第八周练习题

一、求：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$

二、已知$f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0.f''(x)>0$。若$g(x)$是曲线

$y=f(x)$过切点$(x,f(x))$的切线在x轴上的截距。求：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{g(x)}f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$

三、已知曲线Γ：$\begin{cases}x^2=3y,\\ 2xy=9z\end{cases}$。求证：曲线$\Gamma$的任一切线与一定向量成一定角。

四、已知可微函数 $f(x)$ 满足：$|f'(x)|\le|f(x)|$ 且 $f(a)=0$. 求证： $f(x)\equiv 0$.

五、已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数， a_0,a_n,b_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 为其傅里叶系数，

A_0,A_n,B_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 为 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 的傅里叶系数，

(1).试用 a_0,a_n,b_n 表示 A_0,A_n,B_n；(2)求证： $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$.

六、证明： $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sqrt{\arctan\frac{1}{k^2+k+1}}\le\sqrt{\frac{\pi}{3}},(n\ge 1)$.

七、设 $0<x<\frac{\pi}{2}$， 证明： $\frac{1}{\sin^2 x}\le\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$.

八、设 $a>0$， $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，试证：

$$|f(0)|\le\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x.$$