

## 第六周练习题

### 必做题：

一、设  $f(x) = e^x \cos x$ ，证明：级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{2^n}$  收敛并求和函数.

二、设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内可导， $f(0) = f(1) = 0$ ，证明：对于  $x \in (0,1)$ ，

存在  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f'(\xi) + f(\xi) = f(x)e^{x-\xi}$ .

三、设  $g(x) = \int_{-1}^1 |x-t| e^{t^2} dt$ ，求  $g(x)$  的最小值.

四、设  $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

五、求证： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+a \sin^2 x} dx \geq \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{1+a})$ ，其中  $a > -1$ .

六、设  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$ ，求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4a_n - 1}$ .

### 选做题：

七、已知  $f(x)$  二阶可导，且  $f(x) > 0$ ， $f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 \geq 0, x \in R$ ，

(1) 证明： $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$ ， $\forall x_1, x_2 \in R$ ；

(2) 若  $f(0) = 1$ ，证明： $f(x) \geq e^{f'(0)x}$ ， $x \in R$ .

八、计算反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + x + 1} dx$ .