第一周训练题解答

一、设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=+\infty$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1$.

证明：记$u_n=\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}$.

由$\{a_n\}$为单调减少的正项数列，所以，$u_n\le 1$，且

$$u_n=\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\ge\frac{a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}$$

$$=1-\frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}.$$

因为$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n}\le 2(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$，故

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\ge\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n}).$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})=+\infty$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})=+\infty$.

因为$\{a_n\}$为单调减少的正项数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_1-a_{2n+1}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\right)=1.$$

由夹逼极限准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}=1$.

作为特例，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}=1.$$

二、设函数$f(x)$在$(0,1)$上有定义，且函数$e^{x}f(x)$与函数$e^{-f(x)}$在$(0,1)$上都是单调增加的，求证：$f(x)$在$(0,1)$上连续.

证明：对任意的$x_0\in(0,1)$，

当$0<x_0<x<1$时，由于$e^{-f(x)}$单调增加，故$e^{-f(x_0)}\le e^{-f(x)}$，可知$f(x_0)\ge f(x)$.

又因为$e^{x}f(x)$单调增加，故$e^{x_0}f(x_0)\le e^{x}f(x)$，得

$$e^{x_0-x} f(x_0) \le f(x) \le f(x_0).$$

令 $x \to x_0^+$，由夹逼准则，可得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

同理可证，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

于是，$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

由于 $x_0 \in (0,1)$ 的任意性，知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

三、设函数 $f(x)$ 对一切实数满足 $f(x^2) = f(x)$，且在 $x = 0$ 与 $x = 1$ 处连续，求证：$f(x)$ 恒为常数.

证明：对任意 $x_0 > 0$，由 $f(x_0) = f(\sqrt{x_0}) = f(x_0^{\frac{1}{4}}) = \cdots = f(x_0^{\frac{1}{2^n}})$。

因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，则 $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_0^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$.

对任意 $x_1 < 0$，由 $f(x_1) = f(x_1^2) = f(|x_1|^2) = f(|x_1|) = f(|x_1|^{\frac{1}{2}}) \cdots = f(|x_1|^{\frac{1}{2^n}})$。

因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，则 $f(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(|x_1|^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$.

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，因此，$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(1)$.

故对任意的 $x \in R$，$f(x) = f(1)$.

四、设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ （$A, B \in R$），证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB,$$

并由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

证明：由极限存在的充要条件，必存在无穷小量 $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0 \ (n \to \infty)$，使得

$$a_n = A + \alpha_n,\ b_n = B + \beta_n.$$

于是

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}[(A+\alpha_1)(B+\beta_n) + (A+\alpha_2)(B+\beta_{n-1}) + \cdots + (A+\alpha_n)(B+\beta_1)]$$

$$= AB + B\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + A\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}$$

利用施笃兹定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\beta_n=0,$$

又因为数列$\{a_n\}$的极限存在，故存在正数$K>0$，使得$|a_n|\le K$，于是，

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\le K\frac{|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots+|\beta_n|}{n},$$

类似地，利用施笃兹定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots+|\beta_n|}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}|\beta_n|=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}=0.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB.$

五、设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 上是凸的，求证：

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，令 $F(x)=f(x)-A$，则

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-A=0.$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸的充要条件是 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少，故 $F'(x)=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

任取 $c\in(0,+\infty)$，若 $F'(c)<0$，在$[c,x]$上应用拉格朗日中值定理，则存在$\xi\in(c,x)$，使得

$$F(x)=F(c)+F'(\xi)(x-c)<F(c)+F'(c)(x-c).$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，此与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 矛盾.

因此，$\forall x\in(0,+\infty)$，有 $F'(x)\ge 0$.

于是，当 $x\to+\infty$ 时，$F'(x)$ 单调减少且有下界，应用单调有界准则，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)$ 存在，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=B\ge 0$.

若 $B>0$，在区间$[1,x]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(1,x)$，使得

$$F(x)=F(1)+F'(\eta)(x-1)>F(1)+B(x-1).$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 矛盾.

故 $B=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=0$.

六、设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，当 $0<x<+\infty$ 时，$|f''(x)|\le 1$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明一： 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，应用泰勒公式，有

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\varepsilon+\frac{1}{2!}f''(\xi)\varepsilon^2,$$

其中 $x>0$，$x<\xi<x+\varepsilon$.

于是，当 $x>X$ 时，

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon\right|\\&\le\frac{1}{\varepsilon}|f(x+\varepsilon)-f(x)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|\varepsilon\\&\le\frac{1}{\varepsilon}|f(x+\varepsilon)-f(x)|+\frac{1}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明二： 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

由柯西收敛准则， 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得当 $x',x''>X$ 时，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

应用泰勒公式，有

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\varepsilon+\frac{1}{2!}f''(\xi)\varepsilon^2,\quad x>0.$$

于是，当 $x>X$ 时，

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon\right|\\&\le\frac{1}{\varepsilon}|f(x+\varepsilon)-f(x)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|\varepsilon\\&\le\frac{1}{\varepsilon}|f(x+\varepsilon)-f(x)|+\frac{1}{2}\varepsilon\\&<\frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

根据定义，知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.