

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0, \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1, π_2 , 使其中一个平面过点 $(4, -3, 1)$.

3. 已知函数 $z = u(x, y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, 确定常数 a, b , 使函数 $z = z(x, y)$ 满足

方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$.



4. 设 $u = u(x)$ 连续可微, $u(2) = 1$, 且 $\int_L (x + 2y)u \, dx + (x + u^3)u \, dy$ 在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} \, dt$.

第二题: (10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| \, dx$.



参考答案参见微信公众号：考研竞赛数学(ID: xwmath)菜单“竞赛实验”下的“竞赛试题与通知”

相关知识点总结与解题思路分析、探索参见公众号《公共基础课》在线课堂，或公众号回复“在线课堂”

第三题：(10 分)求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解，精确到 0.001.

第四题：(12 分)设函数 $y = f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$. 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$ ，其中 u 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $P(x, f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



第五题：(12 分)求最小实数 C ，使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C.$$

第六题：(12 分)设 $f(x)$ 为连续函数， $t > 0$. Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 (t > 0)$ 所围成起来的部分. 定义 $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$, 求 $F'(t)$.

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

第七题：(14 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)