概率与随机系统建模

谭忠

厦门大学数学科学学院

1、概率的基本概念及定理

2、随机过程的基本概念及分类

3、两个重要的独立增量过程及应用

4、马氏链

5、蒙特卡罗模拟

6、案例分析

1 概率的基本概念及定理

（1）概率可加性

有限可加性：若有限个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

.

推论：对任一事件A，有$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

概率的基本概念及定理

（2）概率单调性

若$A \supset B$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

推论：若$A \supset B$,则$P(A) \geq P(B)$.

推论：对任意两个事件A, B，有$P(A-B)=P(A)=P(AB)$

（3）概率加法公式：

对任意n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，有：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

（4）概率连续性：概率是上连续且下连续的。

（5）条件概率公式：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

（6）乘法公式：

若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

概率的基本概念及定理

（7）全概率公式： $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为Ω的完备事件组，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

（8）逆概率公式（Bayes 公式）：

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为Ω的完备事件组，则

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

（9）多个事件的相互独立性：

设有n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，对任意的$1 \le i < j < k < \cdots \le n$，如果以下等式均成立

$$
\begin{cases}
P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \\
P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\
\vdots \\
P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{cases}
$$

则称此n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立。

例：敏感问题模型

1、问题的重述

有时我们需要进行某种调查，调查的问题比较敏感，如需要了解一群人种有吸毒行为人数的比例，一个班级在某次考试种有作弊行为人数的比例，等等。如何利用数学的方法设计调查方案以获得比较准确的结果？本节将介绍瓦纳提出的一种方及其数学模型，巧妙地解决了这一问题。

2、模型一的构建和求解

为改善调查的效果，瓦纳设计了一种随机问答法，设法减轻被调查者的抵触情绪，根据概率论的理论估算出合理的结果。

设某个总体中具有某种敏感特征人的比例为n，称具有这种特征的人为团体A，直接向被调查者询问你是否属于团体A 是会引起反感的。瓦纳设计的方法是提出两个问题：

问题1：我是团体A 中的成员；

问题2：我不是团体A 中的成员。

调查者准备好一叠题卡号，其中百分比p 的卡标有数字1，百分比1-p 的卡标有数字2.调查时，调查人请被调查人从题卡号中任抽一张，并告诉被调查人不要把抽到的结果告诉调查人，若抽到标有1 的卡就回答问题1，若抽到标有2 的卡应回答问题2.请他们选择“是”或”非”．由于被调查人认为调查人并不知道他究竟回答哪一个问题，所以作出真实回答的可能性比较大。

概率的基本概念及定理

设调查了n 个人，其中有m 个人回答”是“，我们要用概率论的方法估算总体种属于团体A 的比例。用概率论的加法和乘法定理，我们能计算回答”是”的概率：

$$
\begin{aligned}
P(\text{答”是”}) &= P(\text{选标有数字1的卡且答”是”}) \\
&+ P(\text{选标有数字2的卡且答”是”}) \\
&= P(\text{选标有数字1的卡}) \times P(\text{答”是”}|\text{选标有数字1的卡}) \\
&+ P(\text{选标有数字2的卡}) \times P(\text{答”是”}|\text{ 选标有数字2的卡})
\end{aligned}
$$

上述公式实际上是概率论中的全概率公式。

概率的基本概念及定理

由于样本数为n,回答”是”的总数为m回答”是”的概率可以用$\frac{m}{n}$来估计。设属于团体A的概率为π，于是上式可以写成

$$\frac{m}{n} = p\pi + (1-p)(1-\pi).$$

从中解出

$$\hat{\pi} = \frac{1}{2p-1}(p-1+\frac{m}{n}), p \neq \frac{1}{2}$$

其中$\hat{\pi}$是总体中属于团体A的概率的估计值。

经过验证还可以确定$\hat{\pi}$是π的极大似然估计，且是无偏估计，经计算它的方差为：

$$Var(\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{p(1-p)}{[n(2p-1)^2]}$$

由上式可知，p越接近$\frac{1}{2}$，方差总量越大，即误差越大，而方差越小更能真实反映π。当p靠近0或1 时，$Var(\pi)$ 的值比较小，但此时对被调查者的保护程度就会降低，从而降低了被调查者的合作程度，随机化回答的作用降低，增加了收集到真实数据的难度。

一般来说，p的取值介于$0.7 \sim 0.8$之间较适宜，但也需要根据调查的敏感程度适当选取。若敏感程度较高则p应较小。p的选取一般最低不要低于0.6，最高不要高于0.85。

沃纳模型应用中，设计者在追求减小随机化回答而引起的方差的同时，也要平衡被调查者的心理安全接受能力，这需要在p 值的选择上慎重考虑，既要保证误差总量尽可能小又要使被调查者心理上可以接受。

3、模型一的应用

为调查大学种某一年级就、学生参加外语考试作弊的比例，用随机问答法进行调查，设计的两个问题为：

问题1：你在这次考试有作弊行为；

问题2：你在这次考试没有作弊行为。

设计的题号卡共100张，其中75张标有数字1，25张标有数字2.

请200名学生根据任意抽得的卡上的标号对问题1或问题2 用”是”或”否”回答（抽出的卡再放回），结果有60名回答为”是”。

求该年级学生外语考试作弊的比例。

有题意可知，$n=200, p=0.75, m=60$, 由公式

$$\hat{\pi}=\frac{1}{2p-1}(p-1+\frac{m}{n}), p\neq\frac{1}{2}$$

计算得：

$$\hat{\pi}=\frac{1}{2\times 0.75-1}(0.75-1+\frac{60}{200})=0.1$$

因此，估计作弊的人数比例为10%

4、模型二

模型一的两个问题都是与敏感特性直接有关的，很有可能引起人们的戒备，有人对此方法作了改进，将第二个问题改为与敏感特性不相关的问题，其余的做法与上述随机问答法完全相同。

第二个问题可以是：你是冬季出生的吗？你的学生号码末位是奇数吗？等等。这些问题都可以抽象为：你属于团体B。

这些问题设计的关键是，回答“是”的概率要么是已知的，要么是以前曾已作过估计的，设它为π_B. 这样改进方法中的两个问题成为：

问题1：你属于团体A；

问题2：你属于团体B。

仍设样本容量为n，卡中标有1的比例为p，m人回答“是”。

类似于随机问答法，有

$$\frac{m}{n} = p\pi + (1-p)(1-\pi_B).$$

从而

$$\hat{\pi} = \frac{1}{p}[(p-1)\pi_B + \frac{m}{n}], p > 0$$

经计算得

$$Var(\pi) = \frac{(p\pi + (1-p)\pi_B)(1 - p\pi - (1-p)\pi_B)}{np^2}$$

这表明此时p 可以取值为$\frac{1}{2}$，于是沃纳模型中的隐私安全隐患就可以消除。

5、模型二的应用

某高级中学要调查学生谈恋爱的比例，设计了一叠提卡号，其中75 张标有1，25张标有2.调查100个学生，提以下两个问题。

问题1：你谈过恋爱吗？

问题2：你学生证末位号码是偶数吗？

让被调查学生任意抽取一张卡（随即放回并不让调查者看到所标的数字），对卡上的标号所对应的问题用”是“或”否“加以回答，有18人回答”是“，要估计该校学生谈过恋爱的人数比例。

显然$n = 100, p = 0.75, m = 18.$

学生证号码奇、偶数各占一半，因此$\pi_B = 0.5.$

所以带入可得

$$\hat{\pi} = \frac{1}{p}[(p-1)\pi_B + \frac{m}{n}] = 0.073$$

即谈过恋爱的学生占7%略多一些。

6、模型三

我们还可以对敏感性比例问题设计如下简单的二随机变量和问卷调查模型。如要调查某市婚外恋者所占比例，可如下设计：问题2是：你有两个孩子吗？

若两个问题都不满足，请回答“0”，若只满足一个问题，请回答“1”，若都满足，请回答“2”，你的回答是（）。

显然，是否有婚外恋行为与是否有两个孩子是两个相互独立的问题。

现设X表示随机变量和这个事件，X_1表示有婚外恋行为，X_2表示有两个孩子，并设$P(X_1=1)=P_1$表示总体中婚外恋者的比例，$P(X_2=1)=P_2$表示总体中有两个孩子的比例，则有：

$$\begin{cases} P(X=0)=(1-P_1)(1-P_2) \\ P(X=1)=P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1) \\ P(X=2)=P_1P_2 \end{cases}$$

先从总体中抽n个已婚者进行调查，得回答0的个数为m_0，回答1 的个数为$m1$,回答2的个数为m_2，若用$\frac{m_0}{n}$估计$P(X=0)$,用$\frac{m_1}{n}$估计$P(X=1)$，用$\frac{m_2}{n}$来估计$P(X=2)$,则有：

$$\begin{cases} (1-P_1)(1-P_2)=\frac{m_0}{n} \\ P_1(1-P_2)+P_2(1-P_1)=\frac{m_1}{n} \\ P_1P_2=\frac{m_2}{n} \end{cases}$$

解上述方程组，有：

$$P_1 + P_2 = \frac{2m_2 + m_1}{n}$$

进而可得P_1的一个估计量为：

$$P_1 = \frac{2m_2 + m_1}{n} - P_2$$

其中，m_1服从$B(q_1, n)$,$q_1 = P_1(1 - P_2) + P_2(1 - P_1)$;

m_2 服从$B(q_2, n)$,$q_2 = P_1 P_2$.

因此有：

$$E(m_1) = nq_1 = n[P_1(1 - P_2) + P_2(1 - P_1)]$$

$$E(m_2) = nq_2 = nP_1P_2$$

$$E(\hat{P}_1) = \frac{E(m_1)2E(m_2)}{n} - P_2 = P_1$$

故$\hat{P}_1$为P_1的无偏估计量。

其方差为：

$$Var(P_1) = \frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{n}$$

由上式可知，当总体中有两个孩子的比例P_2越接近 $frac12$时，方差的值越大，所以应尽量取P_2 的值靠近0或1，当然，同时要估计到被调查者的心理安全承受能力。

2 随机过程的基本概念及分类

一、基本概念

用来表示随机现象结果的变量称为**随机变量**。常用大写字母X表示。

比如设置X=“掷一颗骰子出现的点数”，则1,2,3,4,5,6,就是随机变量X 的可能取值。

在概率论中，学习的随机变量主要涉及有限多个。在极限定理中，虽然涉及了无穷多个随机变量，但它们之间是相互独立的。

将上述情形加以推广,即研究一族无穷多个、相互有关的随机变量,这就是**随机过程**。

定义：设对每一个参数$t \in T, X(t)$ 是一随机变量,称随机变量族$X_T = \{X(t), t \in T\}$为一随机过程, 其中T称为指标集或参数集. 记$X(t) = X_t$.

参数T一般表示时间或空间. 常见的参数集T有三种:

(1) $T_1 = N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$;

(2) $T_2 = Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$;

(3) $T_3 = [a, b]$, 其中a可以取$-\infty$ 或0, b可取$+\infty$.

二、随机过程的数字特征及有限维分布族

设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程. 为了刻画它的概率特征,通常用到随机过程的均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数以及有限维分布函数族等概念.

(1) 均值函数: $m(t) \triangleq E(X(t))$;

(2) 方差函数: $D(t) \triangleq E\{(X(t) - m(t))^2\}$;

(3) 协方差函数: $R(s,t) \triangleq Cov(X(s), X(t))$;

(4) 相关函数: $\rho(s,t) \triangleq \frac{Cov(X(s),X(t))}{\sqrt{D(t)D(s)}}$;

(5) 有限维分布族:

设$t_i \in T, 1 \le i \le n$(n 为任意正整数), 记

$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n)$ 其全体:

$\{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n), t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \ge 1\}$

称为随机过程的有限维分布族,它完全确定了随机过程$\{X(t), t \in T\}$ 的概率分布情况;

三、常见的随机过程

对随机过程的分类,我们采用了按其概率特征进行分类,常见的有:

(1) 独立增量过程

对$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 这里$t_i \in T, 1 \leq i \leq n$,若增量$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立,则称$\{X(t), t \in T\}$ 为独立增量过程.

进一步,若对一切$0 \leq s < t$, 增量$X(t)-X(s)$的分布只依赖$t-s$,则称$\{X(t), t \in T\}$有平稳增量.

兼有独立增量和平稳增量的过程称为平稳独立增量过程.常见的**泊松(Poisson)过程**和**维纳(Wiener) 过程**(**或称布朗运动**)这两个是最重要的平稳独立增量过程。后面会详细介绍。

(2)马尔可夫过程

如果一个系统现在处于若干个状态中的某一个确定状态，经过一段时间该系统将会以某一概率转移到另一个状态，而这一转移概率仅依赖于现在的状态，与过去的历史无关，这一过程称为**马尔可夫过程**.

一般地，假设一个系统有n种可能状态，记作状态$1, 2, \cdots, n$.如果在某个观察期，该系统处于状态$j(1 \leq j \leq n)$，而在下一个观察期，它的状态转移到状态$i(1 \leq i \leq n)$的概率为p_{ij},则称p_{ij}为转移概率，$p_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$满足

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{nj} = 1$$

3 两个重要的随机过程及其应用

一、泊松过程及应用

定义 计数过程$\{N(t), t > 0\}$称为计数过程，如果$N(t)$ 表示从0到时刻t为止事件A发生的总次数，它满足：

(1)$N(t) \geq 0$且取值为整数；

(2)$s < t$时，$N(s) \leq N(t)$且$N(t) - N(s)$表示$(s, t]$ 时间内事件A 发生的次数。

定义 计数过程$\{N(t), t > 0\}$称为参数为λ 的Poisson过程，如果：

(1)$N(0) = 0, N(t) \in \mathbf{Z}$ ；

(2) 过程是独立增量；

(3) 在任意长度t的区间中，事件A发生的次数服从参数为λt 的泊松分布，即对任意的$s, t \geq 0$，有

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 1, 2, 3 \cdots$$

泊松过程是平稳增量过程，$E(N(t)) = \lambda t, \lambda$ 表示泊松过程的强度。常见的泊松过程有：

(1)排队论：到达的顾客数

(2)一个地区降水量

(3)撞击光电探测器的光子数

(4)自动电话交换机的接入电话数

(5)服务台接受咨询的电话次数

下面研究泊松过程在排队论中的运用.

例题1

对于某家银行服务系统，考虑顾客到达一服务台(只有一个服务员)排队等待服务情况.

模型假设

(1) 顾客到达是一个参数为λ的Poisson 过程;

(2) 先到达顾客先接受服务;

(3) 各顾客的服务时间是相互独立的,且服从相同的参数为μ 的指数分布;

(4) 到达时间间隔和服务时间相互独立.

模型建立

设$X(t)$表示t时刻系统中的顾客数,记$p_n(t) = P(X(t) = n)$. 再设T 表示顾客接受服务的时间, 则在$(t, t+\Delta t]$内有一位顾客接受完服务离去的概率为

$$
\begin{aligned}
& P(T \leq t+\Delta t | T > t) = 1 - P(T > t+\Delta t | T > t) \\
= \quad & 1 - P(T > \Delta t) = P(T \leq \Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} \\
= \quad & \mu\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

进而,没有顾客离去的概率为$1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$.

再根据假设(1)-(4) 及全概率公式,类似泊松过程的讨论, 我们有

$$p_n(t+\Delta t) = P(X(t+\Delta t) = n)$$

$$= P(X(t) = n-1, X(t+\Delta t) - X(t) = 1)$$

$$+P(X(t) = n+1, X(t+\Delta t) - X(t) = -1)$$

$$+P(X(t) = n, X(t+\Delta t) - X(t) = 0) + o(\Delta t)$$

$$= p_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) + p_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$$

$$+p_n(t)\lambda\Delta t\cdot\mu\Delta t + p_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$$

令$\Delta t \to 0$,易写出

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)p_n(t), \ n = 1, 2, \cdots \\ \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \end{cases}$$

求解上式是困难的,所以我们给出进一步的假设.

补充假设

(5) $p_n(t)$与t无关,即$p_n(t)=p_n$.

因此,我们可得

$$\begin{cases} 0=\lambda p_{n-1}+\mu p_{n+1}-(\lambda+\mu)p_n, \ n=1,2,\cdots \\ \\ 0=-\lambda p_0+\mu p_1. \end{cases}$$

进一步,可得

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \delta \\ \\ p_n = (1-\delta)\delta^n, \ \ n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

其中$\delta = \lambda/\mu < 1$. 容易得到

$$EX(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=\delta\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

他们分别表示平均队长和平均等待服务的顾客数.

二、布朗过程及运用

维纳过程(布朗运动)主要是研究一个粒子在直线上随机地运动,将其在时刻t的位置记为B_t, 研究B_t的变化规律.

定义 一个粒子在直线上随机运动,将其在时刻t 的位置记为$B(t)$且满足:

(1)$B(0)=0$;

(2)$\{B(t),t\geq 0\}$有平稳独立增量;

(3)对于每个$t>0, B(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$.

则称$\{B(t),t\in R\}$是维纳过程，或称为布朗运动.

当$\sigma=1$时，我们称$B(t)$为标准布朗运动.

布朗运动在金融中的运用

在金融市场上，某期权标的资产价格为S，S一般或多或少依赖于一些不可预见因素，因此不能直接建立一个关于S 变动的确定性模型. 为了建立确定性模型，我们假定市场是有效率的：

a)资产价格对新的市场信息的反应是迅速的，它能完全反映全部信息.

b)当前资产价格已经反映了过去的交易信息，资产价格变动的历史不包含任何对预测未来变动有用的信息，也就是说资产价格具有无后效性.

条件a)保证我们可以采用连续模型，条件b)则要求资产价格的微小变动dS跟布朗运动一样具有马尔可夫性.

现在考虑时间区间$[t, t+dt]$，在该时段，S在$[S, S+dS]$ 范围内变动. 最常见的一个模型就是报酬率$\frac{dS}{S}$ 满足：

$$\frac{dS}{S} = \mu\ dt + \sigma\ dB. \tag{1}$$

$\mu\ dt$是确定项，它给出了在常漂移率μ下S的平均增长率. 如果只有这一项，即$\frac{dS}{S} = \mu\ dt$，可求得$S(t) = S(0)e^{\mu t}$.

$\sigma\ dB$是随机项，它考虑了价格变动的随机性. 这里dB是布朗运动的一个增量，零均值且方差为dt，即$dB \sim N(0, dt)$. 系数σ称为波动率，衡量的是报酬率的标准偏差，这里我们假定σ为常数. 方程(1.13) 是一个随机微分方程（简记作SDE）.对于随机项$\sigma\ dB$必须运用特殊的链式法则$It\hat{o}$ 公式, 这里不做赘述.

4 马氏链

一、离散时间的马氏链

如果状态变量$T = \{0, 1, 2, \cdots\}$和状态空间$S = \{1, 2, \cdots k\}$,这种马氏链称为**离散时间的马氏链**。

1.记n时刻系统的状态为$X_n, a_i(n) = P(X_n = i)$. 从$X_n = i$ 转移到$X_{n+1} = j$的概率记为$p_{ij}(n)$, 即

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

此即n时刻的**一步转移概率**.

2.如果对一切$i,j\in S, p_{ij}(n)$ 都与n无关,相应的马氏链称为**齐次马氏链**. 对齐次马氏链,我们把$p_{ij}(n)$ 记为p_{ij}.

3.若记$P=(p_{ij}), i,j\in S$,则P称为**转移矩阵**. 显然, P满足:

(1).$p_{ij}\geq 0, i,j\in S$,

(2).$\sum\limits_{j\in S} p_{ij}=1, \forall i\in S$.

4.**定义**:称条件概率

$$p_{ij}{}^{(n)}=P(X_{m+n}=j|X_m=i),\quad i,j\in S; m\geq 0; n\geq 1$$

为马氏链的**n步转移概率**,相应的称$P^{(n)}=(p_{ij}{}^{(n)})$为**n步转移矩阵**.

称$p_{ij}^{(m)}(n)=P(X(n+m)=j|X(n)=i)$为马氏链$\{X(n),n\geq 0\}$的$m$ 步转移概率.

在齐次马氏链中,$p_{ij}^{(m)}(n)$与n 无关，我们记为$p_{ij}^{(m)}$.

称$P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$ 为齐次马氏链的m步转移矩阵.

显然有:$P^{(m)}=P^m$,即m 步转移矩阵为一步转移矩阵的m 次方.

类推可得到：C-K(切普曼-柯尔莫格洛夫)方程.

5.定理：**C-K(切普曼-柯尔莫格洛夫)方程**

对一切$n,m\geq 0,i,j\in S$有

(1)$p_{ij}{}^{(m+n)}=\sum\limits_{k\in S}p_{ik}{}^{(m)}p_{kj}{}^{(n)}$

(2)$P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}=\cdots=P^n$

（1）证明:

$$\begin{aligned} p_{ij}{}^{(m+n)} &= P(X_{m+n}=j|X_0=i) \\ &= \frac{P(X_{m+n}=j,X_0=i)}{P(X_0=i)} \end{aligned}$$

马氏链

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in S} \frac{P(X_{m+n}=j, X_m=k, X_0=i)}{P(X_0=i)})\\
&= \sum_{k\in S} \frac{P(X_{m+n}=j, X_m=k, X_0=i)}{P(X_m=k, X_0=i)} \frac{P(X_m=k, X_0=i)}{P(X_0=i)}\\
&= \sum_{k\in S} {p_{ik}}^m {p_{kj}}^n
\end{aligned}
$$

（2）式是（1）式的矩阵形式，利用矩阵乘法就可以得到。

6.**定义**：称状态i**可达**状态j，若存在$n \geq 0$使得$p_{ij}{}^{(n)} > 0$记为$i \to j$. 若同时$j \to i$,则称i, j**互通**，记为$i \leftrightarrow j$.

互通的状态属于同一类，如果马氏链中所有状态都互通，则称其是不可约的。

7.状态的分类

（1）记

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i\}, n \geq 1,$$

称$f_{ij}^{(n)}$ 为从状态i出发经过n步首次到达j 的概率。记$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

$f_{jj} = 1$,则称j是**常返状态**, $f_{jj} < 1$,则称j 是**非常返状态**。

（2）若j是常返状态，定义

$$u_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

u_j表示由状态j出发再回到状态j所需要的**平均步数（时间）**。

$u_j < \infty$,则称j是**正常返状态**, $u_j = \infty$, 则称j 是**零常返状态**。

（3）若集合$\{n : n > 0, p_{jj}^{(n)} > 0\}$非空，则称它的最大公约数$d = d(j)$为状态$j$的周期。$d > 1$, 称$j$是**周期**的。若$d = 1$, 称$j$是**非周期**的. 若$j$是正常返状态，且是非周期的，则称$j$是**遍历态**.

对于互通的状态，他们有相同的常返或非常返状态，若它们同为常返状态，又同时为正常返或零常返.

马氏链

状态的分类图

- 状态
  - 非常返
  - 常返
    - 正常返
      - 遍历态
        - 吸收的
        - 非吸收的
      - 周期态
    - 零常返

8.极限分布和平稳分布

（1）定义：称马氏链是遍历的，若所有状态互通且周期都为1的正常返状态。对于遍历的马氏链，极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, j \in S$$

称为马氏链的**极限分布**。

（2）定义：如果概率分布$\{\pi_k, k \geq 0\}$对任意状态k 满足$\pi = \pi P$其中$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots), P = (p_{ij})_{n\times n}$ 为转移矩阵，$\sum \pi_i = 1$,则称$\{\pi_k, k \geq 0\}$为此链的**平稳分布**。

（3）定理：对于不可约非周期的马氏链，若它是遍历的，则极限分布也是唯一的平稳分布。

例题

已知某商品在某地区的销售市场被A，B，C3个品牌占有率分别为40%, 30%, 30%. 根据调查:

上个月买A品牌的顾客这个月买A，B，C品牌的概率分别为40%, 30%, 30%.

上个月买B品牌的顾客这个月买B，A，C品牌的概率分别为30%, 60%, 10%.

上个月买C 品牌的顾客这个月买C，A，B品牌的概率分别为30%, 60%, 10%.

（1）求三个月后A，B，C这3个品牌的商品在该地区的市场占有率；

（2）如果顾客的流动倾向长期如上述不变，则品牌最终市场占有率会是多少?

解：用1,2,3，分别表示A,B,C,3个品牌，用X_n表示第n个月该地区的顾客购买商品的品牌选择。假设该地区的商品销售状态满足齐次马氏性。由题意知，

$\{X_n, n \geq 0\}$为状态空间S=1,2,3,的齐次马氏链。且$P(X_0 = 1) = 0.4, P(X_0 = 2) = 0.3, P(X_0 = 3) = 0.3, \{X_n\}$的一步转移概率为

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

马氏链

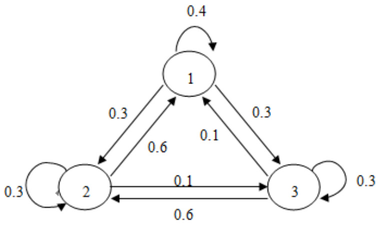
$$P(3) = P^3 = \begin{bmatrix} 0.496 & 0.252 & 0.252 \\ 0.504 & 0.252 & 0.244 \\ 0.504 & 0.244 & 0.252 \end{bmatrix}$$

由全概率公式可得

$$\begin{aligned} p_j(n) = p(X_n = j) &= \sum_{i=1}^{3} p(X_n = j | X_0 = i) p(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} p_{ij}(n) p_i(0), i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(P_1(3), P_2(3), P_3(3)) &= (\sum_{i=1}^{3} p_{i1}(3)p_i(0), \sum_{i=1}^{3} p_{i2}(3)p_i(0), \sum_{i=1}^{3} p_{i3}(3)p_i(0)) \\
&= (p_1(0), p_2(0), p_3(0))P(3) \\
&= (p_1(0), p_2(0), p_3(0))P^3 \\
&= (0.4, 0.3, 0.3)P^3 \\
&= (0.5008, 0.2486, 0.2496)
\end{aligned}
$$

所以三个月后A,B,C,品牌的市场占有率分别为0.5008,0.2486,0.2496.



(2)由上图可知,1,2,3三个状态是互通的非周期的.这是因为$d(1) = d(2) = d(3) = 1$,又由于$\{1, 2, 3\}$是有限的互通闭集,所以,1,2,3 三个状

态都是正常返状态,从而链存在唯一平稳分布,且此平稳分布就是极限分布,由

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.4\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.6\pi_3 \\ \pi_2 = 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_3 = 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解此代数方程组得$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.5, 0.25, 0.25)$, 即如果顾客流动情况长此下去,最终A,B,C 3个品牌的占有率为50%, 25%, 25%.

5 蒙特卡罗模拟

统计模拟是一门新兴的统计学和计算机相结合的学科.它是利用计算机产生某概率模型的随机数,在通过这些随机数来模拟真实模型.常见的统计模拟方法是蒙特卡罗模拟。

蒙特卡罗（Monte Carlo）方法,又称随机抽样或统计试验方法,属于计算数学的一个分支.传统的经验方法由于不能逼近真实物理过程,很难得到满意的结果,而蒙特卡罗方法由于能够真实模拟实际物理过程,故解决问题与实际非常符合,可以得到很圆满的结果.

4.1确定行为的模拟——蒙特卡罗模拟曲线下的面积

方法简述:设$y = f(x)$是闭区间$a \leq x \leq b$ 上的连续函数,满足$0 \leq f(x) \leq M$,其中M 是界定该函数的某个常数,如图,所求面积完全包含在高M 长$b-a$ 的矩形区域中.并设(x,y) 是在Ω 上均匀分布的二维随机变量,其联合密度函数为:

$$\frac{1}{M(b-a)} I_{\{a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq M\}}$$

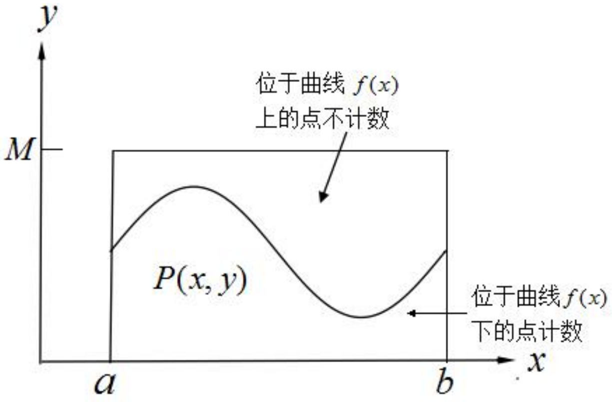


图1

则易见$\theta = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是Ω 中$y = f(x)$曲线下方的面积。假设我们向Ω 中进行随机投点,则点落在$y = f(x)$下方的概率p

$$p = P\{Y \le f(X)\} = \iint_{y\le f(x)} \frac{1}{M(b-a)} I_{\{a\le x\le b, 0\le y\le M\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b [\int_0^{f(x)} \frac{1}{M(b-a)}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{M(b-a)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\theta}{M(b-a)}$$

　　若我们进行了n次投点,其中n_0次点落入$y = f(x)$ 曲线下方,则用频率$\frac{n_0}{n}$ 来估计概率p, 即

$$\frac{n_0}{n} \approx p = \frac{\theta}{M(b-a)}$$

那么我们可以得到一个关于θ的估计

$$\hat{\theta} \approx \frac{n_0}{n} M(b-a)$$

从矩形域中随机地选一点$P(x,y)$, 做法是产生两个满足$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq M$ 的随机数x、y, 并将其视作坐标为x、y的点P.一旦$P(x,y)$选定,我们问,它是否在曲线下的区域内,即坐标y是否满足$0 \leq y \leq M$?若回答为是,则向计数器中加1 以计入点P. 需要两个计数器:一个计产生的总点数,另一个计位于曲线下的点数.由此可用下式计算曲线下面积的近似值:

蒙特卡罗模拟

$$\frac{\text{曲线下的面积}}{\text{矩形面积}} \approx \frac{\text{曲线下的点数}}{\text{随机点的总数}}$$

如引言所述,蒙特卡罗方法是随机的,为使预测值与真值之差变小需要做大量的试验.在最终的估计中,要讨论保证预先给定的置信水平所要求得试验次数,需要统计学的背景知识,然而作为一般准则,结果的精度提高一倍（即误差减少一半）,试验次数大约增至4 倍.

下面的算法给出了用蒙特卡罗方法求曲线下面积的计算机模拟的计算格式

蒙特卡罗计算面积方法

输入　模拟产生的随机点数n.

输出　AREA=给定区间$a \le x \le b$ 上曲线$y = f(x)$ 下的近似面积,其中$0 \le f(x) \le M$

第1步　初始化：COUNTER=0

第2步　对$i = 1, 2, \cdots, n$, 进行第$3 \sim 5$.

第3步　计算随机坐标x_i和y_i, 满足$a \le x_i \le b, 0 \le y_i \le M$.

第4步　对随机坐标x_i 计算$f(x_i)$.

第5部　若$y_i \leq f(x_i)$,则COUNTER 加1; 否则COUNTER 不变.

第6步　计算AREA=$\frac{M(b-a)COUNTER}{n}$.

第7步　输出AREA

停止

4.2随机行为的模拟

熟练运用蒙特卡罗模拟的关键之一是掌握概率论的原理,即随机性、不确定性及量化各种结果出现的可能性.概率可以看作长期的平均值,例如,若一个事件5次中出现一次,那么长期看该事件出现的机会是1/5. 从长期看,一个时间的概率可以视作比值

$$\frac{\text{有效的事件数}}{\text{事件的总数}}$$

本节主要考察3个简单的随机模型:

1)抛一枚正规的硬币

2)掷一个或一对正规的骰子

3)掷一个或一对不正规的骰子

一枚正规的硬币

多数人都知道抛一枚硬币得到正面或者反面的机会是1/2, 如果我们真正地开始抛硬币会发生什么呢？抛两次会出现一次正面吗？大概不会,再次说明,概率是长期平均值,预示抛很多次时出现正面次数的比例接近0.5. 设x 为[0,1]内的随机数,$f(x)$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} \text{正面}, & 0 \le x \le 0.5 \\ \\ \text{反面}, & 0.5 < x \le 1 \end{cases}$$

蒙特卡罗模拟

$f(x)$将结果是正面或者反面赋值到[0,1]内的一个数,随机赋值时我们可以利用这个函数的累积性质.抛很多次时能够得到如下出现的百分比:

随机数区间	出现的累计值	出现的百分比
$x < 0$	0	0.00
$0 < x < 0.5$	0.5	0.50
$0.5 < x < 1.0$	1	0.50

用下面的算法进行解释:（抛正规硬币的蒙特卡罗方法）

输入 模拟中生成的随机抛硬币的总次数n.

输出 抛硬币时得到正面的概率.

第1步 初始化:COUNTER=0.

第2步 对于$i = 1, 2, \cdots, n$, 执行第3,4 步.

第3步 得到[0,1]内的随机数.

第4步 若$0 \le x_i \le 0.5$,则COUNTER=COUNTER+1, 否则,COUNT
不变.

第5步 计算P(正面) =COUNTER$/n$.

第6步 输出正面的概率P(正面).

蒙特卡罗模拟

第7步 停止.

下表给出了对于不同的n由随机数x得到的结果，随着n 的变大，正面出现的概率为0.5，即次数的一半

表抛一枚正规硬币的结果

抛硬币次数	出现正面次数	出现正面百分比	抛硬币次数	出现正面次数	出
100	49	0.49	1000	492	
200	102	0.51	5000	2469	
500	252	0.504	10000	4993	

6　案例分析

案例一、离出概率

问题背景：

设袋中有a个白球b个黑球.甲、乙两个赌徒分别有n 元、m 元,他们不知道袋中哪种球多.他们约定：每次有放回从袋中摸1个球, 如果摸到白球甲给乙1元,如果摸到黑球,乙给甲1元,直到两个人有1人输光为止.求甲输光的概率.

案例分析

【问题分析】

由题知,甲赢1元的概率为$p=\frac{b}{a+b}$,输1元的概率是$q=1-p$.

设f_n为甲输光的概率,X_t表示赌t次（摸t次球）后甲的赌金.

$\tau=inf\{t:X_t=0,orX_t=n+m\}$,即表示最终摸球的次数.

如果$\tau=\{t:X_t=0,orX_t=n+m\}=\emptyset$,则令$\tau=\infty$.

案例分析

设$A=$"第一次甲赢",$P(A)=p, P(\overline{A})=q$,且在第一局甲赢的条件下(此时甲有$n+1$元)甲最终输光的概率为$f_{n+1}$，在第一次甲输的条件下(此时甲有$n-1$元)甲最终输光的概率为$f_{n-1}$.

由全概率公式的公式得：

$$f_n = pf_{n+1} + qf_{n-1}$$

$$f_0 = 1, f_{n+m} = 0;$$

案例分析

【模型建立与求解】

(1)当$p \neq q$ 时,由上面方程可得到下面递推公式

$$f_{n+1} - f_n = \frac{q}{p}(f_n - f_{n-1}) = (\frac{q}{p})^2(f_{n-1} - f_{n-2}) = \cdots$$

$$= (\frac{q}{p})^n(f_1 - f_0) = (\frac{q}{p})^n(f_1 - 1)$$

案例分析

又因

$$-1=(f_{m+n}-f_0)=\sum_{k=0}^{m+n-1}(f_{k+1}-f_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{m+n-1}(\frac{q}{p})^k(f_1-f_0)=\frac{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}{1-\frac{q}{p}}(f_1-1)$$

所以

$$f_1-1=-\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}$$

从而递推可得

$$
\begin{aligned}
f_n &= -(\frac{q}{p})^{n-1}\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}} \\
&= f_0 - \frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{q}{p})^k \\
&= 1 - \frac{1-(\frac{q}{p})^n}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}
\end{aligned}
$$

(2)当$p=q$ 时,由方程$f_n=pf_{n+1}+qf_{n-1}$可得,

$$f_{n+1}-f_n=f_n-f_{n-1}=f_1-1=f_1-f_0$$

又因

$$-1=\sum_{k=0}^{m+n-1}(f_{k+1}-f_k)=\sum_{k=0}^{m+n-1}(f_1-f_0)=(n+m)(f_1-1)$$

案例分析

解得

$$f_1 = 1 - \frac{1}{n+m}$$

所以

$$f_n = f_{n-1} + (f_1 - 1) = -\frac{1}{n+m} + f_{n-1}$$

递推可得

$$f_n = -\frac{n}{n+m} + f_0 = 1 - \frac{n}{n+m}$$

由(1)(2)可得

$$f_n=\begin{cases}1-\frac{1-(\frac{q}{p})^n}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}, p\neq q\\ \\ 1-\frac{n}{n+m}, p=q\end{cases}$$

如果乙有无穷多赌金(即m无穷大),则甲最终输光的概率为

$$p_n=\lim_{m\to\infty}f_n=\begin{cases}(\frac{q}{p})^n, p>q\\ \\ 1, p\leq q\end{cases}$$

案例分析

由上式知,如果赌徒只有有限的赌金,而且对手有无限赌金,当其每局赢的概率p不大于每局输的概率时$(p \leq q)$,最终他肯定（依概率）输光;即使$(p > q)$,他也以正的概率$(\frac{q}{p})^n$ 输光,只是他初始的赌金n越大,输光的概率越小.

而对于乙输光的概率设为q_m, 由对称性可得

$$q_m = \begin{cases} 1 - \frac{1-(\frac{q}{p})^m}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}, p \neq q \\ \\ 1 - \frac{m}{n+m}, p = q \end{cases}$$

案例分析

同时亦可以得到甲赢所有钱的概率(记g_n)为：

$$g_n = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^n}{1-(\frac{q}{p})^{m+n}}, p \neq q \\ \\ \frac{n}{n+m}, p = q \end{cases}$$

【模型推广】

一场比赛有赢,输,和局三种情况,其概率分别为p_i, q_i, r_i，则直到两人中有一人输掉赌博为止,求甲输光的概率f_j，求解过程类似,得到的转移方程为: $f_j = p_i f_{j-1} + r_j f_j + q_j f_{j-1}$.

案例二、食品加工厂最优方案选择问题

问题背景：

某食品加工厂主要生产即食产品,一般当天生产的产品必须当天售出,否则就会出现不能保质、或变质、造成一定的经济损失, 如果市场需求量大而生产量不足,则也会影响工厂的销售收入,该产品的单位成本为1.5元,单位产品售价为4元.工厂为了避免产品滞销存货过多而造成的经济损失,提出了如何制定合理的生产与库存数量的方案问题,能够使得工厂能有尽可能多的收益.

案例分析

经初步考虑拟从以下两种生产与库存方案中选出一个较好的方案：

方案(1)：按前一天的销售量作为当天的生产库存量.

方案(2)：按前两天的平均销售量作为当天的生产库存量.

【问题分析】

实际中的问题,生产与库存多了,销售不出去会造成经济损失,生产与库存少了不能满足需求也会造成一定的损失,工厂需要依据实际不确定的需求量来制定合理的生产与库存方案,使得能有尽量大的经济收益.

案例分析

解决问题的基本思路：利用蒙特卡罗方法随机模拟市场对该产品需求量,统计计算出按照两种不同方案T天后工厂的经济值,比较不同方案经济效益的大小,选出一个较好的方案.

假设市场对该产品的每天需求数量是一个随机变量,从统计学的角度分析得知,该随机变量服从正态分布,为了编程实现问题的目标,引入如下的变量：（本文中参数符号定义）

案例分析

T表示模拟天数；

C表示每天的需求量；

KC_1表示方案(1)当天的生产与库存量；

KC_2表示方案(2)当天的生产与库存量；

S_1表示方案(1)前一天的销售量；

S_{21}表示方案(2)前一天的销售量；

S_{22}表示方案(2)前二天的销售量；

ST_1表示方案(1)当天的实际销售量;

ST_2表示方案(2)当天的实际销售量;

L_1表示方案(1)当天的实际利润;

L_2表示方案(2)当天的实际利润;

LS_1表示方案(1)实际累计总利润;

LS_2表示方案(2)实际累计总利润.

【模型的建立与求解】

根据上面的分析,利用蒙特卡罗方法编程实现,主要随机模拟前一天和前两天的各种不同的销售量,来确定当天的生产与库存量,依据可能的实际销售量,计算出当天的销售利润,选择使连续几天利润尽可能大的方案,下面给出$Matlab$程序.

(1)建立蒙特卡罗方法的M文件,函数名：mcun.m

$function[LS1, LS2] = mcun(T, S1, S21, S22)$

$LS1 = 0; LS2 = 0; k = 1;$ %确定初始条件.

$While\, k < T$

案例分析

$KC1 = S1;$ %前一天的销售量作为当天的库存量.

$KC2 = (S21 + S22)/2;$ %前两天的平均销售量作为当天库存量.

$C = normrnd(1500, 30 * 30)$ %生成服从正态分布的随机数.

$if\ C > KC1$

$ST1 = KC1;$ %方案一当天销售量= 库存量.

$else$

$ST1 = C;$ %方案一当天销售量=需求量.

end

$if\ C > KC2$

$ST2 = KC2;$ %方案二当天销售量= 库存量.

$else$

$ST2 = C;$ %方案二当天销售量=需求量.

案例分析

end

$L1 = 4 * ST1)1.5 * KC1;$ %方案一当天实际利润

$L2 = 4 * ST2)1.5 * KC2;$ %方案二当天实际利润

$LS1 = LS1 + L1;$ %方案一累计总利润

$LS2 = LS2 + L2;$ %方案二累计总利润

$k = k + 1;$

$S1 = ST1 : S22 = S21; S21 = ST2;$

$ends$

(2)调用函数mcun(T,S1,S21,S22)

【模型的结果分析与推广】

在MATLAB命令窗口多次输入参数T, S_1, S_{21}和S_{22}数值,分别调用函数mcun(T,S1,S21,S22),进行求解计算,并对结果进行分析,由若干次模拟实演的结果可以看出,方案(1)的利润总是小于方案(2)的利润,所以该工厂实际按方案(2)进行组织生产与库存,工厂会有更好的经济效益.