散射理论

散射问题的定态微扰处理

散射定态微扰就是解定态薛定鄂方程，把散射势能项当作定态微扰处理。这个方法跟时间没有关系，类似于处理简并定态微扰问题，但两者又有不同：

1）一般简并定态微扰问题中简并能级是分立的，而这里能量是连续谱（非束缚态）

2）一般简并定态微扰问题需要求解能量的修正。这里散射问题是已知系统能量为E，而需要求解波函数的修正

设无散射微扰能时系统定态方程(自由粒子)为：

$$\hat{H}_0|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle$$

加上微扰V后：

$$\boxed{\left(\hat{H}_0 + V\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle}$$

即：

$$\begin{cases} \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi_0\rangle = 0 \\ \left(E - \hat{H}_0\right)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \end{cases}$$

两式相减得：

$$\left(E - \hat{H}_0\right)\left(|\psi\rangle - |\psi_0\rangle\right) = V|\psi\rangle$$

可以形式解出 $|\psi\rangle$ (Lippman-Schwinger方程)：

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \left(E - \hat{H}_0\right)^{-1} V|\psi\rangle$$

注意：这并不代表 $|\psi\rangle$ 被解出来了

或者：

$$|\psi\rangle=|\psi_0\rangle+\hat{G}V|\psi\rangle$$

解的第一项代表无微扰时的0级波函数，第二项代表微扰修正，其中 $\hat{G}$ 为格林函数算符(与传播子相关)：

$$\hat{G}\equiv\left(E-\hat{H}_0\right)^{-1}$$

可以再次用迭代法求级数解，即方程右边的 $|\psi\rangle$ 用0级近似 $|\psi_0\rangle$ 代替，求得 $|\psi\rangle$ 后再代入方程的右边，如此循环往复得：

$$|\psi\rangle=\left(1+\hat{G}V+\hat{G}V\hat{G}V+\cdots\right)|\psi_0\rangle$$

$$=\left(1+\hat{G}\hat{T}_s\right)|\psi_0\rangle,\quad\left(\hat{T}_s=V+V\hat{G}V+\cdots\right)$$

根据问题的需要，可取1级近似($\hat{G}V$)，2级近似($\hat{G}V\hat{G}V$)等。我们需要量子态在坐标表象中的形式。如初态在坐标表象中可表示为：

$$\langle\vec{r}|\psi_0\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle=\langle\vec{r}|\psi_0\rangle+\langle\vec{r}|\hat{G}\hat{T}_s|\psi_0\rangle$$

$$=\langle\vec{r}|\psi_0\rangle+\int d^3r'\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{T}_s|\psi_0\rangle$$

$\langle\vec{r}'|\hat{T}_s|\psi_0\rangle$代表粒子在$\vec{r}'$处被势场散射，$\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle$代表散射后的粒子从$\vec{r}'$处传播至$\vec{r}$处。下面求坐标表象中的格林函数：

$$\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle=\int d^3k'\left\langle\vec{r}\left|\frac{1}{E-\hat{H}_0+i\varepsilon}\right|\vec{k}'\right\rangle\langle\vec{k}'|\vec{r}'\rangle$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k'\frac{1}{E-\frac{\hbar^2k'^2}{2m}+i\varepsilon}e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$=-\frac{2m}{(2\pi)^3\hbar^2}\int d^3k'\frac{1}{(k'+k+i\varepsilon)(k'-k-i\varepsilon)}e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

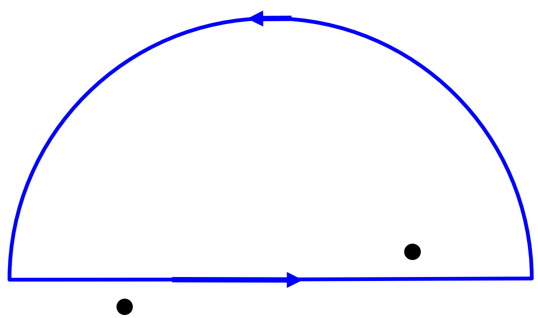
其中 $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$，$\varepsilon>0$为一个趋于0的极小量，其意义在后面给出

$$\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle = -\frac{2m}{(2\pi)^2\hbar^2}\int k'^2 dk' d\cos\theta \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\theta}}{(k'+k+i\varepsilon)(k'-k-i\varepsilon)}$$

$$= -\frac{2m}{(2\pi)^2\hbar^2}\int_0^{\infty} k'^2\, dk' \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}-e^{-ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k'+k+i\varepsilon)(k'-k-i\varepsilon)ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\frac{2m}{(2\pi)^2\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} k'^2\, dk' \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(k'+k+i\varepsilon)(k'-k-i\varepsilon)ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

这里需要用到复变函数分析中的留数定理：



$$\oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

其中f(z)是z的解析函数，闭合路径积分沿逆时针方向，包裹奇点z_0。由于指数中参数 $|\vec{r}-\vec{r}'|>0$ 所以积分选取如图所示的上半圆路径。上半圆内只有一个留数：

$$k' = k + i\varepsilon$$

根据留数定理得（已令 $\varepsilon=0$）：

$$\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle=-\frac{2m}{(2\pi)^2\hbar^2}(2\pi i)\frac{k^2 e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{2ik^2|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

如果当初假设的是 $\varepsilon<0$，那么就会得到

$$\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle \propto e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

这代表一个从外部向原点传播的球面波，显然不符合物理图像的要求。我们需要的是一个从原点向外传播的球面波来代表散射波，已经求得的格林函数正好满足这一要求。又根据格林算符的定义：

$$\left(E-\hat{H}_0\right)\hat{G}=1$$

有

$$\langle\vec{r}|\left(E-\hat{H}_0\right)\hat{G}|\vec{r}'\rangle=\langle\vec{r}|\vec{r}'\rangle=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\int d^3r''d^3k\langle\vec{r}|\left(E-\hat{H}_0\right)|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\vec{r}\,''\rangle\langle\vec{r}\,''|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r''d^3k\left(E-\frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'')}\langle\vec{r}\,''|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\left(E+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\right)\int d^3r''d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'')}\langle\vec{r}\,''|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle$$

$$=\left(E+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\right)\int d^3r''\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'')\langle\vec{r}\,''|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle$$

$$=\left(E+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\right)\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle$$

即在坐标表象中的格林函数是下列方程的解：

$$\left(E+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2\right)\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}\,'\rangle=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

代入前面解得的格林函数，就是：

$$\left(\nabla_r^2+k^2\right)\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

这是一个很有用的等式(如点电荷电场的散度定理)。有了格林函数表达式，就可以把散射问题的本征函数表示出来了：

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle=\langle\vec{r}|\psi_0\rangle+\int d^3r'\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{T}_s|\psi_0\rangle$$

$$=\langle\vec{r}|\psi_0\rangle+\int d^3r''d^3r'\langle\vec{r}|\hat{G}|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{T}_s|\vec{r}''\rangle\langle\vec{r}''|\psi_0\rangle$$

也就是：

$$\psi\left(\vec{r}\right)=\psi_0\left(\vec{r}\right)+\int d^3r''d^3r'G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)T_s\left(\vec{r}',\vec{r}''\right)\psi_0\left(\vec{r}''\right)$$

在这里还要做一个近似：因为观察点离开散射中心的距离(r)通常远大于散射势场本身的尺度(r')，所以

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{r^2-2r\vec{e}_r\cdot\vec{r}'+r'^2}$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = r\sqrt{1-2\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{r}'}{r}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}$$

$$\approx r\left(1-\vec{e}_r\cdot\frac{\vec{r}'}{r}\right)$$

$$= r-\vec{e}_r\cdot\vec{r}'$$

于是也有：

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\approx\frac{1}{r}$$

格林函数近似为：

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)\approx-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}$$

于是 $r >> r'$ 时：

$$\psi\left(\vec{r}\right)\approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r''d^3r'e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}T_s\left(\vec{r}',\vec{r}''\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}''}$$

也可以写成：

$$\lim_{r\to\infty}\psi(\vec{r})=e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

其中f(θ, φ)为散射球面波的微分振幅，或简称微分散射振幅：

$$f(\theta,\varphi)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r''d^3r'e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}T_s(\vec{r}',\vec{r}'')e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}''}$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3rd^3r'e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}T_s(\vec{r}',\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},\quad\left(\vec{k}'\equiv k\vec{e}_r\right)$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3rd^3r'e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}\left\langle\vec{r}'\left|V+V\frac{1}{E-\hat{H}_0+i\varepsilon}V+\cdots\right|\vec{r}\right\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3rd^3r'e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}\langle\vec{r}'|V|\vec{r}\rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+\cdots$$

只取第一项为波恩近似

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3rd^3r'e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}V(\vec{r})\delta(\vec{r}'-\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+\cdots$$

$$=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3re^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}V(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+\cdots$$

$$=-\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\left(L^{-3/2}e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}\right)V(\vec{r})\left(L^{-3/2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)+\cdots$$

(L为箱归一化常数)

$$=-\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}V_{fi}+\cdots$$

也就是说f(θ,φ)正比于系统在散射势能微扰下从i态跃迁到j态的几率幅。散射部分（球面波）的粒子流密度：

$$\vec{j}_s=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_s\vec{\nabla}\psi_s^*-\psi_s^*\vec{\nabla}\psi_s\right),\qquad \psi_s=f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

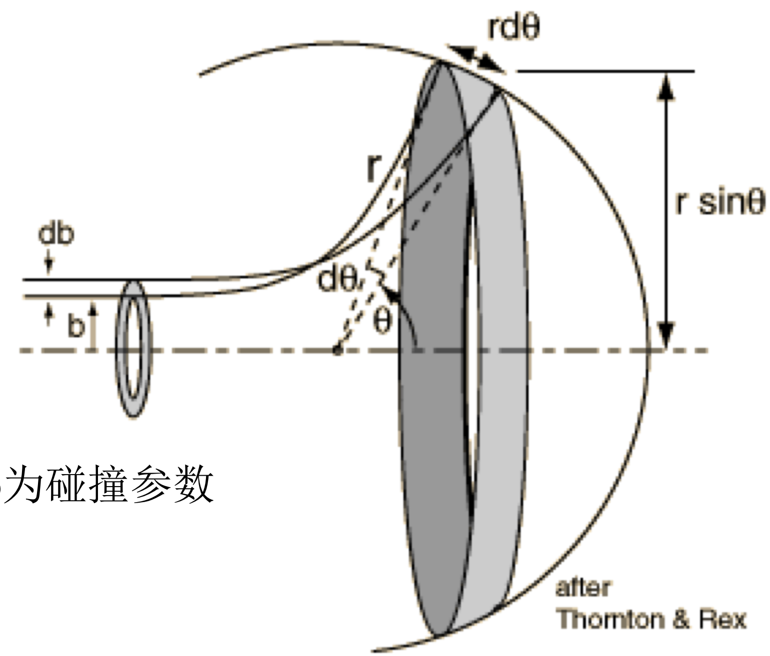
$$\vec{\nabla}=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

径向部分：$$\vec{j}_s=\frac{i\hbar}{2m}|f(\theta,\varphi)|^2\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-ikr}}{r}-h.c.\right)$$

$$=\frac{\hbar k}{mr^2}|f(\theta,\varphi)|^2$$

入射粒子流密度：

$$\vec{j}_{in} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{in}\vec{\nabla}\psi_{in}^{*} - \psi_{in}^{*}\vec{\nabla}\psi_{in}\right), \qquad \psi_{in} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$= \frac{\hbar\vec{k}}{m}$$



b为碰撞参数

$$\begin{cases} d\sigma = \sigma(\theta,\varphi)\,d\Omega \\ j_{in}\,d\sigma = j_s r^2 d\Omega \end{cases}$$

$j_s r^2 d\Omega$为**单位时间内入射粒子跃迁到立体角dΩ内的粒子数**

j_{in}是**入射粒子流密度**：单位时间内通过单位横截面积粒子数

σ是**微分散射横截面积**：通过dσ内的粒子都被散射到dΩ内

于是：

$$\sigma(\theta,\varphi)=\frac{j_s r^2}{j_{in}}=\left|f(\theta,\varphi)\right|^2$$

这也正是称f(θ, φ)为微分散射振幅的含义，其模方为微分散射横截面积，正比于粒子被散射到(θ, φ)方向的概率

全散射面积：

$$\sigma_{tot}=\int\sigma(\theta,\varphi)d\Omega$$

如果V为中心势场：$V(\vec{r}) = V(r)$，积分可以简化（ $\vec{q} \equiv \vec{k}' - \vec{k}$ ）：

$$\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3x = \int e^{-iqr\cos\theta} V(r) r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int 2\pi \frac{2\sin(qr)}{qr} V(r) r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty rV(r)\sin(qr)dr$$

于是(注意φ已被积分掉)：

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{4m^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty rV(r)\sin(qr)dr \right|^2}$$

注：关于波恩近似成立条件，参阅分波法的阐明（周世勋）

散射问题定态解的渐进形式讨论

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

渐近形式解的几点讨论：

（1）只在 r>>r' 时有意义

（2）此形式不是自由粒子波函数的解

（3）如果选定z轴正向沿 $\vec{k}$ 的方向，则一般说来f和φ无关（见后面讨论）

（4）粒子流密度守恒定律对f(θ, φ)的形式作出了限制：**光学定理**（见附件）

（5）作为光学定理的推论，在θ=0的方向这两部分波有相消干涉

全同粒子散射

对于固定势场，散射问题定态方程的解为

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

如果是双粒子散射，则考虑二者的质心坐标系，约化质量和相对坐标，这时

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

但是对于全同双粒子散射，$\psi(\vec{r})$需要进行对称或反对称化：

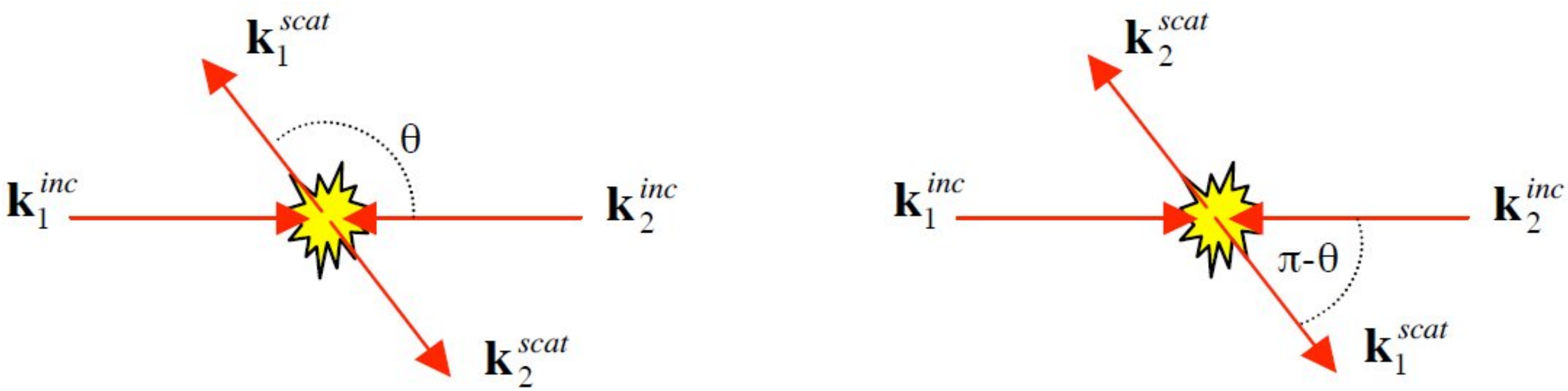
$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \pm e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \left[f(\theta, \varphi) \pm f(\pi-\theta, \varphi+\pi)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

如果两个粒子分别沿正负z轴方向入射，则

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \left[f(\theta) \pm f(\pi-\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

注意这里没有$1/\sqrt{2}$因子，因为两个粒子散射后都可以被探测到，无法区分，这样散射速率(截面)有一个倍增效应

物理图像：



这时系统的微分散射截面为

$$\sigma(\theta) = \left|f(\theta) \pm f(\pi-\theta)\right|^2$$

$$= \left|f(\theta)\right|^2 + \left|f(\pi-\theta)\right|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left[f^*(\theta) f(\pi-\theta)\right]$$

最后一项为干涉项，是基于全同性原理的纯量子效应

也可理解为是下面对称(反对称)化波函数的散射过程：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1\psi_2\right\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2\psi_1\right\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1'\psi_2'\right\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2'\psi_1'\right\rangle$$

可分解为四个散射分振幅：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1\psi_2\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1'\psi_2'\right\rangle \quad : \quad \frac{1}{2}f(\theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1\psi_2\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2'\psi_1'\right\rangle \quad : \quad \frac{1}{2}f(\pi-\theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2\psi_1\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_1'\psi_2'\right\rangle \quad : \quad \frac{1}{2}f(\pi-\theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2\psi_1\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\psi_2'\psi_1'\right\rangle \quad : \quad \frac{1}{2}f(\theta)$$

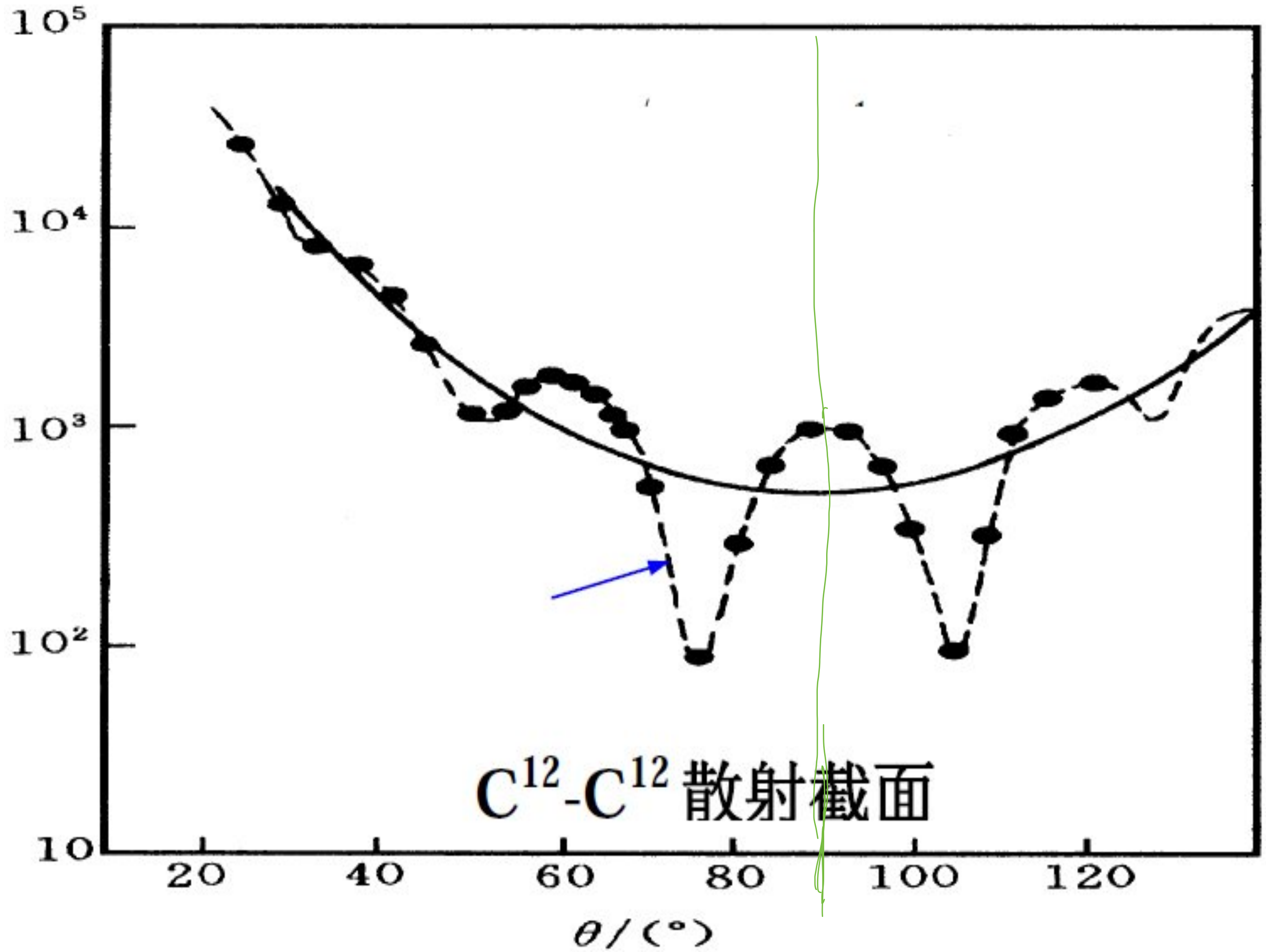
振幅相加得总微分~~截面~~：振幅

$$f_{tot} = f(\theta) \pm f(\pi-\theta)$$

如果是非全同粒子，则在θ方向观测到两种粒子任意一个的总散射截面，应该是这样的非相干叠加：

$$\sigma(\theta) = \left|f(\theta)\right|^2 + \left|f(\pi-\theta)\right|^2$$

下图代表C^{12}-C^{12}散射截面的角分布。可以看出，散射截面对于$\theta=\pi/2$角对称, 并且出现明显的干涉特征：



散射问题中的角动量守恒

回顾：中心力场问题(束缚或非束缚)的定态薛定鄂方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+V(r)+\frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}\right]\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$$

在势场V与时间和角度(中心力场)无关的情况下，$\psi(\vec{r})$可分离变量求解，其中径向波函数满足

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right]\right\}R(r)=0$$

同时，其角度部分波函数解即是球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 而且角动量算符和哈密顿对易：

$$\left[\hat{L}^2,\hat{H}\right]=0,\quad \left[\hat{L}_z,\hat{H}\right]=0$$

这也就意味着角动量在散射过程中是守恒量，比如初态是l=1态，那么散射过后末态也必为l=1态

设入射粒子沿z轴正向，于是其角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 没有z方向分量，只有x、y方向的分量，也即意味着球谐函数的磁量子数m=0，这是由初始条件决定的。所以，如果设入射粒子沿z轴正向，则Lippman-Schwinger方程解的渐近展开式可写为

$$\boxed{\lim_{r\to\infty} \psi_k(r,\theta) = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}}$$

其中微分散射振幅不再与φ有关系，而只与θ有关

分波法

前面讲过，中心力场问题径向波函数在r→0时满足

$$\lim_{r\to 0} R(r) \propto r^l$$

在入射粒子波数k→0时(或德布罗意波长>>势场范围)，粒子所感受到的势场作用随l的增大而迅速减小。分波法处理的就是低能入射粒子，由于势场范围很小，入射粒子波可以轻松“绕过”势场障碍，其被散射的部分很少，并且只讨论入射粒子l=0分波(S波)的散射就足够了，势场对其它l部分的作用相对来说可以忽略

经典情况下，l较大的粒子碰撞参数b较大，离力心较远，受散射势能影响小。所以经典情况下也是l=0对散射最重要

全同粒子的散射有新内容，分两种情况考虑：

1) 如果是全同费米子，而且处于自旋三重态，由于总波函数交换反对称，这就要求空间部分波函数满足

$$\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

而满足空间反射反对称的球谐函数就是P波（l=1）、F波（l=3）等，所以在k→0时两者几乎没有散射

2）如果是全同玻色子，如果自旋部分对称（如两个标量玻色子散射），由于总波函数交换对称，这就要求空间部分波函数也对称，这时球谐函数就是S波（l=0）、D波（l=2）等。由于没有P波，在k→0时只计算S波的散射就能得到相当精确的结果

受课时所限，分波法问题本课程在本学期不再做详细论述，感兴趣的同学可以参考周世勋《量子力学教程》中的相关内容。

Bose 子.

例(1)：两个自旋为1的全同粒子散射，求非极化的微分散射截面。

极化的意思：一个粒子的总自旋量子数确定，则在其任意自旋态下，总能在空间中找到一个方向，该粒子在此方向上自旋投影的平均值为最大值且非0

非极化的意思：非极化是这样一种量子态，粒子自旋在空间任意方向投影的平均值为0。如果粒子总自旋非0，那么在纯态量子空间是找不到这种态的，而只能在混合态中找。比如给定一组全同粒子，一半自旋向上，一半自旋向下，这种几率混合不同于量子力学中的几率振幅的叠加，而就是一种统计上的非相干的量子态混合，混合结果是该组粒子平均自旋测值为0

答：两个粒子的总自旋S为0、1、2(单位为 $\hbar$，分别是1、3、5重态。其中S=1的三重态自旋波函数反对称(曾谨言9.3公式22)，所以空间部分也是反对称，微分散射截面为

$$\left|f(\theta)-f(\pi-\theta)\right|^2$$

S=0和S=2的自旋态自旋波函数对称，所以空间部分也是对称，微分散射截面为

$$\left|f(\theta)+f(\pi-\theta)\right|^2$$

因为总自旋非极化，所以是非相干混合态，粒子在这9个纯态上的分布概率都是1/9，所以最后的总微分截面为

$$\sigma(\theta)=\frac{3}{9}\left|f(\theta)-f(\pi-\theta)\right|^2+\frac{6}{9}\left|f(\theta)+f(\pi-\theta)\right|^2$$

$$=\left|f(\theta)\right|^2+\left|f(\pi-\theta)\right|^2+\frac{2}{3}\mathrm{Re}\left[f^*(\theta)f(\pi-\theta)\right]$$

例(2)：两个处于下列相干态的电子散射，求微分散射截面。

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle$$

方法一：根据角动量守恒，自旋 $|1,0\rangle$ 态散射后仍为 $|1,0\rangle$ 态，自旋 $|0,0\rangle$ 态散射后仍为 $|0,0\rangle$ 态，所以散射截面可以分别计算后相加

$|1,0\rangle$ 态自旋对称，所以空间部分反对称，这部分微分散射截面为

$$\frac{1}{2}\left|f(\theta) - f(\pi-\theta)\right|^2$$

$|0,0\rangle$ 态自旋反对称，所以空间部分对称，这部分微分散射截面为

$$\frac{1}{2}\left|f(\theta) + f(\pi-\theta)\right|^2$$

总微分散射截面为

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2}\left|f(\theta) - f(\pi-\theta)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|f(\theta) + f(\pi-\theta)\right|^2$$

$$\sigma(\theta)=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2$$

方法二：从耦合表象换为非耦合表象

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle=|\uparrow,\downarrow\rangle$$

也就是说两个电子处于不同的自旋本征态上，是**非全同粒子**，在θ方向上观察到任意电子的总截面应是两个分截面的非相干叠加：

$$\sigma(\theta)=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2$$

全同：自旋一致，位置有交叠

附件

课后阅读—光学定理

回顾粒子流密度公式： $\vec{J}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^{*}-\psi^{*}\vec{\nabla}\psi\right)$

设入射波沿z轴正向，公式中第二项在垂直于z轴平面上的积分为（舍去$1/r^2$，$1/r^3$等高阶项）：

$$\int\psi^{*}\nabla_{z}\psi dxdy=ikA+\frac{ikf_{0}}{z}\int e^{ik(r-z)}dxdy+\frac{ikf_{0}^{*}}{z}\int e^{-ik(r-z)}dxdy$$

其中A为总积分面积，$f_0=f(\theta=0)$

利用 $r=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\approx z+\frac{x^{2}+y^{2}}{2z}$ 得

$$\int\psi^{*}\nabla_{z}\psi dxdy=ikA+\frac{ikf_{0}}{z}\int e^{\frac{ik}{2z}\left(x^{2}+y^{2}\right)}dxdy+\frac{ikf_{0}^{*}}{z}\int e^{-\frac{ik}{2z}\left(x^{2}+y^{2}\right)}dxdy$$

再利用 $\int e^{i\alpha x^{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{i\pi/4}$ 得

$$\int\psi^{*}\nabla_{z}\psi dxdy=ikA-2\pi f_{0}+2\pi f_{0}^{*}$$

课后阅读—光学定理

最后得 $$\int J_z dxdy = v\left[A - \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(f_0)\right]$$

即：**散射振幅在z方向的虚部代表入射波的衰减**

练习：利用粒子流密度守恒 $\lim\limits_{r\to\infty}\int \vec{J}\cdot\vec{e}_r r^2 d\Omega = 0$ 证明

光学定理 $$\boxed{\sigma_{tot} = \int |f(\theta,\varphi)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(f_0)}$$ 此即总散射截面与散射振幅沿入射波方向虚部之间的关系

前沿阅读：由于f(θ, φ)直接和跃迁矩阵元 T_{fi} 成正比，而 T_{fi} 又由散射矩阵S定义，光学定理的基础来自于S矩阵的幺正性(都是一种几率守恒)。在希格斯粒子发现之前，人们知道如WW等双玻色子散射矩阵S的幺正性就必然要求了希格斯粒子的存在，而且给出了其质量的上限。后来发现的希格斯质量恰是远低于这个上限