

清 华 大 学

# 综 合 论 文 训 练

题目：相对绩效比率和 VaR 约束下的  
养老基金优化管理问题

系 别：数学科学系

专 业：数学与应用数学

姓 名：夏 焱

指导教师：梁宗霞 教授

2020 年 6 月 8 日

# 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名： 夏 焱 导师签名： 李 强 日 期： 2020.06.08

## 中文摘要

本文研究了非自融资、非线性和有 Value-at-Risk 约束的随机控制问题，该问题属于固定缴费型养老金风险管理问题。不同于传统的期望效用理论，我们以退休时刻财富相对绩效比率（高绩效与低绩效之比）评估退休时刻的投资表现，而导致了该问题的非线性。由于考虑到了固定缴费项，导致了该问题的非自融资性。

我们首先通过引入辅助过程将问题转换成等价的自融资模型，然后基于鞅方法、分式规划方法、Lagrange 乘子法以及凹化（对偶）的方法求解了原规划问题，从而得到了最优决策过程、相应的退休时刻财富和值函数。文章的最后，我们对值函数进行敏感性分析和探讨。

**关键词：**相对绩效比率；VaR 约束；鞅方法；拉格朗日乘子法；固定缴费型养老金

## ABSTRACT

This thesis studies a stochastic control problem of non-self-financing, non-linear and with Value-at-Risk constraints, which belongs to the problem of defined contribution pension risk management. Different from the traditional expected utility theory, we use the relative performance ratio (the ratio of high performance to low performance) of wealth at the time of retirement to evaluate investment performance at the time of retirement, which leads to the non-linearity of this problem. Due to the consideration of defined contribution items, this problem becomes non-self-financing.

We first convert the problem into an equivalent self-financing model by introducing an auxiliary process, and then solve the original planning problem based on the martingale method, fractional programming method, Lagrange multiplier method, and concave (dual) method, thus obtaining the optimal decision process, optimal terminal wealth and optimal value of pension. At the end of the article, we conduct a sensitivity analysis and discussion on the optimal value.

**Keywords:** Performance ratio; Value-at-Risk constraint; Martingale method; Lagrange multiplier method; Defined contribution pension plan

# 目 录

第 1 章 引言 .....	1
1.1 背景介绍 .....	1
1.1.1 固定缴费型养老金 .....	1
1.1.2 相对绩效比率 .....	1
1.1.3 VaR 约束 .....	2
1.2 文章概述 .....	2
第 2 章 模型建立 .....	3
2.1 金融市场模型和财富过程 .....	3
2.2 相对绩效比率问题建立 .....	4
第 3 章 问题转化与求解分析 .....	6
3.1 固定缴费项的转化 .....	6
3.2 鞅方法 .....	7
3.3 线性化方法 .....	9
3.4 最优参数的存在性 .....	11
3.5 VaR 约束的转化 .....	13
3.6 不等式约束的转化与非随机化 .....	14
3.7 求解非随机问题 .....	15
3.8 最优乘子的存在性 .....	26
3.9 小结 .....	27
第 4 章 数值求解与分析 .....	28
4.1 数值求解 .....	28
4.1.1 求解过程 .....	28
4.1.2 所遇到的问题 .....	29
4.2 数值分析 .....	29
第 5 章 结论 .....	32
插图索引 .....	33

表格索引 .....	34
公式索引 .....	35
参考文献 .....	39
致 谢 .....	41
声 明 .....	42
附录 A 外文资料的调研阅读报告 .....	43

# 第 1 章 引言

## 1.1 背景介绍

### 1.1.1 固定缴费型养老金

由于和每个人的利益都息息相关，退休制度以及养老金相关的问题在近年来受到了广泛的关注，于是养老金的风险管理就显得十分重要。一般来讲主要有两种类型的养老金计划：固定缴费型养老金计划 (Defined-contribution pension plan) 和固定收益型养老金计划 (Defined-benefit pension plan)。固定缴费型养老金计划是发起人公司为每个参保人提供一个单独的帐户，并仅基于该参保人的帐户缴纳的金额和可能分配给该参保人的帐户的任何其他收入，支出，损益而提供利益的养老计划。在固定缴费型养老金计划中，未来收益会根据投资收益的波动而变动。固定收益型养老金计划是一种雇主承诺在参保人退休时提供指定养老金的养老金计划。该退休金不直接取决于个人投资收益。

由于固定缴费型养老金风险由参保人承担，越来越多国家考虑固定缴费型养老金计划，本文也针对固定缴费型养老金探讨风险管理问题。关于此类问题，在考虑随机利率、波动率、通货膨胀和不同的优化目标（如 MV, CARA, CRRA 形目标）时有多种处理方法（参见 Boulier J. F., Huang S. J. 和 Taillard G.<sup>[1]</sup>、Cairns A. J., Blake D. 和 Dowd K.<sup>[2]</sup>、Zhang A H, Korn R. 和 Ewald C. O.<sup>[3]</sup>、Zhang A. H. 和 Ewald C. O.<sup>[4]</sup>、Yao H, Yang Z. 和 Chen P.<sup>[5]</sup> 的研究），其中常见的有鞅方法 (Martingale method) 和动态规划 (Dynamic programming) 的方法。本文考虑到优化目标是非线性的，因此使用了鞅方法的处理手段。

### 1.1.2 相对绩效比率

1952 年，Markowitz 在他的文章<sup>[6]</sup>中提出了均值-方差模型，该模型分别以期望和方差刻画收益和损失，通过求解有效策略和有效边界对投资提供参考。而由均值-方差模型引申出的一个常见的度量，市场风险价格，也称为夏普率 (Sharpe Ratio<sup>[7]</sup>)，用超过无风险利率的投资的平均预期超额收益，除以其收益的波动来作为衡量投资表现的指标。

由于夏普率指标无法区分相对于均值的收益和损失，并且由于夏普率中由于考虑到了收益的波动，因此需要考虑投资收益的二阶矩的存在性问题，我们在此

考虑其他类型的对投资的表现的衡量标准。如 Keating 和 Shadwick 就在他们的文章<sup>[8]</sup>中考虑到了所谓的“ $\Omega$ -测度”。和夏普率结构类似，这里也是考虑将某个比值作为衡量标准，然而不同的是，此时的收益和损失情况是相对于某一参考线而言的，并且在这里不必考虑投资收益的更高阶的矩的存在性问题。

更进一步地，通过对“ $\Omega$ -测度”做变换，在其分子和分母上分别引入权重函数，便成为一般的分式型规划<sup>[9]</sup>。本文所考虑的相对绩效比率问题就是一种分式型规划问题。

### 1.1.3 VaR 约束

风险价值 (VaR) 约束是控制最终财富尾部风险的一个分位数度量，它要求退休时刻财富项高于某一给定参考标准的概率要不低于某一给定值。由于 VaR 约束在风险评估等很多地方表现较好，并且在处理的时候根据不同情况有多种处理手段（参见 Basak S. 和 Shapiro A.<sup>[10]</sup>、Boyle P. 和 Tian W.<sup>[11]</sup> 以及 Kraft H. 和 Steffensen M.<sup>[12]</sup> 的研究），因此在很多地方都有被广泛应用，很多文章和实际问题中都会考虑在 VaR 约束下的最优投资决策问题。

在本文所考虑的固定缴费型养老金保险风险管理中，需要对偿付能力进行评估，我们以 VaR 来评估养老基金的偿付能力，因此在此也要求退休时刻养老基金满足 VaR 约束。

## 1.2 文章概述

本文主要内容结构如下。在第2章，我们将建立起市场模型和投资收益问题的模型以及整个优化问题的模型。在第3章中，我们将分别考虑固定缴费项的变换、对财富过程约束利用鞅方法进行转化、将非线性的相对绩效比问题进行线性化处理、将 VaR 约束转化为拉格朗日乘子法惩罚项、将随机优化转化为确定性优化、对确定的非凹最优化问题考虑求极值。进而在理论上给出优化问题的求解方法。在第4章中，我们将对文章中的变量给出一组具体值，然后对具体的问题求数值解并对其进行数值分析。第5章总结全文。



## 第 2 章 模型建立

### 2.1 金融市场模型和财富过程

首先考虑一个完备的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ，并在上面考虑由标准布朗运动  $W := \{W(t) | 0 \leq t \leq T\}$  生成的自然  $\sigma$ -域流的增广  $\sigma$ -域流  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t | 0 \leq t \leq T\}$ 。我们所考虑的养老金问题开始于初始时间 0，退休时间为  $T$ 。

我们考虑一个具有现金（无风险财富过程）和一份风险资产的金融市场模型。其中现金过程  $S_0 := \{S_0(t) | 0 \leq t \leq T\}$  满足常微分方程

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \quad S_0(0) = s_0. \quad (2-1)$$

风险资产  $S := \{S(t) | 0 \leq t \leq T\}$  满足随机微分方程

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad S(0) = s, \quad (2-2)$$

其中  $r > 0$  为现金过程所对应的无风险利率， $\mu > r$  为风险资产的期望收益率， $\sigma > 0$  为固定常数，其大小反映了风险资产的波动情况。记  $\xi = \frac{\mu-r}{\sigma}$  为  $W(t)$  的市场风险价格。

固定缴费型养老金参与者在退休前会持续缴费，我们以非随机函数  $c(t) > 0$  表示投资者在  $t$  时刻的缴费率。并设  $\pi(t)$  为  $t$  时刻对风险资产的投资数额，记  $\pi := \{\pi(t) | 0 \leq t \leq T\}$  为整个投资过程，自然地，我们要求  $\pi$  是  $\mathbb{F}$ -循序可测的随机过程并且满足  $\int_0^T \pi(t)^2 dt < \infty, a.s.$ 。相应的，投资过程  $\pi$  给定后此时的财富过程记为  $X^\pi := \{X^\pi(t) | 0 \leq t \leq T\}$ 。容易看出，财富过程与投资过程应该满足如下随机微分方程：

$$dX^\pi(t) = rX^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] + c(t)dt. \quad (2-3)$$

**定义 2.1：** 称一个投资组合  $\pi := \{\pi(t) | 0 \leq t \leq T\}$  是可行 (admissible) 的并且具有初值  $x_0 > 0$ ，如果它属于以下集合：

$$\mathcal{A}(x_0) := \{\pi \in S | X^\pi(0) = x_0, X^\pi(t) \geq 0, a.s., \forall 0 \leq t \leq T\}, \quad (2-4)$$

其中， $S$  为  $\mathbb{F}$ -循序可测并且满足  $\int_0^T \pi(t)^2 dt < \infty, a.s.$  的随机过程的集合。

## 2.2 相对绩效比率问题建立

传统投资优化问题考虑对夏普率进行期望效用最大化，并不能很好的区分投资者对于相对收益和相对损失的看法，因此我们考虑相对绩效比率来刻画养老金投资表现。

Keating 和 Shadwick 在他们的文章<sup>[8]</sup>中所考虑了“ $\Omega$ -测度”：给定一个参考水平值  $\theta$ ，定义随机变量  $R$  的“ $\Omega$ -测度”为

$$\Omega_\theta(R) = \frac{\mathbb{E}[(R - \theta)_+]}{\mathbb{E}[(\theta - R)_+]}, \quad (2-5)$$

其中  $x_+ := \max\{x, 0\}$  表示  $x$  的正部。于是，若考虑由方程 (2-3) 确定的投资组合退休时刻财富关于“ $\Omega$ -测度”的最优问题，则问题变为：

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} \left\{ \Omega_\theta(X^\pi(T)) := \frac{\mathbb{E}[(X^\pi(T) - \theta)_+]}{\mathbb{E}[(\theta - X^\pi(T))_+]} \right\}. \quad (2-6)$$

然而，对于该问题，我们在下面的注释 (3.3) 中会发现该问题是无界的。因此我们考虑对“ $\Omega$ -测度”做变换：引入权重函数  $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  和  $D : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  为单调增加的可测函数，此时目标函数变为

$$R(X^\pi(T)) := \frac{\mathbb{E}\{U[(X^\pi(T) - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - X^\pi(T))_+]\}}. \quad (2-7)$$

此时分子  $\mathbb{E}\{U[(X^\pi(T) - \theta)_+]\}$  代表退休时刻财富值超出参考水平时的收益，而分母  $\mathbb{E}\{D[(X^\pi(T) - \theta)_+]\}$  代表退休时刻财富值低于参考水平时的惩罚。因此也称函数  $U$  为奖赏函数，而函数  $D$  则被称为惩罚函数。此时，问题变为

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} \left\{ \frac{\mathbb{E}\{U[(X^\pi(T) - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - X^\pi(T))_+]\}} \right\}, \quad (2-8)$$

即为 Hongcan Lin, David Saunders 和 Chengguo Weng 所考虑的问题模型<sup>[13]</sup>。

更进一步的，在保险风险管理中，需要保证保险公司的偿付能力，我们通过对退休时刻的养老金施加 VaR 约束保证其偿付能力：要求退休时刻财富高于另一参考值  $L$  的概率至少为  $1 - \varepsilon$ ，即要求

$$P(X^\pi(T) \geq L) \geq 1 - \varepsilon, \quad (2-9)$$

其中  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  为给定常数。于是优化问题为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} & \frac{\mathbb{E}\{U[(X^\pi(T) - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - X^\pi(T))_+]\}}, \\ s.t. & X^\pi(t) \text{ 满足方程 (2-3),} \\ & P(X^\pi(T) \geq L) \geq 1 - \varepsilon. \end{array} \right. \quad (2-10)$$

该问题即本文中所考虑的优化问题。

容易看出：当  $\varepsilon = 1$  时，该约束相当于无约束，而当  $\varepsilon = 0$  时，则要求在退休时刻财富高于某一水平，为 Basak<sup>[14]</sup> 所考虑的优化问题。

### 第 3 章 问题转化与求解分析

#### 3.1 固定缴费项的转化

考虑到固定缴费项的存在，财富过程  $X^\pi$  并不是一个自融资的过程，为了处理的方便，我们引入辅助财富过程  $\tilde{X}^\pi := \{\tilde{X}^\pi(t) | 0 \leq t \leq T\}$ ，将模型转换成等价的自融资问题：

$$\tilde{X}^\pi(t) = X^\pi(t) + C(t), \quad (3-1)$$

其中  $C(t) = \int_t^T c(s)e^{-r(s-t)}ds$  代表从时间  $t$  开始到时间  $T$  这段时间里固定缴费在时刻  $t$  处的折现价值。也即辅助财富过程等于当前现有财富过程和将来固定缴费项在当前的折现的总和。于是由方程 (2-3) 我们得到

$$\begin{aligned} d\tilde{X}^\pi(t) &= dX^\pi(t) + dC(t) \\ &= rX^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] + c(t)dt - c(t)dt + rC(t)dt \\ &= r\tilde{X}^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] \\ &= [r\tilde{X}^\pi(t) + \pi(t)\sigma\xi]dt + \pi(t)\sigma dW(t), \end{aligned} \quad (3-2)$$

且有  $\tilde{X}^\pi(0) = X^\pi(0) + C(0) = x_0 + \int_0^T c(s)e^{-rs}ds := \tilde{x}_0$ 。容易看出总财富过程满足

$$\tilde{X}^\pi(T) = X^\pi(T), \tilde{X}^\pi(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]. \quad (3-3)$$

根据 Aihua Zhang 和 Christian-Oliver Ewald 的结果<sup>[15]</sup>，在折现价值  $C(t)$  较大时，可以允许当前财富值  $X^\pi(t)$  取负值，也即只需保证总财富过程  $\tilde{X}^\pi(t)$  非负即可，于是此时可以类似定义

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0) := \{\pi \in \mathcal{S} : \tilde{X}^\pi(0) = \tilde{x}_0 \text{ 且 } \tilde{X}^\pi(t) \geq 0, \text{ a.s., } \forall 0 \leq t \leq T\}. \quad (3-4)$$

问题变为

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)} \frac{\mathbb{E}\{U[(\tilde{X}^\pi(T) - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - \tilde{X}^\pi(T))_+]\}}, \\ \text{s.t. } \tilde{X}^\pi(t) \text{ 满足方程 (3-2), } \tilde{X}^\pi(0) = \tilde{x}_0, \\ P(\tilde{X}^\pi(T) \geq L) \geq 1 - \varepsilon. \end{cases} \quad (3-5)$$

于是我们将求解原非自融资的问题 (2-10) 转化为求解自融资的问题 (3-5)。

### 3.2 鞅方法

问题 (3-5) 是一个有约束目标非线性的优化问题，无法通过传统的动态规划方法进行求解，由于市场是完备的，我们参考 John C Cox 和 Chi-fu Huang<sup>[16]</sup> 所采用的鞅方法 (Martingale method) 进行求解。

首先考虑定价核 (Pricing Kernel) 过程  $H(t)$

$$H(t) := \exp \left\{ - \left( r + \frac{\xi^2}{2} \right) t - \xi W(t) \right\}. \quad (3-6)$$

也即满足

$$\begin{cases} dH(t) = H(t)[-rdt - \xi dW(t)], \\ H(0) = 1. \end{cases} \quad (3-7)$$

则有如下定理可将初始对投资组合过程优化的动态规划问题，转化为对可测随机变量优化的静态优化问题。

**定理 3.1:** 优化问题 (3-5) 和下述优化问题 (3-8) 目标值相等，其中  $\mathcal{M}_+$  为所有非负  $\mathcal{F}_T$ -可测的随机变量构成的集合。

$$\begin{cases} \max_{Z \in \mathcal{M}_+} \frac{\mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}}, \\ s.t. \quad \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0, \\ P(Z \geq L) \geq 1 - \varepsilon. \end{cases} \quad (3-8)$$

**证明** 首先证明优化问题 (3-5) 和下述优化问题 (3-9) 等价

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)} \frac{\mathbb{E}\{U[(\tilde{X}^\pi(T) - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - \tilde{X}^\pi(T))_+]\}}, \\ s.t. \quad \tilde{X}^\pi(t) \text{ 满足方程 (3-2), } \tilde{X}^\pi(0) = \tilde{x}_0, \\ \mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^\pi(T)] \leq \tilde{x}_0, \\ P(\tilde{X}^\pi(T) \geq L) \geq 1 - \varepsilon. \end{cases} \quad (3-9)$$

易见问题 (3-9) 只是比问题 (3-5) 多了约束

$$\mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^\pi(T)] \leq \tilde{x}_0. \quad (3-10)$$

而注意到 (3-7) 以及 (3-2), 利用 Itô 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
d[H(t)\tilde{X}^\pi(t)] &= H(t)[r\tilde{X}^\pi(t) + \pi(t)\sigma\xi]dt + H(t)\pi(t)\sigma dW(t) \\
&\quad + \tilde{X}^\pi(t)H(t)[-rdt - \xi dW(t)] \\
&\quad + H(t)(-\xi) \times \pi(t)\sigma dt \\
&= H(t)[\pi(t)\sigma - \xi\tilde{X}^\pi(t)]dW(t).
\end{aligned} \tag{3-11}$$

于是有

$$H(t)\tilde{X}^\pi(t) = \tilde{X}^\pi(0) + \int_0^t H(s)[\pi(s)\sigma - \xi\tilde{X}^\pi(s)]dW(s), \quad t \in [0, T]. \tag{3-12}$$

而上式右侧关于  $t$  的积分是一个局部鞅 (local martingale), 于是  $H\tilde{X}^\pi := \{H(t)\tilde{X}^\pi(t), t \geq 0\}$  整体是一个关于域流  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  的非负局部鞅, 于是它是一个上鞅 (参见 [17]). 于是有

$$\mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^\pi(T)] \leq \mathbb{E}[H(0)\tilde{X}^\pi(0)] = \tilde{x}_0. \tag{3-13}$$

也即不等式约束 (3-10) 蕴含于条件 (3-2) 中, 于是易见问题 (3-9) 与问题 (3-5) 等价。而容易看出问题 (3-8) 与问题 (3-9) 相比较而言, 少了条件 (3-2) 的限制, 因此问题 (3-8) 的最优目标值不小于问题 (3-9) 的最优目标值。

另一方面, 由下面的命题 (3.1), 可知对于问题 (3-8) 的任一最优解, 可以找到一个投资组合过程, 使其退休时刻财富刚好为问题 (3-8) 的最优解。于是知优化问题 (3-9) 最优目标值不小于优化问题 (3-8) 最优目标值, 进而有两者最优目标值相等。  $\square$

**命题 3.1:** 设  $Z^*$  为问题 (3-8) 的最优解, 则存在投资组合过程  $\pi^* \in \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)$  使  $\tilde{X}^{\pi^*}(T) = Z^*$ .

**证明** 由  $Z^*$  为问题 (3-8) 的最优解, 易见必有不等式约束  $\mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0$  恰好取到等, 即必有  $\mathbb{E}[H(T)Z^*] = \tilde{x}_0$ 。否则考虑

$$\tilde{Z} := Z^* + e^{rT}(\tilde{x}_0 - \mathbb{E}[H(T)Z^*]). \tag{3-14}$$

也即将多余的资产投入无风险收益过程中, 容易发现此时  $\tilde{Z}$  仍是问题 (3-8) 的可行解, 但是对应着更大的目标值。定义过程

$$Y^*(t) := H(t)^{-1}\mathbb{E}[H(T)Z^*|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3-15}$$

则容易验证过程  $\{H(t)Y^*(t), t \geq 0\}$  为关于域流  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  的鞅。于是由鞅表示定理, 存在一个  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  循序可测的过程  $\{\psi(t), 0 \leq t \leq T\}$  使  $\int_0^T \psi(t)^2 dt < \infty, a.s.$  且

$$H(t)Y^*(t) = \tilde{x}_0 + \int_0^t \psi(s) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad a.s. \quad (3-16)$$

并记

$$\pi^*(t) = H(t)^{-1} \psi(t) \sigma^{-1} + Y^*(t) \xi \sigma^{-1}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3-17)$$

则有  $\pi^* \in \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)$  且有  $\tilde{X}^{\pi^*}(t) = Y^*(t), 0 \leq t \leq T, a.s.$ , 特别的, 有  $\tilde{X}^{\pi^*}(T) = Y^*(T) = Z^*$ .  $\square$

**注释 3.1:** 由上述证明可知, 定理3.1和命题3.1不仅说明了问题 (3-5) 和问题 (3-8) 最优目标值相等, 还给出了两个问题最优解的关系, 将求解动态优化问题 (3-5) 转化为求解优化问题 (3-8)。于是在后面的求解中, 我们只需对优化问题 (3-8) 进行求解即可。

### 3.3 线性化方法

此处目标问题不同于传统的极大化期望效用问题, 我们采用的相对绩效比率是一个非线性的目标, 为了使问题可以求解, 我们首先对奖赏函数  $U$  和惩罚函数  $D$  做一些假设:

(H1) 首先自然假设  $U$  和  $D$  都是二次可微的严格增加并且初值为 0 的函数。

**注释 3.2:**  $U$  和  $D$  的单调性容易由其代表意义做出解释, 而初值为 0 的条件使得该问题在退休时刻财富与参考水平近似相等时, 与前人所考虑的 “ $\Omega$ - 测度” 结果接近。

**注释 3.3:** 根据 Hanqing Jin 和 Xun Yu Zhou 的结果<sup>[18]</sup>, 可以构造一系列随机变量  $Z_n$  满足  $E[H(T)Z_n] = \tilde{x}_0$  但  $E[Z_n] \rightarrow \infty$ 。于是容易看出若报酬函数  $U$  为凸函数, 则优化问题 (3-8) 在没有 VaR 约束的情况下是无界的。于是为了保证问题的收敛性, 同时为了求解的方便, 我们假设报酬函数  $U$  为凹函数 (这在通常的最大化问题中也比较常见, 取目标函数是凹函数, 表明投资是风险趋避型)。

更具体的，我们假设报酬函数  $U$  满足如下条件：

(H2) 假设报酬函数  $U$  满足 Inada 条件：

$$\lim_{x \searrow 0} U'(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0. \quad (3-18)$$

(H3) 假设报酬函数  $U$  是严格凹的，也即假设  $U''(z) < 0, \forall z \in (0, \infty)$ .

对于惩罚函数  $D$ ，不妨假设它是凹函数或者严格凸函数。

此时目标函数为两个函数取期望再做比值，对此我们采用线性化处理的方式：对参数  $v \geq 0$ ，考虑求解一族优化问题

$$v(v, \tilde{x}_0) := \sup_{Z \in C(\tilde{x}_0), P(Z \geq L) \geq 1-\epsilon} \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\} - v \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}, \quad (3-19)$$

其中

$$C(\tilde{x}_0) = \{Z \in \mathcal{M}_+ : \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0\}. \quad (3-20)$$

首先问题 (3-19) 与问题 (3-8) 有相同的偏好：都倾向于取报酬函数  $U$  较大而惩罚函数  $D$  较小。其次，如下定理表明，只需求解这样一族线性化之后的问题 (3-19) 就可以求解问题 (3-8)。

**注释 3.4：** 与命题 (3.1) 证明类似的，容易看出问题 (3-19) 取最优值时，必有不等式约束取等，也即必有

$$v(v, \tilde{x}_0) = \sup_{Z \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z] = \tilde{x}_0, P(Z \geq L) \geq 1-\epsilon} \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\} - v \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\} \quad (3-21)$$

成立。

**定理 3.2：** 假设  $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$ ， $\forall v \geq 0$ ，记  $Z_v$  为问题 (3-19) 的最优解，也即

$$v(v, \tilde{x}_0) = \mathbb{E}\{U[(Z_v - \theta)_+]\} - v \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_v)_+]\}. \quad (3-22)$$

若存在  $v^* \geq 0$  使得

$$v^* = \frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{v^*} - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{v^*})_+]\}}, \quad (3-23)$$

也即若存在  $v^* \geq 0$  使  $v(v^*, \tilde{x}_0) = 0$ ，则有  $Z^* := Z_{v^*}$  为问题 (3-8) 最优解，此时  $v^*$  为最优目标值。



证明 首先由条件  $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$ , 以及  $C(\tilde{x}_0)$  的定义易见  $P(Z < \theta) > 0$ , 否则有  $\tilde{x}_0 \geq \mathbb{E}[H(T)Z] \geq \mathbb{E}[H(T)]\theta = e^{-rT}\theta$  与条件  $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$  矛盾。于是由  $Z^*$  的最优性, 知  $\forall Z \in \mathcal{M}_+, \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0, P(Z \geq L) \geq 1 - \varepsilon$ , 有

$$\begin{aligned}
0 &= v(v^*, \tilde{x}_0) \\
&= \mathbb{E}\{U[(Z_{v^*} - \theta)_+]\} - v^* \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{v^*})_+]\} \\
&\geq \mathbb{E}\{U[(Z_v - \theta)_+]\} - v^* \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_v)_+]\} \\
&= \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\} - \frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{v^*} - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{v^*})_+]\}} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}.
\end{aligned} \tag{3-24}$$

也即

$$\frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{v^*} - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{v^*})_+]\}} \geq \frac{\mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}}. \tag{3-25}$$

于是有  $Z^* = Z_{v^*}$  为问题 (3-8) 最优解, 此时  $v^*$  为最优目标值并称其为最优参数。□

于是以下只需做两件事情

- 一、 证明最优参数的存在性, 也即函数  $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$  零点的存在性。
- 二、 求解线性化之后的优化问题 (3-19)。

### 3.4 最优参数的存在性

最优参数  $v^*$  的存在性需要额外的条件: 假设

(H4) 报酬函数  $U$  是 Arrow-Pratt 相对风险规避型的并且满足渐进弹性条件, 也即满足

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \right) > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xU''(x)}{U'(x)} < 1. \tag{3-26}$$

下面将通过探究函数的性质  $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$  来给出最优参数的存在性, 也即函数  $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$  零点的存在性的证明, 为此我们需要下面一个引理

引理 3.1: 记

$$\begin{aligned}
M &= \sup_{Z \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z] = \tilde{x}_0} \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\}, \\
m &= \inf_{Z \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z] = \tilde{x}_0} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}.
\end{aligned} \tag{3-27}$$

则当  $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$  时, 有  $M < \infty, m > 0$ .

**证明**  $M < \infty$  的证明参见 Hanqing Jin 和 Xun Yu Zhou 等人的文章<sup>[19]</sup>. 反设  $m = 0$ , 设  $Z_n \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z_n] = \tilde{x}_0$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_n)_+]\} = 0$ , 则有  $D[(\theta - Z_n)_+]$  依概率收敛到 0, 进而有  $\theta - Z_n$  依概率收敛到 0, 进而有  $H(T)(\theta - Z_n)$  依概率收敛到 0, 进而有  $H(T)(\theta - Z_n)$  依  $L^1$  收敛到 0, 也即  $\mathbb{E}\{H(T)(\theta - Z_n)\} \rightarrow 0$ , 与  $\mathbb{E}\{H(T)(\theta - Z_n)\} = \theta - \tilde{x}_0 e^{rT} > 0$  矛盾.  $\square$

**命题 3.2:** 当报酬函数  $U$  和惩罚函数  $D$  满足以上假设 (H1)-(H4), 初值  $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$  并且问题 (3-8) 有非平凡值可行解时, 也即存在  $Z \in \mathcal{M}_+$ , 使

$$\begin{cases} \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0, \\ P(Z \geq L) \geq 1 - \varepsilon, \\ P(Z \geq \theta) \geq 0. \end{cases} \quad (3-28)$$

此时函数  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  有如下性质

- (i)  $0 < v(0, \tilde{x}_0) < \infty$ .
- (ii)  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  在  $\mathbb{R}$  上是非增函数。
- (iii) 对于任意  $0 < \tilde{x}_0$  给定, 有  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  在  $\mathbb{R}$  上是凸函数。
- (iv)  $\lim_{v \rightarrow \infty} v(v, \tilde{x}_0) = -\infty$ .

**证明** 首先由条件 (3-28) 易见  $0 < v(0, \tilde{x}_0)$ , 而由引理 (3.1) 以及注释 (3.4) 自然可得  $v(v, \tilde{x}_0) \leq M - vm$ , 于是自然有  $v(0, \tilde{x}_0) < \infty$  以及  $\lim_{v \rightarrow \infty} v(v, \tilde{x}_0) = -\infty$ .

对任意  $v_1 < v_2, t \in [0, 1]$ , 设  $Z_{v_2}$  极大化  $v(v_2, \tilde{x}_0)$ ,  $Z_t$  极大化  $v(tv_1 + (1-t)v_2, \tilde{x}_0)$ , 则有

$$\begin{aligned} v(v_2, \tilde{x}_0) &= \mathbb{E}\{U[(Z_{v_2} - \theta)_+] - v_2 D[(\theta - Z_{v_2})_+]\} \\ &\leq \mathbb{E}\{U[(Z_{v_2} - \theta)_+] - v_1 D[(\theta - Z_{v_2})_+]\} \\ &\leq v(v_1, \tilde{x}_0), \end{aligned} \quad (3-29)$$

也即  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  是非增函数。

$$\begin{aligned} v(tv_1 + (1-t)v_2, \tilde{x}_0) &= \mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - (tv_1 + (1-t)v_2)D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ &= t\mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - v_1 D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ &\quad + (1-t)\mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - v_2 D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ &\leq tv(v_1, \tilde{x}_0) + (1-t)v(v_2, \tilde{x}_0). \end{aligned} \quad (3-30)$$

于是  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  是凸函数。  $\square$

**推论 3.1:** 存在唯一  $v^* > 0$  使  $v(v^*, \tilde{x}_0) = 0$ .

**证明** 由  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  在  $\mathbb{R}$  上是凸函数, 于是也是连续函数。又  $0 < v(0, \tilde{x}_0) < \infty$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} v(v, \tilde{x}_0) = -\infty$ , 于是由连续函数界值定理知, 存在  $v^*$  使  $v(v^*, \tilde{x}_0) = 0$ 。反设存在  $v_1 < v_2$  均为  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  的零点, 由  $\lim_{v \rightarrow \infty} v(v, \tilde{x}_0) = -\infty$  知, 存在  $v_3 > v_2$  且使  $v(v_3, \tilde{x}_0) < v(v_2, \tilde{x}_0) = 0$ , 于是有

$$v_2 = \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} v_3 + \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1} v_1. \quad (3-31)$$

而有

$$v(v_2, \tilde{x}_0) = 0 > \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} v(v_3, \tilde{x}_0) + \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1} v(v_1, \tilde{x}_0), \quad (3-32)$$

与  $v(\cdot, \tilde{x}_0)$  在  $\mathbb{R}$  上是凸函数矛盾, 于是知  $v^*$  是存在唯一的。  $\square$

下面, 我们只需求解线性化之后的优化问题 (3-19) 即可, 对于该含 VaR 约束的优化问题, 我们先考虑对 VaR 约束进行转化。

### 3.5 VaR 约束的转化

首先为了方便起见, 记

$$f_v(Z) = U[(Z - \theta)_+] - vD[(\theta - Z)_+], \quad (3-33)$$

$$f_{v,\lambda}(Z) = U[(Z - \theta)_+] - vD[(\theta - Z)_+] + \lambda \mathbf{1}_{Z \geq L}. \quad (3-34)$$

对于线性化之后的优化问题 (3-19), 也即

$$\begin{aligned} \max_{Z \in \mathcal{M}_+} \quad & \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+] - vD[(\theta - Z)_+]\} = \mathbb{E}\{f_v(Z)\}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0, \\ & P(Z \geq L) \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (3-35)$$

我们考虑将 VaR 约束变成 Lagrange 惩罚项转化进目标函数中: 考虑如下优化问题

$$\begin{aligned} \max_{Z \in \mathcal{M}_+} \quad & \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+] - vD[(\theta - Z)_+] + \lambda \mathbf{1}_{Z \geq L}\} = \mathbb{E}\{f_{v,\lambda}(Z)\}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0. \end{aligned} \quad (3-36)$$

下面定理将给出新优化问题 (3-36) 与优化问题 (3-35) 的关系

**定理 3.3:** 对每个  $\lambda \geq 0$ , 设  $Z_{v,\lambda}$  为优化问题 (3-36) 最优解, 若存在  $\lambda^* \geq 0$  且

$$P(Z_{v,\lambda^*} \geq L) \geq 1 - \varepsilon, \quad (3-37)$$

$$\lambda^* [P(Z_{v,\lambda^*} \geq L) - (1 - \varepsilon)] = 0. \quad (3-38)$$

则有  $Z_v := Z_{v,\lambda^*}$  为优化问题 (3-35) 最优解

**证明** 首先由条件 (3-37) 知  $Z_{v,\lambda^*}$  是问题 (3-35) 的一个可行解, 于是有  $\mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\}$  不超过优化问题 (3-35) 的最优目标值。

另一方面, 对优化问题 (3-35) 的任一可行解  $Z$ , 有  $Z$  亦为优化问题 (3-36) 的可行解, 于是有  $\mathbb{E}\{f_{v,\lambda^*}(Z)\} \leq \mathbb{E}\{f_{v,\lambda^*}(Z_{v,\lambda^*})\}$ , 也即

$$\mathbb{E}\{f_v(Z)\} + \lambda^* P(Z \geq L) \leq \mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\} + \lambda^* P(Z_{v,\lambda^*} \geq L), \quad (3-39)$$

也即

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{f_v(Z)\} &\leq \mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\} + \lambda^* [P(Z_{v,\lambda^*} \geq L) - P(Z \geq L)] \\ &= \mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\} + \lambda^* [1 - \varepsilon - P(Z \geq L)] \\ &\leq \mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\}. \end{aligned} \quad (3-40)$$

于是有优化问题 (3-35) 的最优目标值不超过  $\mathbb{E}\{f_v(Z_{v,\lambda^*})\}$ 。综上有  $Z_{v,\lambda^*}$  是问题 (3-35) 的最优解。  $\square$

**注释 3.5:** 满足定理 (3.3) 的  $\lambda^* \geq 0$  是存在的, 事实上在一些特定的条件下这样的  $\lambda^* \geq 0$  是唯一的, 证明参见 Yinghui Dong 和 Harry Zheng 的文章<sup>[20]</sup> 定理 4.1。

### 3.6 不等式约束的转化与非随机化

与上面 VaR 约束的转化类似的, 我们考虑把优化问题 (3-36) 的不等式约束  $\mathbb{E}[H(T)Z] \leq \tilde{x}_0$  同样变成 Lagrange 惩罚项转化进目标函数中: 对每个  $\beta > 0$ , 考虑如下优化问题

$$\max_{Z \in \mathcal{M}_+} \mathbb{E}\{f_{v,\lambda}(Z) - \beta H(T)Z\}, \quad (3-41)$$

以及优化问题 (3-41) 的非随机化版本：对每个  $y > 0$  考虑

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+} f_{v,\lambda}(x) - yx. \quad (3-42)$$

我们有如下定理给出优化问题 (3-36)、优化问题 (3-41) 和优化问题 (3-42) 的解的关系：

**定理 3.4：** 对  $v \geq 0, \lambda \geq 0$  有如下结果

- (a) 设 Borel 可测函数  $x_{v,\lambda}^*(y)$  对每个  $v \geq 0, \lambda \geq 0$  和  $y > 0$  均为问题 (3-42) 的最优解，则有  $Z_{v,\lambda,\beta} := x_{v,\lambda}^*(\beta H(T))$  为优化问题 (3-41) 的最优解；
- (b) 若存在  $\beta^* > 0$  使  $Z_{v,\lambda,\beta^*}$  为优化问题 (3-41) 的最优解，且满足不等式约束取到等号，也即使  $\mathbb{E}[H(T)Z_{v,\lambda,\beta^*}] = \tilde{x}_0$ ，则有  $Z_{v,\lambda} := Z_{v,\lambda,\beta^*}$  为优化问题 (3-36) 的最优解，此时称  $\beta^*$  为最优乘子。

**证明** 证明参见 Hongcan Lin 和 David Saunders 和 Chengguo Weng 的文章<sup>[21]</sup> 引理 3.1 和引理 3.2 部分。  $\square$

于是以下同样只需要做两件事情

- 一、证明最优乘子  $\beta^*$  的存在性，也即存在  $\beta^* > 0$  使  $Z_{v,\lambda,\beta^*}$  为优化问题 (3-41) 的最优解，且满足不等式约束取到等号。
- 二、求解非随机优化问题 (3-42)。

### 3.7 求解非随机问题

最优乘子的存在性依赖于非随机问题的解  $x_{v,\lambda}^*(y)$  的性质，为此我们先求解非随机问题 (3-42)。在上面的分析里，我们对惩罚函数  $D$  做了它是凸函数或者凹函数的假设，下面将对具体情况分类讨论。

**定理 3.5：** 非随机优化问题 (3-42) 的解由以下结果给出。

**惩罚函数是凸函数时**

此时记  $I_1(x)$  为函数  $U'(x)$  的反函数， $I_2(x)$  为函数  $D'(x)$  的反函数，记

$$k_{v,\lambda} := \frac{f_v(L) + \lambda + vD(\theta)}{L}. \quad (3-43)$$

如图 3.1，易见此时存在唯一  $z_1 < \theta, z_2 > \theta$  满足

$$vD'(\theta - z_1) = U'(z_2 - \theta) = \frac{U(z_2 - \theta) + vD(\theta - z_1)}{(z_2 - \theta) + (\theta - z_1)}. \quad (3-44)$$

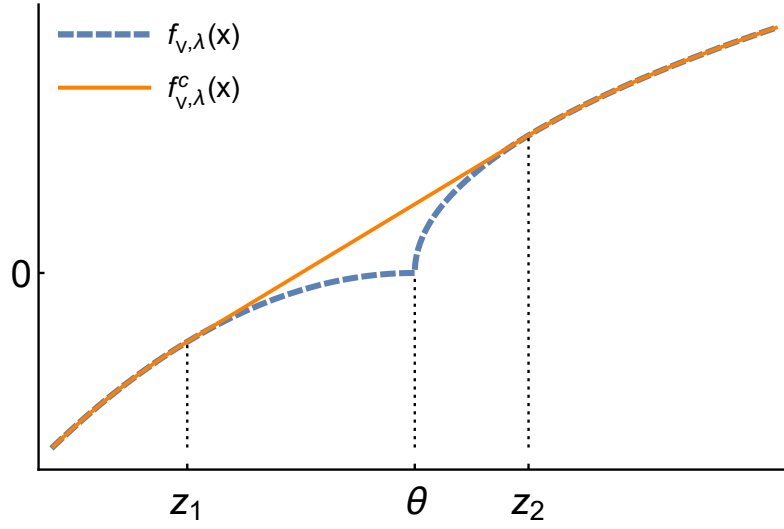


图 3.1 函数  $f_v(x)$  与其凹包函数示意图

其中函数  $f_v^c(x)$  为函数  $f_v(x)$  的凹包函数，也即

$$f_v^c(x) = \inf \{g(x) | g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为凹函数且 } g(t) \geq f_v(t), \forall t \geq 0\}. \quad (3-45)$$

此时函数  $f_v(x)$  亦即函数  $f_{v,\lambda}(x)$  在  $\lambda = 0$  时的情形。若  $z_1 \geq 0$ ，则容易求得此时非随机问题 (3-42) 解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_1) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-46)$$

若  $z_1 < 0$ ，则此时存在唯一  $z' > \theta$  满足

$$U'(z' - \theta) = \frac{U(z' - \theta) + vD(\theta)}{z' - 0}. \quad (3-47)$$

容易求得此时非随机问题 (3-42) 解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z' - \theta); \\ 0 & U'(z' - \theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-48)$$

当  $\lambda > 0$  时，以下将按照  $L < z_1, z_1 \leq L < \theta, \theta = L, \theta < L < z_2$  这四种情况具体，分别考虑函数  $f_{v,\lambda}(x)$  相应的凹包函数，并利用其凹包函数来求解非随机问题 (3-42)。这里，我们给出得到的结果和相应的示意图，具体计算过程与 Yinghui Dong 和 Harry Zheng 在文章<sup>[20]</sup>附录中过程类似。

$L < z_1$  时 此时考虑  $k_{v,\lambda}$  与  $vD'(\theta)$  的大小关系:

1. 若  $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$ , 则此时示意图如图 3.2

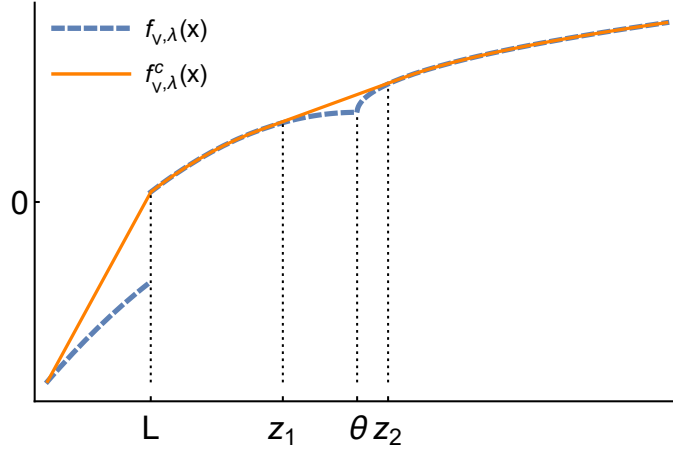


图 3.2 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_1) \leq y < vD'(\theta - L); \\ L & vD'(\theta - L) \leq y < k_{v,\lambda}; \\ 0 & k_{v,\lambda} \leq y. \end{cases} \quad (3-49)$$

其中  $U'(z_2 - \theta) = vD'(\theta - z_1)$ 。

2. 若  $k_{v,\lambda} \leq vD'(\theta)$ , 则此时存在唯一  $z_3 \in [0, L)$  满足

$$vD'(\theta - z_3) = \frac{f_v(L) + \lambda + vD(\theta - z_3)}{L - z_3}. \quad (3-50)$$

此时示意图如图 3.3

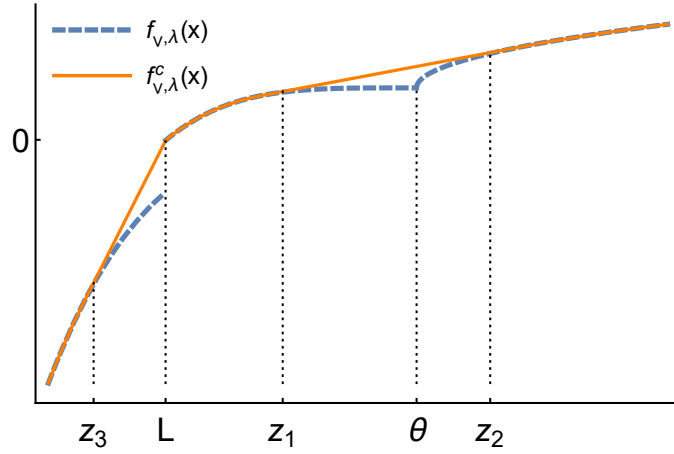


图 3.3 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_1) \leq y < vD'(\theta - L); \\ L & vD'(\theta - L) \leq y < vD'(\theta - z_3); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_3) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-51)$$

$z_1 \leq L < \theta$  时 此时存在唯一  $z_4 > \theta$  满足

$$U'(z_4 - \theta) = \frac{U(z_4 - \theta) + vD(\theta - L)}{z_4 - L}. \quad (3-52)$$

此时仍考虑  $k_{v,\lambda}$  与  $vD'(\theta)$  的大小关系:

1. 若  $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$ , 此时考虑  $k_{v,\lambda}$  与  $U'(z_4 - \theta)$  的大小关系:

(a) 若  $k_{v,\lambda} > U'(z_4 - \theta)$ , 此时示意图如图 3.4



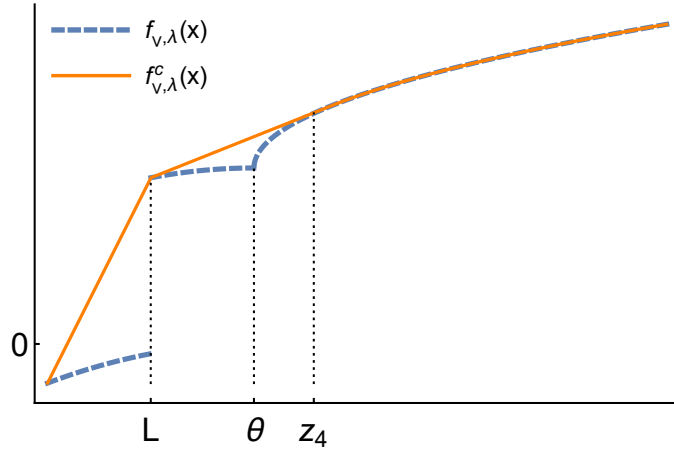


图 3.4 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_4 - \theta); \\ L & U'(z_4 - \theta) \leq y < k_{v,\lambda}; \\ 0 & k_{v,\lambda} \leq y. \end{cases} \quad (3-53)$$

(b) 若  $k_{v,\lambda} \leq U'(z_4 - \theta)$ , 此时存在唯一  $z_5 > \theta$  满足

$$U'(z_5 - \theta) = \frac{U(z_5 - \theta) + \lambda + vD(\theta)}{z_5 - 0}. \quad (3-54)$$

此时示意图如图 3.5

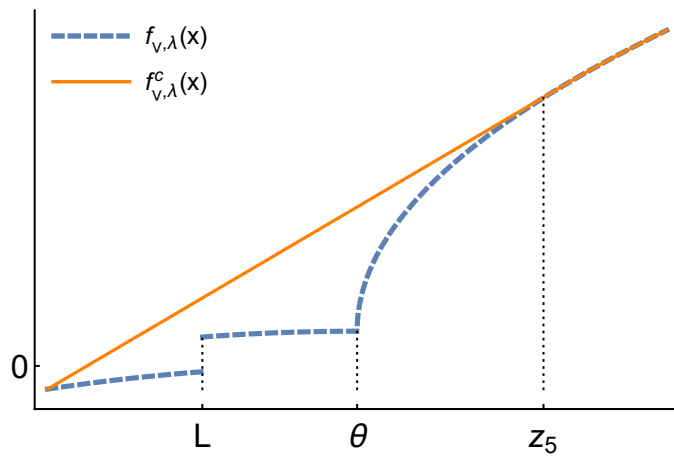


图 3.5 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_5 - \theta); \\ 0 & U'(z_5 - \theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-55)$$

2. 若  $k_{v,\lambda} \leq vD'(\theta)$ , 则此时同样存在唯一  $z_3 \in [0, L)$  满足等式 (3-50), 此时考虑  $vD'(\theta - z_3)$  与  $U'(z_4 - \theta)$  大小关系:

(a) 若  $vD'(\theta - z_3) > U'(z_4 - \theta)$ , 则此时示意图如图 3.6

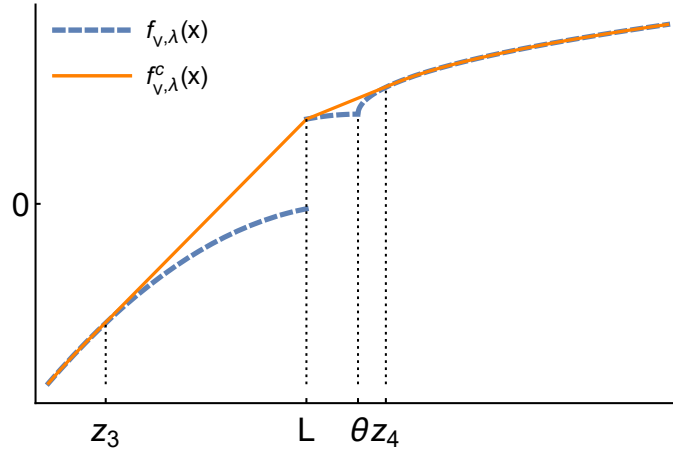


图 3.6 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_4 - \theta); \\ L & U'(z_4 - \theta) \leq y < vD'(\theta - z_3); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_3) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-56)$$

(b) 若  $vD'(\theta - z_3) \leq U'(z_4 - \theta)$ , 则此时存在唯一  $z_6 < L < \theta < z_7$  满足

$$vD'(\theta - z_6) = U'(z_7 - \theta) = \frac{U(z_7 - \theta) + \lambda + vD(\theta - z_6)}{(z_7 - \theta) + (\theta - z_6)}. \quad (3-57)$$

若  $z_6 \leq 0$  则此时化归为图 3.5 以及解 (3-55) 的情形; 若  $0 < z_6 < L$ , 此时示意图如图 3.7

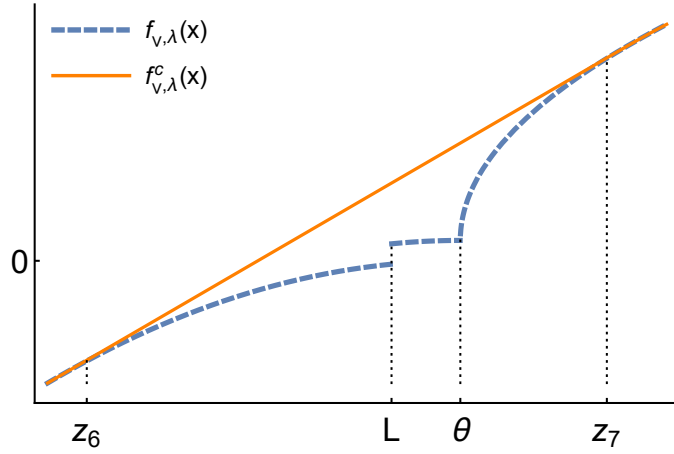


图 3.7 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_7 - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_6) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-58)$$

$L = \theta$  时 此时类似的, 存在唯一  $z'_6 < \theta < z'_7$  满足

$$vD'(\theta - z'_6) = U'(z'_7 - \theta) = \frac{U(z'_7 - \theta) + \lambda + vD(\theta - z'_6)}{(z'_7 - \theta) + (\theta - z'_6)}. \quad (3-59)$$

若  $z'_6 \leq 0$  则此时化归为图 3.5 以及解 (3-55) 的情形; 若  $0 < z'_6 < L$ , 此时化归为图 3.7 以及解 (3-58) 的情形。

$L > \theta$  时 此时存在唯一  $z_8 \in [\theta, L)$  满足

$$U'(z_8 - \theta) = \frac{U(L - \theta) + \lambda - U(z_8 - \theta)}{L - z_8} = \frac{f_v(L) + \lambda - f_v(z_8)}{L - z_8}. \quad (3-60)$$

此时仍考虑  $k_{v,\lambda}$  与  $vD'(\theta)$  的大小关系:

1. 若  $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$ , 此时考虑  $U'(z_8 - \theta), U'(L - \theta), k_{v,\lambda}$  三者的关系:
  - (a) 若  $U'(z_8 - \theta) > k_{v,\lambda} \geq U'(L - \theta)$ , 此时示意图如图 3.8

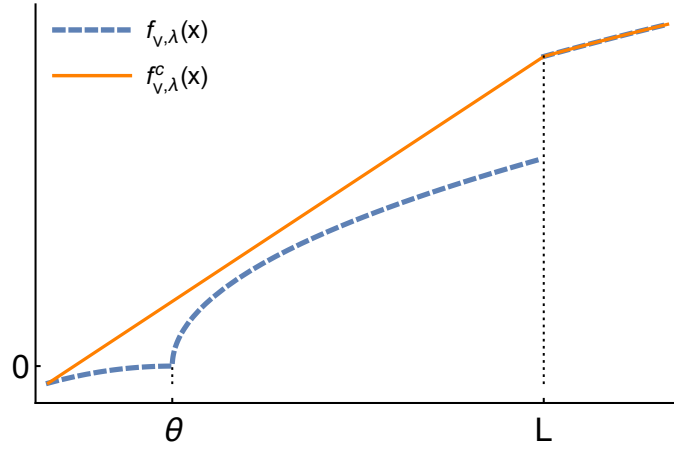


图 3.8 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(L - \theta); \\ L & U'(L - \theta) \leq y < k_{v,\lambda}; \\ 0 & k_{v,\lambda} \leq y. \end{cases} \quad (3-61)$$

(b) 若  $k_{v,\lambda} < U'(L - \theta)$ , 则存在唯一  $z_9 > L$  满足

$$U'(z_9 - \theta) = \frac{U(z_9 - \theta) + \lambda + vD(\theta)}{z_9 - 0} = \frac{f_v(z_9) + \lambda - f_v(0)}{z_9 - 0}. \quad (3-62)$$

此时示意图如图 3.9

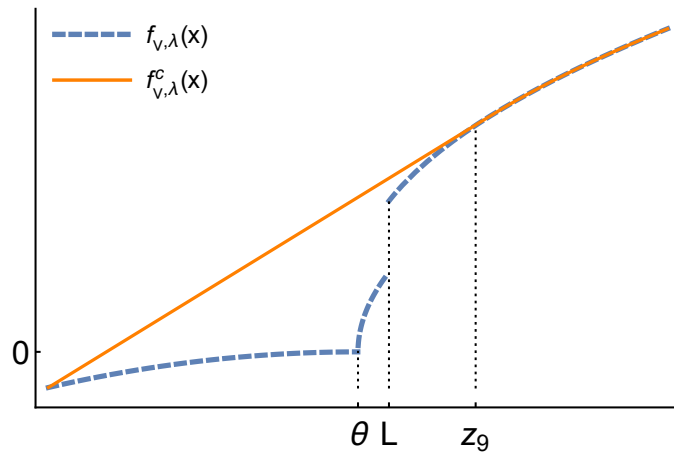


图 3.9 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_9 - \theta); \\ 0 & U'(z_9 - \theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-63)$$

(c) 若  $k_{v,\lambda} \geq U'(z_8 - \theta)$ , 则存在唯一  $z_{10} \in (\theta, z_8]$  满足

$$U'(z_{10} - \theta) = \frac{U(z_{10} - \theta) + vD(\theta)}{z_{10} - 0} = \frac{f_v(z_{10}) - f_v(0)}{z_{10} - 0}. \quad (3-64)$$

此时示意图如图 3.10

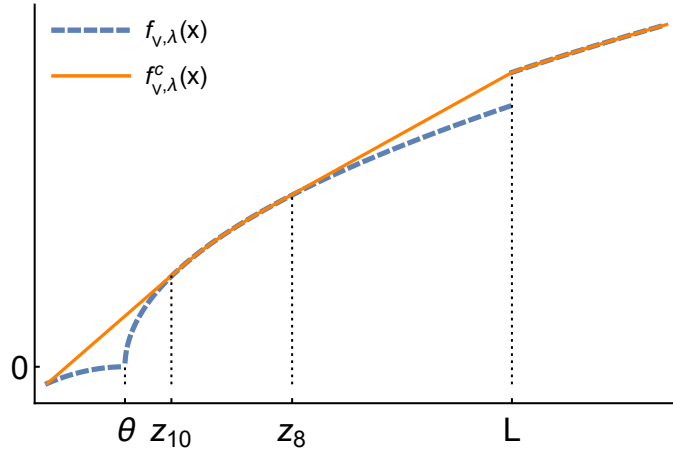


图 3.10 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(L - \theta); \\ L & U'(L - \theta) \leq y < U'(z_8 - \theta); \\ I_1(y) + \theta & U'(z_8 - \theta) \leq y < U'(z_{10} - \theta); \\ 0 & U'(z_{10} - \theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-65)$$

2. 若  $k_{v,\lambda} \leq vD'(\theta)$ , 此时存在唯一  $z_{11} \in [0, \theta]$  满足

$$vD'(\theta - z_{11}) = \frac{U(L - \theta) + \lambda + vD(\theta - z_{11})}{L - z_{11}}. \quad (3-66)$$

此时考虑  $U'(z_8 - \theta), U'(L - \theta), vD'(\theta - z_{11})$  三者的关系:

(a) 若  $U'(z_8 - \theta) > vD'(\theta - z_{11}) \geq U'(L - \theta)$ , 此时示意图如图 3.11

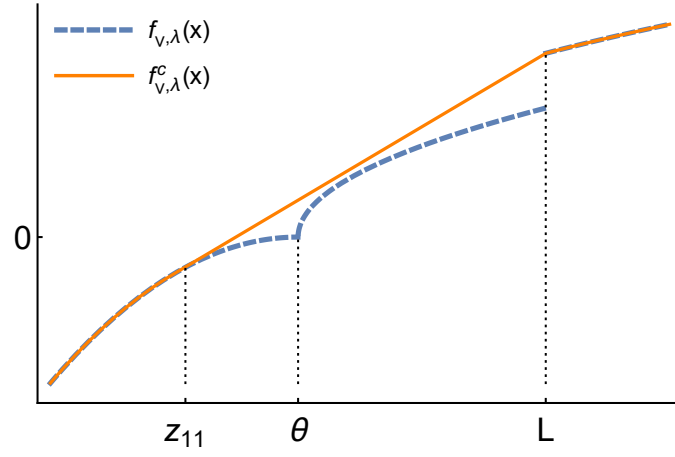


图 3.11 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(L - \theta); \\ L & U'(L - \theta) \leq y < vD'(\theta - z_{11}); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_{11}) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-67)$$

(b) 若  $U'(z_8 - \theta) < vD'(\theta - z_{11})$ , 此时必有  $z_2 < z_8$ , 此时示意图如图 3.12

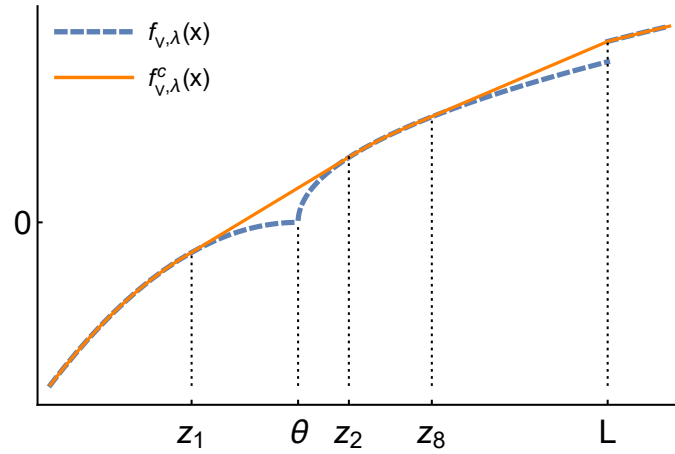


图 3.12 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(L - \theta); \\ L & U'(L - \theta) \leq y < U'(z_8 - \theta); \\ I_1(y) + \theta & U'(z_8 - \theta) \leq y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_1) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-68)$$

(c) 若  $U'(L - \theta) > vD'(\theta - z_{11})$ , 则此时存在唯一  $z_{12} < \theta < L < z_{13}$  满足

$$vD'(\theta - z_{12}) = U'(z_{13} - \theta) = \frac{U(z_{13} - \theta) + \lambda + vD(\theta - z_{12})}{(z_{13} - \theta) + (\theta - z_{12})}. \quad (3-69)$$

若  $z_{12} \leq 0$  则此时化归为图 3.9 以及解 (3-63) 的情形; 若  $0 < z_{12} < L$ , 此时示意图如图 3.13

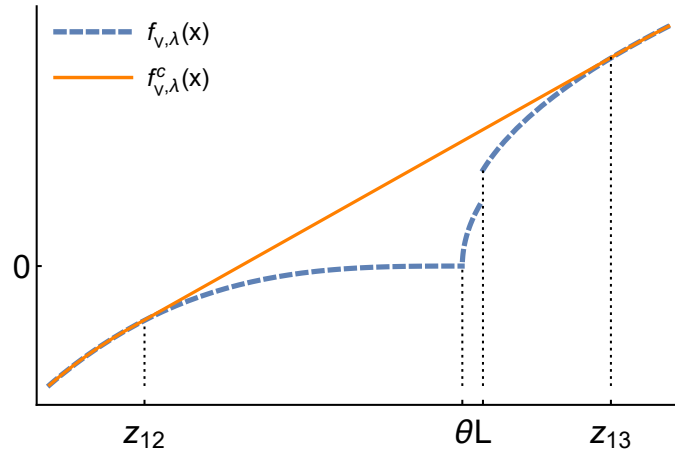


图 3.13 函数  $f_{v,\lambda}(x)$  与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x_{v,\lambda}^*(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_{13} - \theta); \\ \theta - I_2\left(\frac{y}{v}\right) & vD'(\theta - z_{12}) \leq y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leq y. \end{cases} \quad (3-70)$$

惩罚函数是凹函数时

此时优化问题 (3-35) 的目标函数为“S 型”效用函数, 此时非随机的问题求解参见文章 [20]。

综上，我们求出了非随机问题的解  $x_{v,\lambda}^*(y)$ ，并且我们发现它关于变量  $y$  是非增的并且是几乎处处连续的。我们下面将利用解  $x_{v,\lambda}^*(y)$  的性质来证明最优乘子  $\beta^*$  的存在性。

### 3.8 最优乘子的存在性

与最优参数  $v^*$  的存在性证明 (3.4) 类似，我们定义函数

$$R_{v,\lambda}(\beta) := \mathbb{E}[H(T)Z_{v,\lambda,\beta}] \equiv \mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta H(T))]. \quad (3-71)$$

首先由解  $x_{v,\lambda}^*(y)$  关于  $y$  是非增的，并且有  $\lim_{y \searrow 0} x_{v,\lambda}^*(y) = \infty, \lim_{y \rightarrow \infty} x_{v,\lambda}^*(y) = 0$ ，于是有

$$R_{v,\lambda}(\beta) = \mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta H(T))] \leq \mathbb{E}\{H(T)[I_1(\beta H(T)) + \theta]\} < \infty, \quad (3-72)$$

其中  $\mathbb{E}[H(T)I_1(\beta H(T))] < \infty$  的证明需要用到假设 (H4) 报酬函数  $U$  是 Arrow-Pratt 相对风险规避型的并且满足渐进弹性条件，具体证明参见文章 [19] 的推论 5.1。于是，由单调收敛定理知， $\lim_{\beta \rightarrow \infty} R_{v,\lambda}(\beta) = 0, \lim_{\beta \searrow 0} R_{v,\lambda}(\beta) = \infty$ 。

$R_{v,\lambda}(\beta)$  关于  $\beta$  的连续性证明需要利用有界收敛定理： $\forall \beta > 0$ ，设  $0 < \beta_n \rightarrow \beta$ ，则对任意给定的  $\epsilon > 0$ ，存在  $N$  充分大，使任意  $n > N$  均有

$$0 \leq H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta H(T)) \leq H(T)[I_1((\beta - \epsilon)H(T)) + \theta]. \quad (3-73)$$

又上界  $H(T)[I_1((\beta - \epsilon)H(T)) + \theta]$  是可积的，于是由有界收敛定理知

$$\lim_{\beta_n \rightarrow \beta} R_{v,\lambda}(\beta_n) = \lim_{\beta_n \rightarrow \beta} \mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta_n H(T))] = \mathbb{E}\left[\lim_{\beta_n \rightarrow \beta} H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta_n H(T))\right]. \quad (3-74)$$

由解  $x_{v,\lambda}^*(y)$  关于变量  $y$  是几乎处处连续的，于是有

$$\mathbb{E}\left[\lim_{\beta_n \rightarrow \beta} H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta_n H(T))\right] = \mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta H(T))] = R_{v,\lambda}(\beta). \quad (3-75)$$

于是由式 (3-74) 和式 (3-75) 可得  $\lim_{\beta_n \rightarrow \beta} R_{v,\lambda}(\beta_n) = R_{v,\lambda}(\beta)$ ，也即得到  $R_{v,\lambda}(\beta)$  关于  $\beta$  的连续性。再由解  $x_{v,\lambda}^*(y)$  关于变量  $y$  的单调性同样可以得到  $R_{v,\lambda}(\beta)$  关于  $\beta$  的单调性。

**推论 3.2:** 在以上假设下有  $R_{v,\lambda}(\beta)$  关于  $\beta$  是连续的，且  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} R_{v,\lambda}(\beta) = 0, \lim_{\beta \searrow 0} R_{v,\lambda}(\beta) = \infty$ ，于是易见存在  $\beta^*$  使  $\mathbb{E}[H(T)Z_{v,\lambda,\beta^*}] = R_{v,\lambda}(\beta^*) = \tilde{x}_0$ 。



### 3.9 小结

在以上假设 (H1)-(H4) 成立和允许当前财富值  $X^\pi(t)$  取适当的负值时, 由定理3.1, 命题3.1, 定理3.2, 推论3.1, 定理3.3, 定理3.4, 定理3.5、推论3.2和公式 (3-1), 我们可以按照以下思路求解原优化问题 (2-10):

- 一、首先由定理3.5中给出的结果得非随机的问题 (3-42) 得最优解  $x_{v,\lambda}^*(y)$ 。
- 二、对于非随机的问题 (3-42) 最优解  $x_{v,\lambda}^*(y)$ , 利用推论3.2, 寻找乘子  $\beta^*$ <sup>①</sup>使得  $\mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta^*H(T))] = \tilde{x}_0$ , 此时  $Z_{v,\lambda} = Z_{v,\lambda,\beta^*} = x_{v,\lambda}^*(\beta^*H(T))$  即为优化问题 (3-36) 的最优解。
- 三、对优化问题 (3-36) 的最优解  $Z_{v,\lambda}$ , 利用文章 [20] 中定理 4.1 得  $\lambda^*$ <sup>②</sup>使解  $Z_{v,\lambda^*}$  满足 (3-37) 和 (3-38)。即得线性化之后的优化问题 (3-35) 最优解  $Z_{v,\lambda^*}$ 。
- 四、对优化问题 (3-35) 的最优解  $Z_v = Z_{v,\lambda^*}$ , 取  $v^*$ <sup>③</sup>使问题 (3-35) 的最优目标值为 0, 此时对应的最优解  $Z^* = Z_{v^*}$  即为问题 (3-8) 的最优解, 此时  $v^*$  即为问题 (2-10) 最优目标值。
- 五、利用公式 (3-1) 和命题3.1中的公式 (3-15) 和公式 (3-17) 则分别给出问题 (2-10) 的退休时刻财富  $X^{\pi^*}(T)$  和最优投资策略  $\pi^*$ 。

① 这里得到的  $\beta^*$  是隐式的, 不过由于  $R_{v,\lambda}(\beta)$  关于  $\beta$  的单调性, 我们容易用数值的方法给出数值解。

② 这里得到的  $\lambda^*$  同样是隐式的, 可以用数值的方法给出数值解。

③ 这里得到的  $v^*$  也是隐式的, 利用单调性, 同样容易用数值的方法给出数值解。

## 第 4 章 数值求解与分析

### 4.1 数值求解

我们将对优化问题 (2-10) 中的参数选取一些具体的取值, 按照第3.9节求解步骤求出数值解并对其进行分析。

惩罚函数是凹函数时, 优化问题 (3-35) 的目标函数为“S 型”效用函数, 此时问题的数值求解分析同样参见文章 [20]。

以下考虑惩罚函数  $D$  是凸函数的情形, 根据前文中的分析和假设, 我们取报酬函数  $U$  和惩罚函数  $D$  均为幂函数:

$$U(x) := x^{\gamma_1}, \forall x \geq 0, \text{ 其中 } \gamma_1 \in (0, 1), \quad (4-1)$$

$$D(x) := Ax^{\gamma_2}, \forall x \geq 0, \text{ 其中 } \gamma_2 > 1, A > 0. \quad (4-2)$$

此时有

$$I_1(y) = (U')^{-1}(y) = \left(\frac{y}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1-1}}, \quad (4-3)$$

$$I_2(y) = (D')^{-1}(y) = \left(\frac{y}{A\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}. \quad (4-4)$$

在下面的模拟中, 我们取无风险利率为  $r = 0.02$ , 工作时间  $T = 50$ , 固定缴费项  $c(x) \equiv 0.1$ , 初始财富值  $x_0 = 35$ , 股票 (有风险资产) 对应的平均收益率  $\mu = 0.06$ , 波动为  $\sigma = 0.4$  此时单位风险价格 (夏普率) 为  $\xi = (\mu - r)/\sigma = 0.1$ , 另外取  $\theta = 50, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 2.2, A = 10^{-3}$ 。我们首先取  $L = 55, \varepsilon = 0.3$  来进行问题的求解。

#### 4.1.1 求解过程

由以上分析, 我们需要首先对于给定  $v, \lambda$  考虑此时非随机的问题 (3-42) 最优解  $x_{v,\lambda}^*(y)$ , 并寻找乘子  $\beta^*$  使得  $\mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta^*H(T))] = \tilde{x}_0$ 。由于此处问题的求解  $\beta^* = \beta^*(v, \lambda)$  没有一个初等的解析表达式, 因此在这里, 我们就需要采取数值的求解方法。也即, 先假设一个初始的  $v$  和  $\lambda$ , 然后利用数值方法求出给定  $v$  和  $\lambda$  时满足约束  $\mathbb{E}[H(T)x_{v,\lambda}^*(\beta^*H(T))] = \tilde{x}_0$  的参数  $\beta^* = \beta^*(v, \lambda)$ 。我们称该步骤为步骤一。

而同样的，在求解  $\lambda^*$  的时候，也需要先假设一个初始的  $\nu$ ，然后对一系列  $\lambda$ ，重复步骤一求解数值解  $\beta^* = \beta^*(\nu, \lambda)$ ，得一系列相应的最优解  $Z_{\nu, \lambda}$ 。再从这些  $\lambda$  中寻找一个使  $Z_{\nu, \lambda}$  满足条件 (3-37) 和 (3-38) 的参数  $\lambda^*(\nu)$ 。我们称该步骤为步骤二。

更进一步的，求解  $\nu^*$  的过程也是如此，考虑对一系列  $\nu$ ，我们重复步骤二分别求出此时的参数  $\lambda^*(\nu)$ ，得一系列相应的最优解  $Z_\nu$ 。再从这些  $\nu$  中寻找一个  $\nu^*$  使其对应最优解  $Z_{\nu^*}$  恰好使问题 (3-35) 的最优目标值为 0。

#### 4.1.2 所遇到的问题

注意到函数  $R_{\nu, \lambda}(\beta)$  关于参数  $\beta$  的单调性，为了计算的效率，我们在此尝试了二分法，而注意到  $\beta^*$  较小时的可能性较大，我们还采用了黄金分割线搜索的方法<sup>①</sup>进行，对比发现二分法的稳定性更好一些，因此最终采用了二分法进行求解。数值求解  $\nu^*$  和  $\lambda^*$  的思路也是如此。

即便已经用上效率都较高的二分法，我们在实际计算中发现仅一步在给定  $\nu, \lambda$  时，求解  $\beta^*$  的过程也需要较多时间。由于嵌套关系，而给定  $\nu$  时，求解  $\lambda^*$  和  $\nu^*$  的过程则需要更多时间。究其原因，我们发现每一次尝试  $\beta$  都需要计算一个复杂表达式  $H(T)x_{\nu, \lambda}^*(\beta H(T))$  的期望，因此产生了较大计算量。考虑到上述嵌套的求解过程，步骤二中的验证条件 (3-37) 和 (3-38) 也需要很大计算量，而为了计算最终的最优值要对上述过程重复非常多次，因此计算问题 (3-8) 的最优解时所需时间较多。

除此之外，考虑到最后求解最优投资过程时，需要利用鞅表示定理，对问题 (3-8) 的最优解也即退休时刻财富，取条件数学期望。这一点在目前通过计算机数值模拟的方法更是难以做到。事实上，在目前见到的前人的文章里，还未曾发现作者在数值求解部分中求出最优投资过程的表达。因此在本文中也只考虑求解退休时刻财富的分布情况和最优目标值。

## 4.2 数值分析

当  $L > \theta$  时，考虑到此时报酬函数  $U$  和惩罚函数  $D$  的数量级，我们只在范围  $[0, 100]$  内求解  $\beta^*$ ，在范围  $[0, 1000]$  内求解  $\lambda^*$ ，在范围  $[0, 100]$  内求解  $\nu^*$ 。

以下分别考虑结果对  $\epsilon$  和  $L$  的敏感性。

<sup>①</sup> 黄金分割线搜索法是一种原理上和二分法一样的数值求解函数零点的方法。具体参见 [22]。

先考虑  $\varepsilon = 1$  也即无 VaR 约束时的情形，考虑不同  $L$  的取值下，中间变量的变化情况。

表 4.1  $\varepsilon = 1$  时其他变量随  $L$  的变化情况

	$v^*$	$\lambda^*$	$\beta^*$	$P(Z_{v^*, \lambda^*} \geq L)$
$L = 55$ 时	5.99014	0	0.100623	0.596059
$L = 65$ 时	5.99014	0	0.100623	0.535599
$L = 75$ 时	5.99014	0	0.100623	0.507116
$L = 85$ 时	5.99014	0	0.100623	0.488325

此时显而易见，最优目标值  $v^*$  和  $\lambda^*$  都是一样的，其原因是此时 VaR 约束相当于无约束，因此  $L$  的改变不影响变量的选择。而此时不同的只有  $Z_{v^*, \lambda^*} \geq L$  的概率，而由不同  $L$  的取值时  $Z_{v^*, \lambda^*} \geq L$  的概率也可以大致看出  $Z_{v^*, \lambda^*}$  的分布情况： $L$  改变对概率影响较小，说明  $Z_{v^*, \lambda^*}$  在此范围内分布较为分散。

下面固定  $\varepsilon = 0.4$ ，同时改变  $L$  的取值，考虑此时最终目标值的变化情况。

表 4.2  $\varepsilon = 0.4$  时其他变量随  $L$  的变化情况

	$v^*$	$\lambda^*$	$\beta^*$	$P(Z_{v^*, \lambda^*} \geq L)$
$L = 55$ 时	5.99014	0.000953674	0.100623	0.600093
$L = 65$ 时	5.97466	0.396729	0.101135	0.599923
$L = 75$ 时	5.94445	1.06812	0.102053	0.599924
$L = 85$ 时	5.88931	6.13403	0.101004	0.599923

由上述结果可以看出：对  $\varepsilon$  固定时， $L$  越大最优目标值小，而最优时对应的参数  $\lambda^*$  越大。这是因为：当  $\varepsilon$  固定时， $L$  越大说明 VaR 约束限制越强，随机变量选择范围受到限制越紧，此时目标函数最优值越小。除此之外还发现参数  $\lambda^*$  对  $L$  的变化比较敏感，而  $L$  变化时  $\beta^*$  基本不怎么变化，这一点也和  $\lambda^*$  的来源：VaR 约束对应的 Lagrange 乘子相对应。

下面取  $L = 65$ ，同时改变  $\varepsilon$  的取值，考虑最终目标值的变化情况。

表 4.3  $L = 65$  时其他变量随  $\varepsilon$  的变化情况

	$v^*$	$\lambda^*$	$\beta^*$	$P(Z_{v^*, \lambda^*} \geq L)$
$\varepsilon = 1$ 时	5.99014	0	0.100623	0.535599
$\varepsilon = 0.5$ 时	5.99014	0	0.100623	0.535599
$\varepsilon = 0.4$ 时	5.97466	0.396729	0.101135	0.599923
$\varepsilon = 0.35$ 时	5.92557	1.90735	0.103567	0.650026
$\varepsilon = 0.3$ 时	5.90442	10.6201	0.124119	0.700066

注意到此时，当  $\varepsilon = 1$  时也即无 VaR 约束时求得的最优目标值为 5.99014，此时  $P(Z_{v^*, \lambda^*} \geq L) = 0.535599$  自然满足  $\varepsilon = 0.5$  时的 VaR 约束，因此  $\varepsilon = 0.5$  时最优目标值一样为 5.99014。而当  $L = 65$  给定，考虑不同  $\varepsilon$  对应的目标值时发现：在增加 VaR 约束之后，VaR 约束越宽松，目标值越大，反之亦然。这一点也比较容易理解：随机变量选择范围受到限制越紧，此时目标函数最优值越小。同样发现参数  $\lambda^*$  对  $\varepsilon$  的变化比较敏感，而  $\varepsilon$  变化时  $\beta^*$  基本不怎么变化。同时比较此时的  $\lambda^*$  和  $P(Z_{v^*, \lambda^*} \geq L)$  还可以看出：在为了满足 VaR 约束的条件寻找  $\lambda^*$  的过程中，增大  $\lambda$  对  $P(Z_{v^*, \lambda} \geq L)$  的提高不明显，而当此概率本身较大时，要提高同样的幅度需要对应  $\lambda$  变化越大。也即：当  $\varepsilon$  较小（VaR 约束较为紧张时），VaR 约束对应的 Lagrange 乘子  $\lambda^*$  对  $\varepsilon$  的敏感性越高。

当  $L < \theta$  时所得结论与  $L > \theta$  时的情形类似，故不再赘述。

## 第 5 章 结论

本文考虑了 VaR 约束下, 含有固定缴费项的养老基金, 对相对绩效比率型目标函数进行优化的管理问题。主要考虑了固定缴费项的处理、对财富过程约束利用鞅方法进行转化、将相对绩效比问题进行线性化处理、将 VaR 约束转化为拉格朗日乘子法惩罚项、将随机优化转化为确定性优化、对确定的非凹最优化问题考虑求极值的方法。进而在理论上给出优化问题的求解方法。之后本文给出了具体的算例, 求解并分析了参数不同取值对结果的影响。

## 插图索引

图 3.1	函数 $f_v(x)$ 与其凹包函数示意图.....	16
图 3.2	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	17
图 3.3	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	18
图 3.4	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	19
图 3.5	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	19
图 3.6	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	20
图 3.7	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	21
图 3.8	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	22
图 3.9	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	22
图 3.10	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	23
图 3.11	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	24
图 3.12	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	24
图 3.13	函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图 .....	25

## 表格索引

表 4.1	$\varepsilon = 1$ 时其他变量随 $L$ 的变化情况 .....	30
表 4.2	$\varepsilon = 0.4$ 时其他变量随 $L$ 的变化情况 .....	30
表 4.3	$L = 65$ 时其他变量随 $\varepsilon$ 的变化情况 .....	31



## 公式索引

公式 2-1 .....	3
公式 2-2 .....	3
公式 2-3 .....	3
公式 2-4 .....	3
公式 2-5 .....	4
公式 2-6 .....	4
公式 2-7 .....	4
公式 2-8 .....	4
公式 2-9 .....	4
公式 2-10 .....	5
公式 3-1 .....	6
公式 3-2 .....	6
公式 3-3 .....	6
公式 3-4 .....	6
公式 3-5 .....	6
公式 3-6 .....	7
公式 3-7 .....	7
公式 3-8 .....	7
公式 3-9 .....	7
公式 3-10 .....	7
公式 3-11 .....	8
公式 3-12 .....	8
公式 3-13 .....	8
公式 3-14 .....	8
公式 3-15 .....	8
公式 3-16 .....	9
公式 3-17 .....	9
公式 3-18 .....	10

公式 3-19 .....	10
公式 3-20 .....	10
公式 3-21 .....	10
公式 3-22 .....	10
公式 3-23 .....	10
公式 3-24 .....	11
公式 3-25 .....	11
公式 3-26 .....	11
公式 3-27 .....	11
公式 3-28 .....	12
公式 3-29 .....	12
公式 3-30 .....	12
公式 3-31 .....	13
公式 3-32 .....	13
公式 3-33 .....	13
公式 3-34 .....	13
公式 3-35 .....	13
公式 3-36 .....	13
公式 3-37 .....	14
公式 3-38 .....	14
公式 3-39 .....	14
公式 3-40 .....	14
公式 3-41 .....	14
公式 3-42 .....	15
公式 3-43 .....	15
公式 3-44 .....	15
公式 3-45 .....	16
公式 3-46 .....	16
公式 3-47 .....	16
公式 3-48 .....	16
公式 3-49 .....	17
公式 3-50 .....	17

公式 3-51 .....	18
公式 3-52 .....	18
公式 3-53 .....	19
公式 3-54 .....	19
公式 3-55 .....	20
公式 3-56 .....	20
公式 3-57 .....	20
公式 3-58 .....	21
公式 3-59 .....	21
公式 3-60 .....	21
公式 3-61 .....	22
公式 3-62 .....	22
公式 3-63 .....	23
公式 3-64 .....	23
公式 3-65 .....	23
公式 3-66 .....	23
公式 3-67 .....	24
公式 3-68 .....	25
公式 3-69 .....	25
公式 3-70 .....	25
公式 3-71 .....	26
公式 3-72 .....	26
公式 3-73 .....	26
公式 3-74 .....	26
公式 3-75 .....	26
公式 4-1 .....	28
公式 4-2 .....	28
公式 4-3 .....	28
公式 4-4 .....	28
公式 A-1 .....	43
公式 A-2 .....	43
公式 A-3 .....	44

公式 A-4	44
公式 A-5	44
公式 A-6	44
公式 A-7	44
公式 A-8	45
公式 A-9	45
公式 A-10	45
公式 A-11	45
公式 A-12	45
公式 A-13	45
公式 A-14	45
公式 A-15	46
公式 A-16	46
公式 A-17	46
公式 A-18	47
公式 A-19	47
公式 A-20	47
公式 A-21	47
公式 A-22	47
公式 A-23	47
公式 A-24	47
公式 A-25	48
公式 A-26	48
公式 A-27	48
公式 A-28	48
公式 A-29	48
公式 A-30	49
公式 A-31	49
公式 A-32	49
公式 A-33	50
公式 A-34	50
公式 A-35	50

## 参考文献

- [1] BOULIER J F, HUANG S J, TAILLARD G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28(2):173-189.
- [2] CAIRNS A J, BLAKE D, DOWD K. Stochastic lifestyling: optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2006, 30(5):843-877.
- [3] ZHANG A H, KORN R, EWALD C O. Optimal management and inflation protection for defined contribution pension plans[J]. Blatter der DGVFM, 2007, 28:239-258.
- [4] ZHANG A H, EWALD C O. Optimal investment for a pension fund under inflation risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2010, 71:353-369.
- [5] YAO H, YANG Z, CHEN P. Markowitz's mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: A continuous-time model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3):851-863.
- [6] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1):77-91.
- [7] SHARPE W F. Mutual fund performance[J]. The Journal of Business, 1966, 39(2):119-138.
- [8] KEATING C, SHADWICK W F. A universal performance measure[J]. Journal of Performance Measurement, 2002, 6(3):59-84.
- [9] DINKELBACH W. On nonlinear fractional programming[J]. Management Science, 1967, 13(7):492-498.
- [10] BASAK S, SHAPIRO A. Value-at-risk-based risk management: Optimal policies and asset prices[J]. Review of Financial Studies, 2001, 14:371-405.
- [11] BOYLE P, TIAN W. Portfolio management with constraints[J]. Mathematical Finance, 2007, 17:319-344.
- [12] KRAFT H, STEFFENSEN M. A dynamic programming approach to constrained portfolios[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 229:453-461.
- [13] LIN H, SAUNDERS D, WENG C. Portfolio optimization with performance ratios[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2019, 22(5).
- [14] BASAK S. A general equilibrium model of portfolio insurance[J]. Review of Financial Studies, 1995, 8(4):1059-1090.
- [15] ZHANG A, EWALD C O. Optimal investment for a pension fund under inflation risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2010, 71:353-369.

- [16] COX J C, HUANG C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. *Journal of Economic Theory*, 1989, 49(1):33-83.
- [17] KARATZAS I, SHREVE S E. *Brownian motion and stochastic calculus*[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991: 36.
- [18] JIN H, ZHOU X Y. Behavioral portfolio selection in continuous time[J]. *Mathematical Finance*, 2008, 18(3):385-426.
- [19] JIN H, ZHOU X Y, XU Z Q. A convex stochastic optimization problem arising from portfolio selection[J]. *Mathematical Finance*, 2008, 18(1):171-183.
- [20] DONG Y, ZHENG H. Optimal investment with s-shaped utility and trading and value at risk constraints: An application to defined contribution pension plan[J]. *European Journal of Operational Research*, 2020, 281:341-356.
- [21] LIN H, SAUNDERS D, WENG C. Optimal investment strategies for participating contracts[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2017, 73:137-155.
- [22] KIEFER J. Sequential minimax search for a maximum[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1953, 4(3):502-506.

## 致 谢

衷心感谢导师清华大学数学科学系梁宗霞教授对本人的精心指导。除此之外，他曾经教过我概率论和随机分析课程，使我对概率这门学科格外感兴趣，也使我今后有志于概率相关的内容研究。同时也感谢陈金文教授和卢旭光教授在我学习的其他基础课程时的点播和耐心指导。

由于新冠疫情的影响，这几个月以来毕业设计都在家进行。感谢父母和爷爷奶奶在我做毕业论文期间对我无微不至的关怀照顾和陪伴。感谢梁老师组内的各位师兄师姐和同学在我论文选题、资料查阅和研究思路上的帮助和点播。感谢同学和朋友们在我遇到困难时对我的帮助和鼓励。感谢 ThuThesis，帮我在格式的排版上节省了不少时间。

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 夏 焱 日 期： 2020.06.08



## 附录 A 外文资料的调研阅读报告

### A.1 The investment problem for a DC pension fund

This part is mainly related to Yinghui Dong and Harry Zheng's article<sup>[20]</sup>.

#### A.1.1 The financial market and the wealth process

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  be a filtered complete probability space with the filtration  $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t | 0 \leq t \leq T\}$  being the natural filtration generated by an  $n$ -dimensional standard Brownian motion  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$ , where  $W_1(t), \dots, W_n(t)$  are independent and satisfying the usual conditions. The pension fund starts at time 0 and the retirement time is  $T$ . Let the financial market consist of  $n+1$  traded securities: one riskless savings account  $S_0(t)$  and  $n$  risky assets  $S_i(t), i = 1, \dots, n$ . The riskless savings account evolves as

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt \quad dS(t) = \text{diag}(S(t))(\mu dt + \sigma dW(t)) \quad (\text{A-1})$$

where  $r$  is a riskless interest rate,  $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))^T$ ,  $\text{diag}(S(t))$  is an  $n \times n$  matrix with diagonal elements  $S_i(t)$  and all other elements 0,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  is a constant vector representing the stock growth rate with  $\mu_i > r, i = 1, \dots, n$ , and  $\sigma = (\sigma_{ij})$  is an  $n \times n$  nonsingular constant matrix representing the volatility and correlation information of  $S(t)$ . Let  $c(t) > 0$  denote the aggregated amount of money contributed at time  $t$  of a cohort of fund participants. Then we have the equation

$$dX^\pi(t) = (rX^\pi(t) + \pi^T(t)\sigma\xi)dt + \pi^T(t)\sigma dW(t) + c(t)dt, t \geq 0 \quad (\text{A-2})$$

with initial condition  $X^\pi(0) = x_0$ , where  $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))^T$  and  $\pi_i(t)$  is the amount of wealth invested in the  $i$ th risky asset for  $i = 1, \dots, n$ ,  $\xi = \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$  is the market price of risk vector and  $\mathbf{1}$  is a vector with all components 1.

### A.1.2 Statement of the optimization problem and its transformation

For an S-shaped utility function that satisfies certain given conditions

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ -U_2(\theta - x), & 0 \leq x < \theta \\ U_1(x - \theta), & x \geq \theta \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

where  $U_1, U_2$  are two strictly increasing, strictly concave, continuously differentiable, real-valued functions defined on  $[0, \infty)$  satisfying the asymptotic elasticity condition.

Consider the following VaR constraint optimization problem

$$\begin{cases} \max_{\pi \in A} \mathbb{E} [U(X^\pi(T))] \\ \text{s.t. } X^\pi(t) \text{ satisfies (A-2)} \\ \mathbb{P}(X^\pi(T) > L) > 1 - \varepsilon \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

where  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $L$  is given constant numbers.

For the above-mentioned extreme value problem, the Lagrange multiplier method can be used to convert it into an unconstrained extreme value problem. That is, consider

$$\tilde{U}_\lambda(x) = U(x) + \lambda 1_{\{x \geq L\}} \quad (\text{A-5})$$

Where  $\lambda \geq 0$  is the Lagrange multiplier to be determined. It can be proven that for the following problems without VaR constraints

$$\begin{cases} \max_{\pi \in A} \mathbb{E} [\tilde{U}_\lambda(X^\pi(T))] \\ \text{s.t. } X^\pi(t) \text{ satisfies (A-2)} \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

If a non-negative multiplier  $\lambda^* \geq 0$  makes  $X^{\pi^*, \lambda^*}$  the optimal solution for the problem (A-6) under the corresponding optimal control  $\pi^*$ ,  $X^{\pi^*, \lambda^*}$  is also the optimal solution for the problem (A-4).

For the problem (A-6), the objective function is not continuous or strictly concave. We consider using the method of concave duality to solve. First notice that a simple transformation of the wealth process is possible, that is, taking

$$\tilde{X}^\pi(t) = X^\pi(t) + C(t) \quad (\text{A-7})$$

where  $C(t) = \int_t^T c(s)e^{-r(s-t)}ds$  is the discounted value of the total contribution of the pension at the time of  $t$  to the time of  $T$  at the time of  $t$ .

Then the original equation is equivalent to

$$\begin{cases} d\tilde{X}^\pi(t) = (r\tilde{X}^\pi(t) + \pi^\top(t)\sigma\xi) dt + \pi^\top(t)\sigma dW(t) \\ \tilde{X}^\pi(0) = \tilde{x}_0 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

where  $\tilde{x}_0 = x_0 + C(0) = x_0 + \int_0^T c(s)e^{-rs} ds$  and  $\tilde{X}^\pi(T) = X^\pi(T)$ ,  $\tilde{X}^\pi(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$ .

Then the problem (A-6) is equivalent to

$$\begin{cases} \max_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} [\tilde{U}_\lambda(\tilde{X}^\pi(T))] \\ \text{s.t. } \tilde{X}^\pi(t) \text{ satisfies (A-8)} \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

It can be proved that the optimal solution function of this problem is equal to the optimal solution function of the concave problem.

$$u_\lambda(t, \tilde{x}) = \max_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} [\tilde{U}_\lambda(\tilde{X}^\pi(T)) | \tilde{X}^\pi(t) = \tilde{x}] \quad (\text{A-10})$$

$$u_\lambda^c(t, \tilde{x}) = \max_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} [\tilde{U}_\lambda^c(\tilde{X}^\pi(T)) | \tilde{X}^\pi(t) = \tilde{x}] \quad (\text{A-11})$$

Then we have  $u_\lambda(t, \tilde{x}) = u_\lambda^c(t, \tilde{x})$ , where  $\tilde{U}_\lambda^c(t)$  represents the concave hull function of  $\tilde{U}_\lambda(t)$ .

### A.1.3 Solving the optimization problem

We have already transformed a non-concave and non-continuous optimization problem into a continuous concave function optimization problem (A-11). For the optimization of the continuous concave function mentioned above, since the dual function of the objective function is a concave function, we can consider the dual method:

Consider the dual control set as  $\mathcal{A}_0$ . Define the dual process for  $v \in \mathcal{A}_0$ :

$$dY^v(t) = Y^v(t) \left( -rdt - (\sigma^{-1}v(t) + \xi)^\top dW(t) \right), Y^v(0) = y_0 \quad (\text{A-12})$$

Considering the dual minimum problem and dual objective function are

$$\min_{v \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E} [V_\lambda^c(Y^v(T))] \quad (\text{A-13})$$

$$v_\lambda(t, y) = \min_{v \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E} [V_\lambda^c(Y^v(T)) | Y^v(t) = y] \quad (\text{A-14})$$

Where  $V_\lambda(y) = \sup_{x \geq 0} \{\tilde{U}_\lambda(x) - xy\}$ ,  $y > 0$  is the dual function of  $\tilde{U}_\lambda(t)$ ,  $V_\lambda^c(y) = \sup_{x \geq 0} \{\tilde{U}_\lambda^c(x) - xy\}$ ,  $y > 0$  is the dual function of  $\tilde{U}_\lambda^c(t)$ . Then we get  $V_\lambda^c(y) = V_\lambda(y)$  and the HJB function of the dual process is

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}(t, y) - ry \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} y^2 \min_{v \in \bar{K}} \|\xi + \sigma^{-1} v\|^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2}(t, y) = 0 \\ v_\lambda(T, y) = V_\lambda(y), y > 0, t < T \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

Consider  $v$ , which minimizes the quadratic convex function  $f(v) = \|\xi + \sigma^{-1} v\|^2$ , as  $\hat{v}$ . If  $\hat{\xi} = \xi + \sigma^{-1} \hat{v} \neq 0$ , the solution of the problem (A-15) is

$$v_\lambda(t, y) = \mathbb{E} [V_\lambda(Y^{\hat{v}}(T)) | Y^{\hat{v}}(t) = y] \quad (\text{A-16})$$

Where  $Y^{\hat{v}}(s) = y \frac{H^0(s)}{H^0(t)}$ ,  $t \leq s \leq T$  and

$$H^{\hat{v}}(t) = \exp \left( - \left( r + \frac{\|\xi\|^2}{2} \right) t - \xi^\top W(t) \right) \quad (\text{A-17})$$

Combined with<sup>[2]</sup>, the relationship between the solution of the dual problem and the solution of the unconstrained optimization problem (A-9) can be obtained, and then the original unconstrained optimization problem (A-6).

Combined with the previous analysis, we only need to prove that there is a non-negative multiplier  $\lambda^* \geq 0$  makes  $X^{\pi^*, \lambda^*}$  is the corresponding optimal control  $\pi^*$ . The optimal solution to the problem (A-6).

In fact, according to Theorem (4.1) in [20], if  $\hat{v}$  makes the quadratic convex function  $f(v) = \|\xi + \sigma^{-1} v\|^2$  get its minimum  $\hat{\xi} = \xi + \sigma^{-1} \hat{v} \neq 0$ ,  $x_0 + C(0) > \mathbb{E} [LH^{\hat{v}}(T) 1_{\{H^{\hat{v}}(T) < H^*\}}]$ . Where  $H^*$  satisfies  $\mathbb{P}(H^{\hat{v}}(T) > H^*) = \varepsilon$ . Then there is a non-negative multiplier  $\lambda^* \geq 0$  makes  $X^{\pi^*, \lambda^*}$  is the corresponding optimal control (A-6).

## A.2 Portfolio optimization with performance ratios

This part is mainly related to Hongcan Lin and David Saunders and Chengguo Weng's article<sup>[13]</sup>.

### A.2.1 The financial market and the wealth process

Different from the above, here we consider the financial market and wealth process as follows: Assume that an agent, with initial wealth  $x_0 > 0$ , invests capital in a risk-free bond  $B$  and  $p$  risky assets with price processes

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ dS_t^{(i)} = S_t^{(i)} \left[ \mu^{(i)} dt + \sum_{j=1}^p \sigma_{ij} dW_t^{(j)} \right], \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

The meaning of various symbols here is similar to the above. Since the defined contribution is not considered here, we have the portfolio value process, denoted by  $X_t^\pi$ , evolves according to the following stochastic differential equation (SDE):

$$dX_t^\pi = \left[ rX_t^\pi + \pi_t^\top (\mu - r\mathbf{1}) \right] dt + \pi_t^\top \sigma dW_t, \quad t \geq 0 \quad (\text{A-19})$$

A trading strategy  $\pi := \{\pi_t, 0 \leq t \leq T\}$  is called admissible with initial wealth  $x_0 > 0$  if it belongs to the following set:

$$\mathcal{A}(x_0) := \left\{ \pi \in \mathcal{S} : \pi_t \in \mathbb{R}^p, X_0^\pi = x_0 \text{ and } X_t^\pi \geq 0, \text{ a.s., } \forall 0 \leq t \leq T \right\} \quad (\text{A-20})$$

where  $\mathcal{S}$  denotes the set of  $\mathbb{F}$ -progressively measurable processes  $\pi$  such that  $\int_0^T \|\pi_t\|^2 dt < \infty$  a.s.

Furthermore, we consider the market price of risk defined as

$$\zeta \equiv (\zeta_1, \dots, \zeta_p)^\top := \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \quad (\text{A-21})$$

and the state-price density process given by

$$\xi_t := \exp \left\{ - \left( r + \frac{\|\zeta\|^2}{2} \right) t - \zeta^\top W_t \right\} \quad (\text{A-22})$$

which is equivalent to

$$d\xi_t = \xi_t [-r dt - \zeta^\top dW_t], \quad \xi_0 = 1 \quad (\text{A-23})$$

### A.2.2 Statement of the optimization problem and its transformation

We then consider the performance measures of the form

$$R(X_T) = \frac{\mathbb{E} \left\{ U \left[ (X_T - L)_+ \right] \right\}}{\mathbb{E} \left\{ D \left[ (L - X_T)_+ \right] \right\}} \quad (\text{A-24})$$

where  $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  and  $D : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  are two strictly increasing measurable functions. The numerator  $\mathbb{E} \{U[(X_T - L)_+]\}$  measures the benefit from exceeding the benchmark wealth  $L$ , while the denominator  $\mathbb{E} \{D[(L - X_T)_+]\}$  penalizes shortfalls. For this reason, we refer to  $U$  as the reward function and  $D$  as the penalty function. Then the optimization problem becomes

$$\begin{cases} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)} \frac{\mathbb{E} \{U[(X_T^\pi - L)_+]\}}{\mathbb{E} \{D[(L - X_T^\pi)_+]\}} \\ X_T^\pi \text{ satisfies (A-19)} \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

Using the definition of  $\xi_T$  and the *Martingale Method*, we can equate the above question as

$$\begin{cases} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x_0)}, \frac{\mathbb{E} \{U[(X_T^\pi - L)_+]\}}{\mathbb{E} \{D[(L - X_T^\pi)_+]\}} \\ \text{subject to, } \mathbb{E} [\xi_T X_T^\pi] \leq x_0 \end{cases} \quad (\text{A-26})$$

which can be transformed into

$$\begin{cases} \sup_{Z \in \mathcal{M}_+}, \frac{\mathbb{E} \{U[(Z - L)_+]\}}{\mathbb{E} \{D[(L - Z)_+]\}} \\ \text{subject to, } \mathbb{E} [\xi_T Z] \leq x_0 \end{cases} \quad (\text{A-27})$$

where  $\mathcal{M}_+$  denotes the set of non-negative  $\mathcal{F}_T$ -measurable random variables. We denote the feasible set of the above problem by  $\mathcal{C}(x_0)$  :

$$\mathcal{C}(x_0) = \{Z \in \mathcal{M}_+ | \mathbb{E} [\xi_T Z] \leq x_0\} \quad (\text{A-28})$$

In fact, for each optimal solution of question (A-27), we can construct an optimal trading strategy for the portfolio optimization problem (A-25) by the martingale representation theorem.

To make the problem solvable, we furthermore assume that the reward function and the penalty function have the following properties.

- (H1)  $U$  and  $D$  are strictly increasing and twice differentiable with  $U(0) = 0$  and  $D(0) = 0$ .
- (H2) The reward function  $U$  satisfies the Inada condition, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0 \quad (\text{A-29})$$

(H3) The reward function  $U$  is strictly concave, with  $U''(z) < 0$  for all  $z \in (0, \infty)$

(H4)  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \right) > 0$

### A.2.3 Solving the optimization problem

since the optimal payoff problem (A-27) involves a non-convex objective function, it is difficult to solve directly. In order to reformulate it into a tractable problem, we set up the following family of linearized problems parameterized by  $\lambda \geq 0$ :

$$v(\lambda; x_0) = \sup_{Z \in \mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E} \{ U[(Z - L)_+] \} - \lambda \mathbb{E} \{ D[(L - Z)_+] \} \quad (\text{A-30})$$

The reason we consider the linearized problem (A-30) is because problem (A-30) and problem (A-27) have the following connection:

Assume  $x_0 < e^{-rT}L$ . For each  $\lambda \geq 0$ , let  $Z_\lambda^*$  be a solution to problem (A-30), and suppose there exists a constant  $\lambda^* \geq 0$  such that

$$\lambda^* = \frac{\mathbb{E} \{ U[(Z_{\lambda^*}^* - L)_+] \}}{\mathbb{E} \{ D[(L - Z_{\lambda^*}^*)_+] \}} \quad (\text{A-31})$$

Then  $Z^* := Z_{\lambda^*}^*$  solves problem (A-27), and  $\lambda^*$  is the optimal value.

So we just need to solve the problem (A-30) and prove the existence of  $\lambda^*$ .

Noticed that the formula (A-31) is equivalent to  $v(\lambda^*; x_0) = 0$ . While suppose that  $x_0 < e^{-rT}L$  and assumptions (H1)–(H4) hold. We can also prove that:

- (a)  $0 < v(0; x_0) < \infty$ .
- (b)  $v$  is non-increasing in  $\lambda$ .
- (c)  $v(\lambda; x_0)$  is convex in  $\lambda$  for each fixed  $x_0 > 0$ .
- (d)  $v(\lambda; x_0)$  is Lipschitz continuous in  $\lambda$ .
- (e)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} v(\lambda; x_0) = -\infty$ .

Then it's easy to see the existence of  $\lambda^*$  satisfying (A-27).

We then use the Lagrangian duality method to solve the problem (A-30), that is, to consider the following optimization problems with multipliers  $\beta$ , for each  $\lambda \geq 0$ :

$$\sup_{Z \in \mathcal{M}_+} \mathbb{E} \{ h_\lambda(Z) - \beta \xi_T Z \}, \quad \beta > 0 \quad (\text{A-32})$$

where

$$h_\lambda(x) := U[(x - L)_+] - \lambda D[(L - x)_+], \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A-33})$$

We solve the above problem by resorting to a pointwise optimization procedure and consider the following problem indexed  $\lambda \geq 0$  and  $y > 0$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \{h_\lambda(x) - yx\} \quad (\text{A-34})$$

By the following theorem we can solve the problem (A-30):

- (a) Let  $x_\lambda^*(y)$  be a Borel measurable function such that  $x_\lambda^*(y)$  is an optimal solution to problem (A-34) for each  $y > 0$  and  $\lambda \geq 0$ . Then,  $Z_{\lambda,\beta}^* := x_\lambda^*(\beta \xi_T)$  solves problem (A-32).
- (b) Assume that, given  $\lambda \geq 0$ , there exists a constant  $\beta^* > 0$  such that  $Z_{\lambda,\beta}^* \in \mathcal{M}_+$  solves problem (A-32) for  $\beta = \beta^*$  and satisfies  $\mathbb{E}[\xi_T Z_{\lambda,\beta^*}^*] = x_0$ . Then,  $Z_\lambda^* := Z_{\lambda,\beta^*}^*$  solves problem (A-30).

For the pointwise optimization problem (A-34), we will employ the concavification method. That is, to consider the concavified version of problem (A-34):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \{h_\lambda^c(x) - yx\} \quad (\text{A-35})$$

By [21], we have the following property: given  $\lambda \geq 0$  and  $y > 0$ , if  $x_\lambda^*(y)$  is a solution to problem (A-35) and  $h_\lambda^c(x_\lambda^*(y)) = h_\lambda(x_\lambda^*(y))$ , then  $x_\lambda^*(y)$  solves problem (A-34).


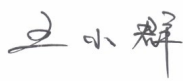
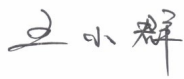
Finally, we just need to solve the problem (A-35) which is much easier than the primal problem (A-25).


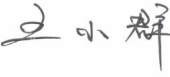
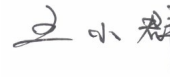
### A.3 Numerical solution and sensitivity analysis

Last but not least, we should also give some specific examples and perform numerical solutions and sensitivity analysis on them. In the above examples, the author has selected the corresponding concave functions as power functions and performed numerical solutions and sensitivity analysis on them. This implies that we can choose similar functions for analysis in our future problem solving.



## 综合论文训练记录表

学生姓名	夏焱	学号	2016012110	班级	数 63
论文题目	相对绩效比率和 VaR 约束下的养老基金优化管理问题				
主要内容以及进度安排	<p>本文考虑了 VaR 约束下，含有固定缴费项的养老基金，对相对绩效比率型目标函数进行优化的管理问题。主要考虑了固定缴费项的处理、对财富过程约束利用鞅方法进行转化、将相对绩效比问题进行线性化处理、将 VaR 约束转化为拉格朗日乘子法惩罚项、将随机优化转化为确定性优化、对确定的非凹最优化问题考虑求极值的方法。进而在理论上给出优化问题的求解方法。之后本文给出了具体的算例，求解并分析了参数不同取值对结果的影响。</p> <p>作者计划在开题报告前后收集并仔细研读了三篇和本论文相关的外文文献。在中期报告前后将问题的等价处理的合理性进行了证明，对最终的一般的确定性问题的分了多种情况，并逐一进行了求解计算设计出了目标函数取幂函数时问题求解的算法。又在终期答辩前利用软件求出此时的数值解，并对其进行敏感性分析。</p> <p style="text-align: right;">指导教师签字： </p> <p style="text-align: right;">考核组组长签字：  _</p> <p style="text-align: right;">2020 年 3 月 14 日</p>				
中期考核意见	<p>论文课题进展顺利且取得一些新成果，达到预期目的。</p> <p style="text-align: right;">考核组组长签字：  _</p> <p style="text-align: right;">2020 年 4 月 12 日</p>				

<p style="text-align: center;">指导教师评语</p>	<p>该论文研究固定缴费型养老金风险管理问题。不同于传统的期望效用理论，论文首次选用退休时刻财富相对绩效比率（高绩效与低绩效之比）作为效用评估退休时刻的投资表现，同时考虑含固定缴费型的风险过程。导致固定缴费型养老金风险管理问题是一个新型非自融资、非线性和有 Value-at-Risk 约束的随机控制问题。论文利用鞅方法、分式规划方法、Lagrange 乘子法以及凹化（对偶）的方法求解该问题，得到了最优决策过程、相应的退休时刻财富和值函数。同时对值函数进行敏感性分析和探讨，验证了理论上正确性和经济的合理性。论文选题前沿，逻辑清晰、语言简洁、内容完整、结论正确，是一篇优秀的本科毕业论文。</p> <p style="text-align: right;">指导教师签字： </p> <p style="text-align: right;">2020 年 6 月 4 日</p>
<p style="text-align: center;">评阅教师评语</p>	<p>该论文研究了非自融资、非线性和有 Value-at-Risk 约束的随机控制问题，为固定缴费型养老金风险管理问题。创新之处是首次以退休时刻财富相对绩效比率（高绩效与低绩效之比）评估退休时刻的投资表现。这会导致了数学问题的非线性及非自融资性。运用鞅方法、分式规划方法、Lagrange 乘子法以及凹化（对偶）的方法等复杂的数学技术工具，论文求解了该控制问题，得到了最优决策过程、相应的退休时刻财富和值函数。论文选题前沿，逻辑清晰、语言简洁、内容完整、结论正确，是一篇优秀的本科毕业综合训练论文。</p> <p style="text-align: right;">评阅教师签字： </p> <p style="text-align: right;">2020 年 6 月 4 日</p>
<p style="text-align: center;">答辩小组评语</p>	<p>课题有实际意义，取得有价值的结果。论文思路清楚，写作规范，是一篇很好的本科毕业论文。</p> <p style="text-align: right;">答辩小组组长签字： </p> <p style="text-align: right;">2020 年 6 月 4 日</p>

总成绩：     A    

教学负责人签字： \_\_\_\_\_

年    月    日