

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷 (数学类B卷, 2020年11月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b,$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon = 1$ 或 -1)平行于已知直线

$$l_\varepsilon: \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ_ε 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $1 \leq f(x) \leq 3$, 证明: $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

姓名: _____

得分	
评阅人	

三、(本题15分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式. 又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geq 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 σ 为 n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. $\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价：

(1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: v_1, \dots, v_{n+1} , 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

得分	
评阅人	

五、（本题15分）计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分(例如：当 n 为正整数且 $x \in [n, n + 1)$ 时， $(x) = x - n$).

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，满足对任意 $x \in [0, 1]$

$$\int_{x^2}^x f(t)dt \geq \frac{x^2 - x^4}{2}.$$

证明： $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{10}$.