厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

线性规划与整数规划方法

谭　忠

目录
CONTENTS

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1 源头问题与当今应用

9.1.1催生运筹学诞生的源头问题

运用科学的数量方法 (主要是数学模型)研究对人力、物力进行合理筹划和运用，寻找管理及决策最优化的综合性学科 (Operational Research 或 Operations Research)，我国科学家把它译成“运筹学”。

运筹学的主要分支有：数学规划、决策分析、排队论、库存论、对策论、搜索论、计算机模拟等。

有人认为，公元前 212 年，叙拉古请阿基米德设计的用以打破罗马人海上封锁的计划，就可以看做是运筹学的开端．在中国，也有不少人认为，战国李冰父子在四川修建的都江堰，就是古代的系统工程．我国古代的《孙子兵法》、春秋战国时代诸侯战争的案例：《围魏救赵》等、三十六计等都是对策论辉煌的篇章．但是作为一门数学学科，用纯数学的方法来解决最优方法的选择安排，却是在二十世纪四十年代才开始兴起的一门分支。

1909 年，丹麦数学家厄兰，帮助电话公司解决了哥本哈根街道上的电话线继线问题，发表论文《概率论与电话会话》，成为创立现代排队论概念的先驱.

1924年，贝尔实验室的道奇、罗米格、休哈特创造了统计抽样表，用于取样检验和质量控制，这是概率论用于管理的先声，但当时并未被人们所接受.

到1928 年，贝尔实验室的另一成员弗莱，出版了《概率及其工程应用》，对排队论的统计基础理论做出了贡献.

在这一方面成果较多的要数费希尔，他在1925年集中研究统计理论，提出了贝叶斯统计、抽样理论、试验设计等一系列统计方法.

另外，1916 年英国的兰彻斯特曾提出过军事行为中双方人力、火力数量与战争结果关系的计算公式，这是现代军事运筹最早提出的战争模型．同年，美国的爱迪生也曾设计过一个海军作战程序，分析了商船在海战中走Z形路线的优缺点．

但是，在当时的社会环境条件下，无论是在军事方面，还是在工商企业的管理方面，都对这些成果不屑一顾．数学方法和管理实践，在当时并未能够结合起来．

但是，多数人认为，由于数学手段的局限性，特别是过去一直缺乏对不确定的模糊概念进行数学求解的方法，加之没有大型计算工具，所以到19世纪运筹学尚未能诞生.

运筹学/管理科学的真正诞生并投入实际应用，是在第二次世界大战期间. 英国人在战争中最早采用运筹方法.

当时，为了对付德国的空袭，解决英伦三岛的防空协同作战问题，英国成立了第一批运筹学小组．他们主要研究复杂的战略战术问题，如：

1）如何合理运用雷达有效地对付德军的空袭；

2）对商船如何进行编队护航，使船队遭受德军潜艇攻击时损失最少；

3）在各种情况下如何调整反潜深水炸弹的爆炸深度，才能增加对德军潜艇的杀伤力等．

美国也很快发现了运筹学的潜力，国防研究委员会主席科南特(James B.Conant)和参谋长联席会议新武器装备委员会主席布什(Vannevar Bush)，在美国海军和第八轰炸机司令部建立了运筹学小组，进行护航和反潜作战、轰炸德国、轰炸日本的方案设计，并取得了相应成果.

9.1.2当今运用

本章我们只介绍运筹学的一个重要分支：线性规划问题，主要介绍如何应用线性规划和整数规划方法建模，来解决实际问题，关于非线性规划的方法，下一章介绍.

线性规划问题：该类问题的目标函数和约束条件都是变量的线性函数．线性规划问题是最简单的最优化问题，同时也是很重要的、具有普遍实际意义的最优化问题.

例9.1 仓库里存有20m长的钢管，现场施工需要100根6m长和80根8m长的钢管，问最少需要领取多少根20m长的钢管?

分析：用一根20m长的钢管，截出8m管或6m管的方法只有三种：

截法

- 截法一：设x_1为一根长管截成两根8m管的根数；
- 截法二：设x_2为一根长管截根8m管和两根6m管的根数；
- 截法三：设x_3为一根长管截成三根6m管的根数.

该问题的目标函数为：$\min x_1 + x_2 + x_3$

现场施工需要80根8m长和100根6m长的钢管，即约束条件为：

$$2x_1 + x_2 \geq 80,$$
$$2x_2 + 3x_3 \geq 100,$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

xi(i=1,2,3)要求整数

XIAMEN UNIVERSITY

例9.2 （成本收益最优问题）

在某建筑工程施工中需要制作10000套钢筋，每套钢筋由2.9m ， 2.1m和1.5m三种不同长度的钢筋各一根组成，它们的直径和材质相同．目前在市场上采购到的同类钢筋的长度每根均为7.4m． 问应购进多少根这样长的钢筋才能满足工程的需要?

例9.3 （网络配送最优问题）

某公司从两个产地 A1，A2 将物品运往三个销地 B1，B2，B3，各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表，问如何调运，才能使得总运输费最小?

	销地B_1	销地B_2	销地B_3	产量
产地A_1	13	15	12	78
产地A_2	11	29	22	45
销量	43	35	45	产销平衡

例9.4 （投资组合优化问题）

某部门在今后五年内考虑给下列项目投资:

项目A：从第一年到第四年每年年初都可以投资，并于次年年末收回本利 115%；

项目 B：第三年年初可以投资，到第五年年末收回本利 125%，但规定最大额不超过 4 万元；

项目 C：第二年年初可以投资，到第五年年末收回本利 140%，但规定最大额不超过 3 万元；

项目 D：五年内每年年初都可以购买公债，并于当年年末归还，并加利息 6%.

该部门现有资金 10 万元，问如何确定这些项目的投资额，才使得第五年年末拥有的资金的本利总额最大?

例9.5 （排班问题）

某昼夜服务的公交系统每天各时间段 (每 4h 为一个时间段)所需的值班人数如下表：

班次	时间段	所需人数
1	6:00-10:00	60
2	10:00-14:00	70
3	14:00-18:00	60
4	18:00-22:00	50
5	22:00-2:00	20
6	2:00-6:00	30

这些值班人员在某一时段开始上班后要连续工作 8h(包括轮流用餐时间在内)，问该系统至少需多少名工作人员才能满足值班的需要.

Part 2

线性规划与整数规划思想与建模方法

9.2线性规划与整数规划思想与建模方法

在现实生产活动中，我们常常遇到需要合理利用资源或使某个(多个)因素达到最优值的问题，这些要寻求优化的因素又是其他因素的线性组合，这些因素称为**目标函数**，其他因素称为**决策变量**．在什么条件下可以最优呢？这样的条件就称为**约束条件**．我们将这类问题称为**线性规划问题**．当决策变量一定要求为整数时，就称之为**整数规划问题**．解决这些问题的方法称为**线性规划方法**.

9.2.1 线性规划方法

一、线性规划的基本概念

线性规划的定义：在 $m(m \geq 1)$ 个线性等式或不等式方程组约束条件下，求 $n(n \geq 2)$ 个非负的决策变量，使一个线性的目标函数达到极值（极大或极小）的数学规划.

线性规划模型（或模型结构）由决策变量、目标函数和约束条件等构成．分别介绍如下：

决策变量：在约束条件范围内变化且能影响（或限定）目标函数大小的变量，称为决策变量（或变数）. 决策变量取非负值.

约束条件：包括非负变量及资源线性方程或线性不等式两部分.

目标函数：人们希望获得的最优目标值，该目标值可以表达成决策变量的一个线性函数，称为目标函数. 根据需要，目标函数可以取极大化、极小化两种类型.

线性规划模型的一般形式：

$$max(min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

式中 x_j 为决策变量，c_j 为价值系数；a_{ij} 为技术系数； b_i 为资源限量.

二、线性规划的解法

单纯形法是求解线性规划问题的最常用、最有效的算法之一．这里我们就不介绍单纯形法，有兴趣的读者可以参看其它运筹学书籍．

下面介绍线性规划模型的Matlab解法．

Matlab中线性规划的标准型为

$$\min Z = C^T X$$

$$\begin{cases} AX \le b \\ A_{eq}X = b_{eq} \\ LB \le X \le UB \end{cases}$$

基本函数形式为linprog(c,A,b）,

它的返回值是向量x的值.

还有其他的一些函数调用形式（在Matlab指令窗运行help linprog可以看到所有的函数调用形式），如:

$$[x, fval] = linprog(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB, X0, OPTIONS)$$

fval 返回目标函数的值，

$\boldsymbol{LB}$ 和 $\boldsymbol{UB}$ 分别是变量 x 的下界和上界，

x_0 是 x 的初始值，

OPTIONS 是控制参数.

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

例如求解优化问题:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad -5x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 \leq 20 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 42 \\
3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\
0 \leq x_1,\ 0 \leq x_2,\ 0 \leq x_3
\end{cases}
\end{aligned}
$$

```
c=[-5;-4;-6]; %价值系数
A=[1 -1 1;3 2 4 ; 3 2 0]; %技术系数
b=[20;42;30];         %资源限量
lb=zeros(3,1);        %决策变量下界
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],lb,[])%返回决策变量 x ，最优值 fval .
```

解得决策变量为 x=[0 15 3]'

最优值为 fval=-78

例9.2 成本收益最优问题

【问题重述】

要制作10000套钢筋，每套钢筋由2.9m，2.1m和1.5m三种不同长度的钢筋各一根组成，其直径和材质相同．仅有长度均为7.4m的钢筋，问应购进多少根这样长的钢筋才能满足工程的需要?

XIAMEN UNIVERSITY

【问题分析】

该问题最简单的处理方法是:在每根7.4m长的钢筋上截取2.9m，2.1m 和1.5m的短钢筋各一根，剩下料头0.9m，共用去10000根7.4m长的钢筋.

但这样做不经济，若改用套裁就会节约原材料.为此，必须分析共有多少种不同的裁法

该问题的可能裁料方案如下表：

下料长度/m	方案	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9		2	1	1	1	0	0	0	0
2.1		0	2	1	0	3	2	1	0
1.5		1	0	1	3	0	2	3	4
料头长度/m		0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

(1)决策变量

设 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示按第 i 种裁料方案下料所需 7.4m 长的原材料根数.

(2)目标函数

至少购进多少根 7.4m 长的钢筋才能满足工程的需要，即所需 7.4m 长的钢筋根数最少

$$\text{Min } z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$$

(3)约束条件

- 2.9m长度的钢筋10000根:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10000$$

- 2.1m 长度的钢筋 10000 根:

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6$$

$$+x_7 \geq 10000$$

- 1.5m长度的钢筋10000根：

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geq 10000$$

- 非负：

$$x_i \geq 0 (i = 1,2,3,4,5,6,7,8)$$

【模型构建】

$$Minz = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10000 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 10000 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geq 10000 \\ x_i \geq 0(i = 1,2,3,4,5,6,7,8) \end{cases}$$

调用linprog函数求解如下

```
>> c=[1;1;1;1;1;1;1;1];  %价值系数
A=[-2 -1 -1 -1 0 0 0 0; 0 -2 -1 0 -3 -2 -1 0;-1 0 -1 -3 0 -2 -3 -4 ];
      %技术系
     数
b=[-10000;-10000;-10000];      %资源限量
lb=zeros(8,1);      %决策变量下界
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],lb,[])%
```

X=(4000,2000,0,0,0,3000,0,0)’　fval=9000

XIAMEN UNIVERSITY

例9.3 网络配送最优问题

【问题重述】

某公司从两个产地 A1，A2 将物品运往三个销地 B1，B2，B3，各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表，问如何调运，才能使得总运输费最小?

	销地B_1	销地B_2	销地B_3	产量
产地A_1	13	15	12	78
产地A_2	11	29	22	45
销量	43	35	45	产销平衡

【问题分析】

知道单价，又需要总运输费最少，自然我们需要知道运输的物品数量．因此

(1)决策变量

设$x_i(i=1,2,3)$分别表示从产地 A1 运往销地 B1、B2、B3 的物品数量，$x_j(j=4,5,6)$分别表示从产地 A2 运往销地 B1、B2、B3 的物品数量.

(2)目标函数

总运输费最小，即

$$\begin{aligned} Minz = 13x_1 + 15x_2 + 12x_3 \\ +11x_4 + 29x_5 + 22x_6 \end{aligned}$$

(3)约束条件

① 产地 A1: $x_1+x_2+x_3=78$

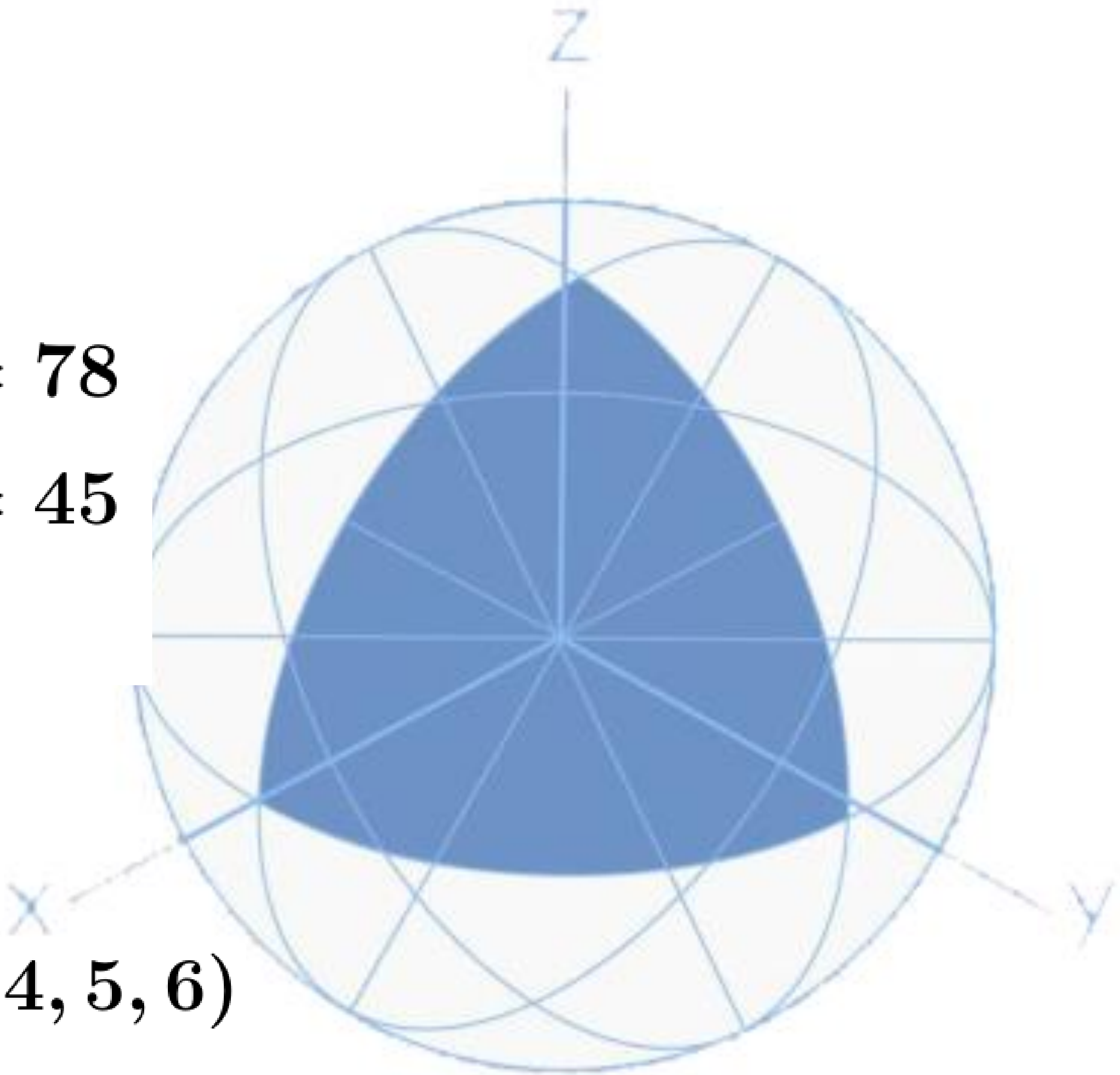
② 产地 A2: $x_4+x_5+x_6=45$

③ 销地 B1: $x_1+x_4=43$

④ 销地 B2: $x_2+x_5=35$

⑤ 销地 B3: $x_3+x_6=45$

⑥ 非负: $x_i\geq 0(i=1,2,3,4,5,6)$



【模型构建】

$$Min z = 13x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 11x_4 + 29x_5 + 22x_6$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 78 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 45 \\ x_1 + x_4 = 43 \\ x_2 + x_5 = 35 \\ x_3 + x_6 = 45 \\ x_i \geq 0 (i = 1,2,3,4,5,6) \end{cases}$$

Matlab求解

```
>> c=[13 15 12 11 29 22];
>> Aeq=[1 1 1 0 0 0;0 0 0 1 1 1;1 0 0 1 0 0;0 1 0 0 1 0;0 0 1 0 0 1];
>>
>> beq=[78;45;43;35;45];
>> lb=zeros(6,1);
>> [x,fval]=linprog(c,[],[],Aeq,beq,lb,[])
```

X=(0,35,43,43,0,2)′   fval=1558

例9.4 投资组合优化问题

【问题重述】

今后五年内考虑项目投资:

	项目A	项目B	项目C	项目D
第一年	投			买公债当年年末归还
第二年	投、收		投	买公债当年年末归还
第三年	投、收	投		买公债当年年末归还
第四年	投、收			买公债当年年末归还
第五年	收	收	收	买公债当年年末归还

该部门现有资金10万元，问如何确定这些项目的投资额，才使得第五年年末拥有的资金的本利总额最大?

【问题分析】

目标：本利总额最大，自然需要知道每个项目投资额多少时可以达到这个目标．知道了目标，如何通过这个目标将决策变量引入?

XIAMEN UNIVERSITY

(1)决策变量

设 $x_i(i=1,2,3,\cdots,11)$ 为投资额 (万元)，根据给定的条件，将决策变量列于下表：

	项目A	项目B	项目C	项目D
第一年	x_1			x_7
第二年	x_2		x_6	x_8
第三年	x_3	x_5		x_9
第四年	x_4			x_{10}
第五年				x_{11}

XIAMEN UNIVERSITY

(2)约束条件

- 第一年初：由于只有项目 A 和项目 D 可以投资，因此应把 10 万元资金全投出去，于是有:

$$x_1 + x_7 = 10$$

- 第二年初：由于项目 A 要次年年末才可以收回投资，因此第二年初的资金只有第一年年初对项目 D 投资后，在年末收回的本利 106%，而投资项目有 A,C,D，于是有:

$$x_2 + x_6 + x_8 = 106\% x_7$$

- 第三年初：年初的资金为第二年初对项目 D 投资后，在年末收回的本利 106%x_8 以及第一年初对项目 A 投资后，在年末收回本利 115%x_1，而投资项目有 A,B,D，于是有:

$$x_3 + x_5 + x_9 = 115\%x_1 + 106\%x_8$$

- 第四年初：年初的资金为第三年初对项目 D 投资后，在年末收回的本利 106% x_9 以及第二年初对项目 A 投资后，在年末收回本利 115%，而投资项目有 A、D，于是有:

$$x_4 + x_{10} = 115\% x_2 + 106\% x_9$$

- 第五年初：年初的资金为第四年初对项目 D 投资后，在年末收回的本利 106% x_{10}以及第三年初对项目 A 投资后，在年末收回本利 115%x_3，而投资项目只有 D，于是有:

$$x_{11} = 115\% x_3 + 106\% x_{10}$$

- 项目 B 投资不超过 4 万元:

$$x_5 \leq 4$$

- 项目 C 投资不超过 3 万元:

$$x_6 \leq 3$$

- 非负:

$$x_i \geq 0(i = 1, \cdots, 11)$$

XIAMEN UNIVERSITY

(3)目标函数

第五年年末拥有的资金的本利总额最大，而第五年年末的本利获得有四项:

第四年初对项目 A 投资后，在年末收回的本利 115% x_4；

第三年初对项目 B 投资后，在年末收回的本利 125% x_5；

第二年初对项目 C 投资后，在年末收回的本利 140% x_6；

第五年初对项目 D 投资后，在年末收回的本利 106% x_{11}.

于是得到目标函数:

$$Max z = 115\% x_4 + 125\% x_5$$
$$+140\% x_6 + 106\% x_{11}$$

XIAMEN UNIVERSITY

【模型构建】

$$Max z = 115\% x_4 + 125\% x_5 + 140\% x_6 + 106\% x_{11}$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_7 = 10 \\ x_2 + x_6 + x_8 = 106\% x_7 \\ x_3 + x_5 + x_9 = 115\% x_1 + 106\% x_8 \\ x_4 + x_{10} = 115\% x_2 + 106\% x_9 \\ x_{11} = 115\% x_3 + 106\% x_{10} \\ x_5 \le 4 \\ x_6 \le 3 \\ x_i \ge 0 (i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) \end{cases}$$

9.2.2 整数规划方法

分类

- 变量取整数值的规划称为**整数规划**
- 所有变量都取整数的规划称为**纯整数规划**
- 部分变量取整数的规划称为**混合整数规划**
- 所有变量都取 0、1 两个值的规划称为**0 – 1 规划**
- 部分变量取 0、1 两个值的规划称为**0 – 1 混合规划**.

XIAMEN UNIVERSITY

例 9.6 背包问题

有一只背包，最大装载重量为 W 公斤，现有 k 种物品，每种物品数量无限．第 i 种物品每件重量为 ω_i 公斤，价值为 υ_i 元. 每种物品各取多少件装入背包，使其中物品的总价值最高?

【问题分析】

直接提出了要求的变量：每个物品各取多少件，就是决策变量．

XIAMEN UNIVERSITY

(1)决策变量

设取第 i 种物品 x_i 件 (i = 1, 2, · · · , k).

(2)目标函数

使其中物品的总价值最高

$$\max z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_k x_k$$

(3)约束条件

最大装载重量为 W 公斤:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_kx_k \leq W$$

非负:

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \geq 0$$

为整:

$$x_1, x_2, \cdots, x_k\text{为整数}$$

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

【模型构建】

则问题的数学模型为:

$$\max z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_k x_k$$

$$\begin{cases} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_k x_k \le W \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \ge 0 \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \text{为整数} \end{cases}$$

具体设背包容量为 50 公斤，三种物品的重量和价值如下表：

物品	1	2	3
单件价值（元/件）	17	72	35
单件总量（公斤/件）	10	41	20

设三种物品分别取 x_1, x_2, x_3 件，这个背包问题的整数规划模型为:

$$\max z = 17x_1 + 72x_2 + 35x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 41x_2 + 20x_3 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3\text{为整数} \end{cases}$$

如果忽略变量的整数要求，以上问题是一个线性规划问题，它的最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 50/41, x_3 = 0$, 最优解的目标函数值为 $z = 87.8$．而整数规划的最优解是 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$, 整数规划最优解的目标函数值为 $z = 87$.

其整数规划matlab求解过程如下：

```
f=[-17,-72,-35]; %价值系数
A=[10 ,41 ,20];%技术系数
b=[50] ';%资源限量
intcon=[1  2  3];  %整数约束
lb=[0  0  0];%变量下界
[x,fval]=intlinprog(f,intcon ,A,b,[] ,[] ,lb ,[])
```

X=[1 0 2]′ fval=-87

$$x = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, Beq, x0)$$

这里 x 是问题的解向量

f是由目标函数的系数构成的向量，

A是一个矩阵，b是一个向量

A,b和变量x=x1,x2,...，xn一起表示了线性规划中不等式约束条件．A,b分别是系数矩阵和右端向量. Aeq和Beq表示了线性规划中等式约束的系数矩阵和右端向量．X0是给定的变量的初始值.

例9.7 厂址选择问题

在 5 个地点中选 3 处建生产同一产品的工厂. 在这 5 个地点建厂所需投资，占用农田，建成以后的生产能力等数据如下表所示.

地点	1	2	3	4	5
所需投资（万元）	320	280	240	210	180
占用农田（亩）	20	18	15	11	8
生产能力（万吨）	70	55	42	28	11

现在有总投资 800 万元，占用农田指标 60 亩，应如何选择厂址，使建成后总生产能力最大?

【问题分析】

(1)决策变量

五个地点可选可不选，因此设五个0 – 1变量 x1, x2, x3, x4, x5, 其中

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{表示在}i\text{地不建厂} \\ 1 & \text{表示在}i\text{地建厂} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

XIAMEN UNIVERSITY

(2)目标函数

选择合适建厂地址，使得建厂后总生产能力最大

$$\max z = 70x_1 + 55x_2 + 42x_3 + 28x_4 + 11x_5$$

(3)约束条件

总投资额度：

$$320x_1 + 280x_2 + 240x_3 + 210x_4 + 180x_5 \leq 800$$

占用农田指标:

$$20x_1 + 18x_2 + 15x_3$$
$$+11x_4 + 8x_5 \le 60$$

5 个地方中只选 3 处:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, 1$$

【模型构建】

整数规划模型为

$$\max z = 70x_1 + 55x_2 + 42x_3 + 28x_4 + 11x_5$$

$$\begin{cases} 320x_1 + 280x_2 + 240x_3 + 210x_4 + 180x_5 \le 800 \\ 20x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 11x_4 + 8x_5 \le 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, 1 \end{cases}$$

这是一个 0 – 1 规划问题，最优解为 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$, max $z = 140$万吨，即在地点 1、3、4 建厂，地点 2、5 不建厂．总投资 770 万元，占用农地 46 亩，总生产能力可以达到 140 万吨。

XIAMEN UNIVERSITY

其matlab求解过程如下

```
c=[70,55,42,28,11];
ic=[1,2,3,4,5];
A=[320,280,240,210,180;20,18,15,11,8];
b=[800;60];
Aeq=[1,1,1,1,1];
beq=[3];
lb=zeros(5,1);
ub=ones(5,1);
[x,z]=intlinprog(-c,ic,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

9.2.3 灵敏度分析

在前面讨论线性规划问题时，价值系数 c_j 、各种资源的消耗额 a_{ij} 、右端常数 (限制量) b_i 都是确定值．但在实际中, 这些系数并非一成不变．例如，价值系数往往会随着市场营销情况而波动，资源限制量往往是通过预测甚至是估算得到的．

因此可以提出问题：（1）当这些系数有一个或几个发生变化时，已求得的线性规划问题的最优解会有什么变化；（2）或者这些系数在什么范围内变化时，线性规划问题的最优解保持不变；（3）如果系数的变化超出了范围,怎样才能以最简便的方法、最少的工作量求出新的最优解；（4）当资源限制量有所放宽的情况下,会带来多少效益.这些都称为**灵敏度分析**，这与动力系统的解对初值或边界数据的连续依赖性一致.

例9.8 资源分配问题

某工厂利用 A、B、C 三种资源生产甲、乙两种产品，已知生产单位产品所需的各种资源的数量以及利润如下表：

	甲	乙	资源限量
资源A	1	2	8kg
资源B	4	0	16kg
资源C	0	4	12kg
利润（元/kg）	2	3	

该工厂生产甲产品可获利 2 元/kg，乙产品可获利 3 元/kg，问：

(1)如何安排生产计划获利最多？

(2)各资源可以从别处节省下来，如资源 A 的数量由 8 变为 12，试分析对原最优计划有什么影响？

(3)又市场上某产品价格可能会改变，如问乙产品的利润在什么范围内变化时已经计算的最优生产方案不用改变？

(4)市场上有丙产品出售，经预测，生产1kg此产品需2kg资源 A，6kg资源 B，3kg资源 C，利润为 5 元，问是否安排此产品的生产?

(5)生产产品的工艺结构可能会发生变化，如生产甲产品的工艺结构有了改进，生产 1kg 此产品需 2kg 资源 A，5kg 资源 B，2kg 资源 C，利润为 4 元，试分析对原最优计划有什么影响?

解 ：(1)设 x1 表示生产甲的数量，x2 表示生产乙的数量，则 x1, x2 是决策变量，目标函数为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2,$$

约束条件为：

$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$

$$4x_1 \le 16,$$

$$4x_2 \le 12,$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2,$$

得到如下线性规划：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

当甲、乙产品分别为 4kg 和 2kg 时, 工厂利润最大为 z*= 14

其matlab求解过程为

```
c=[2,3];
A=[1,2;4,0;0,4];
b=[8;16;12];
lb=zeros(2,1);
[x,z]=linprog(-c,A,b,[],[],lb,[])
```

下面就各种情况分别进行讨论：

1、资源限量变化的灵敏度分析

资源限量变化是指系数b_r发生变化，即$b_r' = b + \Delta b_r$.

假设问题的其它系数都不变. 可以通过列式求解以了解资源限量变化对最优解的影响. 考虑例 9.8 的第 (2)问：

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY

(2)各资源可以从别处节省下来，如资源 A 的数量由 8 变为 12，试分析对原最优计划有什么影响?

解：资源 A 的数量由 8 变为 12，于是我们得到：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

求得该厂最优生产方案应改为生产甲产品 4kg，生产乙产品 3kg，工厂利润为$z^*=17$元. 这表明增大资源 A，利润提高到 17 元.

2、价值系数c_j的灵敏度分析

价值系数变化是指系数c_j发生变化，考虑例 9.8 的第 (3)问:

(3)又市场上某产品价格可能会改变，如问乙产品的利润在什么范围内变化时已经计算的最优生产方案不用改变?

解： 由lingo求解结果知当乙产品的利润C2在 [0, 4]之间变化时，最优生产方案不会改变.

LINGO - Range Report - LINGO1

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - LINGO1

```
MAX=2*x1+3*x2;
1*x1+2*x2<=8;
4*x1<=16;
4*x2<=12;
```

Range Report - LINGO1

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	2.000000	INFINITY	0.5000000
X2	3.000000	1.000000	3.000000

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	8.000000	2.000000	4.000000
3	16.00000	16.00000	8.000000
4	12.00000	INFINITY	4.000000

For Help, press F1 Ln 1, Col 1 9:19 pm

补：编写简单的Lingo程序

（1）在模型窗口中输入一个LINGO程序，以“MODEL:”开始，以“END”结束。这两个语句也可以省略。

（2）目标函数的表达方式是“MAX=”或“MIN=”.

（3）注释语句用“！”开头，单独一个语句。

（4）变量与其系数间用“*”连接。

（5）每个语句（目标函数、约束条件和注释语句）结束用“；”,

（6）LINGO假定所有变量非负，可以用命令“@FREE(变量名)”取消变量的非负假定。

（7）用命令“@BND（下界,变量名,上界）”设置变量的上界和下界。

（8）一般整数变量可用“@GIN(变量名)”来标识，0-1型变量可用“@BIN(变量名)”来标识。

XIAMEN UNIVERSITY

3、技术系数a_{ij}变化的灵敏度分析

分两种情况来讨论技术系数a_{ij}的变化，下面考虑例 9.8 的第 (4) 问来说明：

(4)市场上有丙产品出售，经预测，生产 1kg 此产品需 2kg 资源 A，6kg 资源 B，3kg 资源 C，利润为 5 元，问是否安排此产品的生产？

解： 首先设生产丙产品 x3 台，于是得到如下线性规划:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8 \\ 4x_1 + 6x_3 \le 16 \\ 4x_2 + 3x_3 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

这时得最优解：$x1 = 1, x2 = 3/2, x3 = 2$. 总的利润为 33/2 元，比原计划增加了 5/2 元. 因此需要生产此产品.

4、生产产品的工艺结构变化的灵敏度分析

下面考虑例 9.8 的第 (5)问来说明：

(5)生产产品的工艺结构可能会发生变化，如生产甲产品的工艺结构有了改进，生产 1kg 此产品需 2kg 资源 A，5kg 资源 B，2kg 资源 C，利润为 4 元，试分析对原最优计划有什么影响？

解 把改进工艺结构的甲产品看作产品甲 $'$, 设 x_1'为其产量. x_2'为乙产品的产量，于是，我们得到如下线性规划:

$$\max z = 4x_1' + 3x_2'$$

$$\begin{cases} 2x_1' + 2x_2' \le 8 \\ 5x_1' \le 16 \\ 2x_1' + 4x_2' \le 12 \\ x_j' \ge 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

即应当生产产品甲 ′ 16/5 单位，生产乙产品 4/5 单位，可获利 76/5 元，利润相对原计划的14 元有提高，因此可以改进甲产品的工艺结构．

Part3 案例分析

案例一 排班问题

某昼夜服务的公交系统每天各时间段 (每 4h 为一个时间段)所需的值班人数如下表：

班次	时间段	所需人数
1	6:00-10:00	60
2	10:00-14:00	70
3	14:00-18:00	60
4	18:00-22:00	50
5	22:00-2:00	20
6	2:00-6:00	30

这些值班人员在某一时段开始上班后要连续工作 8h(包括轮流用餐时间在内)，问该系统至少需多少名工作人员才能满足值班的需要?

【问题分析】

在本例中，每一时段上班的工作人员，既包括本时段开始上班的人，又包括上一时段开始上班的人．因此，我们最关心的是每个时段开始上班的人员数．

(1)决策变量

设 $x_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为第 i 个时段开始上班的人员数.

(2)目标函数

该系统至少需多少名工作人员才能满足值班的需要，即:

$$Min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

(3)约束条件

显然第一时段上班人数与第二时段上班人数要 ≥ 70 才满足需要，

即：

$$x_1 + x_2 \geq 70$$

同理有

$$x_2 + x_3 \geq 60$$

$$x_3 + x_4 \geq 50$$

$$x_4 + x_5 \geq 20$$

$$x_5 + x_6 \geq 30$$

$$x_6 + x_1 \geq 60$$

【模型构建】

$$min\ \ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_6 + x_1 \geq 60 \\ x_i \geq 0 (i = 1, \cdots, 6)\ \ x_i \text{是整数} \end{cases}$$

案例二 指派问题

有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记为 E、J、G、R．现有甲、乙、丙、丁四人．他们将中文说明翻译成不同语种的说明书所需时间如下表所示．问应指派何人去完成何工作，使总时间最少?

	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

类似有：有 n 项加工任务，怎样指派到 n 台机床上分别完成的问题；有 n 条航线，怎样指定 n 艘船去航行问题 · · · · · · 对应每个指派问题，需有类似上述的数据，称为效率矩阵或系数矩阵，其元素 c_{ij} (i, j = 1, 2, · · · , n) 表示指派第 i 人去完成第 j 项任务时的效率（或时间、成本等）.

解:

引入变量 x_{ij}；其取值只能是 1 或 0，并令

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第i人去完成第j项任务}\\ 0 & \text{当不指派第i人去完成第j项任务}\end{cases}$$

XIAMEN UNIVERSITY

使总时间最短．因此，设表中值用 c_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置所具有的数值，则问题要求极小化时数学模型是：

$$minz = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_j x_{ij} = 1 & i = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} = 0 \ or \ 1 \end{cases}$$

THANK YOU