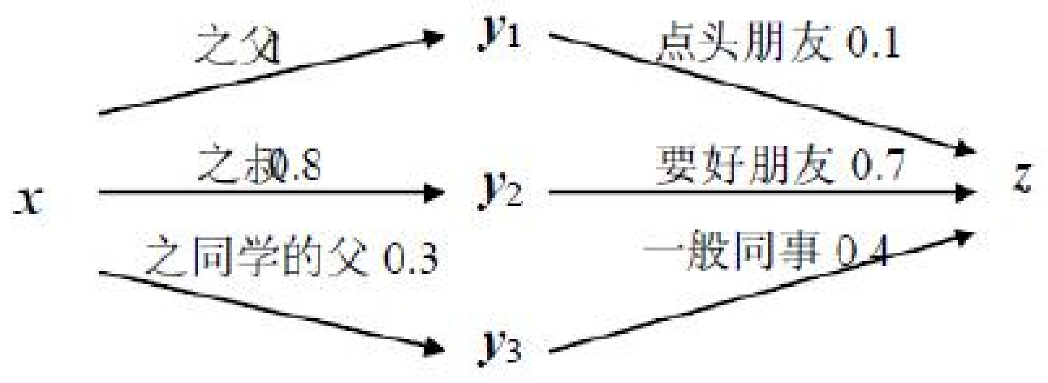


问：x,z之间密切关系程度如何？

答：x的叔叔与z是好朋友。

那么获取上述答案的数学原理是什么？

在例子的关系图中将“密切”强度表示如下：



记 $X=\{x\},Y=\{y_1,y_2,y_3\},Z=\{z\},$

$$R \in F(X \times Y), S \in F(Y \times Z),$$

$$R = (1, 0.8, 0.3), S = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$R \circ S = (1, 0.8, 0.3) \circ \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{pmatrix} = (1 \wedge 0.1) \vee (0.8 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 0.4) = 0.7$$

计算结果表明，0.7正是三个关系通道中关系最密切的一条。

5.4、模糊等价关系与模糊等价矩阵

若模糊关系 $\tilde{R} \in F(U \times V)$，且满足：

(1) 自反性：$\mu_{\tilde{R}}(x,x)=1$;

(2) 对称性：$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x)$

(3) 传递性：$\tilde{R} \circ \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$ 或$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{R}}(x,y)=\vee_{z\in U}(\mu_{\tilde{R}}(x,z)\wedge \mu_{\tilde{R}}(z,y)) \leq \mu_{\tilde{R}}(x,y)$

则称 $\tilde{R}$ 是 U 上的一个模糊等价关系

例 设X表示教室里全体同学，R是X上的朋友关系。考虑如何定义传递性才是合理的？

设甲、乙、丙、丁四人有关系程度分别为

R(甲,乙) = 0.8 ,R(乙,丁) = 0.3 ,R(甲,丙) = 0.5 ,R(丙,丁) = 0.6

如果甲与丁并不认识，甲通过乙介绍认识丁，可以认为甲与丁是朋友关系的程度为 $R(\text{甲},\text{乙}) \wedge R(\text{乙},\text{丁}) = 0.8 \wedge 0.3 = 0.3$

如果甲通过丙介绍认识丁，可以认为甲与丁是朋友关系的程度为 $R(\text{甲},\text{丙}) \wedge R(\text{丙},\text{丁}) = 0.5 \wedge 0.6 = 0.5$

如果模糊关系是可以传递的，甲与丁是朋友的关系程度应当不小于通过乙和丙介绍得到的朋友关系. 如果X中还有其他人x，传递性就是要求

$$R(甲,丁) \geq \vee\{[R(甲,x) \wedge R(x,丁)] | x \in X\} = (R \circ R)(甲,丁)$$

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，I 为单位矩阵，如果模糊矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$

满足：

(1) 自反性：$\boldsymbol{I}\leq\boldsymbol{R}$;

(2) 对称性：$\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{R}$;

(3) 传递性：$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}\leq\boldsymbol{R}$ 或 $\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})\leq r_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$

则称 R 为模糊等价矩阵.

注：对于满足自反性和对称性的模糊关系 $\widetilde{R}$ 与模糊矩阵 R，则分别称为模糊相似关系与模糊相似矩阵.

5.5、λ 截矩阵与 λ 截集

设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 为模糊矩阵，对任意的 λ ∈ [0, 1]

(1) 如果令

$$r'_{ij}=\begin{cases}1, r_{ij}\geq\lambda\\0, r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

则称 $\lambda=(r'_{ij}(\lambda))$ 为 R 的 **λ 截矩阵**.

(2) 如果令

$$r'_{ij}=\begin{cases}1, r_{ij}>\lambda\\0, r_{ij}\le\lambda\end{cases}$$

则称 $\lambda=(r'_{ij}(\lambda))$ 为 R 的 **λ 强截矩阵**.

注：对任意的 $\lambda\in[0,1]$，λ 截矩阵是布尔矩阵.

6、模糊传递矩阵

设 R 是 n × n 阶的模糊矩阵，如果满足

$$R \circ R = R^2 \leq R$$

即：$\bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \leq r_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 则称 R 为**模糊传递矩阵**.

称包含 R 的最小的模糊传递矩阵为**传递闭包**，记为 t(R).

对于任意的模糊矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ ，则

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{n}R^k=(\bigvee_{k=1}^{n}r_{ij}^{(k)})_{n\times n}$$

特别地，当 R 为模糊相似矩阵时，必存在一个最小的自然数 k(k ≤ n)，使得 $t(R)=R^k$, 对任意自然数 l > k，都有 $R^l=R^k$ ，此时，t(R) 一定为模糊等价矩阵.

例 设有模糊相似矩阵如下，求传递闭包

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

解：

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} = R^2$$

$$R^2 \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} = R^2 = t(R)$$

3、模糊聚类分析方法

一、模糊聚类分析

对所研究的事物按一定标准进行分类的数学方法称为聚类分析，它是多元统计“物以类聚”的一种分类方法. 然而，在科学技术、经济管理中有很多事物的类与类之间并无清晰的划分，边界具有模糊性，它们之间的关系更多的是模糊关系，

比如植物、微生物、动物之间，温饱型家庭与小康型家庭之间等. 对上述事物的分类就应该用模糊数学方法. 根据事物的某些模糊性质进行分类的数学方法称为**模糊聚类分析**.

二、建模过程

1、建立数据矩阵

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为所需分类研究的对象，每个对象又由 m 个指标表示其性态，即

$$x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

于是得到问题的原始数据矩阵为 $A=(x_{ij})_{m\times n}$.

2、数据无量纲化

实际中的数据通常具有不同的性质和量纲，为了使有不同量纲的量能进行比较，需要将数据规格化，常用的方法有：

(1) 标准差标准化：

当原始数据之间具有不同量纲时，应用该方法可以使每个变量的均值为 0，标准差化为 1，从而消除了量纲的差异影响，即令

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

其中：

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, s_j = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2, \cdots m)$$

(2) 极差正规化：

$$x''_{ij} = \frac{x'_{ij} - \min\limits_{1\le i\le n}\{x'_{ij}\}}{\max\limits_{1\le i\le n}\{x'_{ij}\} - \min\limits_{1\le i\le n}\{x'_{ij}\}} \quad (j = 1, 2, \cdots m)$$

(3) 极差标准化：

$$x''_{ij} = \frac{x'_{ij} - \bar{x}_j}{\max\limits_{1\le i\le n}\{x'_{ij}\} - \min\limits_{1\le i\le n}\{x'_{ij}\}} \quad (j = 1, 2, \cdots m)$$

(4) 最大值规格化：

$$x_{ij}^{'} = \frac{x_{ij}}{M_j}$$

$$M_j = max(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$$

$$(j = 1, 2, \cdots m)$$

3、建立模糊相似矩阵

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}(i=1,2,\cdots,n)$

，即数据矩阵为 $A=(x_{ij})_{n\times m}$，建立 x_i 与 x_j 的相似程度 $r_{ij}=R(x_i,x_j)$

的方法主要有：下边为确定相似系数的 r_{ij} 的多种方法：

(1) 数量积法:

对于 $x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}\in U$,令 $M=\max\limits_{i\neq j}(\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk})$ 则取

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \cdot x_{jk}, i \neq j \end{cases}$$

显然 $|r_{ij}| \in [0,1]$

注：若出现某些 $r_{ij} < 0$可令 $r'_{ij} = \frac{r_{ij}+1}{2}$ ，则有 $r'_{ij} \in [0,1]$. 也可以用标准差标准化将其压缩到 [0,1]上，从而得到模糊相似矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times m}$

(2) 绝对值指数法：令

$$r_{ij} = exp\{-\sum_{k=1}^{m}|x_{ik} - x_{jk}|\} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则 $R = (r_{ij})_{n\times m}$

(3)相关系数法：令

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik} - \bar{x_i}|\cdot|x_{jk} - \bar{x_j}|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik} - \bar{x_i})^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk} - \bar{x_j})^2}}$$

(4) 欧氏距离法：令

$$\begin{cases} r_{ij} = 1 - E \cdot d(x_i, x_j) \\ d(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_{ik} - x_{jk}|^2} \end{cases}$$

其中 E 为使得所有 $r_{ij} \in [0,1]$ （$i, j = 1, 2, \cdots n$）的确定常数. 则 $R = (r_{ij})_{n \times m}$.

XIAMEN UNIVERSITY

(5) 主观评分法：

设有 N 个专家组成专家组，让每一位专家对所研究的对象 x_i 与 x_j 相似程度给出评价，并对自己的自信度作出评估. 如果对第 k 位专家 P_k 关于对象 x_i 与 x_j 相似程度评价 $r_{ij}(k)$ ，对自己的自信度评估为 $a_{ij}(k), i, j = 1, 2, \cdots n$,则相关系数定义为

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (r_{ij}(k) \cdot a_{ij}(k))}{\sum_{k=1}^{m} a_{ij}(k)} \qquad i, j = 1, 2, \cdots n$$

则 $R = (r_{ij})_{n \times m}$

(6) 最大最小值法：令

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})}\qquad j=1,2,\cdots n$$

则 $R=(r_{ij})_{n\times m}$

(7) 绝对值减数法：

$$r_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 1-C\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|, i\neq j\end{cases}$$

其中 C 适当选择，使 $0\leq r_{ij}\leq 1$.

4、聚类

所谓模糊聚类方法是根据模糊等价矩阵将所研究的对象进行分类的方法. 对于不同的置信水平 $\lambda \in [0, 1]$，可以得到不同的分类结果，从而形成动态聚类图.

(1)传递闭包法：

(a) 求出模糊相似矩阵 R 的传递闭包；

(b) 按 λ 由大到小进行聚类；

(c) 画出动态聚类图.

(2) 布尔矩阵法：

论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 U 上的模糊相似矩阵，对于确定的 λ 水平要求 U 中元素的分类.

首先，由于模糊相似矩阵 R 作出其 λ 截矩阵 $R_\lambda = (r_{ij}(\lambda))$ ，即 R_λ 为布尔矩阵. 然后依据 R_λ 中的 1 元素可以将其分类.

如果 R_λ 为等价矩阵，则 R 也为等价矩阵，即可以直接将其分类.

如果 R_λ 不是等价矩阵，则首先按一定的规则将 R_λ 改造成一个等价的布尔矩阵，然后再进行分类.

(3) 编网法：

对于通过标定后得到的相似矩阵 R,若取定 λ ∈ [0, 1]，对 R_λ 聚类：

(a) 将 R_λ 主对角线元素换成 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，主对角线上方空白；

(b) 将 R_λ 主对角线下方的 1 换成 *，0 换成空白；

(c) 由各“*”号处做十字线与主对角线元素相交.

经这三步后，若经由各十字线能连接起来的元素归于同类.

编网法的聚类结果与传递闭包一致，但无需求传递闭包，而直接通过相似矩阵进行聚类，因此，它具有的计算量小且直观易于掌握的特点.

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY

三、案例分析

考虑某环保部门对该地区 5 个环境区域 X = {x1, x2, x3, x4, x5} 按污染情况进行分类. 每个环境单元包括空气、水分、土壤、作物四个要素. 环境单元的污染状况由污染物在四要素中含量的超过限度来描述. 现有五个环境单元，污染数据如下：

A=(80,10,6,2); B=(50,1,6,4); C=(90,6,4,6); D=(40,5,7,3); E=(10,1,2,4).

试对 X = {A, B, C, D, E} 进行分类.

解：由题设可知特性指标矩阵为：

$$X^* = \begin{pmatrix} 80 & 10 & 6 & 2 \\ 50 & 1 & 6 & 4 \\ 90 & 6 & 4 & 6 \\ 40 & 5 & 7 & 3 \\ 10 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

采用最大值规格化法将数据规格化得：

$$X = \begin{pmatrix} 0.89 & 1 & 0.86 & 0.33 \\ 0.56 & 0.10 & 0.86 & 0.67 \\ 1 & 0.60 & 0.57 & 1 \\ 0.44 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.11 & 0.10 & 0.29 & 0.67 \end{pmatrix}$$

用最大最小法构造模糊相似矩阵得：

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.54 & 0.62 & 0.63 & 0.24 \\ 0.54 & 1 & 0.55 & 0.70 & 0.53 \\ 0.62 & 0.55 & 1 & 0.56 & 0.37 \\ 0.63 & 0.70 & 0.56 & 1 & 0.38 \\ 0.24 & 0.53 & 0.37 & 0.38 & 1 \end{pmatrix}$$

用平方法合成传递闭包：

$$t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.63 & 0.62 & 0.63 & 0.53 \\ 0.63 & 1 & 0.62 & 0.70 & 0.53 \\ 0.62 & 0.62 & 1 & 0.62 & 0.53 \\ 0.63 & 0.70 & 0.62 & 1 & 0.53 \\ 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 1 \end{pmatrix}$$

取 λ = 1 可得：

$$R_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故将 X 分为五类：{A},{B},{C},{D},{E}

取 λ = 0.7 可得：

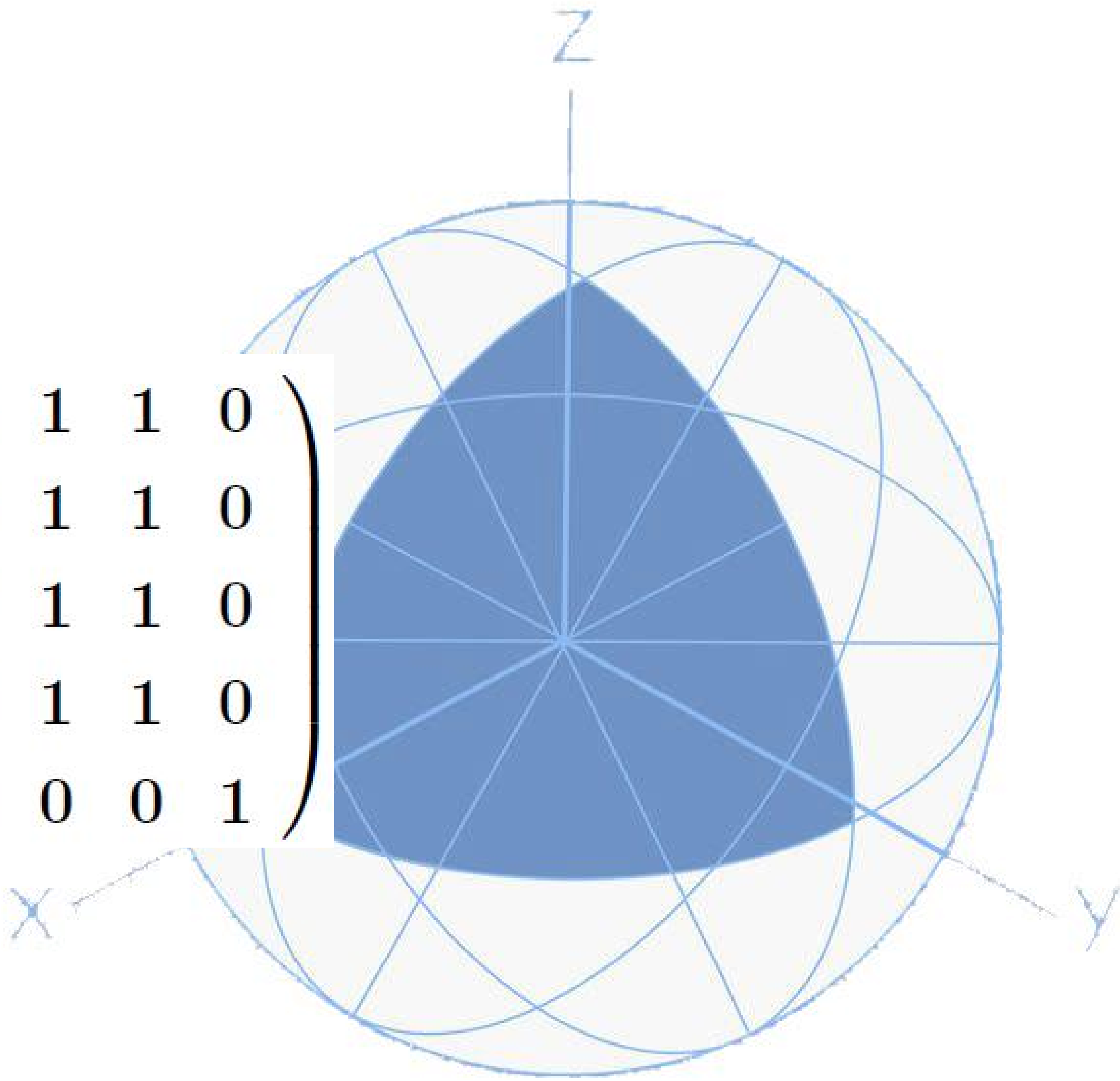
$$R^*_{0.7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将 X 分为四类：{A},{B, D},{C},{E}

取 λ = 0.63 可得：

$$R_{0.63}^{*}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故将 X 分为三类：{A, B, D},{C},{E}



取 λ = 0.62 可得：

$$R^*_{0.62} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

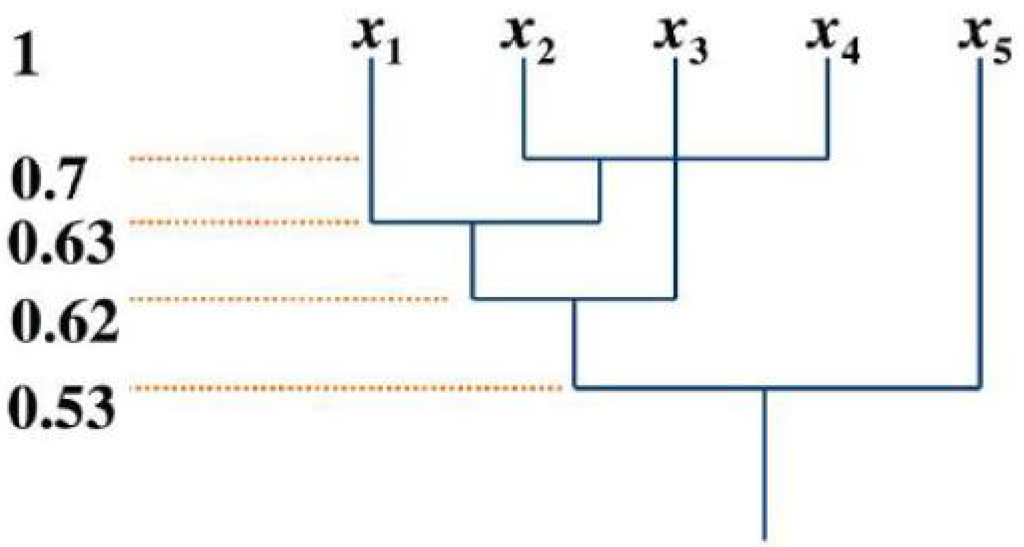
故将 X 分为两类：{A, B, C, D},{E}

取 λ = 0.53 可得：

$$R_{0.53}^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

故将 X 分为一类：{A, B, C, D, E}

画出动态聚类图如下：



4、模糊模式识别方法

一、模糊模式识别

模型识别：已知某类事物的若干标准模型，现有这类事物中的一个具体形象，问把它归到哪一模型，这就是模型识别.

模糊模型识别：是指在模式识别中，模式是模糊的，或说标准模式库中提供的模式是模糊的.

二、模糊识别的方法

1、点对集

点对集：元素对标准模糊集的识别问题.

例　苹果的分级问题：设论域 X={若干苹果}. 苹果被摘下来后要分级，一般按照苹果的大小、色泽、有无损伤等特征来分级. 于是可以将苹果分级的标准模型库规定为 ={I 级，II级，III 级，IV 级}，显然，模型 I 级，II 级，III 级，IV 级是模糊的. 当果农拿到一个苹果 x0 后，到底应将它放到哪个等级的筐里，这就是一个元素 (点)对标准模糊集的识别问题.

最大隶属原则 I：设 A1, A2, ..., Am 为给定的论域 U 上的 m 个模糊模式， $x_0 \in$ U 为一个待识别对象，若

$$A_i(x_0) = max\{A_1(x_0), A_2(x_0), ..., A_m(x_0)\}$$

，则认为 x_0 优先归属于模糊模式 A_i .

最大隶属原则 II：设 A 为给定论域 U 上的一个模糊模式，x1, x2, ..., xn 为 U 中的 n 个待识别对象，若

$$A(x_i) = max\{A(x_1), A(x_2), ..., A(x_n)\}$$

则认为 x_i 优先归属于模糊模式 A.

例 在论域 X = [0, 100] 分数上建立三个表示学习成绩的模糊集 A=“优”，B =“良”，C =”差”. 当一位同学的成绩为 88 分时，这个成绩是属于哪一类？

解：

$$A(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le 80\\ \frac{x-80}{10}, 80\le x\le 90\\ 1, 90\le x\le 100\end{cases}$$

$$A(88)=0.8$$

$$B(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le 70\\ \frac{x-70}{10}, 70\le x\le 80\\ 1, 80\le x\le 85\\ \frac{95-x}{10}, 85\le x\le 95\\ 0, 95\le x\le 100\end{cases}$$

$$B(88)=0.7$$

$$C(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 70\\ \frac{80-x}{10}, 70\le x\le 80\\ 0, 80\le x\le 100\end{cases}$$

$$C(88)=0$$

则：A(88) = 0.8，B(88) = 0.7，C(88) = 0. 根据最大隶属原则I，88 分这个成绩应隶属于A，即为“优”.

例 接上例，论域 X = {x1(71), x2(74), x3(78)} 表示三个学生的成绩，哪一位学生的成绩最差？

解：C(71) = 0.9，C(74) = 0.6，C(78) = 0.2，

根据最大隶属原则 II， $x_1(71)$ 最差.

2、集对集

集对集：模糊集对标准模糊集的识别问题。

例 医生给病人的诊断过程：设论域 X={各种疾病的症候}(称为症候群空间). 各种疾病都有典型的症状. 由长期临床积累的经验可得标准模型库 ={心脏病，胃溃疡，感冒，...}，显然，这些模型 (疾病)都是模糊的.病人向医生诉说症状 (也是模糊的)，由医生将病人的症状与标准模型库的模型作比较后下诊断.这是一个模糊识别过程，也是一个模糊集对标准模糊集的识别问题.

设在论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中有 m 个模糊子集 A1, A2, · · · , Am，（即 m 个模式）构成一个标准模式库，对 U 上的另一个模糊子集 A_0 ，试问 A_0 与 A_i (i = 1, 2, · · · , m) 中的哪一个最贴近？

内积：论域 U 上的模糊子集 A, B $\in$ F(U)，则称

$$A \circ B = \bigvee_{k=1}^{m} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))$$

为 A, B 的内积；

外积：论域 U 上的模糊子集 A, B $\in$ F(U)，则称

$$A \otimes B = \bigwedge_{k=1}^{m} (\mu_A(x) \vee \mu_B(x))$$

为 A, B 的外积

贴近度：σ(A, B) 表示两个模糊集 A，B 之间的贴近度. 如果两个模糊子集的贴近度越大，则说明其越贴近.

(1) 格贴近度：

$$\sigma_0(A,B)=\frac{1}{2}[A\circ B+(1-A\otimes B)]$$

(2) 最小最大贴近度：

$$\sigma_1(A,B)=\frac{\sum_{k=1}^{m}(A(x_k)\wedge B(x_k))}{\sum_{k=1}^{m}(A(x_k)\vee B(x_k))}$$

(3) 最小平均贴近度：

$$\sigma_2(A,B)=\frac{2\sum_{k=1}^{m}(A(x_k)\wedge B(x_k))}{\sum_{k=1}^{m}(A(x_k)+B(x_k))}$$

(4) 海明贴近度：

$$\sigma_3(A,B)=1-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|A(x_k)-B(x_k)|$$

(5) 欧几里得贴近度：

$$\sigma_4(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{m}(A(x_k)-B(x_k))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

择近原则：设 A1, A2, ..., An 为论域 U 上的 n 个模糊模式，B 为 U 上的一个待识别对象，若

$$\sigma(B, A_i) = max\{\sigma(B, A_1), \sigma(B, A_2), ..., \sigma(B, A_n)\}$$

则认为 B 应归属于模式 A_i .

例 论域为“茶叶”，标准有 5 种：A1, A2, A3, A4, A5，待识别茶叶为 B，反映茶叶质量的 6 个指标为：条索，色泽，净度，汤色，香气，滋味，确定 B 属于哪种茶？

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
条索	0.5	0.3	0.2	0	0	0.4
色泽	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2
净度	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
汤色	0.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.4
香气	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1	0.5
滋味	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.3

$$\sigma_0(A,B)=\frac{1}{2}[A\circ B+(1-A\otimes B)]$$

计算得：

$$\sigma_0(A_1,B)=0.6,\ \sigma_0(A_2,B)=0.55,\ \sigma_0(A_3,B)=0.5,$$

$$\sigma_0(A_4,B)=0.45,\ \sigma_0(A_5,B)=0.5$$

故茶叶 B 为 A1 型茶叶。

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

5、模糊综合评判方法

一、模糊综合评判法

模糊综合评判法是利用模糊集理论进行评价的一种方法。

具体地说，该方法是应用模糊关系合成的原理，从多个因素对被评判事物隶属等级状况进行综合性评判的一种方法。

模糊评价法不仅可对评价对象按综合分值的大小进行评价和排序，而且还可根据模糊评价集上的值按最大隶属度原则去评定对象所属的等级。

这就克服了传统数学方法结果单一性的缺陷，结果包含的信息量丰富。这种方法简易可行，在一些传统观点看来无法进行数量分析的问题上，显示了它的价值，它很好地解决了判断的模糊性和不确定性问题。

综合评判是对多种属性的事物，或者说其总体优劣受多种因素影响的事物，做出一个能合理地综合这些属性或因素的总体评判。

例如，教学质量的评估就是一个多因素、多指标的复杂的评估过程，不能单纯地用好与坏来区分。

二、模糊综合评判法的特点

模糊评价通过精确的数字手段处理模糊的评价对象，能对呈现模糊性的资料作出比较科学、合理、贴近实际的量化评价；

评价结果是一个矢量，而不是一个点值，包含的信息比较丰富，既可以比较准确地刻画被评价对象，又可以进一步加工，得到参考信息。

三、模糊综合评判的步骤

1.确定评价对象的因素论域

设与被评价事物相关的因素有n个，记作 $U=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$ 称之为因素集。

也就是说有n个评价指标，表明我们对被评价对象从这些方面来进行评判描述。

XIAMEN UNIVERSITY

2.确定评语等级论域

设所有可能出现的评语有m个，记作 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 称之为评语集。

评语集是评价者对被评价对象可能做出的各种评价结果组成的集合，实际上就是对被评价对象变化区间的一个划分。

比如评价产品的竞争力可用V={强、中、弱}，评价地区的社会经济发展水平可用V={高、较高、一般、较低、低}，评价经济效益可用V={好、较好、一般、较差、差}等。

3.进行单因素评判

单独从一个因素出发进行评价，以确定评价对象对评价集合V的隶属程度，称为单因素模糊评价。

一个被评价对象在某个因素 μ_i 方面的表现是通过模糊向量

$r_i=(r_{i1},r_{i2},\ldots,r_{im})$ 来刻画的，其中 $r_{ij}(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$ 表示某个被评价对象从因素 μ_i 来看对 v_j 等级模糊子集的隶属度。

4.构造综合评判矩阵

得到了各因素 μ_i 的评判向量 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im})$ 后，可构造综合评判矩阵R：

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

5.选择模糊合成算子，作出综合评判

由于各种因素所处地位不同，作用也不一样，考虑用权重

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\in F(U)$ 来衡量。通常要求满足 $a_i\geq 0;\sum a_i=1$ 。

对于权重 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，采用具体的模糊合成算子计算 $B=A\circ R$

，并根据隶属度最大原则作出评判。

常用的模糊合成算子有：

(1) M(∧, ∨)–主因素决定型：

$$b_j = \bigvee_{k=1}^{n} (a_k \wedge r_{kj}), j = 1, 2, \cdots, m$$

其评判结果只取决于在总评价中起主要作用的那个因素，其余因素均不影响评判结果，此模型比较适用于单项评判最优就能作为综合评判最优的情况.

(2) M(·, ∨)–主因素突出型：

$$b_j = \bigvee_{k=1}^{n} (a_k \cdot r_{kj}), j = 1, 2, \cdots, m$$

它与模型 M(∧, ∨) 相近，但比模型 M(∧, ∨) 精细些，不仅突出了主要因素，也兼顾了其他因素.此模型适用于模型 M(∧, ∨) 失效 (不可区别)，需要“加细”的情况.

(3) M(·, +)–加权平均型：

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot r_{kj}), j = 1, 2, \cdots, m$$

该模型依权重的大小对所有因素均衡兼顾，比较适用于要求总和最大的情形.

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY

(4) M(∧, ⊕)–取小上界和型：

$$b_j=min\{1,\sum_{k=1}^{n}(a_k\wedge r_{kj})\},j=1,2,\cdots,m$$

在使用此模型时，需要注意的是：各个 a_i 不能取得偏大，否则可能出现 b_j 均等于 1 的情形；各个 a_i 也不能取得太小，否则可能出现 b_j 均等于各个 a_i 之和的情形，这将使单因素评判的有关信息丢失.

(5) M(∧, +)–均衡平均型：

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \wedge \frac{r_{kj}}{r_0}\right), j = 1, 2, \cdots, m$$

其中：$r_0 = \sum_{k=1}^{m} r_{kj}$

该模型适用于 R 中元素 r_{ij} 偏大或偏小的情形.

例 考虑一个服装的评判问题.

(1) 建立因素集 $U = \{\mu1, \mu2, \cdots, \mu n\}$，其中：

$\mu1$：花色； $\mu2$：式样； $\mu3$：耐穿程度； $\mu4$：价格.

(2) 确定评判集 $V = \{\nu1, \nu2, \cdots, \nu m\}$，其中：

$\nu1$：很欢迎； $\nu2$：较欢迎； $\nu3$：不太欢迎； $\nu4$：不欢迎.

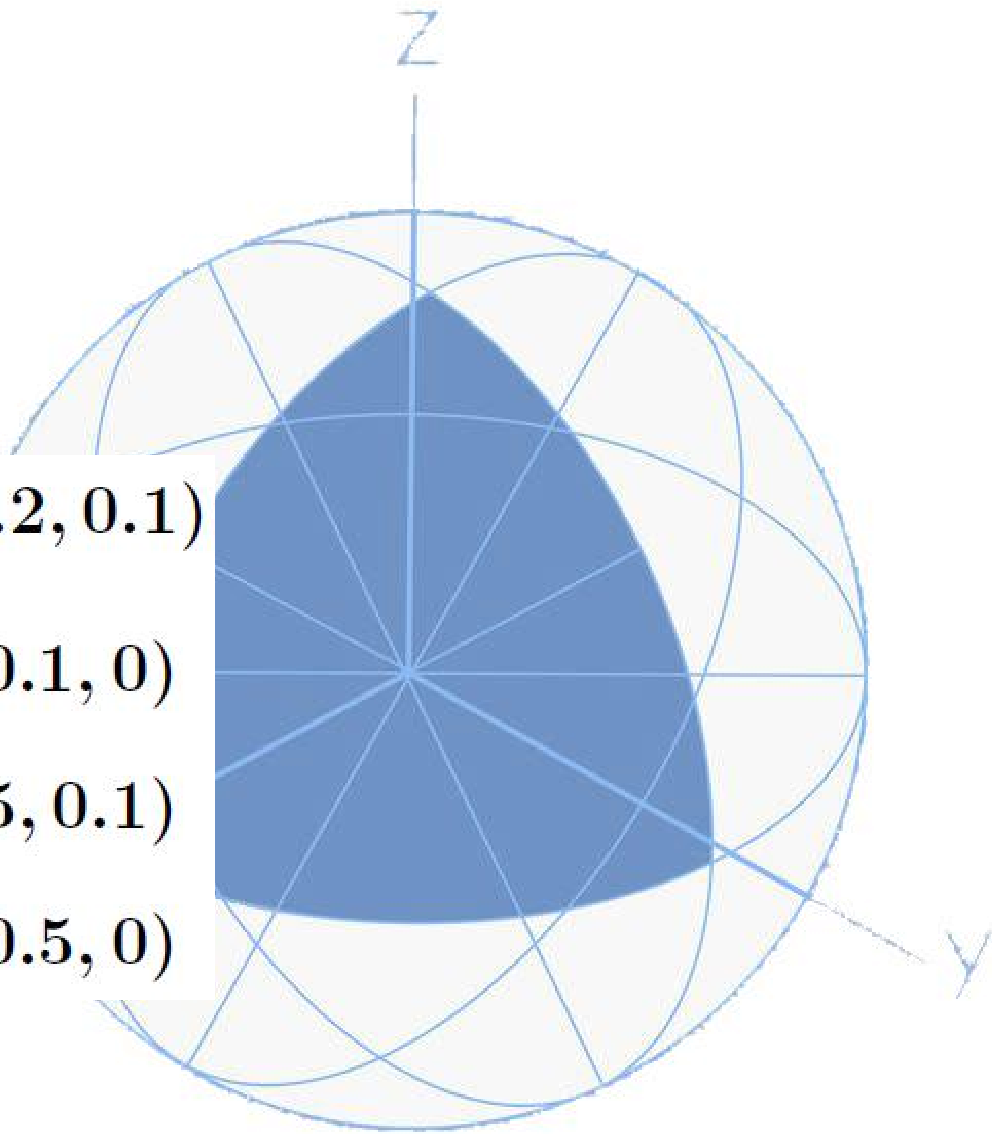
(3) 进行单因素评判得到：

$$\mu_1 \mapsto r_1 = (0.2, 0.5, 0.2, 0.1)$$

$$\mu_2 \mapsto r_2 = (0.7, 0.2, 0.1, 0)$$

$$\mu_3 \mapsto r_3 = (0, 0.4, 0.5, 0.1)$$

$$\mu_4 \mapsto r_4 = (0.2, 0.3, 0.5, 0)$$



(4) 由单因素评判构造综合评判矩阵：

$$R=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) 综合评判：设有两类顾客，他们根据自己的喜好对各因素所分配的权重分别为：

$$A_1 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$$

$$A_2 = \{0.4, 0.35, 0.15, 0.1\}$$

用模型 M(∧, ∨) 计算得综合评判为：

$$B_1 = A_1 \circ R = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$$

$$B_2 = A_2 \circ R = (0.35, 0.4, 0.2, 0.1)$$

对于类似于 B2 的情形，在下结论前通常将其归一化为：

$$B_2' = \left(\frac{0.35}{1.05}, \frac{0.4}{1.05}, \frac{0.2}{1.05}, \frac{0.1}{1.05}\right)$$

$$= (0.33, 0.38, 0.19, 0.1)$$

按最大隶属原则，第一类顾客对此服装不太欢迎，而第二类顾客对此服装比较欢迎.

四、多级模糊综合评判

在实际的综合评判中，影响评判的结果的因素一般很多，因此确定权重比较困难；另一方面，因素过多也可能导致权重都比较小，以致于评判结果难以区分，在这样的问题中，众多因素常常是可以分类的，可以先从大的方面考虑，再从小的方面考虑。评判时先评小的方面，再评大的方面，这样的评判方法就是多级综合评判模型。

(1) 将因素集 $U=\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\}$ 划分为若干组得到

$$U=\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$$

其中 $U=\bigcup_{i=1}^{k}U_i, U_i\cap U_j=\Phi(i\neq j)$

称 $U=\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$ 为第一级因素集.

(2) 设评判集 $V = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m\}$，先对第二级因素集

$$U_i = \{\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_{n_i}^{(i)}\}$$

的 n_i 个因素进行单因素评判，得单因素评判矩阵：

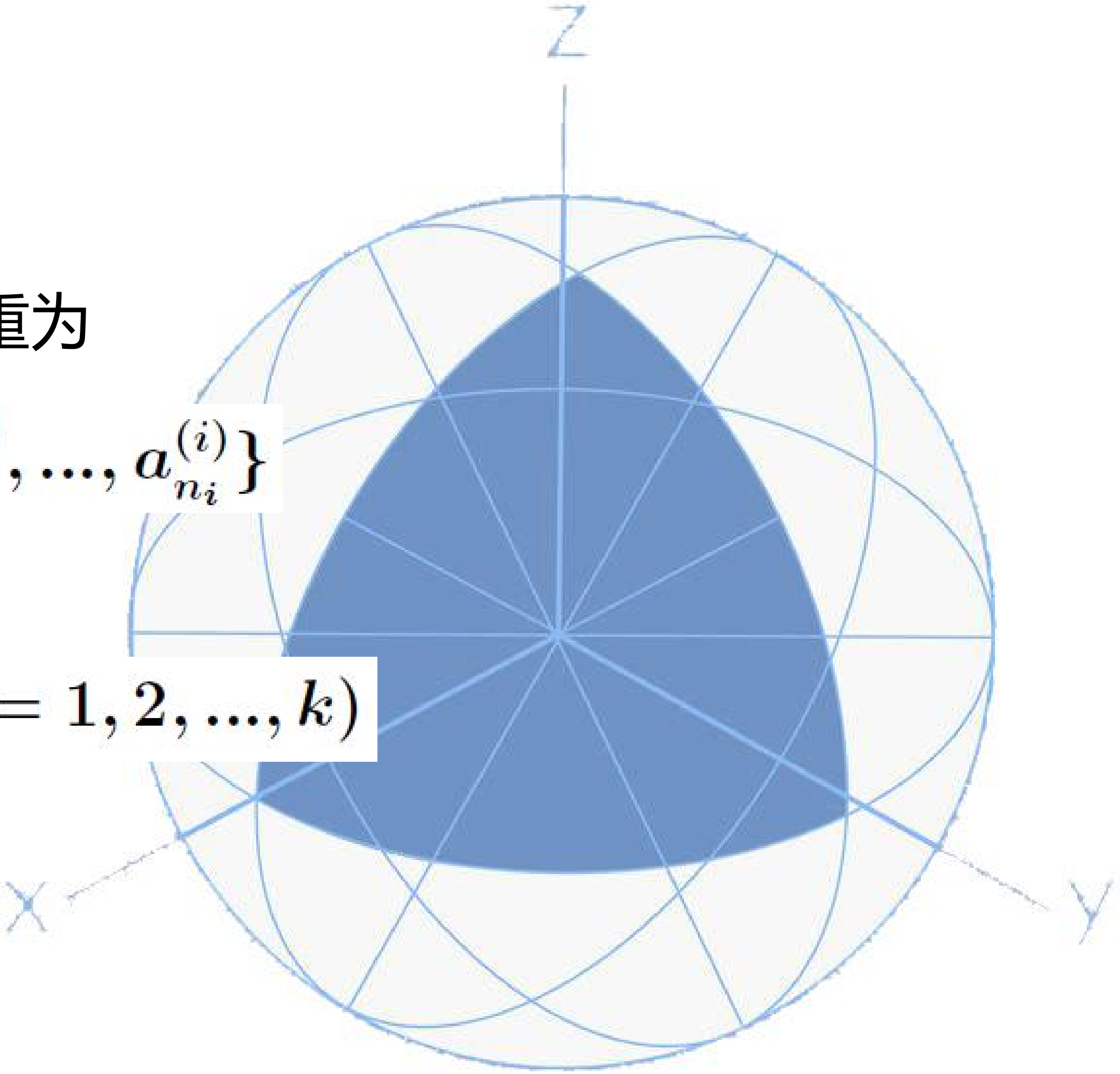
$$\boldsymbol{R}_i = \begin{pmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2m}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_im}^{(i)} \end{pmatrix}$$

设 $U_i = \{\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_{n_i}^{(i)}\}$ 的权重为

$$A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{n_i}^{(i)}\}$$

求得综合评判为

$$B_i = A_i \circ R_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$



(3) 再对第一级因素集 $U=\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$作综合评判，设其权重为 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$，则总评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_k \end{pmatrix}$$

从而得综合评判为B = A ◦ R按最大隶属度原则即得相应评语.

例 某企业生产一种产品，它的质量由 9 个指标 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_9$ 确定，产品的级别分为一级、二级、等外、废品. 由于因素较多，宜采用二级模型.

(1) 将因素集 $U=\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_9\}$ 分为 3 组：

$$U_1=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}, U_2=\{\mu_4,\mu_5,\mu_6\}, U_3=\{\mu_7,\mu_8,\mu_9\}$$

(2) 设评判集 $V=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$，

ν_1：一级； ν_1：二级； ν_3：等外； ν_4：废品.

(3) 对每个 U_i (i = 1, 2, 3) 中的因素进行单因素评判，

有 $U_1 = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$，取权重为 $A_1 = (0.3, 0.42, 0.28)$，单因素评判矩阵为

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27 \\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23 \\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12 \end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判，取 M(∧, ∨) 模型计算得

$$B_1 = A_1 \circ R_1 = (0.3, 0.32, 0.26, 0.27)$$

$U_2=\{\mu_4,\mu_5,\mu_6\}$，取权重为 $A_2=(0.2,0.5,0.3)$，单因素评判矩阵为

$$R_2=\begin{pmatrix}0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18\\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20\\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10\end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判，取 M(∧, ∨) 模型计算得

$$B_2=A_2\circ R_2=(0.26,0.36,0.2,0.2)$$

$U_3 = \{\mu_7, \mu_8, \mu_9\}$，取权重为 $A_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$，单因素评判矩阵为

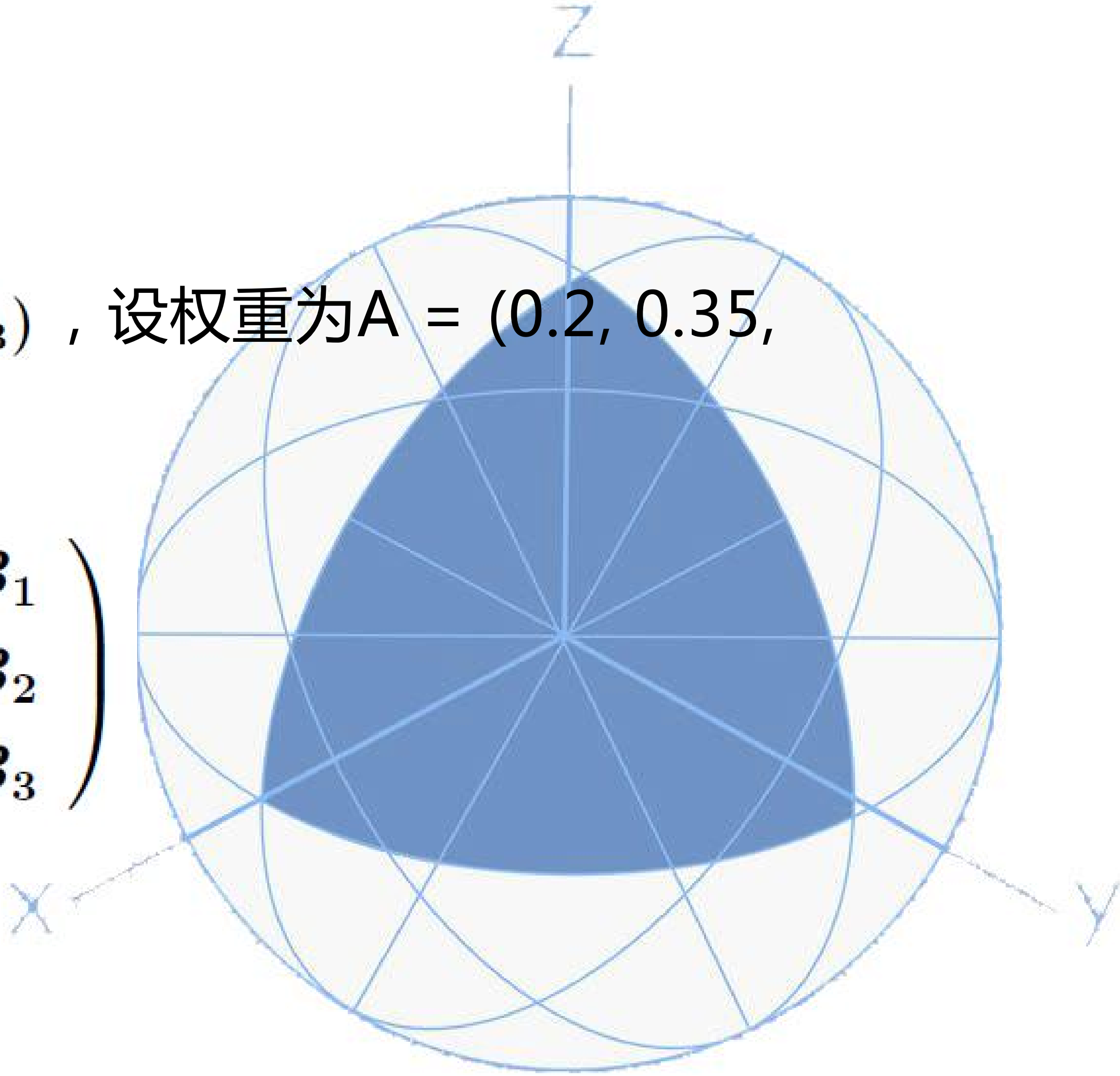
$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20 \\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11 \\ 0.40 & 0.28 & 0.30 & 0.18 \end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判,取 M(∧, ∨) 模型计算得

$$B_3 = A_3 \circ R_3 = (0.3, 0.28, 0.3, 0.2)$$

(4) 对第一级因素 $U=(U_1,U_2,U_3)$ ，设权重为A = (0.2, 0.35, 0.45)，令总单因素评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$



则

$$R=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.32 & 0.26 & 0.27 \\ 0.26 & 0.36 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.28 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

作二级模糊综合评判得

$$B=A\circ R=(0.30,0.35,0.30,0.20)$$

按最大隶属原则，此产品属二级品.

THANK YOU