专业: ______ 座位号: ______ 考场号: ______ 所在院校: ______ 准考证号: ______ 姓名: ______

密封线 答题时不要超过此线

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷

(数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点. $A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$ 为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1, B_1 与 C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.

(2) 求点 A_1, B_1 与 C_1 的坐标.

(3) 给定点 $A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}$.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx\,(x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

得分	
评阅人	

四、（本题 20 分）称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题 15 分）设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi\Big(\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\Big), \qquad n \geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

得分	
评阅人	

六、（本题 20 分）对于有界区间 $[a,b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, 其范数定义为 $\|P\| = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1} - x_k)$. 现设 $[a,b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x, y \in [a,b]$, 成立 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. 定义 $s(f;P) \equiv \sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$. 若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y = f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 可求长.