一、(1) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的和函数，这里 $0!!=1$. 并由此求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}$ 的和.

(2) 利用公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}$ 的和.

解一： 作幂级数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，记 $u_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+3}x^2=x^2$，所以，幂级数 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ 的收敛半径为1.

当 $|x|<1$ 时，$s(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1-1)(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+x^2s(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

两边求导数，得 $s'(x)=1+2xs(x)+x^2s'(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(2n-1)!!}x^{2n}$

$$=1+2xs(x)+x^2s'(x)-xs(x)$$

$$=1+xs(x)+x^2s'(x),$$

即 $s'(x)-\frac{x}{1-x^2}s(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

于是，$s(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}[\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}[\arcsin x+C]。$$

注意到 $s(0)=0$，故 $s(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n+1}=\sqrt{2}s(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{2}$.

解二: 因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{2^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{2^n} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 x} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= -2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

二、解微分方程 $(4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$.

解: 令 $4x-1=\mathrm{e}^t$，则

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{4x-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{4x-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= -\frac{4^2}{(4x-1)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{4}{4x-1}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{16}{(4x-1)^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

代入方程，得

$$2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0.$$

特征方程为 $2r^2-3r+1=0$，特征根分别为 $r_1 = \dfrac{1}{2}$，$r_2=1$.

故通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + C_2\mathrm{e}^t = C_1\sqrt{4x-1} + C_2(4x-1)$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

三、设螺旋面 $S: x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$z = h\theta$，其中 $0 \le r \le a$，$0 \le r \le 2\pi$，试求该曲面面积.

解: 三个方程两边取全微分，得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{d}z = h\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

解得 $\mathrm{d}z = -\dfrac{h}{r}\sin\theta \mathrm{d}x + \dfrac{h}{r}\cos\theta \mathrm{d}y$，故

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+(-\frac{h}{r}\sin\theta)^2+(\frac{h}{r}\cos\theta)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

设 S 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy}，则所求曲面面积为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\pi(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h})$$

四、设对于下半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面，都有

$$\oiint_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

解： 由题设及高斯公式，对 $x>0$ 内的任意空间有界闭域 Ω，设它的表面为 S，有

$$0=\oiint_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint_{\Omega}(xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}v.$$

由已知条件，该三重积分的被积函数是连续函数，又由于 Ω 的任意性，得

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\ \ (x>0)$$

即
$$f'(x)+(\frac{1}{x}-1)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}.$$

其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}[C+\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，可得 $\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{x})=0$，故 $C=-1$.

因此，$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$.

五、设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$

满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

解： 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $z=r^2 f(r^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=(2rf(r^2)+2r^3 f'(r^2))\frac{x}{r}$$

$$=2x(f(r^2)+r^2 f'(r^2)).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2f(r^2)+2r^2 f'(r^2))+2x(2rf'(r^2)+2rf'(r^2)+2r^3 f''(r^2))\frac{x}{r}$$

$$=2f(r^2)+2(r^2+4x^2)f'(r^2)+4x^2r^2 f''(r^2).$$

同理，$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(r^2)+2(r^2+4y^2)f'(r^2)+4y^2r^2 f''(r^2).$$

代入已知方程，得

$$4f(r^2)+2(2r^2+4r^2)f'(r^2)+4r^2r^2 f''(r^2)=0,$$

即 $$f(r^2)+3r^2 f'(r^2)+r^4 f''(r^2)=0.$$

记 $u=r^2$，$v=f(u)$，则有

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2}+3u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+v=0.$$

令 $u=\mathrm{e}^t$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0,$$

其通解为 $v=\mathrm{e}^{-t}(C_1 t+C_2)=\dfrac{1}{u}(C_1\ln u+C_2)$，即 $f(u)=\dfrac{1}{u}(C_1\ln u+C_2)$.

由 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，得 $C_2=0$，$C_1=1$.

故 $f(u)=\dfrac{\ln u}{u}$，或 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

令 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，则 $x=\mathrm{e}$.

$1\le x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；$x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

六、设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上具有连续的四阶偏导数，且 $\left|\dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\le 3$，在 D 的边界上 $f(x,y)$ 恒为零，试证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\le\dfrac{1}{48}$.

证明： 设 $I=\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由题意 $f(x,1)\equiv 0,\ \ f(x,0)\equiv 0$（$0\le x\le 1$），故有

$$f''_{xx}(x,1)\equiv 0,\quad f''_{xx}(x,0)\equiv 0\ （0\le x\le 1）.$$

$$I=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x(1-x)[y(1-y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\bigg|_0^1-\int_0^1(1-2y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x(1-x)[(2y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_0^1-\int_0^1 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_0^1\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^1[x(1-x)f'_x\big|_0^1-\int_0^1(1-2x)f'_x\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^1[(2x-1)f\big|_0^1-\int_0^1 2f\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^1[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y=4\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故
$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{4}\left|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

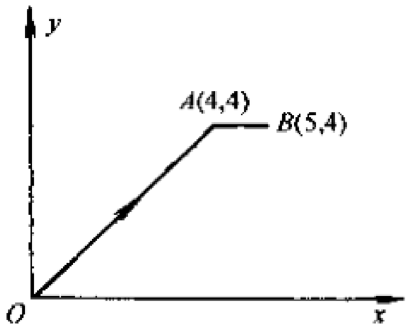
$$\le\frac{3}{4}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{4}[\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x]^2=\frac{1}{48}.$$

七、设函数 $f(x,y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续，且 $f(0,0)=0$，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\le 2|x-y|$，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\le 2|x-y|$，

证明：$|f(5,4)|\le 1$.

证明： $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.



曲线积分 $\int_L\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 与路径无关，取如图所示的折线

$\overline{OAB}$，有

$$\int_{(0,0)}^{(5,4)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = f(5,4) - f(0,0).$$

因为 $f(0,0)=0$，故

$$|f(5,4)| = \left|\int_{(0,0)}^{(5,4)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\int_{\overline{OA}} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right|.$$

由于在 $\overline{OA}$ 上，$y=x$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 2|x-x| = 0$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2|x-x| = 0$.

$$|f(5,4)| = \left|\int_4^5 \frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\mathrm{d}x\right|$$

$$\le \int_4^5 \left|\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\right|\mathrm{d}x \le 2\int_4^5 |x-4|\mathrm{d}x = 1.$$

八、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界，且导数连续，又对任意的实数 x，有 $|f(x)+f'(x)|\le 1$，试证：$|f(x)|\le 1$.

证明：令 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则

$$F'(x) = \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)].$$

故 $|F'(x)| \le \mathrm{e}^x$，即 $-\mathrm{e}^x \le F'(x) \le \mathrm{e}^x$.

于是，$-\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \le \int_{-\infty}^x F'(x)\mathrm{d}x \le \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

又因为 $f(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x f(x) = 0$，故 $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(x)\mathrm{d}x$.

因此，$-\mathrm{e}^x \le F(x) = \mathrm{e}^x f(x) \le \mathrm{e}^x$，即 $|f(x)|\le 1$.