

第一周

一、设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = +\infty$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = 1$.

二、设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有定义, 且函数 $e^x f(x)$ 与函数 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 上都是单调增加的,

求证: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

三、设函数 $f(x)$ 对一切实数满足 $f(x^2) = f(x)$, 且在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续, 求证: $f(x)$ 恒为常数.

四、设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ ($A, B \in \mathbb{R}$), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB,$$

并由此可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

五、设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, $f(x)$ 的图形在 $(0, +\infty)$ 上是凸的, 求

证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

六、设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 当 $0 < x < +\infty$ 时, $|f''(x)| \leq 1$, 求证:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

注: 作业完成后通过 QQ 私聊发给对应的老师。经济学院的同学发给李锦堂老师, 化学化工学院、管理学院、建筑与土木工程学院、物理科学与技术学院、公共事务学院、材料学院的同学发给蔡国财老师, 其余的发给庄平辉老师.