

第七周

一、已知 $a_n > 0, b_0 = 0, b_n = \sqrt{a_n + b_{n-1}}$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在

二、求: $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 为曲面 $z = 5 - \frac{5(x-2)^2}{16} - \frac{5(y-1)^2}{9}$ ($z \geq 0$)

的上侧.

三、已知球面 A 与坐标面 XOY 相切于点 $B(1, 0, 0)$, 且与曲面 $y^2 + z^2 = 4x$ 只有一个交点 C . 求此球面 A 的半径.

四、求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\left\lceil \frac{2n}{k} \right\rceil - 2 \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)$.

五、求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ 的和.

六、确定所有满足如下条件的函数 $f(x)$, $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的可微函数, 且对所有 $xy \neq 1$ 的实数 x, y , 都有 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

七、令 $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的, 并求出它的和.

八、求两条直线方程, 它们每一条都与四条直线

$$l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}, \quad l_3: \begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}; \quad l_4: x=y=-6z$$

全部相交.