厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

动态规划方法

谭　忠

目录
CONTENTS

Part 1 源头问题与当今应用

11.1源头问题与当今应用

在现实生活和生产实际中，有一类事件或现象发展变化的过程，可分为若干个互相联系的阶段，在其每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最佳效果。因此，各个阶段决策的选取不是任意确定的，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展。

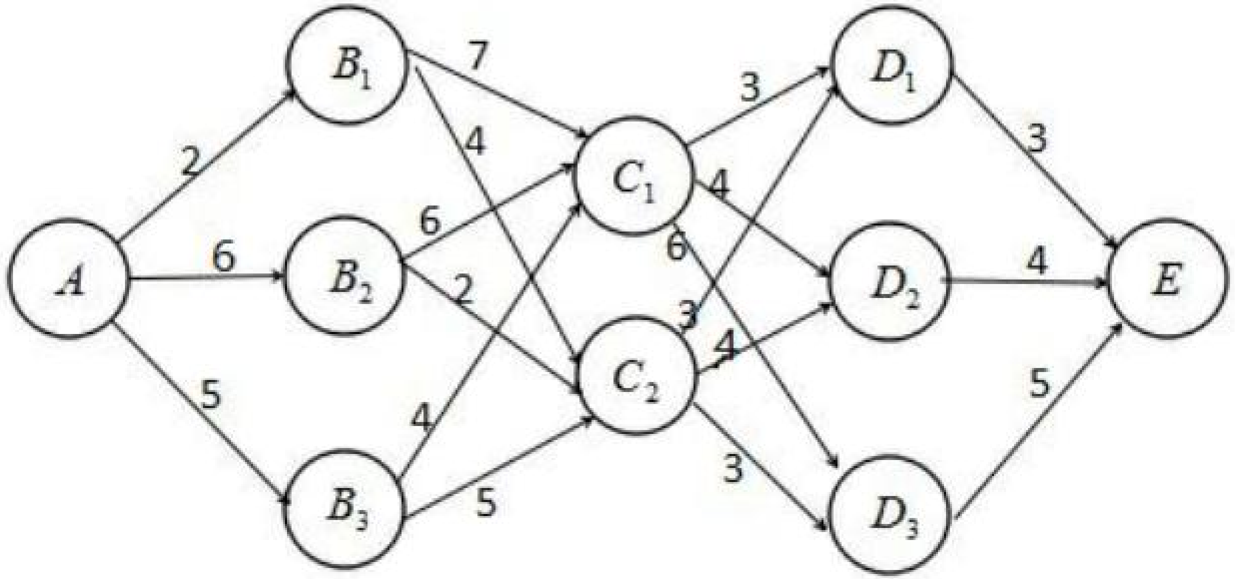
当各个阶段决策确定后, 就组成了一个决策序列, 因而也就决定了整个过程的一条活动路线。这种把一个问题看作是一个前后关联具有链状结构的多阶段过程就称为**多阶段决策过程**(multistep decision process), 也称**序贯决策过程**。这种问题就称为**多阶段决策问题.**

20 世纪 50 年代初 贝尔曼（R. E. Bellman）等人研究了多阶段决策过程的优化问题，提出了著名的最优性原理（principle of optimality），把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法—动态规划（dynamic programming），成为运筹学的一个重要分支.

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

在多阶段决策问题中，各个阶段采取的决策，依赖于当前的状态，又随即引起状态的转移，一个决策序列就是在变化的状态中产生出来的，故有“动态”的含义。因此，称处理它的方法为**动态规划方法**。但一些静态规划 (如线性规划、非线性规划等)问题，只要合理地引进“时间”因素，也可被视为多阶段决策问题，应用动态规划方法去解决。

例11.1 某厂引进一台设备，由工厂 A 至 E 港口有多条通路可供选择，其路线及费用如下图所示，现要确定一条从 A 到 E 的使总运费最小的路线。试寻求一条由 A 到 E 距离最短（或费用最省）的路线.



如何解决这个问题呢？可以采取穷举法。即把由 A 到 E 所有可能的每一条路线的距离都算出来，然后互相比较找出最短者，得出最短路线。这样，由 A 到 E 的 4 个阶段中，一共有3×2×3×1 = 18 条不同的路线，比较 18 条不同的路线的距离值，才找出最短路线为

$$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

相应最短距离为 12。显然，这样作计算是相当繁杂的。如果当段数很多，各段的不同选择也很多时，这种解法的计算将变得极其繁杂.

如下问题也是多阶段决策问题。

例 11.2 生产计划问题

工厂生产某种产品，每单位（千件）的成本为 1（千元），每次开工的固定成本为 3 （千元），工厂每季度的最大生产能力为 6（千件）. 经调查，市场对该产品的需求量，第一、二、三、四季度分别为 2，3，2，4（千件）. 如果工厂在第一、

二季度将全年的需求都生产出来，自然可以降低成本（少付固定成本费），但是对于第三、四季度才能上市的产品需付存储费，每季每千件的存储费为 0.5（千元）. 还规定年初和年末这种产品均无库存. 试制定一个生产计划，即安排每个季度的产量，使一年的总费用（生产成本和存储费）最少.

Part 2

动态规划思想与建模方法

11.2动态规划思想与建模方法

动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用. 例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其它方法求解更为方便.

一个多阶段决策过程最优化问题的动态规划模型通常包含以下要素.

1. 阶段

阶段 (step)是对整个过程的划分，通常根据时间顺序或空间顺序特征来划分阶段，以便按阶段的次序解优化问题. 描述阶段的变量称为**阶段变量**, 常用 $k = 1, 2, \cdots, n$ 表示.

在例 11.1 中由 A 出发为 k = 1，由 $B_i(i=1,2,3)$ 出发为 k = 2，依此下去从 $C_i(i=1,2)$ 出发为 k = 3，共 k = 4 个阶段.

在例 11.2 中按照第一、二、三、四季度分为 k = 1, 2, 3, 4，共四个阶段.

2. 状态

状态（state）表示每个阶段开始时过程所处的自然状况或客观条件. 在例 11.1 中, 状态就是某阶段的出发位置，它既是该阶段某支路的起点，又是前一阶段某支路的终点。

通常一个阶段有若干个状态, 描述状态的变量称为**状态变量**（state variable），它可以是一个数或一个向量. 变量允许取值的范围称**允许状态集合** (set of admissible states). 用 x_k 表示第 k 阶段的状态变量. 用 X_k 表示第 k 阶段的允许状态集合.

在例 11.1 中第二阶段 x_2 有三个状态，可取 B_1, B_2, B_3. 第三阶段有两个状态, 则状态变量 x_3 可取两个值, 即 C_1, C_2. 点集合 $\{C_1, C_2\}$ 就称为第三阶段的允许状态集合，记为 $X_3 = \{C_1, C_2\}$. 有时为了方便起见, 将该阶段的状态编上号码 1, 2, $\cdots$ ，这时也可记

$$X_3 = \{1, 2\}$$

这里所说的状态应具有下面的性质: 如果某阶段状态给定后, 则在这阶段以后过程的发展不受这阶段以前各段状态的影响，即当某阶段的状态变量给定时，这个阶段以后过程的演变与该阶段以前各阶段的状态无关. 换句话说, 过程的过去历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展, 当前的状态是以往历史的一个总结。这个性质称为**无后效性**（即**马尔科夫性**)。

n 个阶段的决策过程有 n +1 个状态变量，x_{n+1} 表示 x_n 演变的结果. 在例 11.1 中 x_5 取 E ，或定义为 1，即 $x_5 = 1$.

根据过程演变的具体情况，状态变量可以是离散的或连续的. 为计算方便有时将连续变量离散化；为分析方便有时又将离散变量视为连续的. 状态变量简称为状态.

3. 决策

当一个阶段的状态确定后，可以作出各种选择从而演变到下一阶段的某个状态，这种选择手段称为**决策**（decision），在最优控制问题中也称为**控制**（control）. 描述决策的变量称**决策变量**（decision variable），它可用一个数、一组数或一向量来描述，变量允许取值的范围称**允许决策集合**（set of admissible decisions）.

用 $u_k(x_k)$表示第 k 阶段处于状态 x_k 时的决策变量，它是状态变量 x_k 的函数，用$U_k(x_k)$表示第 k 阶段从状态x_k 出发的允许决策集合, 显然有$u_k(x_k)\in U_k(x_k)$.

在例 11.1中, $u_2(B_1)$可取 C_1 或 C_2 ,可记作 $u_2(1)=1或2$.若选取的点为C_2, 则 C_2是状态 B_1 在决策$u_2(B_1)$ 作用下的一个新的状态, 记作 $u_2(B_1)=C_2$ ，而 $U_2(1)=\{1,2\}$ 决策变量简称决策。

4. 策略

决策组成的序列称为**策略**（policy）. 由初始状态 x_1 开始的全过程的策略记作 $p_{1,n}(x_1)$, 即

$$p_{1,n}(x_1) = u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_n(x_n)$$

由第 k 阶段的状态 x_k 开始到终止状态的后部子过程的策略记作 $p_{k,n}(x_k)$, 即

$$p_{k,n}(x_k) = u_k(x_k), \cdots, u_n(x_n)$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1$$

类似地，由第 k 到第 j 阶段的子过程的策略记作:

$$p_{k,j}(x_k)=u_k(x_k),\cdots,u_j(x_j)$$

在实际问题中, 可供选择的策略有一定的范围，称为**允许策略集合** (set of admissible policies)，用 $P_{1,n}(x_1), P_{k,n}(x_k), P_{k,j}(x_k)$. 表示．从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为**最优策略。**

5. 状态转移方程

状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。在确定性过程中，一旦某阶段的状态和决策为已知，下阶段的状态便完全确定，即若给定第 k 阶段状态变量 x_k 的值, 如果该段的决策变量 x_k 一经确定, 第 k + 1 阶段的状态变量 x_{k+1} 的值也就完全确定。

XIAMEN UNIVERSITY

即 x_{k+1} 的值随 x_k 和 x_k 的值变化而变化。这种确定的对应关系，记为

$$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k), k = 1, 2, \cdots, n$$

上式描述了由 k 阶段到 k + 1 阶段的状态演变规律，称为**状态转移方程**（equation of state transition）。T_k 称为状态转移函数。在例 11.1 中状态转移方程为 $x_{k+1} = u_k(x_k)$.

6. 指标函数和最优值函数

阶段指标是对过程中某一个阶段的决策效果衡量其优劣的一种数量指标，第 k 阶段初始状态为 x_k 且采取决策 $u_k(x_k)$ 时的阶段指标记为 $v_k(x_k,u_k(s_k))$.

指标函数 (objective function) 是衡量过程优劣的数量指标，它是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数，用 $V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$.表示，k = 1, 2, · · · , n. 指标函数应具有可分离性，即 $V_{k,n}$ 可表为 $x_k, u_k, V_{k+1,n}$ 的函数，记为

$$\begin{aligned} &V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) \\ &= \varphi_k(x_k, u_k, V_{k+1,n}(x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})) \end{aligned}$$

并且函数 φ_k 对于变量 $V_{k+1,n}$ 是严格单调的.

过程在第 j 阶段的阶段指标取决于状态 x_j 和决策 u_j，用$v_j(x_j,u_j)$.

表示. 指标函数由$v_j(j=1,2,\cdots,n)$组成，常见的形式有：

阶段指标之和，即:

$$V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}) = \sum_{j=k}^{n} v_j(x_j,u_j),$$

阶段指标之积，即:

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = \prod_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j),$$

阶段指标之极大（或极小），即:

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = \max_{k \le j \le n}(min) v_j(x_j, u_j).$$

根据状态转移方程指标函数$V_{k,n}$，还可以表示为状态x_k和策略$p_{k,n}$的函数， 即$V_{k,n}(x_k, p_{k,n})$, 在x_k给定时，指标函数$V_{k,n}$对$p_{k,n}$的最优值称为最优值函数（optimal value function），记为$f_k(x_k)$, 即

$$f_k(x_k) = opt\ V_{k,n}(x_k, p_{kn})$$

其中 opt 可根据具体情况取 max 或 min .

在不同的问题中, 指标函数的含义是不同的, 它可能是距离、利润、成本、产品的产量或资源消耗等。如：在例 11.1 中, 指标函数 $V_{k,n}$ 就表示在第 k 阶段由点 x_k 至终点 E 的距离。

用 $d_k(x_k,u_k)=v_k(x_k,u_k)$表示在第 k 阶段由点$x_k$ 到点 $x_{k+1}=u_k(x_k)$的距离,如 $d_2(B_1,C_1)=7$,就表示在第 2 阶段中由点 B1 到点 C1 的距离为 7。$f_k(x_k)$表示从第 k 阶段点x_k 到终点 E 的最短距离, 如 $f_2(B_1)$ 就表示从第 2 阶段中的点 B1 到点 E 的最短距离。

7. 动态规划方法的基本思想

现在, 结合求解例 11.1 来介绍动态规划方法的基本思想。经验告诉我们, 最短路线有一个重要特性: 如果由起点 A 经过 P 点和 H 点而到达终点 E 是一条最短路线, 则由点 P 出发经过 H 点到达终点 E 的这条子路线, 对于从点 P 出发到达终点的所有可能选择的不同路线来说, 必定也是最短路线。

否则，从点 P 到 E 点有另一条距离更短的路线存在, 把它和原来最短路线由 A 点到达 P 点的那部分连接起来, 就会得到一条由 A 点到 E 点的新路线, 它比原来那条最短路线的距离还要短些。这与假设矛盾, 是不可能的。

例 11.1 中, 若找到了

$$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

是由 A 到 E 的最短路线, 则

$$C_2 \to D_1 \to E$$

应该是由 C2 出发到 E 点的所有可能选择的不同路线中的最短路线。

根据这一特性，寻找最短路线的方法，就是从最后一段开始，用由后向前逐步递推的方法，求出各点到 E 点的最短路线，最后求得由 A 点到 E 点的最短路线。所以，动态规划的方法是从终点逐段向始点方向寻找最短路线的一种方法。以 A 为始端，E 为终端，从 E 到 A 的解法称为**逆序解法**。以 E 为始端、A 为终端的从 A 到 E 的解法称为**顺序解法**。

顺序解法和逆序解法只表示行进方向的不同或对始端终端相反的定义。但用动态规划方法求最优解时，都是在行进方向规定后，均要按照这个规定的行进方向的逆向，从最后一段向前逆推计算，逐段找出最优途径。

下面按照动态规划的方法, 将例 11.1 从最后一段开始计算, 由后向前逐步推移至 A 点。把问题分为 4 个阶段：

$$A \to B(\text{可选} B_1, B_2, B_3);$$

$$B \to C(\text{可选} C_1, C_2);$$

$$C \to D(\text{可选} D_1, D_2, D_3);$$

$$D \to E.$$

各为一个阶段。

(1)k = 4 时，由 D1、D2、D3 到终点均只有一条路线，有

$$f_4(D_1) = 3,$$
$$f_4(D_2) = 4,$$
$$f_4(D_3) = 5$$

最短为 $f_4(D_1) = 3$, 即相应的决策为 $u_4(D_1) = E$。

(2)k = 3 时，出发点有 C1 、C2 两个.若从 C1 出发, 则有三个选择:一是到 D1 ; 二是到 D2;三是到 D3，则

$$f_3(C_1) = \min\left\{\begin{array}{l} d_3(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_1, D_2) + f_4(D_2) \\ d_3(C_1, D_3) + f_4(D_3) \end{array}\right\}$$

$$= \min \begin{Bmatrix} 3+3 \\ 4+4 \\ 6+5 \end{Bmatrix} = 6$$

其相应的决策为 $u_3(C_1) = D_1$. 这说明, 由 C1 至终点 E 的最短距离为 6 , 其最短路线是

$$C_1 \to D_1 \to E$$

同理, 从 C2 出发, 有:

$$
\begin{aligned}
f_3(C_2) &= \min \begin{Bmatrix} d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \\ d_3(C_2, D_3) + f_4(D_3) \end{Bmatrix} \\
&= \min \begin{Bmatrix} 3+3 \\ 4+4 \\ 3+5 \end{Bmatrix} = 6
\end{aligned}
$$

其相应的决策为 $u_3(C_2) = D_1$. 这说明, 由 C2 至终点 E 的最短距离为 6 , 其最短路线是

$$C_2 \to D_1 \to E$$

(3)k =2 时，出发点有 B1 、B2 、B3 三个。若从 B1 出发, 则有两个选择:一是到 C1；二是到 C2，则

$$
\begin{aligned}
f_2(B_1) &= \min\left\{ \begin{array}{l} d_2(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d_2(B_1,C_2)+f_3(C_2) \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \begin{array}{l} 7+6 \\ 4+6 \end{array} \right\} = 10
\end{aligned}
$$

其相应的决策为 $u_2(B_1) = C_2$. 这说明, 由 B1 至终点 E 的最短距离为 10 , 其最短路线是

$$B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

同理, 从 B2 出发, 有

$$
\begin{aligned}
f_2(B_2) &= \min\left\{\begin{array}{l} d_2(B_2, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_2, C_2) + f_3(C_2) \end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} 6 + 6 \\ 2 + 6 \end{array}\right\} = 8
\end{aligned}
$$

其相应的决策为 $u_2(B_2) = C_2$. 这说明, 由 B2 至终点 E 的最短距离为 8 , 其最短路线是

$$B_2 \to C_2 \to D_1 \to E$$

同理, 从 B3 出发, 有

$$
\begin{aligned}
f_2(B_3) &= \min\left\{\begin{array}{l} d_2(B_3, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_3, C_2) + f_3(C_2) \end{array}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{array}{l} 4+6 \\ 3+6 \end{array}\right\} = 9
\end{aligned}
$$

其相应的决策为 $u_2(B_3) = C_2$. 这说明, 由 B3 至终点 E 的最短距离为 9 , 其最短路线是

$$B_3 \rightarrow C_2 \rightarrow D_1 \rightarrow E$$

(4)k=1 时，出发点只有一个 A 点, 则

$$f_1(A) = \min\begin{Bmatrix} d_1(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d_1(A,B_2)+f_2(B_2) \\ d_1(A,B_3)+f_2(B_3) \end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 2+10 \\ 6+8 \\ 5+9 \end{Bmatrix} = 12$$

其相应的决策为 $u_1(A)=B_1$. 这说明, 由 A 至终点 E 的最短距离为 12 , 其最短路线是

$$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

由此可求出最优决策函数序列$\{u_k\}$, 即由

$$u_1(A)=B_1,\ u_2(B_1)=C_2,$$
$$u_3(C_2)=D_1,\ u_4(D_1)=E$$

组成一个最优策略。因而, 找出相应的最短路线为 $AB_1C_2D_1E$,相应的最短距离为 12.

由此可见，根据动态规划方法的逆序解法, 它们的动态规划基本方程可如下来表述：

设指标函数是取各阶段指标的和的形式, 即

$$\sum_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j)$$

其中$v_j(x_j,u_j)$表示第 j 段的指标。它显然是满足指标函数三个性质的。所以上式可写成

$$V_{k,n} = v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}[x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}]$$

当初始状态给定时, 过程的策略就被确定, 则指标函数也就确定了。因此, 指标函数是初始状态和策略的函数。可记为$V_{k,n}(x_k, p_{k,n}(x_k))$. 故上面递推关系又可写成

$$\boldsymbol{V_{k,n}[x_k, p_{k,n}] = v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}[x_{k+1}, p_{k+1,n}]}$$

其子策略$p_{k,n}(x_k)$可看成是由决策$u_k(x_k)$和$p_{k+1,n}(x_{k+1})$组合而成。即

$$\boldsymbol{p_{k,n} = \{u_k(x_k), p_{k+1,n}(x_{k+1})\}}$$

如果用 $p_{k,n}^{*}(x_k)$ 表示初始状态为 x_k 的后部子过程所有子策略中的最优子策略, 则最优值函数为

$$\begin{aligned} f_k(x_k) &= V_{k,n}[x_k, p_{k,n}^{*}(x_k)] \\ &= opt_{p_{k,n}} V_{k,n}[x_k, p_{k,n}(x_k)] \end{aligned}$$

而

$$opt_{p_{k,n}} V_{k,n}[x_k, p_{k,n}(x_k)]$$
$$= opt_{u_k, p_{k+1,n}} \{v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}(x_{k+1}, p_{k+1,n})\}$$
$$= opt_{u_k} \{v_k(x_k, u_k) + opt_{p_{k+1,n}} V_{k+1,n}\}$$

但

$$f_{k+1}(x_{k+1}) = opt_{p_{k+1,n}} V_{k+1,n}(x_{k+1}, p_{k+1,n})$$

所以

$$f_k(x_k) = opt_{u_k \in U_k(x_k)}[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})],$$
$$k = n, n-1, \cdots, 1$$

边界条件为 $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. 这就是**动态规划逆序解法的基本方程。**

式中$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$，其求解过程, 根据边界条件, 从 k = n 开始, 由后向前逆推, 从而逐步可求得各段的最优决策和相应的最优值, 最后求出$f_1(x_1)$时, 就得到整个问题的最优解。

现在把动态规划方法的基本思想归纳如下：

(1）动态规划方法的关键在于正确地写出基本的基本方程，即递推关系式和恰当的边界条件。据此, 必须先将问题的过程分成几个相互联系的阶段, 恰当地选取状态变量和决策变量及定义最优值函数, 从而把一个大问题化成一族同类型的子问题, 然后逐个求解。即从边界条件开始,逐段递推寻优, 在每一个子问题的求解中, 均利用了它前面的子问题的最优化结果, 依次进行, 最后一个子问题所得的最优解, 就是整个问题的最优解。

（2）在多阶段决策问题中，动态规划方法是既把当前一段和未来各段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

（3）在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

在明确了动态规划的基本概念和基本思想之后，当给一个实际问题建立动态规划模型时，必须做到下面七点：

(1)将过程划分成恰当的阶段；

(2)正确选择状态变量 x_k，使它既能描述过程的状态，又满足无后效性，同时确定允许状态集合 X_k；

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY

(3)选择决策变量 u_k ，确定允许决策集合 $U_k(x_k)$;

(4)写出状态转移方程;

(5)确定阶段指标 v_k 及指标函数 $V_{k,n}$ 的形式（阶段指标之和，阶段指标之积，阶段指标之极大或极小等）;

(6)写出基本方程即最优值函数满足的递归方程，以及端点条件.

(7) 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系, 它应满足下面三个性质:

- 定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数;
- 具有可分离性, 并满足递推关系。即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, cdots, s_{n+1})$$
$$= \varphi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})]$$

- 函数 $\varphi_k(s_k, u_k, V_{k+1,n})$ 对于变量 $V_{k+1,n}$ 要严格单调。

以上七点是构造动态规划模型的基础, 是正确写出动态规划基本方程的基本要素。

Part 3

案例分析

11.3案例分析

01

案例分析

02

1、线性动态规划案例分析

案例一：生产计划问题　案例二：资源分配问题

2、非线性动态规划案例分析

案例一：投资分配　案例二：背包问题

一、线性动态规划案例

案例一、生产计划问题

问题背景：对于例 11.2 一类生产计划问题（Production planning problem），阶段按计划时间自然划分，状态定义为每阶段开始时的储存量 x_k ，决策为每个阶段的产量 u_k ，记每个阶段的需求量（已知量）为 d_k ，

则状态转移方程为：

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k + u_k - d_k,\\
&x_k \geq 0, (11.3)\\
&k = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

【模型构建】

设每阶段开工的固定成本费为 a ，生产单位数量产品的成本费为 b ，每阶段单位数量产品的储存费为 c ，阶段指标为阶段的生产成本和储存费之和，即

$$v_k(x_k, u_k) = cx_k + \begin{cases} a + bu_k, & u_k > 0 \\ 0 \end{cases} \quad (11.4)$$

指标函数 V_{kn} 为 v_k 之和.最优值函数 $f_k(x_k)$ 为从第 k 段的状态 x_k 出发到过程终结的最小费用，满足

$$f_k(x_k) = min\left[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\right],$$
$$k = n, \cdots, 1 \quad (11.5)$$

其中允许决策集合 U_k 由每阶段的最大生产能力决定.若设过程终结时允许存储量为 x_{n+1}^{0} ，则终端条件是：

$$f_{n+1}(x_{n+1}^{0}) = 0$$

（11.3）—（11.5）构成该问题的动态规划模型.

案例二、资源分配问题

问题背景：机器可以在高、低两种负荷下生产. u 台机器在高负荷下的年产量是 $g(u)$，在低负荷下的年产量是 $h(u)$ ，高、低负荷下机器的年损耗率分别是 $a1$ 和 $b1(0 < b1 < a1 < 1)$.

现有 m 台机器，要安排一个 n 年的负荷分配计划，即每年初决定多少台机器投入高、低负荷运行，使 n 年的总产量最大. 如果进一步假设 $g(u)=\alpha u, h(u)=\beta u(\alpha>\beta>0)$ ，即高、低负荷下每台机器的年产量分别为 α 和 β ，结果将有什么特点.

【问题分析】

年度为阶段变量 k = 1, 2, · · · , n. 状态 x_k 为第 k 年初完好的机器数，决策 u_k 为第 k 年投入高负荷运行的台数.

当 x_k 或 u_k 不是整数时，将小数部分理解为一年中正常工作时间或投入高负荷运行时间的比例.

【模型构建】

机器在高、低负荷下的年完好率分别记为 a 和 b ，则 a = 1 – a1, b = 1 – b1 ，有 a < b. 因为第 k 年投入低负荷运行的机器台数为 $x_k - u_k$ ，所以状态转移方程是

$$x_{k+1} = au_k + b(x_k - u_k)$$

阶段指标 v_k 是第 k 年的产量，有

$$v_k(x_k, u_k) = g(u_k) + h(x_k - u_k)$$

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY

指标函数是阶段指标之和，最优值函数 $f_k(x_k)$满足：

$$f_k(x_k) = max\left[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\right]$$

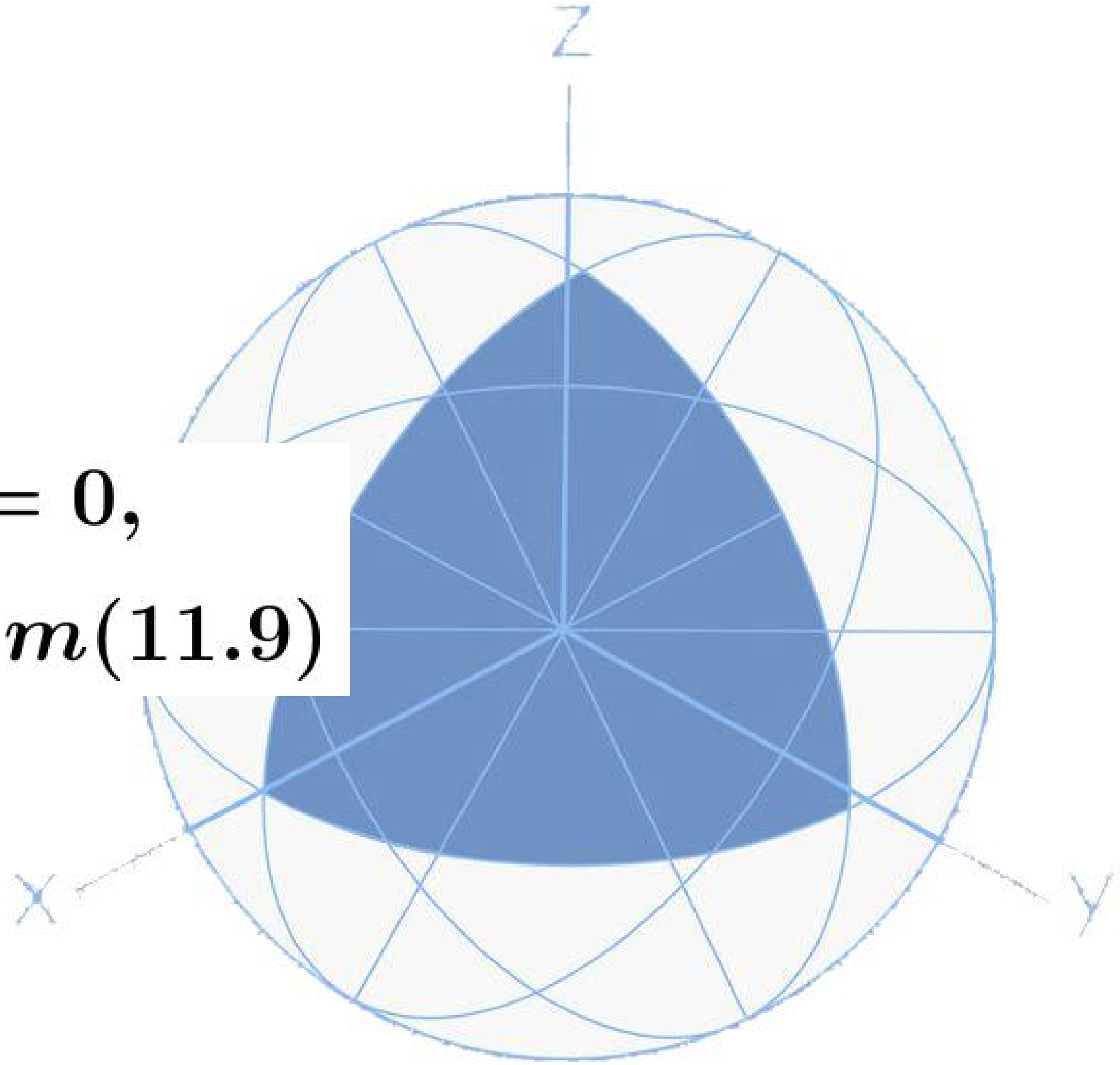
$$0 \le x_k \le m,$$

$$k = n, \cdots, 2, 1 (11.8)$$

及自由终端条件：

$$f_{k+1}(x_{k+1}) = 0,$$

$$0 \le x_{k+1} \le m (11.9)$$



【模型求解】

当 v_k 中的 g, h 用较简单的函数表达式给出时，对于每个 k 可以用解析方法求解极值问题.特别，若 $g(u)=\alpha u, h(u)=\beta u$ (11.8) 中的$\left[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\right]$ 将是u_k 的线性函数，最大值点必在区间$0\le u_k\le x_k$ 的左端点 $u_k=0$ 或右端点 $u_k=x_k$ 取得，即每年初将完好的机器全部投入低负荷或高负荷运行.

二、非线性动态规划案例分析

案例一、投资分配

问题背景：某公司拥有资金 10 万元，若投资于项目 i(i=1,2,3) 的投资额为 x_i 时，其收益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1, g_2(x_2)=9x_2, g_3(x_3)=2x_3^2$$

问应该如何分配投资数额才能使总收益最大？

【问题分析】

这是一个与时间无明显关系的静态最优化问题，可列出其静态模型为：

$$max z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

满足：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

【模型构建】

1.分阶段：设阶段变量 k 表示依次对第 k 个项目投资，因此，阶段总数 n=3(k=1,2,3);

2.状态变量：用 s_k 表示已经对第 1 至第 k-1 个项目投资后的剩余资金；即第 k 段初拥有的可以分配给第 k 到第 3 个项目的资金额 (单位：万元);

3.决策变量：用 x_k 表示第 k 个项目投资的资金数量 (单位:万元);

4.状态转移方程为: $s_{k+1}=s_k-x_k$

5.决策变量的取值：$0\le x_k\le s_k$

6.基本方程：最优指标函数 $f_k(s_k)$ 表示第 k 阶段，初始状态为 s_k 时，从第 k 到第 3 个项目所获最大收益为：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

【模型求解】

(1)当 k=3 时：

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_k \le s_3} \{2x_3^2\}$$

取 $x_3^* = s_3$ 得：

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_k \le s_3} \{2x_3^2\} = 2s_3^2$$

(2)当 k = 2 时：

$$
\begin{aligned}
& f_2(s_2) = \\
& \max_{0 \le x_k \le s_2} \{9x_2 + f_3(s_3)\} = \\
& \max_{0 \le x_k \le s_2} \{9x_2 + 2s_3^2\} = \\
& \max_{0 \le x_k \le s_2} \{9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2\}
\end{aligned}
$$

令：

$$h_2(s_2, x_2) = 9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2,$$

由

$$\frac{dh_2}{dx_2} = 9 + 4(s_2 - x_2)(-1) = 0$$

解得：

$$x_2 = s_2 - \frac{9}{4}$$

而：

$$\frac{d^2h_2}{dx_2^2} = 4 > 0$$

所以 $x_2 = s_2 - \frac{9}{4}$ 是极小点.极大值只可能在 $[0, s_2]$ 端点取得，所以

$f_2(0) = 2s_2^2$ 或 $f_2(s_2) = 9s_2$

当 $2s_2^2 = 9s_2$ 时解得 $s_2 = \frac{9}{2}$

所以当 $s_2 > \frac{9}{2}$ 时，$2s_2^2 > 9s_2$ ，此时应有 $x_2^* = 0$

当 $s_2 < \frac{9}{2}$ ，$2s_2^2 < 9s_2$，此时应有 $x_2^* = s_2$

(3)当 k = 1 时：

$$f_1(s_1) = \max_{0\le x_k\le s_1}\{4x_1 + f_2(s_2)\}$$

当 $s_2 < \dfrac{9}{2}$ 时，这是取 $f_2(s_2) = 9s_2$ ，于是有：

$$f_1(10) = \max_{0\le x_k\le 10}\{4x_1 + 9s_1 - 9x_1\} = \max_{0\le x_k\le 10}\{9s_1 - 5x_1\} = 9s_1,$$

但此时

$$s_2 = s_1 - x_1 = 10 > \frac{9}{2},$$

矛盾，舍去.

当 $s_2 > \dfrac{9}{2}$ 时，这时取 $f_2(s_2) = 2s_2^2$

$$f_1(10) = \max_{0 \le x_k \le 10} \{4x_1 + 2(s_1 - x_1)^2\},$$

令 $h_1(s_1,x_1)=4x_1+2(s_1-x_1)^2$

由 $\frac{dh_1}{dx_1}=4+4(s_1-x_1)\cdot(-1)=0,$

解之得驻点 $x_1=s_1-1,$

而 $\frac{d^2h_1}{dx_1^2}=4>0,$ 所以 $x_1=s_1-1$ 是极小值. 故极大值只能在[0,10]的端点取得，比较 [0,10]两个端点的函数值

因为当 $x_1=0$ 时，$f_1(10)=200$，而当 $x_1=10$ 时，$f_1(10)=40$.所以

$$x_1^*=0,$$

$$s_2=s_1-x_1^*=10,$$

因为 $s_2>\dfrac{9}{2}$ ，所以

$$x_2^*=0,$$

$$s_3=s_2-x_2^*=10.$$

所以 $x_3^*=s_3=10$ ，即全部资金投入第 3 个项目.

案例二、背包问题

问题背景：有 n 种物品，每种物品数量不限，第 i 种物品的重量为 ω_i，价值为 c_i，背包限量为 a. 问此人应如何选择携带物品使价值总和最大？

【问题分析】

设 x_i 为第 i 种物品的装入件数；那么问题的数学模型是：

$$max \quad f=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

约束条件:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \le a \\ x_i = 0\text{或}1, (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

【模型构建】

下面用动态规划方法建立模型：设按可装入物品的 n 种类划分为 n 个阶段.

状态变量 s_k ：表示用于装第 1 种物品至第 k 种物品的总质量;

决策变量 x_k ：

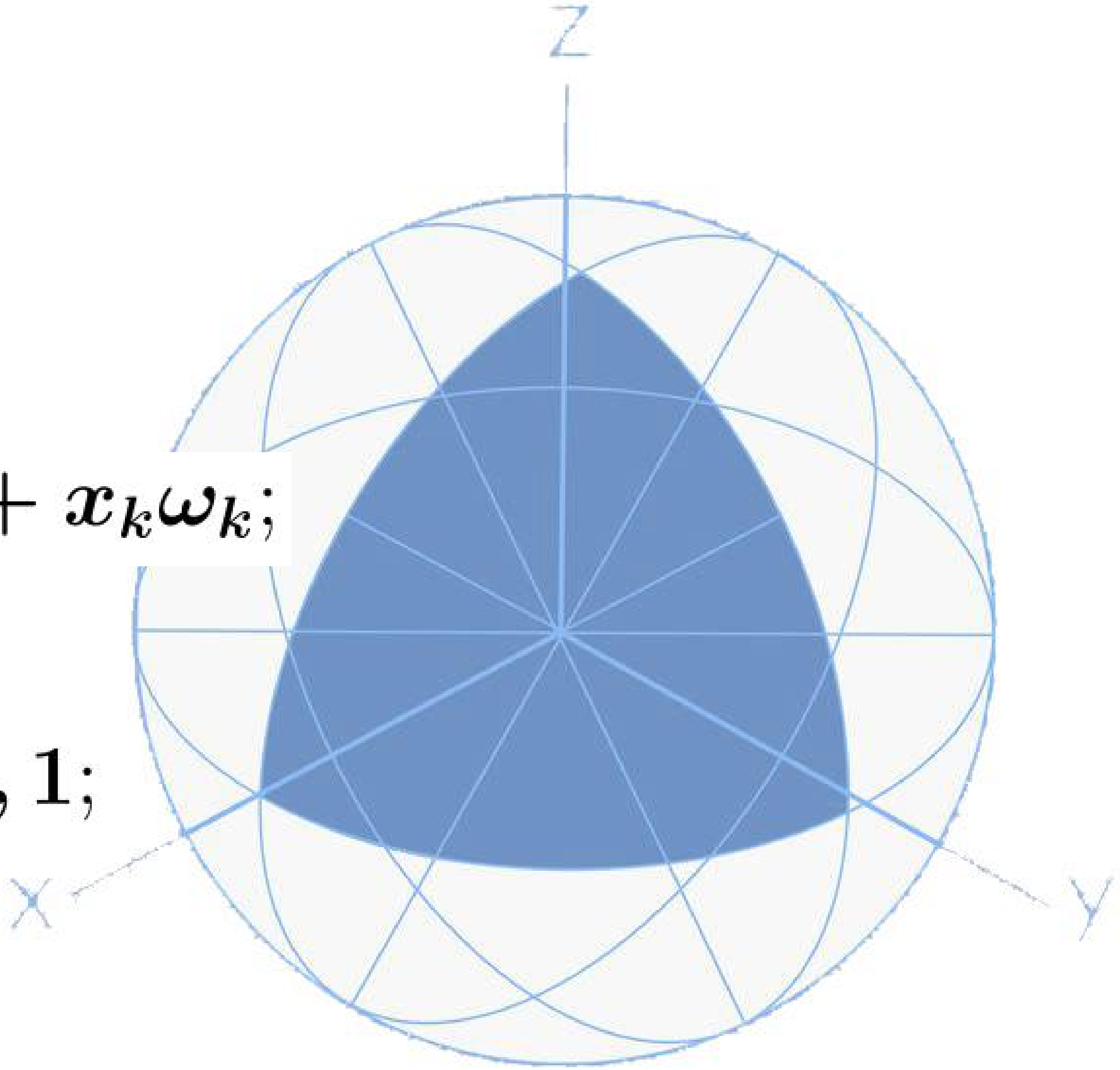
$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{物品k放入包中} \\ 0 & \text{物品k不放入包中} \end{cases}$$

状态转移方程：

$$s_k = s_{k-1} + x_k \omega_k;$$

允许决策的集合：

$$x_k = 0, 1;$$



目标函数 $f_k(s_k)$：当重量不超过 s_k 时，背包中可以装下第一种到第 k 种物品的最大价值;

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{x_k=0,1} \{c_k x_k + f_{k-1}(s_k - x_k \omega_k)\}, \\ 2 \le k \le n \\ f_1(s_1) = \max\limits_{x_1=0,1} \ c_1 x_1, k = 1 \end{cases}$$

最后求出 $f_n(a)$ 即为所求的最大值.

THANK YOU