第五周

必做题

一、(1) 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$的和函数，这里$0!!=1$. 并由此求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}$的和.

(2) 利用公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}$的和.

二、解微分方程$(4x-1)^2y''-2(4x-1)y'+8y=0$.

三、设螺旋面$S: x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=h\theta$，其中$0\le r\le a$，$0\le\theta\le 2\pi$，试求该曲面面积.

四、设对于下半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面，都有

$$\oiint_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$，求$f(x)$.

五、设$f(x)$在$[1,+\infty)$上有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大值.

六、设函数$f(x,y)$在区域$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$上具有连续的四阶偏导数，且$\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\le 3$，在$D$的边界上$f(x,y)$恒为零，试证明：$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\frac{1}{48}$.

选做题

七、设函数$f(x,y)$及它的二阶偏导数在全平面连续，且$f(0,0)=0$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le 2|x-y|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le 2|x-y|$，证明：$|f(5,4)|\le 1$.

八、设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界，且导数连续，又对任意的实数x，有$|f(x)+f'(x)|\le 1$，试证：$|f(x)|\le 1$.