塞曼效应和郎道能级

哈密顿算符用B表示

带电粒子在外场中的定态薛定鄂方程：

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}-q\vec{A}\right)^2+q\Phi\right]\psi=E\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\nabla^2\psi+i\hbar q\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\psi)+i\hbar q\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+q^2A^2\psi\right]=(E-q\Phi)\psi$$

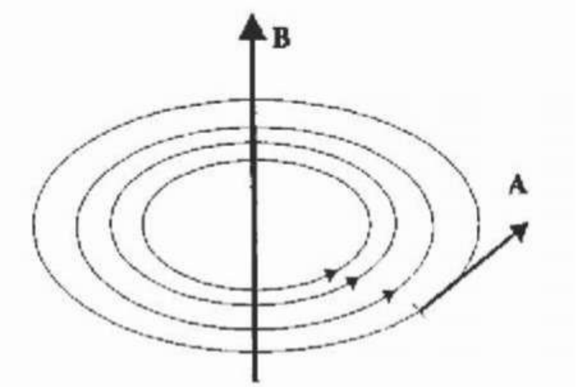
$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\nabla^2\psi+i\hbar q(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\psi+2i\hbar q\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+q^2A^2\psi\right]=(E-q\Phi)\psi$$

取库仑规范：$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ （静电场，静磁场）

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\nabla^2\psi+2i\hbar q\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+q^2A^2\psi\right]=(E-q\Phi)\psi$$

利用Stokes定理：

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{dS} = \oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$



对恒定静磁场 $\vec{B}$ 来说：

$$B \cdot \pi r^2 = A \cdot 2\pi r$$

$$A = \frac{1}{2} B r$$

再兼顾方向，得 $$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$ 对称规范

验证库仑规范（练习）： $$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = 0$$

代入原式得

$$\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\nabla^2\psi+i\hbar q(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\psi+\frac{1}{4}q^2(\vec{B}\times\vec{r})^2\psi\right]=(E-q\Phi)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left\{-\hbar^2\nabla^2\psi+i\hbar q\vec{B}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi)+\frac{1}{4}q^2\left[r^2B^2-(\vec{r}\cdot\vec{B})^2\right]\psi\right\}=(E-q\Phi)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left\{-\hbar^2\nabla^2\psi-q\vec{B}\cdot\boxed{\hat{\vec{L}}}\psi+\frac{1}{4}q^2\left[r^2B^2-(\vec{r}\cdot\vec{B})^2\right]\psi\right\}=(E-q\Phi)\psi$$

对于10 Tesla外磁场中的原子来说，第三项与第二项的比值为

$$\frac{e^2a_0^2B^2}{4eB\hbar}=\frac{eBa_0^2}{4\hbar}$$

$$\frac{e^2 a_0^2 B^2}{4eB\hbar} = \frac{eBa_0^2}{4\hbar}$$

$$\approx \frac{1.6\times10^{-19}\mathrm{C}\cdot 10\mathrm{T}\cdot\left(10^{-10}\mathrm{m}\right)^2}{4\times10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}$$

$$\approx 0.4\times10^{-4} << 1$$

其中用到了量纲分析：

$$\mathrm{C}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\mathrm{m}^2 = \mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot\mathrm{s} = \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$$

所以相对第二项来说，第三项可以忽略不计：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\hat{\vec{L}} + q\Phi\right)\psi = E\psi$$

如果选择z轴的方向为$\vec{B}$的方向，则

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{qB}{2m}\hat{L}_z+q\Phi\right)\psi=E\psi$$

电子电荷-e，再换上约化质量μ，得

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2-e\Phi+\frac{eB}{2\mu}\hat{L}_z\right)\psi=E\psi$$

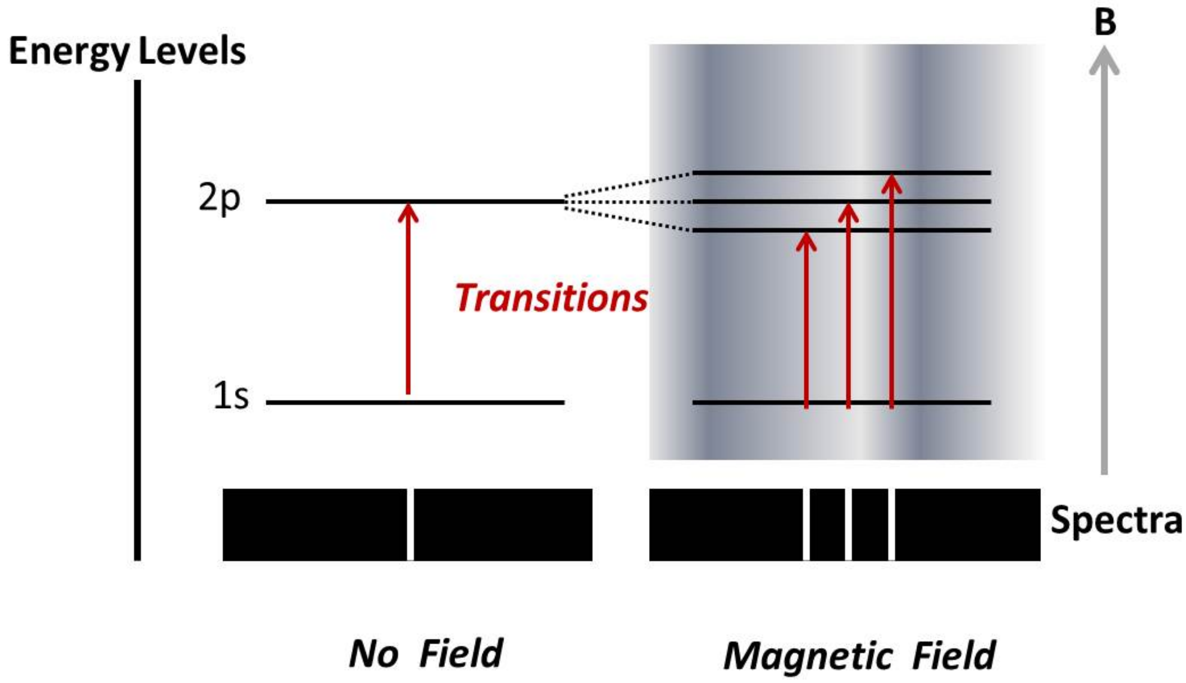
设已求得未加磁场(B=0)时碱金属原子的能级与波函数

$$E_{n_r l},\quad \psi_{n_r l m}=R_{n_r l}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

每一个能级是(2l+1)度简并的。那么加上外磁场后，简并将被打破（波函数变了吗？）

$$E_{n_r l m} = E_{n_r l} + \frac{eB}{2\mu}\hbar m$$

其中m为磁量子数。而波函数的形式仍旧不变



碱金属原子的能级在强磁场中分裂的现象成为正常塞曼(Zeeman)效应

自由粒子在磁场中运动

在对称规范中，我们约定均匀磁场 $\vec{B}$ 的矢势为：

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$$

如果取 $\vec{B}$ 沿z轴方向，则：

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}By,\ \frac{1}{2}Bx,\ 0\right)$$

进行规范变换(规范变换不改变 $\vec{B}$)：

$$\vec{A} \quad\longrightarrow\quad A+\vec{\nabla}f,\quad f = \frac{1}{2}Bxy$$

这时矢势变为（此即朗道规范）

$$\vec{A} = (0,\ Bx,\ 0)$$

取电子电荷-e，则在均匀磁场中运动电子的定态薛定鄂方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)^2\psi=E\psi$$

设 $\vec{B}$ 沿z轴方向，电子运动限制在x-y平面内(二维电子气模型)

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y+eBx\right)^2\right]\psi=E\psi$$

易见

$$\left[\hat{p}_y,\hat{H}\right]=0$$

分离变量求特解：

$$\psi(x,y)=e^{ik_y y}\phi(x)$$

代入原方程得：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x+x_0\right)^2\right]\phi=E\phi$$

其中

$$\omega_c=\frac{eB}{m},\quad x_0=k_y l_c^2,\quad l_c=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}=\frac{1}{\alpha}$$

ω_c是回旋角频率，l_c是最小回旋半径

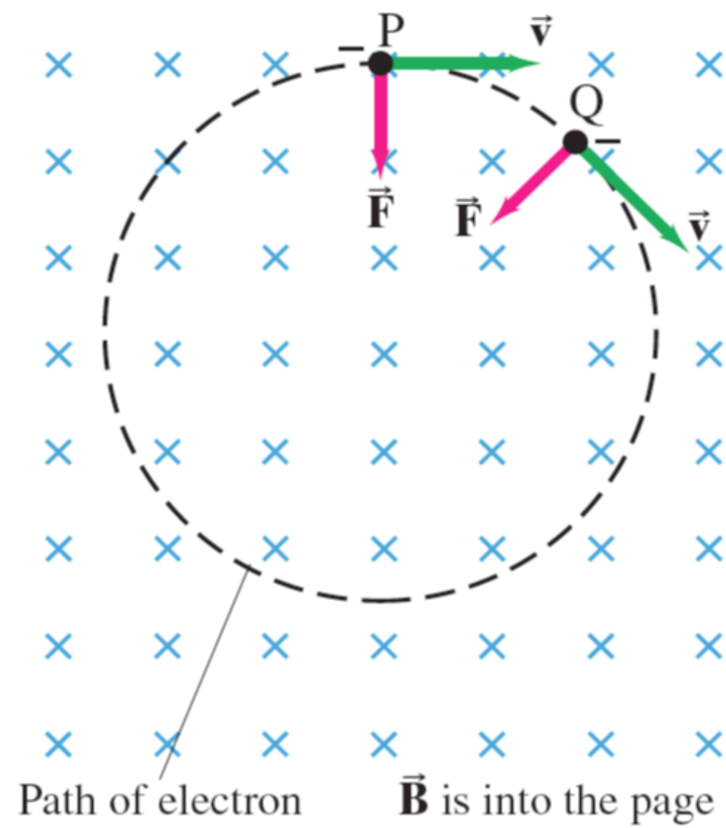
$$m\frac{v^{\cancel{2}}}{R} = e\cancel{v}B$$

$$m\frac{v}{R} = eB$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi l_c &= \lambda = \frac{h}{p} \\ \frac{p}{l_c} &= eB \end{aligned}\right\} \quad l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$$



代入原方程得：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x+x_0\right)^2\right]\phi=E\phi$$

其中

$$\omega_c=\frac{eB}{m},\quad x_0=k_y l_c^2,\quad l_c=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}=\frac{1}{\alpha}$$

这个方程的解即是一维谐振子方程的解，只是坐标平移了x_0:

$$\phi(x)=\phi_n\left(x+x_0\right),\quad \psi(x,y)=e^{ik_y y}\phi_n\left(x+x_0\right)$$

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \qquad \text{（朗道能级）}$$

量子观点：粒子在x-y平面内绕z轴转动。粒子能量就是这种转动产生的磁距与磁场的相互作用能

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{e\hbar}{m}B=-\mu_z B$$

则

$$\mu_z=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{e\hbar}{m}<0$$

即磁距方向与磁场方向相反-朗道抗磁性。朗道抗磁性与电荷正负无关，是自由粒子在磁场中运动的量子效应

问：$e^{ik_y y}$具有y方向平面波的形式，如何确定粒子是绕z轴转动？答：试求(设 ψ 已归一)

$$\bar{v}_y=\frac{1}{m}\int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}+eBx\right)\psi d\tau$$

朗道能级的简并度：对于每个能级E_n，对应波函数中的k_y可以任意取值，所以简并度是无穷大的

考虑电子气局限于L_x宽的长条中，则必须有

$$0 < x_0 < L_x \quad \Rightarrow \quad 0 < k_y < L_x \alpha^2$$

考虑y轴方向周期性边界条件:长条内每L_y长度内有一个电子(即一维箱归一化)，得

$$k_y = \frac{2\pi N}{L_y} \qquad (N\text{为整数})$$

代入得

$$0 < N < \frac{L_x L_y \alpha^2}{2\pi} = \frac{eBL_xL_y}{h}$$

于是单位面积内的能级简并度为

$$g = \frac{eB}{h}$$

这是一个重要的结果，对于理解量子霍尔效应很有用

注：如果使用对称规范（参见曾谨言书），则电子绕z轴转动的物理图像更加一目了然。但是物理结论不依赖于规范选择，如同三维谐振子在直角坐标和球坐标系表象中的解一样，当前问题中两个不同规范对应的波函数解可以通过幺正变换联系起来

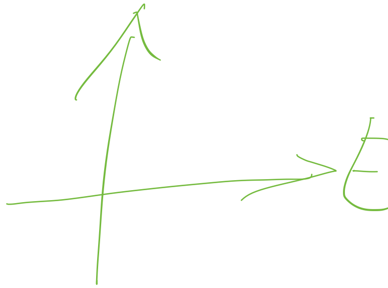
前沿介绍：量子霍尔效应

设磁场仍沿z轴方向，同时在-x轴方向施加一恒定电场E，再查看粒子运动能级。对磁场仍旧使用朗道规范：

$$\vec{A} = (0, Bx, 0)$$

这时的定态薛定鄂方程

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(\hat{p}_y + eBx)^2}{2m} - eEx\right]\psi = \varepsilon\psi$$



其中电标势项为

$$-E = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi = Ex$$

$$q\Phi = -eEx$$

问：电场方向为何不选沿x轴正向？

仍旧分离变量求特解：

$$\psi(x,y)=e^{ik_y y}\phi(x)$$

方程化为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega_c^2(x+x_0)^2+eE\left(k_y l_c^2-\frac{eE}{2m\omega_c^2}\right)\right]\phi=\varepsilon\phi$$

其中

$$x_0=k_y l_c^2-\frac{eE}{m\omega_c^2}$$

与一维谐振子方程相比，可以看到除x坐标平移了x_0之外，系统能级也平移了

$$eE\left(k_y l_c^2-\frac{eE}{2m\omega_c^2}\right)$$

于是

$$\varepsilon = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + eE\left(k_y l_c^2 - \frac{eE}{2m\omega_c^2}\right) \quad （作业6.3）$$

求证：此时粒子的平均运动速度为(设 ψ 已归一)

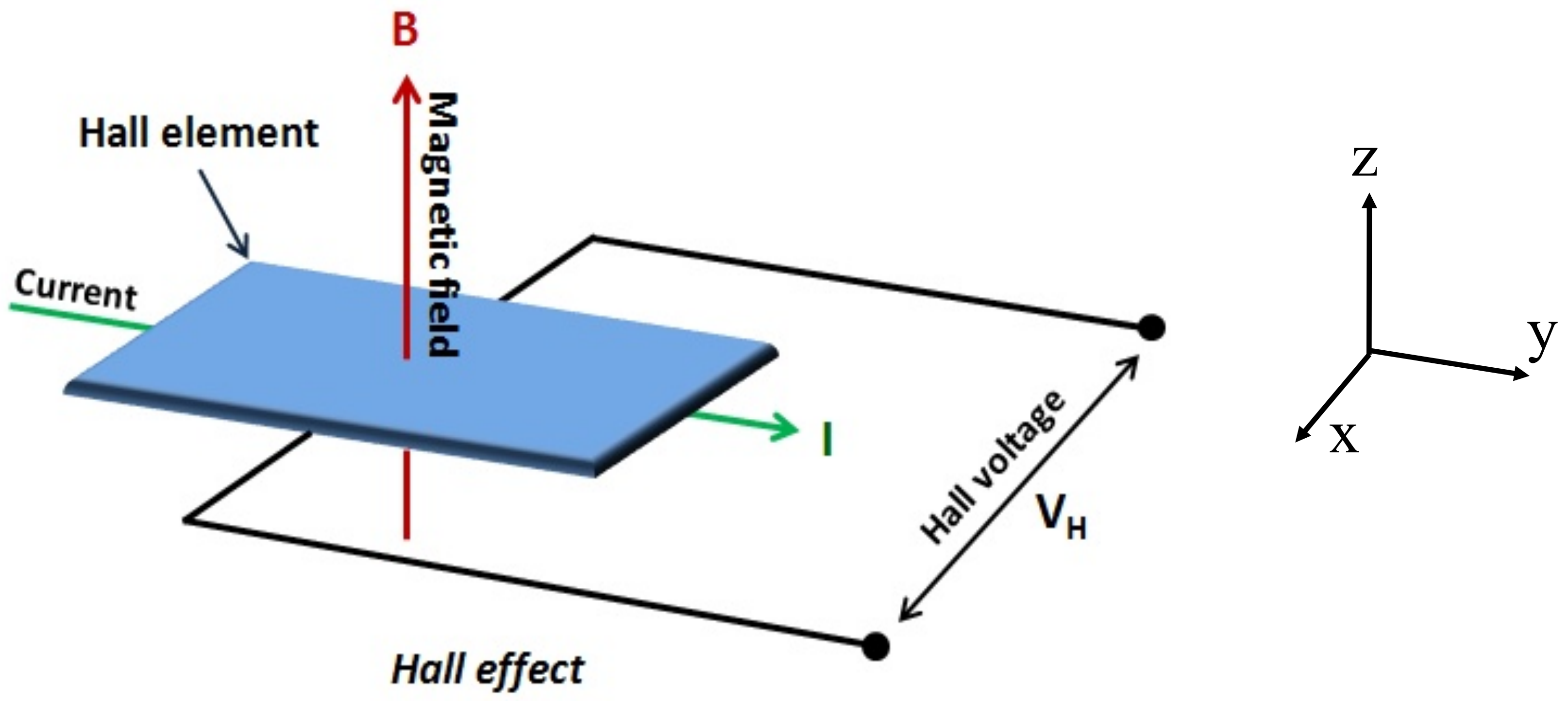
$$\bar{v}_y = \frac{1}{m}\int \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + eBx\right)\psi d\tau = \frac{E}{B}$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{m}\int \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi d\tau = 0$$

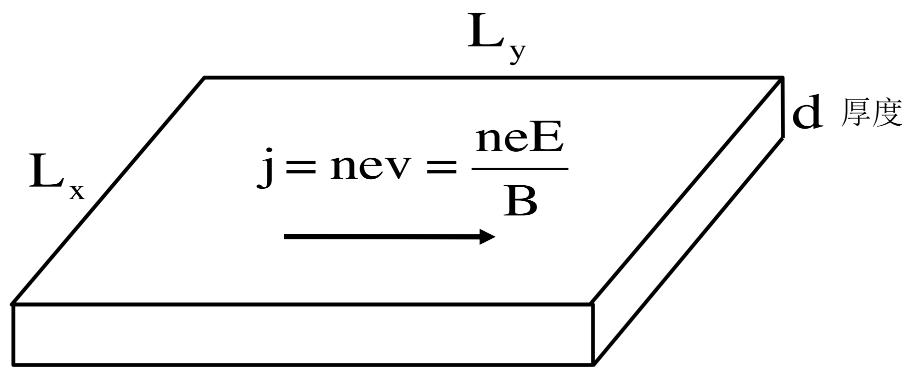
问：$\bar{v}_y \neq 0$ 有何意义？

这正是经典情况下粒子的运动速度。实验中，电场 $\vec{E}$ 是由导体或半导体中的载流子被磁场洛仑兹力分离后产生的，相应的电压称为霍尔电压，此效应称为霍尔效应

霍尔效应：



电力与磁力平衡： $eE = evB \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{E}{B}$



$$\left.\begin{aligned} I &= jL_x d = \frac{neE}{B}L_x d \\ V_H &= EL_x \end{aligned}\right\} \qquad R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{ned} = \frac{B}{n'e}$$

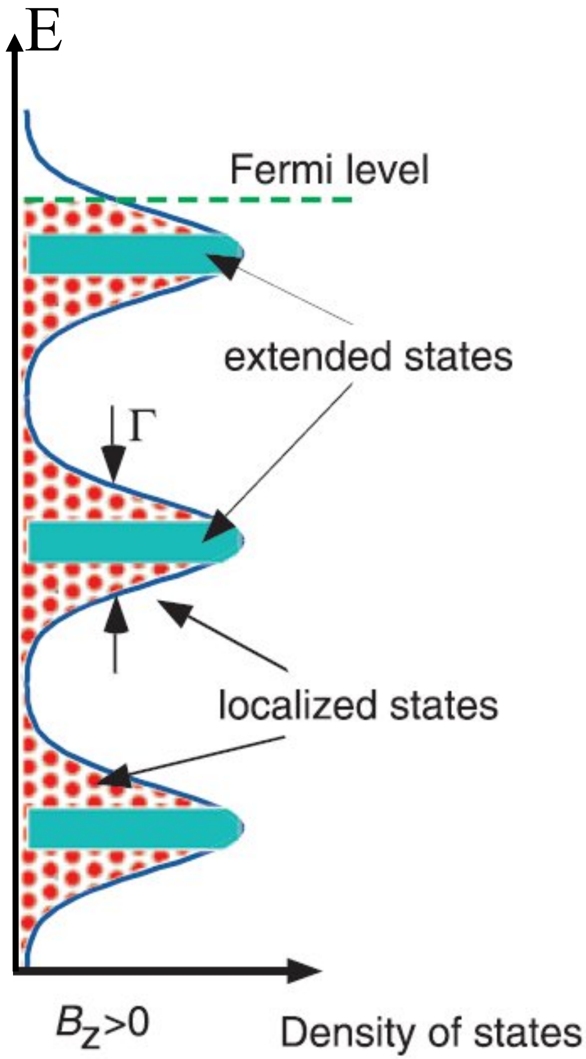
其中j为电流密度，n(n’)为三维(二维)电子气密度，$V_H(R_H)$为霍尔电压（电阻）

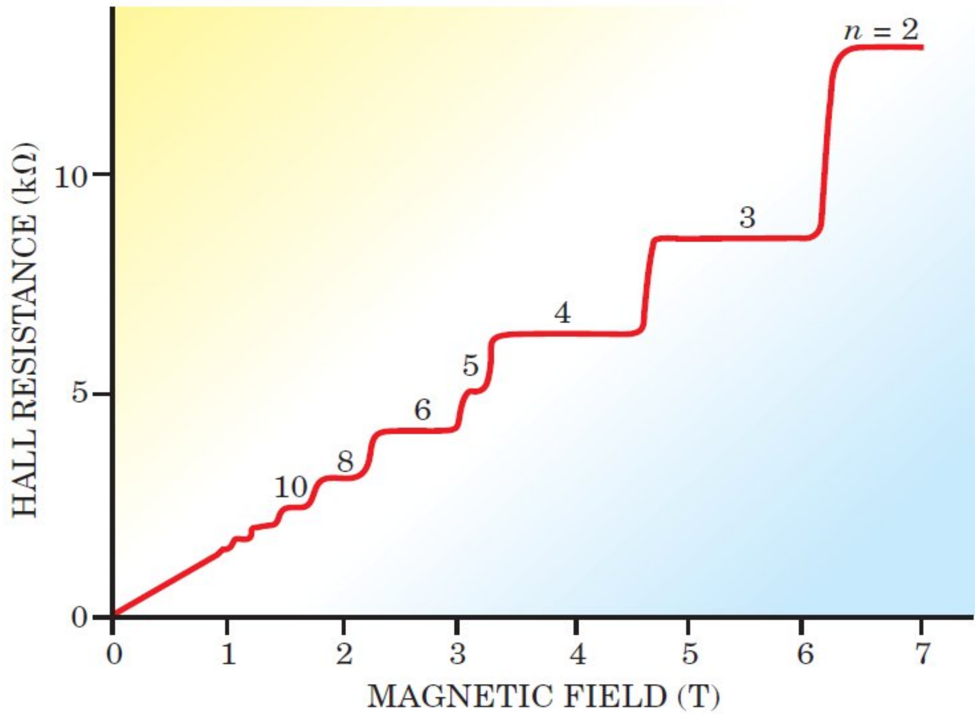
电子为费米子，在极低温条件下，电子从最低能级开始依次填充$(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots)$，每层的单位面积填充数为单位面积内的简并度 $g = eB/h$

对于给定的一块薄膜(二维)材料，其单位面积内能够自由运动的电子数(n')一般是固定的，设这些电子一共可以填充i层的朗道能级，则

$$\left.\begin{aligned} n' &= \frac{eB}{h} i \\ R_H &= \frac{B}{n'e} \end{aligned}\right\} \quad R_H = \frac{h}{e^2 i} \approx \frac{25812.8\Omega}{i}$$

一般情况下i是连续变化的，所以R_H也连续变化，观察不到量子现象，但实际情况下任何材料内部都会存在杂质和缺陷，自由电子(或其它形式载流子)被它们俘获或释放，导致n'出现周期性变化，那么i就能以整数形式出现，从而观察到霍尔电阻的量子化





两种能级：导电的朗道能级(extended)和不导电杂质能级(localized)。B升高时，朗道能级密度升高，电子向下填充，最高填充线(费米能级)位于杂质能级时，霍尔电阻平台出现

以上给出的即是整数量子霍尔效应(K. Klitzing)，其实现的条件是：

1）二维自由载流子系统(为什么三维不行？)
2）低温使载流子处于基态($kT << \hbar\omega_c$)
3）强磁场
4）杂质浓度不能过低，也不能过高

如果考虑的不是自由电子气这种简单模型，而是还要加上电子之间的相互作用，那么还可以观察到分数量子霍尔效应(R. Laughlin, H. Störmer, D. Tsui)

量子反常霍尔效应：不依赖于强磁场而由材料本身磁化产生量子霍尔态，由我校薛其坤院士团队首次观测到