

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$

(2) 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



(3) 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(4) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列， a, λ 为有限数，求证：

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

2. 如果存在正整数 p ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1, f'(0) = 0$ ，求证：在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 ，使得 $f'''(x_0) = 3$ 。

第四题：(15 分) 在平面上，有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线，线密度为 ρ 。在点 $(0, h)$ 处（其中 $h > 0$ ）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

第五题：(15 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$ 确定的隐函数，且具有连续

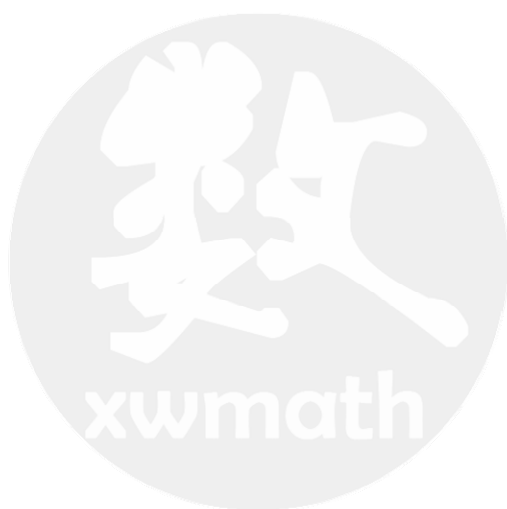


参考答案参见微信公众号：**考研竞赛数学(ID: xwmath)**菜单“竞赛实验”下的“竞赛试题与通知”

相关知识点总结与解题思路分析、探索参见公众号《公共基础课》**在线课堂**，或公众号回复“在线课堂”

的二阶偏导数，求证：

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$



微信公众号：

考研竞赛数学(xwmath)



第六题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续， a, b, c 为常数， Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) \mathrm{d}S.$$

求证： $I = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u\right) \mathrm{d}u.$



微信公众号：

考研竞赛数学(xwmath)