第十届中国大学生数学竞赛预赛试卷

（非数学类，2018 年 10 月 27 日）

绝密★启用前 (14 金融工程–零蛋大)

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	24	8	14	12	14	14	14	100
得 分								

注意：本试卷共七大题，满分 100 分，考试时间为 150 分钟.

1. 所有答题都须写在试卷密封线右边，写在其他纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

座位号 考场号 姓名 准考证号 学校 省市

密封线 答题时不要超过此线

得 分	
阅卷人	

一、（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right) =$ ________

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ________.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x =$ ________.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$ ________.

得　分	
阅卷人	

二、(本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1) = 0$, 求函数 $f(x^2 - y^2)$, 使得曲线积分

$$\int_L y\big(2 - f(x^2 - y^2)\big)\,\mathrm{d}x + xf(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y = \pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

座位号＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿ 省市＿＿＿＿

密封线　答题时不要超过此线

得　分	
阅卷人	

三、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

得　分	
阅卷人	

四、(本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成的空间图形.

省市______ 学校______ 准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座位号______

密封线 答题时不要超过此线

得　分	
阅卷人	

五、(本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

得　分	
阅卷人	

六、(本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有

$$\ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

省市________ 学校________ 准考证号________ 姓名________ 考场号________ 座位号________

密封线　答题时不要超过此线

得　分	
阅卷人	

七、(本题满分 14 分) 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是正数数列, 且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta, k=1,2,\cdots$, δ 为一常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.