金融随机分析 第一卷

二叉树资产定价模型

[美]史蒂文·E.施里夫（Steven E. Shreve）著
陈启宏 陈迪华 译

汉译经济学文库
Translated Economics Library

STOCHASTIC
CALCULUS
FOR FINANCE

上海财经大学出版社

理想藏书55188 www.55188.com

汉译经济学文库

金融随机分析（第一卷）

二叉树资产定价模型

［美］史蒂文·E. 施里夫（Steven E. Shreve）著
陈启宏 陈迪华 译

上海财经大学出版社

理想藏书55188

图书在版编目(CIP)数据

金融随机分析. 1、2/[美]施里夫(Shreve, S. E.)著;陈启宏,陈迪华译.
—上海:上海财经大学出版社,2008.10
(汉译经济学文库)
书名原文:Stochastic Calculus for Finance
ISBN 978-7-5642-0267-5/F・0267

Ⅰ.金… Ⅱ.①史… ②陈… ③陈… Ⅲ.随机分析-应用-金融学 Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 103924 号

□策　　划　张美芳
□责任编辑　张美芳
□封面设计　钱宇辰

JINRONG SUIJI FENXI
金融随机分析(第一卷)
二叉树资产定价模型

[美]　史蒂文・E. 施里夫 (Steven E. Shreve)　著
陈启宏　陈迪华　译

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海市印刷七厂印刷
上海远大印务发展有限公司装订
2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　40 印张(插页:1)　835 千字
印数:0 001—3 900　定价:72.00(两卷)

图字:09-2007-420 号

Translation from the English language edition:
Stochastic Calculus for Finance Ⅰ *by Steven E. Shreve*
Copyright © 2004 Springer-Verlag New York Inc.
Springer is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS PRESS, copyright © 2008.

2008 年中文版专有出版权属上海财经大学出版社
版权所有 翻版必究

Preface to Chinese Edition

It is a joy to have these two volumes on the subject of *Stochastic Calculus for Finance* become more accessible to Chinese students and practitioners. At Carnegie Mellon University it has been my good fortune to come to know many Chinese students. More than a few of these students intend to return to their homeland in order to be part of the exciting developments in financial markets that are taking place there. It is my hope that these students and these books from which they have learned will contribute to the efficiency of financial markets in China and thereby make more and better investment opportunities available.

As I write this, I can think of China only with a heavy heart because of the terrible loss of life and unimaginable suffering caused by the earthquake in Sichuan Province on May 12. In our common humanity, we who are so far away feel pain. This is only the smallest fraction of the pain we see on the faces and hear in the voices of those who have lost so much. We mourn with you.

Steven E. Shreve
Pittsburgh, Pennyslvania, USA
May 2008

中文版序

《金融随机分析》(第一卷和第二卷)中文版问世,将使本书更易为中国学生及实务工作者接受,十分可喜。在卡耐基·梅隆大学,我有幸认识了许多中国学生。这些学生中的绝大多数都打算回到他们的祖国,为中国金融市场正在发生的振奋人心的发展效力。衷心希望这些学生以及他们所学过的这些书籍能够有助于中国金融市场增强有效性,从而具备更多、更好的投资机遇。

此时此刻,我以沉重的心情获悉5月12日在中国四川发生的特大地震造成生命财产的巨大损失以及难以想象的灾难。人性相通,关于灾情的所见所闻,令远离灾区的我们也心痛无比。我们与你们同悲!

史蒂文·E.施里夫
美国宾夕法尼亚州匹兹堡市
2008年5月

英文版序

本书的起源

这本书起初作为卡耐基·梅隆大学 (Carnegie Mellon University)计算金融理学硕士项目(Master of Science in Computational Finance, MSCF)的数学课程。本书已成功地被那些数学背景只有微积分和基于微积分的概率论的学生作为教材。书中结果都有准确的陈述、合理的论证,也给出了一些证明;然而更重要的是,通过本书的课堂教学,可以得到一些直觉性解释。每一章结束都有习题,其中有些是理论的扩展,有些来自于数量金融的实际问题。

第一卷中的前三章曾被用作 MSCF 项目的半学期课程,整个的第一卷一直作为卡耐基·梅隆大学计算金融学士项目一个学期的教学内容。第二卷已被用作 MSCF 项目的三个半学期课程。

MSCF 学生对本书的贡献

自 1994 年起,卡耐基·梅隆大学计算金融硕士项目已经毕业了好几百名学生。能够有幸教导这些来自不同教育和职业背景的学生,是一件非常愉快的事情。这些学生热爱学习,提出许多激发思考的问题,并努力从理论上和实践上理解书中的材料,还经常要求增加一些额外的主题。许多学生来自金融领域,他们乐于同大家分享他们的知识,这也丰富了课堂教学。

本书以及我自己都从与 MSCF 学生的交流中受益匪浅,现在也继续从 MSCF 的毕业生中获得许多有益的知识。值此机会,谨以此书献给历届 MSCF 学生,以表谢忱。

致 谢

与包括同事大卫·赫斯(David Heath)和德米特里·克拉姆科夫(Dmitry Kramkov)在内的一些人的交流对本书有所影响。卢卡什·克鲁克(Lukasz Kruk)阅读了初稿的很多内容,并提出了许多评论与更正。另外还有一些学生和教师指出了错误,并对本书的早期版本提出了改进建议。其中包括乔纳森·安德森(Jonathan Anderson),纳塔涅尔·卡特(Nathaniel Carter),波格丹·道伊钦诺夫(Bogdan Doytchinov),大卫·加曼(David German),斯蒂文·吉利斯皮(Steven Gillispie),卡笛尔·亚内切克(Karel Janeček),肖恩·琼斯(Sean Jones),阿纳托利·卡罗利克(Anatoli Karolik),大卫·科皮(David Korpi),安杰伊·克劳瑟(Andrzej Krause),赖尔·林比特科(Rael Limbitco),皮垂·卢卡三(Petr Lukasan),谢尔盖·米亚格切洛夫(Sergey Myagchilov),尼基·拉斯穆森(Nicki Rasmussen),伊萨克·索宁(Isaac Sonin),马西莫·塔桑-索莱(Massimo Tassan-Solet),大卫·惠特克(David Whitaker)和乌韦·威斯图普(Uwe Wystup)。在某些场合,本书早期版本的使用者对习题与例子提出了建议,本书在相应的地方对这些使用者的贡献表示了感谢。在此,谨向有助于本书进一步完善的所有读者致谢。

在本书的创作过程中,作者得到了国家自然科学基金 DMS-9802464、DMS-0103814 和 DMS-0139911 的部分资助。但本书中任何观点、发现、结论或者建议都由作者负责,并不反映国家自然科学基金的观点。

史蒂文·E. 施里夫
(Steven E. Shreve)
美国宾夕法尼亚州匹兹堡市
2004 年 4 月

导 言

背 景

诺贝尔奖委员会在1990年授予哈里·马科维茨(Harry Markowitz)、威廉·夏普(William Sharpe)和默顿·米勒(Merton Miller)诺贝尔经济学奖,使整个世界注意到过去四十年来正在兴起的一门新学科——金融学。这一理论试图理解金融市场如何运作、如何使金融市场更有效率,以及如何进行调节。它解释并增强了金融市场在配置资本和减少风险以促进经济活动方面所起的重要作用。金融学日趋数学化,甚至金融的问题正在推动数学研究,但金融学并未减少其在市场交易与调节中的实际应用。

1952年,哈里·马科维茨的博士论文《投资组合选择》奠定了金融学的数学理论基础。马科维茨给出了股票的均值回报和协方差的理论,以便量化市场中"差异性"的概念。他证明了对给定的投资组合,如何计算均值回报和方差;认为对于给定的均值回报,投资者应持有具有最小方差的资产组合。尽管现在金融学中涉及随机(伊藤,Itô)分析,但定量化风险管理一直是现代金融理论以及数量金融实践的基本主题。

1969年,罗伯特·默顿(Robert Merton)把随机分析引入到金融研究。他切望了解在金融市场中如何定价(这是经济学中经典的"均衡"问题),并在随后的论文中运用随机分析原理开创了这方面的研究。

在默顿进行研究的同时,费雪·布莱克(Fischer Black)与迈伦·斯科尔斯(Myron Scholes)在默顿的协助下,得到了著名的期权定价公式。这项成果赢得了1997年的诺贝尔经济学奖。它对于一个重要的实际问题提供了令人满意的答案,即为欧式看涨期权(即在规定的时间以规定的价格购买给定股票的权利)寻求公平的价格。1979～1983年期间,哈里森(Harrison)、克雷普斯(Kreps)和普利斯卡(Pliska)运用连续时间随机过程的一般理论为布

莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)期权定价公式提供了坚实的理论基础,并且给出了各种各样其他衍生证券的定价方法。

金融中的许多理论进展可以直接应用于金融市场。为了理解金融理论如何应用,我们暂时偏离一下主题来关注金融机构的角色。一个国家金融机构的主要功能就是在从事生产过程的客户中,扮演减少风险的中介角色。例如,保险行业收取许多客户的保险费,但只需要赔付给少数实际遭受损失的客户。如果客户无法获得这样的保险,就会面临风险。假如,为了对冲较高的燃油成本,航空公司就想购买一些当石油价格上升时价格也会上升的证券。但是谁会销售这样的证券呢?金融机构的角色就是设计这样的证券,并确定一个"公平"的价格,销售给航空公司。这样的证券通常称为"衍生产品"(其价值基于其他证券的价值)。石油价格一旦上升,金融机构就需要履行由于销售衍生产品所产生的支付义务。为此,金融机构会交易一些其他与油价相关的证券,进行风险对冲。在此意义上,衍生产品的"公平"价格是指:金融机构利用销售衍生产品所获得的收益从事其他相关的证券交易恰好能够对冲衍生产品的支付义务。对于一个"有效"市场,这种用来对冲风险的证券总能以"公平" 的价格获得。

布莱克—斯科尔斯期权定价公式,首次为风险对冲证券的公平定价提供了理论方法。如果一个投资银行提供的衍生产品价格高于"公平"价格,那么这些产品出价会较低。如果投资银行提供的衍生产品价格低于"公平"的价格,那么将有遭受很大损失的风险。这使得银行不太情愿提供这些有助于提高市场效率的衍生产品。仅当衍生产品的"公平"价格能够预先确定时,银行才愿意提供该衍生产品。进而,销售衍生产品的银行还必须考虑对冲的问题:应该如何管理新的头寸所带来的风险。由布莱克—斯科尔斯期权定价公式发展而来的数学理论同时解决了定价和对冲问题。于是,大量特定的衍生证券便应运而生。这一数学理论正是本书的主题。

第一卷与第二卷之间的联系

第二卷主要讨论与金融应用有关的连续时间随机分析理论。关于随机分析需要的概率论(包括布朗运动及其性质),第二卷以独立自足的形式给出。

第一卷利用较简单的离散时间二叉树模型来处理同样的一些金融应用问题。第一卷介绍的一些基本概念,包括鞅、马尔可夫(Markov)过程、测度变换和风险中性定价,为读者阅读第二卷提供了准备。然而,关于这些概念,第二卷的内容也是独立自足的,在阅读第二卷之前并不一定需要阅读第一卷。当然,通过阅读第一卷中相对较为简单的内容,将有助于对第二卷的理解。

在卡耐基·梅隆大学计算金融硕士项目中，基于第一卷的课程是基于第二卷的课程的预修条件。但计算机科学、金融、数学、物理及统计专业的研究生经常直接修读基于第二卷的课程，而不需要预先修读基于第一卷的课程。

直接修读第二卷的学生可以利用第一卷作为参考。一些概念在第二卷中出现时参引了第一卷中类似的概念。读者可以直接阅读第二卷，也可以参考第一卷，以对一些概念进行更透彻的讨论。

第一卷提要

第一卷介绍二叉树资产定价模型。尽管模型本身是很有趣的，也经常作为实际应用范例，但是这里主要作为一个工具，以较为简单的形式引进一些在第二卷的连续时间理论中将会用到的概念。

第一章**"二叉树无套利定价模型"**利用二叉树模型给出无套利期权定价方法。用到的数学是简单的，但是这里引进的风险中性定价的概念却十分深刻。第二章**"抛掷硬币空间上的概率论"**利用鞅以及马尔可夫过程的概念来表述第一章的结果。至为精妙的是关于欧式衍生证券的风险中性定价公式。推导风险中性定价公式的工具对于二叉树模型中的推导并非必需，由于在第二卷中要用到，因此，在第一卷中较简单的离散时间情形就对此有所展开。第三章**"状态价格"**讨论了与欧式衍生证券的风险中性定价相联系的测度变换，作为连续时间模型中测度变换的一个热身练习。这里，一个有趣的应用是利用二叉树模型求解（期望效用最大化意义下的）最优投资问题。前三章中的思想是理解现代数量金融的基础，在第二卷的第四章与第五章中还将进一步展开。

第一卷的后三章介绍了一些更为专业的概念。第四章**"美式衍生证券"**考虑持有者能够选择行权时刻的衍生证券。在第二卷第八章的连续时间情形还将考虑这一问题。第五章**"随机游动"**解释了关于随机游动的反射原理。类似的关于布朗运动的反射原理，在第二卷第七章关于奇异期权定价公式的推导中，有着至关重要的作用。最后，第六章**"依赖利率的资产"**考虑了随机利率模型，考察了远期和期货价格的差异，并且介绍了远期测度的概念。在第二卷第五章的结尾还将再次出现远期和期货价格。连续时间模型中的远期测度将在第二卷第九章中展开，并在第二卷第十章中用于创建关于利率变动的远期 LIBOR（伦敦同业拆借利率）模型。

第二卷提要

第二卷第一章**"一般概率论"**与第二章**"信息和条件期望"**，为连续时间

模型所需要的概率论提供了测度论基础。第一章介绍了概率空间、勒贝格(Lebesgue)积分和测度变换。第二章中介绍了独立性、条件期望以及条件期望的性质。这两章内容在全书中都要用到,对概率论知识有所了解的读者,开始时可以跳过这部分,必要时再参考。

第三章"**布朗运动**"介绍了布朗运动及其性质。对于随机分析最重要的是3.4节中的二次变差。除了3.6节和3.7节仅用于第七章"**奇异期权**",以及第八章"**美式衍生证券**",本章所有内容都是必需的。

第二卷的核心是第四章"**随机分析**"。这一章中构建了伊藤(Itô)积分并且推导了伊藤公式[本书中称为伊藤—德布林公式(Itô-Doeblin)],还给出了伊藤—德布林公式的一些推论。其中之一是用二次变差刻划布朗运动[列维(Lévy)定理],另一个是关于欧式看涨期权价格的布莱克—斯科尔斯方程(本书中称为布莱克—斯科尔斯—默顿方程)。读者唯一可以忽略的内容是4.7节"**布朗桥**"。本书涉及布朗桥是因为其在蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟中的重要性,但在本书其他部分没有用到。

第五章"**风险中性定价**"叙述并证明了哥萨诺夫(Girsanov)定理,这是测度变换的基础。这样就能够系统地讨论风险中性定价以及资产定价基本定理(5.4节)。5.5节"**支付红利的股票**"在本书其他部分没有用到。[1] 5.6节"**远期和期货**"还将出现在后面9.4节以及部分习题中。

第六章"**与偏微分方程的关系**"揭示了随机分析与偏微分方程之间的联系。这在后面的章节中经常会用到。

除了上面所提到的一些以外,第一章~第六章是数量金融的基本内容,也是阅读后面章节的基础。第六章之后,读者可以选择性阅读。

第七章"**奇异期权**"以及第八章"**美式衍生证券**",在随后的章节中并不用到。第九章"**计价单位变换**"在10.4节"**远期 LIBOR 模型**"中具有重要的作用,但在其他部分中没有用到。第十章"**期限结构模型**"以及第十一章"**跳过程引论**",在本书其他部分中也没有用到。

[1] 事实上,在第二卷第8.5节中要用到第二卷第5.5节中的部分内容。——译者注

目 录
CONTENTS

1

二叉树无套利定价模型

1.1 单时段二叉树模型

二叉树资产定价模型为理解**套利定价理论**和**概率**提供了一个有力的工具。本章中，我们为理解套利定价理论而引进这一工具；在第二章中，我们借助这一工具讨论概率。这一节中，我们考虑最简单的二叉树模型——单时段二叉树模型；下一节中，我们将推广到更为现实的多时段二叉树模型。

一般的单时段模型如图 1.1.1 所示，我们称该时段的起点与终点分别为**时刻 0** 与**时刻 1**。在时刻 0，我们持有 1 份股票，记 S_0 为每份股票的价格，设其为正。在时刻 1，该股票每份价格将为两个正值 $S_1(H)$ 和 $S_1(T)$ 之一，其中 H 与 T 分别表示一枚硬币的**正面**与**背面**。于是，我们可以想象时刻 1 的股票价格取决于抛掷一枚硬币的结果。我们并不特别假设抛掷硬币时出现正面与背面的概率各半。我们只假设出现正面的概率 p 为正值，并且出现背面的概率 $q=1-p$ 也为正值。

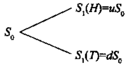

图 1.1.1　一般的单时段二叉树模型

抛掷硬币的结果及时刻 1 的股价，要到时刻 1 才知道。我们称任何在时刻 0 时未知的量为**随机的**，因为它依赖于抛掷硬币这一随机试验。

我们引入两个正值

$$u=\frac{S_1(H)}{S_0},\quad d=\frac{S_1(T)}{S_0} \tag{1.1.1}$$

假设 $d<u$；如果反之有 $d>u$，通过重新标记硬币的两面，我们可以得到 $d<u$；如果 $d=u$，那么时刻 1 的股票价格事实上不是随机的，因此该模型为平凡的。我们称 u 为**上升因子**，d 为**下降因子**。可以凭直觉把 u 当成大于 1 的

数,把 d 当成小于 1 的数。但我们的数学推导并不要求这些不等式成立。

同时,我们引入**利率** r。时刻 0 在货币市场投入 1 美元,在时刻 1 可以得到 $1+r$ 美元。相反,在时刻 0 从货币市场借得 1 美元,在时刻 1 的负债为 $1+r$ 美元。特别地,假定借款利率与投资的利率相同。一般恒有 $r\geqslant 0$,然而,我们的数学推导只要求 $r>-1$ 即可。

有效市场的实质在于:如果一个交易策略可以不劳而获,那么它必将承受风险,否则,便存在**套利**机会。更具体地说,所谓**套利**是这样一个交易策略:其赔钱的概率为零,而赚钱的概率为正值。允许套利存在的数学模型不能用于分析,因为这样的模型允许财富由零产生,从而会得到一些矛盾的结果。真实的市场有时会有套利机会,但这必然是稍纵即逝的;一旦有人发现,就会有旨在套利的交易发生,从而使之消失。

在单时段二叉树模型里,为了排除套利机会,我们必须假设:

$$0<d<1+r<u \tag{1.1.2}$$

我们已假设股票价格恒为正值,故必有 $d>0$。式(1.1.2)中的其他两个不等式是根据无套利得来的,我们对此解释如下:如果 $d\geqslant 1+r$,投资者可以零财富开始,在时刻 0 从银行借款买股票。即使遇到最差的情况,时刻 1 股票的价值也足以偿付银行的贷款,此外仍有余钱的概率为正,因为 $u>d\geqslant 1+r$,这就提供了一个套利机会。另一方面,如果 $u\leqslant 1+r$,投资者可卖空股票,将所得投资货币市场。即使在股票的最好情况下,时刻 1 股票的价值也不会超过在货币市场投资的价值,又因为 $d<u\leqslant 1+r$,时刻 1 股票的价值严格小于货币市场投资价值的概率为正,这也提供了一个套利机会。

以上我们已经论证了:如果含有股票和货币市场账户两种资产的市场无套利,则必有式(1.1.2)成立。反之亦然。如果式(1.1.2)成立,则市场无套利(见习题 1.1)。

通常令 $d=\frac{1}{u}$,在许多例子里也是如此。然而,为使二叉树资产定价模型有意义,我们只需要假定式(1.1.2)。

当然,股票价格的变动远比二叉树资产定价模型所表示的更为复杂。我们考虑这种简单的模型乃是基于以下三个原因:首先,此模型可以清楚地阐明套利定价的概念及其与风险中性定价的关系;其次,当时段数目足够多时,该模型提供了对连续时间模型的一个相当不错且便于计算处理的近似,因此相当实用;最后,由二叉树资产定价模型,可以给出条件期望和鞅的理论,这是连续时间模型的核心所在。

考虑一个**欧式看涨期权**,它赋予持有者在时刻 1 以**敲定价格** K 购买一份股票的权利(但非义务)。假定 $S_1(T)<K<S_1(H)$,如果时刻 1 的股票价格低于敲定价格 K,则期权无价值;如果时刻 1 的股票价格高于敲定价格 K,则期权**被实施**,由此获利为 $S_1(H)-K$。因此,期权在时刻 1 的价值为

$(S_1-K)^+$，其中符号$(\cdots)^+$表示我们取括号中的表达式与零之间的较大值。这里，遵循概率论中的惯例，随机变量 S_1 中的自变量已被省略。期权定价的一个基本问题就是：在得知时刻 1 的结果之前，期权在时刻 0 的价值是多少？

期权定价问题的**套利定价方法**是通过在股票和货币市场进行交易来复制期权。我们用例子来说明这点，之后再回到一般的单时段二叉树模型。

例 1.1.1 考虑图 1.1.2 中的单时段模型，设 $S(0)=4, u=2, d=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{4}$，则 $S_1(H)=8$ 且 $S_1(T)=2$。设欧式期权的敲定价格 $K=5$，进一步假设我们的初始财富为 $X_0=1.20$，同时在时刻 0 买进 $\Delta_0=\frac{1}{2}$份股票。因为在时刻 0，每份股票价格为 4，我们必须利用初始财富 $X_0=1.20$，并且借入额外的 0.80。这样我们的现金头寸为 $X_0-\Delta_0S_0=-0.80$（即从货币市场借入 0.80）。在时刻 1，我们的现金头寸为$(1+r)(X_0-\Delta_0S_0)=-1$（即我们在货币市场的负债为 1）。另一方面，在时刻 1，我们将有价值为$\frac{1}{2}S_1(H)=4$ 或者$\frac{1}{2}S_1(T)=1$ 的股票。具体地说，如果抛掷硬币的结果为正面，在时刻 1，我们（股票和货币市场账户）的资产组合价值将为：

$$X_1(H)=\frac{1}{2}S_1(H)+(1+r)(X_0-\Delta_0S_0)=3$$

如果抛掷硬币的结果为背面，在时刻 1，我们（股票和货币市场账户）的资产组合价值将为：

$$X_1(T)=\frac{1}{2}S_1(T)+(1+r)(X_0-\Delta_0S_0)=0$$

任何情况下，在时刻 1，资产组合与期权价值相等，即$(S_1(H)-5)^+=3$ 或$(S_1(T)-5)^+=0$。我们通过在股票与货币市场的交易复制了期权。

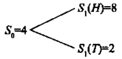

图 1.1.2 具体的单时段二叉树模型

为建立上述复制资产组合所需的初始财富 1.20 就是**期权在时刻 0 的无套利价格**。如果有人以高价（如 1.21）买入期权，那么期权出售人可以用 1.20 来复制期权，并将多余的 0.01 投资于货币市场。到时刻 1，不管抛掷硬币的结果如何，期权出售人都可以偿付期权，同时会因为在货币市场投资多余的 0.01 而获得 0.012 5。这是一个套利，因为期权出售人最初不需要任何

资金,在时刻1可以不冒任何风险而得到0.0125。另一方面,如果能够以低于1.20的价格(如1.19)买入期权,那么投资者应该买入期权并建立与上述的复制相反的交易策略。具体地说,卖空半份股票获得收入2;然后用1.19购买期权,在货币市场投资0.80,把剩余的0.01存入另一个货币市场账户。如果抛掷硬币的结果为正面,到时刻1,投资者需要4来对冲半份股票空头,在时刻0买入的期权值3,投资到货币市场的0.80涨到了1。如果抛掷硬币的结果为背面,到时刻1,投资者仅需要1来对冲半份股票空头,期权虽然无价值,但是时刻0投资货币市场的0.80涨到了1。无论何种情况下,投资者在时刻1都能够对冲半份股票空头,并持有时刻0存入货币市场账户的0.01,这又是一个套利。

我们已证明在含有股票、货币市场账户以及期权的市场中,除非在时刻0期权价格为1.20,否则总是存在套利。如果在时刻0期权价格为1.20,套利就不存在(见习题1.2)。 □

上面例子中的论述依赖于一些假设。主要如下:

(1)股票可细分成不同份额来买卖;

(2)投资与借贷的利率相同;

(3)股票的买卖价格一致(即买入与卖出的价差为零);

(4)任何时刻,股票价格在下一时段只有两个可能值。

除了最后一个之外,其他所有假设也是布莱克—斯科尔斯—默顿期权定价公式的基础。第一个假设其实与现实相符,因为期权定价与对冲复制一般都涉及许多份期权。如果我们在例1.1.1中考虑100份期权而非1份期权,那么我们将买入$\Delta_0=50$份股票而非$\Delta_0=\frac{1}{2}$份股票来对冲期权空头。对大机构而言,第二个假设也接近成立。第三个假设与事实相左,有时因为没有多少交易发生,所以买卖价差可以忽略;其他情况下,模型与现实的偏离是一个严重的问题。在布莱克—斯科尔斯—默顿模型中,第四个假设变成假设股票价格是一个几何布朗运动。关于股票价格的实证研究常常表明并非如此。在某些情况下,模型与现实严重偏离;但在其他情况下,该模型又相当适用。我们将构建一系列模型,除满足几何布朗运动假设的之外,还有许多与这一假设无关的更复杂的模型。

在一般的单时段模型中,我们定义**衍生证券**为一种证券,如果抛掷硬币的结果为正面,在时刻1的支付则为$V_1(H)$;如果抛掷硬币的结果为背面,在时刻1的支付则为$V_1(T)$。欧式看涨期权是一种特别的衍生证券。另一种是**欧式看跌期权**,在时刻1的支付为$(K-S_1)^+$,其中K为常量。第三种是**远期合约**,这种衍生证券在时刻1的价值为S_1-K。

为了确定衍生证券在时刻0的价格V_0,我们如同例1.1.1中那样进行复制。假设我们的初始财富为X_0,在时刻0买入Δ_0份股票,现金头寸为

$X_0-\Delta_0 S_0$。在时刻 1，股票与货币市场账户的资产组合价值为：

$$X_1=\Delta_0 S_1+(1+r)(X_0-\Delta_0 S_0)=(1+r)X_0+\Delta_0[S_1-(1+r)S_0]$$

我们希望选择 X_0 和 Δ_0 使得 $X_1(H)=V_1(H)$ 和 $X_1(T)=V_1(T)$[这里 $V_1(H)$ 和 $V_1(T)$ 为已知值，是衍生证券在时刻 1 的支付，取决于抛掷硬币的结果；在时刻 0，我们知道 $V_1(H)$ 和 $V_1(T)$ 的发生概率，但不知道这两个可能性中哪个会成为现实]。因此，为使衍生证券得以复制，必须有：

$$X_0+\Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(H)-S_0\right)=\frac{1}{1+r}V_1(H) \tag{1.1.3}$$

$$X_0+\Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(T)-S_0\right)=\frac{1}{1+r}V_1(T) \tag{1.1.4}$$

含有两个未知量的、两个方程的一种解法是将第一个方程乘以数 $\tilde{p}$，第二个方程乘以 $\tilde{q}=1-\tilde{p}$，然后两者相加得到：

$$X_0+\Delta_0\left(\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H)+\tilde{q}S_1(T)]-S_0\right)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H)+\tilde{q}V_1(T)] \tag{1.1.5}$$

如果选择 $\tilde{p}$ 使得：

$$S_0=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H)+\tilde{q}S_1(T)] \tag{1.1.6}$$

那么式(1.1.5)中与 Δ_0 相乘的项即变成零，我们就得到如下关于 X_0 的简单表达式：

$$X_0=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H)+\tilde{q}V_1(T)] \tag{1.1.7}$$

由式(1.1.6)，我们有：

$$S_0=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}uS_0+(1-\tilde{p})dS_0]=\frac{S_0}{1+r}[(u-d)\tilde{p}+d]$$

从中直接解出 $\tilde{p}$，于是得到：

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d} \tag{1.1.8}$$

我们只需用式(1.1.3)减去式(1.1.4)，就可以得到 **delta-对冲公式**：

$$\Delta_0=\frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)} \tag{1.1.9}$$

总之，如果投资者初始财富为式(1.1.7)给出的 X_0，在时刻 0 买入式(1.1.9)给出的 Δ_0 份股票，那么到时刻 1，如果抛掷硬币的结果为正面，则投

资者将持有价值为 $V_1(H)$ 的资产组合;如果抛掷硬币的结果为背面,则资产组合的价值为 $V_1(T)$。投资者可以由此**对冲衍生证券的空头**。到时刻 1 支付为 V_1 的衍生证券在时刻 0 的定价应为:

$$V_0=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_1(H)+\tilde{q}V_1(T)] \tag{1.1.10}$$

该价格可以确保出售方通过上述资产组合对冲衍生证券的空头。当衍生证券加入到由股票和货币市场账户组成的市场时,这一价格不会产生套利;而在时刻 0 的任何其他价格都将引起套利。

以上我们通过对衍生证券空头的对冲,给出了衍生证券的无套利定价。我们同样也可以考虑对多头的对冲。拥有一定价值资产的多头投资者,需要采取一些措施来保护其资产价值免遭可能的损失,这正是市场参与者关于对冲的理解。衍生证券的多头为建立对冲而应持有的股票份额是由式(1.1.9)确定的股票份额的负值。习题 1.6 和习题 1.7 对此有更详尽的考虑。

根据无套利条件(1.1.2),由式(1.1.8)给定的数 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 都是正值,并且两者之和为 1。因此,我们可以把它们分别当作抛掷硬币结果为正面和背面的概率。它们不是真实的概率(我们记真实的概率为 p 与 q),而是所谓的**风险中性概率**。在真实概率下,股票的平均增长率一般会严格大于在货币市场投资的增长率;否则,没人愿意投资股票而招致相关的风险。因此,真实概率 p 以及 $q=1-p$ 应该满足:

$$S_0<\frac{1}{1+r}[pS_1(H)+qS_1(T)]$$

而风险中性概率 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 满足式(1.1.6)。如果股票的平均增长率正好等于在货币市场投资的增长率,那么投资者一定是风险中性的,即他们不为承担风险而希求补偿,也不愿为此额外支付。事实并非如此,因此 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 不是真实概率,它们只是有助于我们求解含有两个未知量 X_0 和 Δ_0 的两个方程(1.1.3)和(1.1.4)中的两个数字而已;$\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的选取使我们能够消去式(1.1.5)中与未知量 Δ_0 相乘的项。事实上,由于 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的选取使得股票的平均增长率几乎与货币市场账户的增长率相一致,这也就使得股票与货币市场账户的任何资产组合的平均增长率几乎与货币市场账户的增长率相一致。如果希望构建一个资产组合使其在时刻 1 的价值为 V_1,那么它在时刻 0 的价值必须由式(1.1.7)确定,这样才能使得在风险中性概率下该资产组合的平均增长率就是货币市场投资的增长率。

计算衍生证券 V_1 在时刻 0 的价值 V_0 的方程(1.1.10)被称为单时段二叉树模型的**风险中性定价公式**。读者不必在意该方程中没有出现真实概率。我们已经对该衍生证券构建了一个空头对冲,不管股票是涨是跌,该对冲均有效。股价涨跌变化的概率并不相干,关键是涨跌变动的幅度(即 u 和

d 的值)。在二叉树模型中,衍生证券的价格取决于可能的股票价格路径的集合,而非这些路径的可能性。我们将在第二卷的第四章和第五章中看到,在连续时间模型下与此类似的事实是:衍生证券的价格取决于股票价格的波动率而非股票价格的平均增长率。

1.2 多时段二叉树模型

我们现在将上节的研究推广到多时段。设想反复抛掷硬币,只要抛掷结果是正面,股票价格乘以上升因子 u;只要抛掷结果是背面,股票价格乘以下降因子 d。市场上除了股票外,还存在常利率 r 的货币市场资产。关于这些参数的唯一假设是无套利条件(1.1.2)。

我们记股票最初价格为 S_0,其为正值。如果第一次抛掷硬币的结果为正面,记时刻 1 的股票价格 $S_1(H)=uS_0$;如果抛掷结果为背面,记时刻 1 的股票价格 $S_1(T)=dS_0$。第二次抛掷后,股票价格将为以下四个数之一:

$$S_2(HH)=uS_1(H)=u^2S_0,\quad S_2(HT)=dS_1(H)=duS_0,$$

$$S_2(TH)=uS_1(T)=udS_0,\quad S_2(TT)=dS_1(T)=d^2S_0$$

三次抛掷后,硬币正背面排列有八种可能的结果,当然并非每一结果都会产生不同的股票价格,见图 1.2.1。

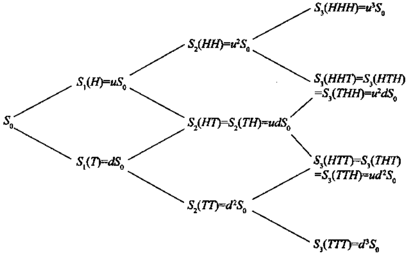

图 1.2.1 一般的三时段模型

例 1.2.1 考虑某个具体的三时段模型,其中 $S_0=4,u=2,d=\frac{1}{2}$。在图 1.2.2 中给出了可能的股票价格形成的二叉树。 □

现在我们回到图 1.2.1 所示的一般三时段二叉树模型,并考虑一个允许

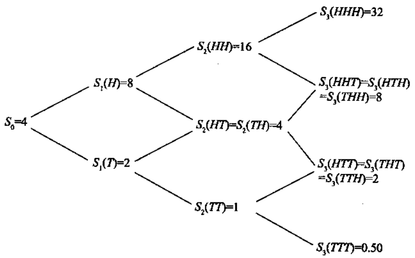

图 1.2.2　具体的三时段模型

在时刻 2 以 K 美元买入 1 份股票的欧式看涨期权。讨论过这种期权之后，我们的分析将被推广到在时刻 $N\geqslant 2$ 终止的任意欧式衍生证券。

敲定价格为 K、在时刻 2 终止的看涨期权的到期支付为 $V_2=(S_2-K)^+$，其中 V_2 和 S_2 取决于前两次抛掷硬币的结果。现在我们来确定这个期权在时刻 0 的无套利价格。假设有投资者在时刻 0 以价格 V_0 售出期权，其中 V_0 待定。然后他买入 Δ_0 份股票，并在货币市场投资 $V_0-\Delta_0 S_0$ 进行融资。($V_0-\Delta_0 S_0$ 将被证明为负值，所以事实上是从货币市场借入 $\Delta_0 S_0-V_0$ 美元。)在时刻 1，除去期权的空头外，该投资者的资产组合的价值为：

$$X_1=\Delta_0 S_1+(1+r)(V_0-\Delta_0 S_0) \tag{1.2.1}$$

由于 S_1(从而 X_1)取决于第一次抛掷硬币的结果，因此，式(1.2.1)实际上含有两个方程：

$$X_1(H)=\Delta_0 S_1(H)+(1+r)(V_0-\Delta_0 S_0) \tag{1.2.2}$$

$$X_1(T)=\Delta_0 S_1(T)+(1+r)(V_0-\Delta_0 S_0) \tag{1.2.3}$$

时刻 1 之后，投资者持有价值为 X_1 美元的资产组合，并且可以重新调整头寸。假设投资者决定持有 Δ_1 份股票(由于在选择 Δ_1 时已经知道时刻 1 抛掷硬币的结果，因而允许 Δ_1 依赖于第一次抛掷结果)，并将其余财富 $X_1-\Delta_1 S_1$ 投资于货币市场。在下一时段，财富由以下方程的右端给出，而投资者希望财富价值达到 V_2，因此就有：

$$V_2=\Delta_1 S_2+(1+r)(X_1-\Delta_1 S_1) \tag{1.2.4}$$

由于 S_2 和 V_2 取决于前两次抛掷硬币的结果，因此考虑所有四种可能的结

果,可将式 (1.2.4)重写成以下四个方程:

$$V_2(HH)=\Delta_1(H)S_2(HH)+(1+r)[X_1(H)-\Delta_1(H)S_1(H)] \quad (1.2.5)$$

$$V_2(HT)=\Delta_1(H)S_2(HT)+(1+r)[X_1(H)-\Delta_1(H)S_1(H)] \quad (1.2.6)$$

$$V_2(TH)=\Delta_1(T)S_2(TH)+(1+r)[X_1(T)-\Delta_1(T)S_1(T)] \quad (1.2.7)$$

$$V_2(TT)=\Delta_1(T)S_2(TT)+(1+r)[X_1(T)-\Delta_1(T)S_1(T)] \quad (1.2.8)$$

现在我们有含六个未知量 V_0、Δ_0、$\Delta_1(H)$、$\Delta_1(T)$、$X_1(H)$以及 $X_1(T)$的六个方程,其中两个可由式(1.2.1)表示,另外四个可由式(1.2.4)表示。

为求解这些方程,从而确定期权在时刻 0 的无套利价格 V_0 以及复制的资产组合 Δ_0、$\Delta_1(H)$、$\Delta_1(T)$,我们首先利用最后两个方程 (1.2.7)和(1.2.8)。由式(1.2.7)减去式(1.2.8)可以解出 $\Delta_1(T)$,得到 **delta-对冲公式**:

$$\Delta_1(T)=\frac{V_2(TH)-V_2(TT)}{S_2(TH)-S_2(TT)} \quad (1.2.9)$$

将该项代入式(1.2.7)或式(1.2.8)解得:

$$X_1(T)=\frac{1}{r+1}[\tilde{p}V_2(TH)+\tilde{q}V_2(TT)] \quad (1.2.10)$$

其中 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 是由式(1.1.8)确定的风险中性概率。我们也可以通过将式(1.2.7)乘以 $\tilde{p}$ 以及式(1.2.8)乘以 $\tilde{q}$,然后两者相加得到式(1.2.10),因为:

$$\tilde{p}S_2(TH)+\tilde{q}S_2(TT)=(1+r)S_1(T)$$

这样就能消去所有包含 $\Delta_1(T)$的项。式(1.2.10)给出的是在时刻 0 到时刻 1 这一时段股价下跌的前提下复制资产组合在时刻 1 的价值,我们将其定义为**在第一次抛掷硬币结果为背面前提下时刻 1 的期权价格**,记为 $V_1(T)$,即:

$$V_1(T)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_2(TH)+\tilde{q}V_2(TT)] \quad (1.2.11)$$

这是风险中性定价公式的另一个例子。这个公式与式(1.1.10) 类似,只是滞后了一个时段。

利用方程(1.2.5)和方程(1.2.6),我们可以类似地得到:

$$\Delta_1(H)=\frac{V_2(HH)-V_2(HT)}{S_2(HH)-S_2(HT)} \quad (1.2.12)$$

以及 $X_1(H)=V_1(H)$,其中 $V_1(H)$为**在第一次抛掷硬币结果为正面前提下时刻 1 的期权价格**,定义为:

$$V_1(H)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_2(HH)+\tilde{q}V_2(HT)] \quad (1.2.13)$$

这又与式(1.1.10)类似,但仍是滞后了一个时段。

最后，我们将 $X_1(H)=V_1(H)$ 以及 $X_1(T)=V_1(T)$ 代入式(1.2.1)隐含的两个方程(1.2.2)和(1.2.3)中。这些关于 Δ_0 和 V_0 的方程与式(1.1.3)和式(1.1.4)一样求解，仍然得到式(1.1.9)和式(1.1.10)。

综上所述，我们得到三个**随机过程**：(Δ_0,Δ_1)，(X_0,X_1,X_2)，(V_0,V_1,V_2)。**随机过程**是指依赖于时间的随机变量。因为这些量依赖于抛掷硬币的结果，因而是随机的。事实上，每个随机变量的下标表明了该变量依赖的抛掷硬币的次数。如果我们以任意初始财富 X_0 开始，给定 Δ_0、$\Delta_1(H)$ 以及 $\Delta_1(T)$，就能计算持有股票份额为这些给定数量(必要时需在货币市场融资)的资产组合的价值。事实上，这些资产组合的价值(以 X_0 开始)可通过以下**财富方程**归纳确定：

$$X_{n+1}=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n) \tag{1.2.14}$$

可能会有人把这个方程看成未定方程。它定义了**随机变量**，直到知晓抛掷硬币的结果，才能算出这些随机变量的真实值。然而，已知时刻0的值，我们可以通过这个方程在得知每次抛掷硬币结果的情况下计算出资产组合在随后时刻的价值。

对于在时刻2终止的衍生证券，随机变量 V_2 的值可依照合约规定完全取决于抛掷硬币的过程[例如，若抛掷硬币的结果为 $\omega_1\omega_2$，则时刻2股票价格为 $S_2(\omega_1\omega_2)$，于是对欧式看涨期权，我们有 $V_2(\omega_1\omega_2)=(S_2(\omega_1\omega_2)-K)^+$]。我们希望确定 X_0 的值及 Δ_0、$\Delta_1(H)$、$\Delta_2(T)$ 的值，使得无论 ω_1 和 ω_2 取何值，运用式(1.2.14)归纳求出的 X_2 满足：$X_2(\omega_1\omega_2)=V_2(\omega_1\omega_2)$。上面的公式告诉我们如何做到。我们将这样求得的 X_0 称为 V_0。当 X_0 和 Δ_0 按照上述方法确定后，我们定义 $V_1(H)$ 和 $V_1(T)$ 为由公式(1.2.14)给出的 $X_1(H)$ 和 $X_1(T)$ 的值。一般地，不论最初财富 X_0 以及 Δ_n 如何选择，我们用符号 Δ_n 来表示资产组合中股票的数量，用 X_n 来表示相应的资产组合的价值。如果所选择的 X_0 和 Δ_n 复制了一个衍生证券，我们用符号 V_n 来代替 X_n，并称之为**时刻 n 的衍生证券(无套利)价格**。

关于时刻2终止的欧式看涨期权的定价模式也适用于更多时段以及其他最终支付(仅在指定时刻实施而不考虑提前实施)的衍生证券定价问题。

定理 1.2.2(多时段二叉树模型中的复制) *考虑一个 N 时段二叉树资产定价模型，其中 $0<d<1+r<u$，并且：*

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d} \tag{1.2.15}$$

设 V_N 为一个随机变量(衍生证券在时刻 N 的支付)，它取决于前 N 次抛掷硬币过程 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$。由

$$V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)] \tag{1.2.16}$$

按时间倒向递归定义随机变量序列 $V_{N-1}, V_{N-2}, \cdots, V_0$，每个 V_n 取决于前 n 次抛掷硬币的结果 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$，其中 n 在 0 到 $N-1$ 之间变化。接下来定义：

$$\Delta_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)-V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)-S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)} \tag{1.2.17}$$

同样，n 在 0 到 $N-1$ 之间变化。如果我们设定 $X_0=V_0$ 且由式(1.2.14)按时间前向递归定义资产组合价值 $X_1, X_2, \cdots, X_N$，则我们有：

$$X_N(\omega_1\omega_2\cdots\omega_N)=V_N(\omega_1\omega_2\cdots\omega_N), \quad \forall\, \omega_1\omega_2\cdots\omega_N \tag{1.2.18}$$

定义 1.2.3 对于 $n=1,2,\cdots,N$，定理 1.2.2 中的随机变量 $V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$ 定义为前 n 次抛掷硬币的结果为 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ 时在时刻 n 的衍生证券价格。在时刻 0 的衍生证券价格为 V_0。

【定理 1.2.2 的证明】 我们通过对 n 前向归纳证明：

$$X_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n), \quad \forall\, \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \tag{1.2.19}$$

其中 n 在 0 到 N 之间变化。$n=0$ 的情形由定义 $X_0=V_0$ 给出。$n=N$ 的情形正是我们想证明的。

假设式(1.2.19)对小于 N 的某个值 n 成立，下面来证明它对 $n+1$ 也成立。考虑任意给定的 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}$，由归纳假设知，式(1.2.19)对我们已经给定的 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ 成立。我们并不知道是 $\omega_{n+1}=H$ 还是 $\omega_{n+1}=T$，因此两种情形都要考虑。首先，利用式(1.2.14)来计算 $X_{n+1}(\omega_1\omega_2\omega_3\cdots\omega_n H)$，即：

$$\begin{aligned}X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H)=\;&\Delta_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)uS_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)+(1+r)[X_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)\\&-\Delta_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)]\end{aligned}$$

为了简化记号，我们略去 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$，将这个方程简写成：

$$X_{n+1}(H)=\Delta_n uS_n+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n) \tag{1.2.20}$$

同样略去 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$，由式(1.2.17)可得：

$$\Delta_n=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H)-S_{n+1}(T)}=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}$$

将其代入式(1.2.20)并且利用归纳假设(1.2.19)以及 V_n 的定义(1.2.16)，得到：

$$\begin{aligned}X_{n+1}(H)&=(1+r)X_n+\Delta_n S_n(u-(1+r))\\&=(1+r)V_n+\frac{[V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)][u-(1+r)]}{u-d}\\&=(1+r)V_n+\tilde{q}V_{n+1}(H)-\tilde{q}V_{n+1}(T)\\&=\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)+\tilde{q}V_{n+1}(H)-\tilde{q}V_{n+1}(T)\\&=V_{n+1}(H)\end{aligned}$$

恢复被略去的抛掷硬币的结果 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$，可以把上面的式子写成：

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H)=V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H)$$

同理(见习题 1.4)可证：

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)=V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)$$

因此，不论是 $\omega_{n+1}=H$ 还是 $\omega_{n+1}=T$，我们都有：

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1})=V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1})$$

因为 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}$ 是任意的，归纳证明完成。 □

本节的多时段二叉树模型是**完全的**，因为任一衍生证券都可以通过在原生资产(主要指股票)和货币市场上的交易进行复制。在完全市场中，任一衍生证券都有唯一的无套利价格，即定义 1.2.3 中的价格。

定理 1.2.2 不但适用于支付仅依赖最终股价的衍生证券，也适用于所谓的**路径依赖期权**。我们用下面的例子来说明这一点。

例 1.2.4 假设如图 1.2.2 中所示：$S_0=4, u=2, d=\frac{1}{2}$，又假设利率 $r=\frac{1}{4}$，则 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。考虑这样一个**回望期权**，其在时刻 3 的支付为：

$$V_3=\max_{0\leqslant n\leqslant 3}S_n-S_3$$

则：

$$\begin{aligned}
&V_3(HHH)=S_3(HHH)-S_3(HHH)=32-32=0\\
&V_3(HHT)=S_2(HH)-S_3(HHT)=16-8=8\\
&V_3(HTH)=S_1(H)-S_3(HTH)=8-8=0\\
&V_3(HTT)=S_1(H)-S_3(HTT)=8-2=6\\
&V_3(THH)=S_3(THH)-S_3(THH)=8-8=0\\
&V_3(THT)=S_2(TH)-S_3(THT)=4-2=2\\
&V_3(TTH)=S_0-S_3(TTH)=4-2=2\\
&V_3(TTT)=S_0-S_3(TTT)=4-0.50=3.50
\end{aligned}$$

用倒向递归公式(1.2.16)计算期权在其他时刻的价格，得：

$$V_2(HH)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(HHH)+\frac{1}{2}V_3(HHT)\right]=3.20$$

$$V_2(HT)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(HTH)+\frac{1}{2}V_3(HTT)\right]=2.40$$

$$V_2(TH)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(THH)+\frac{1}{2}V_3(THT)\right]=0.80$$

$$V_2(TT)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(TTH)+\frac{1}{2}V_3(TTT)\right]=2.20$$

以及

$$V_1(H)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_2(HH)+\frac{1}{2}V_2(HT)\right]=2.24$$

$$V_1(T)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_2(TH)+\frac{1}{2}V_2(TT)\right]=1.20$$

最终可得：

$$V_0=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_1(H)+\frac{1}{2}V_1(T)\right]=1.376$$

如果投资者在时刻 0 以 1.376 的价格卖空回望期权，那么通过买入

$$\Delta_0=\frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}=\frac{2.24-1.20}{8-2}=0.173\ 3$$

份股票可以对冲其空头，这要花 0.693 3 美元，尚有 1.376−0.693 3=0.682 7 的余额可投资到利率为 25%的货币市场。在时刻 1，其货币市场账户将有 0.853 3。如果股票价格上涨到 8，则连同股票市值 1.386 7，他的整个资产组合价值为 2.24，这就是 $V_1(H)$；如果股票价格下降到 2，那么股票市值为 0.346 7，他的资产组合总值为 1.20，这就是 $V_1(T)$。继续这个过程，不论抛掷硬币的结果如何，投资者在时刻 3 都将持有价值为 V_3 的资产组合。 □

1.3 模型的计算

定理 1.2.2 给出的衍生证券定价算法的计算量随着时段数目的增加呈指数增长。现实中使用的二叉树模型通常含有 100 或更多时段，那么对于 100 次抛掷硬币就有 $2^{100}\approx10^{30}$ 个可能结果。利用涉及 2^{100} 个值的列表算法来求 V_{100} 的值，在计算上是不现实的。

幸运的是，定理 1.2.2 中给出的算法通常可以整理成计算上有效的方式。我们将用两个例子来加以说明。

例 1.3.1 在模型中令 $S_0=4, u=2, d=\frac{1}{2}$，考虑一个敲定价格 $K=5$ 并在时刻 3 终止的欧式看跌期权定价问题。风险中性的概率为 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$，股价过程如图 1.2.2 所示。该期权的支付 $V_3=(5-S_3)^+$ 为：

$$V_3(HHH)=0,\quad V_3(HHT)=V_3(HTH)=V_3(THH)=0,$$
$$V_3(HTT)=V_3(THT)=V_3(TTH)=3,\quad V_3(TTT)=4.50$$

以上列有 $2^3=8$ 个条目，但可以简化。在时刻 3，相应于股票价格 s，期权的支付记为 $v_3(s)$。V_3 以三次抛掷硬币结果的序列作为其自变量，而 v_3 的自变量是股票价格。在时刻 3，只有四种可能的股票价格，相应的 v_3 值列为

$$v_3(32)=0,\quad v_3(8)=0,\quad v_3(2)=3,\quad v_3(0.50)=4.50$$

如果该看跌期权在 100 时段后终止,V_{100}的自变量范围是 2^{100}种可能的抛掷硬币的结果,而 v_{100}的自变量范围是(时刻 100 的)101 种可能的股票价格,这就大大降低了计算复杂性。

由定理 1.2.2,我们可以根据公式

$$V_2(\omega_1\omega_2)=\frac{2}{5}[V_3(\omega_1\omega_2 H)+V_3(\omega_1\omega_2 T)] \tag{1.3.1}$$

计算 V_2。相应于 $\omega_1\omega_2$ 的四种可能结果,式(1.3.1)实际含有四个方程。我们用 $v_2(s)$表示在时刻 2 相应于股票价格 s 看跌期权的价格。利用这个函数,式(1.3.1)可表示为

$$v_2(s)=\frac{2}{5}\left[v_3(2s)+v_3\left(\frac{1}{2}s\right)\right]$$

相应于时刻 2 三种可能的股价,这里只含有三个方程。事实上,我们可以算得

$$v_2(16)=\frac{2}{5}[v_3(32)+v_3(8)]=0$$

$$v_2(4)=\frac{2}{5}[v_3(8)+v_3(2)]=1.20$$

$$v_2(1)=\frac{2}{5}[v_3(2)+v_3(0.50)]=3$$

同理,

$$v_1(8)=\frac{2}{5}[v_2(16)+v_2(4)]=0.48$$

$$v_1(2)=\frac{2}{5}[v_2(4)+v_2(1)]=1.68$$

其中 $v_1(s)$表示在时刻 1 相应于股票价格 s 看跌期权的价格。看跌期权在时刻 0 的价格为:

$$v_0(4)=\frac{2}{5}[v_1(8)+v_1(2)]=0.864$$

在每个时刻 $n=0,1,2$,如果股票的价格为 s,复制资产组合中应该持有的股票份额为:

$$\delta_n(s)=\frac{v_{n+1}(2s)-v_{n+1}\left(\frac{1}{2}s\right)}{2s-\frac{1}{2}s}$$

这与式(1.2.17)类似。 □

在例 1.3.1 中，期权在任何时刻 n 的价格为在该时刻股票价格 S_n 的函数，与抛掷硬币无关。这就可以引入函数 v_n 并按照公式 $V_n = v_n(S_n)$ 与随机变量 V_n 相联系。当期权价格的确依赖于股票价格路径而不仅仅是当前股票价格时，类似的简化也有可能。我们用第二个例子来说明这一点。

例 1.3.2 考虑例 1.2.4 中的回望期权。在每个时刻 n，期权的价格可以写成股票价格 S_n 和截至时刻 n 的最高股价 $M_n = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} S_k$ 的函数。在时刻 3，有六对 (S_3, M_3) 的可能值，即：

$$(32,32),\quad (8,16),\quad (8,8),\quad (2,8),\quad (2,4),\quad (0.50,4)$$

当 $S_3 = s, M_3 = m$ 时，期权在时刻 3 的支付记为 $v_3(s,m)$，有

$$v_3(32,32)=0,\quad v_3(8,16)=8,\quad v_3(8,8)=0,$$
$$v_3(2,8)=6,\quad v_3(2,4)=2,\quad v_3(0.50,4)=3.50$$

通常，当 $S_n = s, M_n = m$ 时，期权在时刻 n 的价值记为 $v_n(s,m)$。利用函数 v_n，定理 1.2.2 中的算法可被重写为：

$$v_n(s,m)=\frac{2}{5}\left[v_{n+1}\left(2s, m\vee(2s)+v_{n+1}\left(\frac{1}{2}s, m\right)\right)\right]$$

其中，$m\vee(2s)$ 表示 m 与 $2s$ 的较大值。利用这个算法，我们可以算得：

$$v_2(16,16)=\frac{2}{5}[v_3(32,32)+v_2(8,16)]=3.20$$

$$v_2(4,8)=\frac{2}{5}[v_3(8,8)+v_3(2,8)]=2.40$$

$$v_2(4,4)=\frac{2}{5}[v_3(8,8)+v_3(2,4)]=0.80$$

$$v_2(1,4)=\frac{2}{5}[v_3(2,4)+v_3(0.5,4)]=2.20$$

然后算得：

$$v_1(8,8)=\frac{2}{5}[v_2(16,16)+v_2(4,8)]=2.24$$

$$v_1(2,4)=\frac{2}{5}[v_1(4,4)+v_1(1,4)]=1.20$$

最后得到时刻 0 的价格为：

$$v_0(4,4)=\frac{2}{5}[v_1(8,8)+v_1(2,4)]=1.376$$

在每个时刻 $n=0,1,2$，如果股票价格为 s 且截至时刻 n 的最高股价为 m，则复制资产组合中应该持有的股票份额为：

$$\delta_n(s,m)=\frac{v_{n+1}[2s,m\vee(2s)]-v_{n+1}\left(\frac{1}{2}s,m\right)}{2s-\frac{1}{2}s}$$

这与式(1.2.17)相类似。 □

1.4 本章小结

本章考虑了多时段的二叉树模型。在该模型中每个时段,由抛掷硬币的结果决定股票的价格乘以上升因子 u 或者乘以下降因子 d(其中 $0<d<u$)。市场上的资产除了股票之外,还有货币市场账户,它在每时段的利率为 r,这既是投资也是贷款的利率。

套利是一种以零资本开始在股票和货币市场进行交易并以正概率赚钱、以零概率赔钱的交易策略。多时段二叉树模型不允许套利存在当且仅当

$$0<d<1+r<u \tag{1.1.2}$$

我们将总是做此假定。

衍生证券在终止时刻 N 的支付取决于前 N 个时段的硬币抛掷过程。在到期之前为衍生证券确定价格的**套利定价理论**可从两个角度来理解。首先,可以设问如何确定衍生证券价格使得人们在衍生证券、**原生资产**(主要指股票)以及货币市场的交易中无法套利。这一无套利条件唯一决定了衍生证券在所有时刻的价格。其次,设想投资者在到期时刻 N 之前的任一时刻 n 以某一价格售出衍生证券,并用相应收入构建资产组合,从时刻 n 到终止时刻 N 可以不断在股票和货币市场进行交易。如果不论在时刻 n 到 N 之间抛掷硬币的结果如何,资产组合在时刻 N 的价值均与衍生证券的支付一致,则该资产组合就对冲了衍生证券的空头。在时刻 n,为了构建这一空头对冲,衍生证券的售价与第一种定价方法中得到的无套利价格相同。

在时刻 N 支付为 V_N 的衍生证券的无套利价格可由公式

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)] \tag{1.2.16}$$

按时间顺序倒向递归算得。对冲衍生证券空头的资产组合中应该持有的股票份额,由下面公式给出:

$$\Delta_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)}{S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)} \tag{1.2.17}$$

出现在公式(1.2.16)中的数 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 为**风险中性概率**,由下式给出:

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d} \tag{1.2.15}$$

由(1.1.2)可知,这些风险中性概率为正值,并且和为 1。它们具有如下性质:在任何时刻,股票价格为下一时刻两种可能价格的风险中性均值的贴现,即

$$S_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]$$

换言之,在风险中性概率下,股票的平均回报率为 r,与货币市场的回报率相同。因此,如果这些概率果真可以决定抛掷硬币的结果(事实上不可能),那么投资者无论从事股票市场交易还是从事货币市场交易,都将获得相同的平均回报率。因此,不论如何投资,资产组合的平均回报率均为 r。尤其如果在时刻 $N-1$,投资者希望自己的资产组合价值到时刻 N 为 $V_N(\omega_1\omega_2\cdots\omega_N)$,那么在时刻 $N-1$ 资产组合的价值必须是:

$$\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_N(\omega_1\cdots\omega_{N-1}H)+\tilde{q}V_N(\omega_1\cdots\omega_{N-1}T)]$$

这正是 $n=N-1$ 时式(1.2.16)的右边,重复这样的论证,就得到式(1.2.16)对所有 n 成立。

以上对式(1.2.16)的解释是在假设 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 可以决定抛掷硬币的结果这一与事实相悖的条件下给出的。人们也许会质疑如此推得的结论能否成立。事实上,由于以下原因,结论确实是成立的。在对冲衍生证券的空头时,我们希望,**无论抛掷硬币的结果如何**,用以对冲的资产组合价值总能与衍生证券的支付相一致。换言之,这种对冲必须对所有股票价格路径有效。只要某种路径是可能的(即有正概率),对冲就应当沿此路径有效,而概率的真实值则是无关的。沿此路径通过求解一系列方程(1.2.2)~(1.2.3)及(1.2.5)~(1.2.8)就可以求出这种对冲。这些方程中并不涉及概率。引入风险中性概率使我们可以给出上述论证并且求得方程组的解。引入任何其他概率都不会有与此相同的论证,因为只有在风险中性概率下,不论如何投资,资产组合的平均回报率总是 r。风险中性概率提供了求解这一系列方程的捷径,而真实概率无助于方程的求解。在真实概率下,资产组合的平均回报率依赖于资产,而在我们试图求解这些方程时,并不知道该用哪个资产组合。

另一方面,我们可以不必借助概率讨论来解释式(1.2.16),这正是定理 1.2.2 的证明中所采用的方法。在证明中我们也用到了数 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$,然而,它们并不被看作概率,只是由式(1.2.15)定义的两个数而已。

1.5 评 注

无套利定价的思想隐含在布莱克和斯科尔斯的论文[5]中,然而首先是在默顿的论文[34]中得到明确的阐述。默顿从无套利公理出发得到了大量结论,令人惊讶。无套利定价理论在连续时间模型中由哈里森和克雷普斯[17]以及哈里森和普利斯卡[18]作了充分的展开。这些作者们引入了鞅(参见第一卷 2.4 节和第二卷 2.3 节)以及风险中性定价的概念。二叉树模型由考克斯、罗斯和鲁宾斯坦(Cox, Ross and Rubinstein)[11]首先建立,这方面的一本很好的参考书是[12]。二叉树模型本身就十分有用,正如考克斯等人表明,作为二叉树模型的极限,人们可以重新推得布莱克—斯科尔斯—默顿公式(参见第二卷中定理 3.2.2 关于作为二叉树模型的极限的股票价格过程的对数正态性质)。

1.6 习 题

习题 1.1 假设在 1.1 节单时段二叉树模型中,H 和 T 发生的概率均为正。证明条件(1.1.2)排除了套利。换言之,证明:如果 $X_0=0$ 且

$$X_1=\Delta_0 S_1+(1+r)(X_0-\Delta_0 S_0)$$

则 X_1 不能以正概率取严格正值,除非 X_1 也以正概率取严格负值,并且这一结果与数 Δ_0 的选择无关。

习题 1.2 假设在例 1.1.1 的情况下,期权在时刻 0 的售价为 1.2。考虑某个投资者以初始财富 $X_0=0$ 开始在时刻 0 买入 Δ_0 份股票和 Γ_0 份期权。数 Δ_0 和 Γ_0 可正可负,也可以为零。这样,该投资者的现金头寸为 $-4\Delta_0-1.20\Gamma_0$。如果这是正值,就在货币市场进行投资;如果是负值,它就表示从货币市场贷款的金额。在时刻 1,投资者的股票、期权和货币市场资产组合的价值为:

$$X_1=\Delta_0 S_1+\Gamma_0(S_1-5)^+-\frac{5}{4}(4\Delta_0+1.20\Gamma_0)$$

假设 H 和 T 发生的概率均为正。证明:如果 X_1 有正的概率取正值,那么 X_1 也有正的概率取负值。换言之,当时刻 0 的期权价格为 1.20 时排除了套利。

习题 1.3 在 1.1 节单时段二叉树模型中,若我们想要确定衍生证券 $V_1=S_1$ 在时刻 0 的价格(即该衍生证券的支付为股票价格)。(这也可以被看作敲定价格 $K=0$ 的欧式看涨期权。)由风险中性定价公式(1.1.10)得到的时刻 0 的价格 V_0 是多少?

习题 1.4 在定理 1.2.2 的证明中，在归纳假设下证明：

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)=V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)$$

习题 1.5 在例 1.2.4 中，假定投资者在时刻 0 以价格 $V_0=1.376$ 售出回望期权，同时买入 $\Delta_0=0.173\ 3$ 份股票。在时刻 1，如果股票价格上涨，其资产组合价值为 $V_1(H)=2.24$。假设投资者在时刻 1 的股票头寸为 $\Delta_1(H)=\frac{V_2(HH)-V_2(HT)}{S_2(HH)-S_2(HT)}$。证明：到时刻 2，如果股票价格又上涨，其资产组合价值为 $V_2(HH)=3.20$；如果股票价格下跌，其资产组合价值为 $V_2(HT)=2.40$。最后，在股票价格第一时段上涨、第二时段下跌的情况下，假设投资者在时刻 2 的股票头寸为 $\Delta_2(HT)=\frac{V_3(HTH)-V_3(HTT)}{S_3(HTH)-S_3(HTT)}$。证明：到时刻 3，如果股票价格上涨，其资产组合价值为 $V_3(HTH)=0$；如果股票价格下跌，其资产组合价值为 $V_3(HTT)=6$。换言之，投资者已经对冲了期权的空头。

习题 1.6 (单时段多头对冲) 假设股票价格过程如图 1.1.2 所示。某银行持有一份该股票的欧式看涨期权。期权在时刻 1 终止，敲定价格为$K=5$。在 1.1 节中我们已确定该看涨期权在时刻 0 的价格为 $V_0=1.20$。因此在时刻 0，银行为拥有该期权投入资本为 $V_0=1.20$。银行希望到时刻 1 仍能以 25%的利率赚取该资本的利息[即不投入更多资金，也不论抛掷硬币的结果如何，连同期权的收益(如果有的话)，银行希望在时刻 1 能获得$\frac{5}{4}\times 1.20=1.50$]。请阐述银行的交易员应如何通过在股票和货币市场的投资来实现这一目标。

习题 1.7 (多时段多头对冲) 某银行持有如例 1.2.4 中回望期权的多头。银行想持有该期权直至期权到期，并且收到支付 V_3。在时刻 0，银行为拥有该期权投入资本为 $V_0=1.376$。银行希望到时刻 3 仍能以 25%的利率赚取该资本的利息[即不投入更多资金，也不论抛掷硬币的结果如何，连同期权的收益(如果有的话)，银行希望在时刻 3 能获得 $\left(\frac{5}{4}\right)^3\times 1.376=2.687\ 5$]。请阐述银行的交易员应如何通过在股票和货币市场的投资来实现这一目标。

习题 1.8 (亚式期权) 考虑例 1.2.1 中三时段的模型，其中 $S_0=4$，$u=2$，$d=\frac{1}{2}$，利率为 $r=\frac{1}{4}$，从而 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。对 $n=0,1,2,3$，定义 $Y_n=\sum_{k=0}^{n}S_k$ 为从时刻 0 到 n 的股票价格之和。考虑一个在时刻 3 终止的亚式看涨期权，敲定价格为 $K=4\left[\text{即该期权在时刻 3 的支付为}\left(\frac{1}{4}Y_3-4\right)^+\right]$。亚式看涨期权与欧式看涨期权很相似，只是期权的支付基于股票价格的平均值而不是

终止时刻的股票价格。如果 $S_n=s,Y_n=y$,令 $v_n(s,y)$为期权在时刻 n 的价格。尤其是 $v_3(s,y)=\left(\frac{1}{4}y-4\right)^+$。

(i) 设计一种递归计算 v_n 的算法。特别要写出用 v_{n+1}表示 v_n 的公式。

(ii) 运用由(i)设计的算法计算亚式期权在时刻 0 的价格 $v_0(4,4)$。

(iii) 给出关于$\delta_n(s,y)$的公式,这里$\delta_n(s,y)$是当 $S_n=s$、$Y_n=y$ 时对冲资产组合在时刻 n 应该持有的股票份额。

习题 1.9(随机波动率、随机利率) 考虑一个二叉树定价模型,但是在每个时刻 $n\geqslant1$,上升因子 $u_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$、下降因子 $d_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$和利率 $r_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$均依赖于 n 以及前 n 次抛掷结果 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$。初始的上升因子 u_0、下降因子 d_0 和利率 r_0 这三个值非随机量。更具体地说,时刻 1 的股票价格由下式给定:

$$S_1(\omega_1)=\begin{cases}u_0S_0, & \text{如果 } \omega_1=H\\ d_0S_0, & \text{如果 } \omega_1=T\end{cases}$$

对于 $n\geqslant1$,股票在时刻 $n+1$ 的价格如下:

$$S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1})=\begin{cases}u_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n), & \text{如果 } \omega_{n+1}=H\\ d_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n), & \text{如果 } \omega_{n+1}=T\end{cases}$$

时刻 0 在货币市场的 1 美元投资或者债务到时刻 1 增长为 $1+r_0$;对于 $n\geqslant1$,时刻 n 在货币市场的 1 美元投资或者债务到时刻 $n+1$ 增长为 $1+r_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$。假设对每个 n 和所有 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$,无套利条件

$$0<d_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)<1+r_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)<u_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$$

成立,并且假设 $0<d_0<1+r_0<u_0$。

(i) 设 N 为正整数。对于上面描述的模型,给出一个算法确定在时刻 N 支付为随机变量 V_N 的衍生证券在时刻 0 的价格,其中 V_N 依赖于前 N 次抛掷硬币的结果。

(ii) 给出上述衍生证券 V_N 的复制资产组合在每个时刻 n $(0\leqslant n\leqslant N-1)$应持有的股票份额的计算公式。

(iii) 假设初始股价为 $S_0=80$,如果抛掷硬币结果为正面,股价增加 10;如果抛掷硬币结果为背面,则股价减少 10。换言之,$S_1(H)=90$,$S_1(T)=70$,$S_2(HH)=100$,等等。假设利率恒为零,考虑敲定价格为 80、时刻 5 到期的欧式看涨期权,求时刻 0 的期权价格。

2 抛掷硬币空间上的概率论

2.1 有限概率空间

有限概率空间被用于随机试验的所有可能结果有限这种情形的建模。在上一章二叉树模型中，我们有限次抛掷硬币。如果抛掷三次，所有可能结果的集合为：

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\} \tag{2.1.1}$$

假设每次抛掷出现正面的概率(真实概率或者风险中性概率)为 p，出现背面的概率为 $q=1-p$，并假设抛掷过程是相互独立的，则 Ω 中每个元素 ω(即三次抛掷的结果序列 $\omega=\omega_1\omega_2\omega_3$)的概率为：

$$\mathbb{P}(HHH)=p^3,\quad \mathbb{P}(HHT)=p^2q,\quad \mathbb{P}(HTH)=p^2q,\quad \mathbb{P}(HTT)=pq^2,$$
$$\mathbb{P}(THH)=p^2q,\quad \mathbb{P}(THT)=pq^2,\quad \mathbb{P}(TTH)=pq^2,\quad \mathbb{P}(TTT)=q^3 \tag{2.1.2}$$

Ω 中的子集称为**事件**，事件也经常用文字或符号来描述。例如：

$$\begin{aligned}\text{“第一次抛掷结果为正面”}&=\{\omega\in\Omega;\omega_1=H\}\\&=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}\end{aligned}$$

事件的概率由事件中各元素的概率相加得到，例如：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{第一次抛掷结果为正面})&=\mathbb{P}(HHH)+\mathbb{P}(HHT)\\&\quad+\mathbb{P}(HTH)+\mathbb{P}(HTT)\\&=(p^3+p^2q)+(p^2q+pq^2)\\&=p^2(p+q)+pq(p+q)\\&=p^2+pq\\&=p(p+q)\\&=p\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

这里,数学与人们的直觉一致。

借助数学模型很容易得到对数学的直觉理解,但有时也会引来问题。我们需要证实数学与直觉一致。否则,要么是直觉错了,要么是我们建立的数学模型不完善。如果我们的直觉与数学不一致,那就首先需要协调这两者。在式(2.1.3)的情形下,我们试图建立一种模型,其中每次抛掷出现正面的概率为 p,为此我们先由式(2.1.2)定义 Ω 中元素的概率,进而定义一个事件的概率为该事件中元素的概率和。这些定义令我们可以施行式(2.1.3)中的计算,我们也需要进行这种计算来验证是否能得到预期的答案。若不然,我们就要重新考虑抛掷硬币的数学模型。

我们将刚才讨论的情形稍加推广,首先允许 Ω 为任意有限集,其次允许 Ω 中某些元素的概率为零。这就导致了下面的定义。

定义 2.1.1 **有限概率空间包含样本空间 Ω 和概率测度** $\mathbb{P}$。样本空间是一个非空有限集合,概率测度 $\mathbb{P}$ 为一个函数,该函数将 Ω 中每个元素对应到 $[0,1]$ 之间的某个数,使得:

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1 \tag{2.1.4}$$

一个事件是 Ω 中的一个子集,我们按如下方式定义事件 A 的概率为:

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega) \tag{2.1.5}$$

如上面提到的,这是一个关于随机试验的模型。集合 Ω 为试验的所有可能结果,$\mathbb{P}(\omega)$ 为某个特别结果 ω 发生的概率,$\mathbb{P}(A)$ 为结果在样本空间的子集 A 中的概率。如果 $\mathbb{P}(A)=0$,那么试验结果一定不在 A 中;如果 $\mathbb{P}(A)=1$,那么试验结果一定在 A 中。由于式(2.1.4),我们有:

$$\mathbb{P}(\Omega)=1 \tag{2.1.6}$$

也就是说,试验的结果一定在 Ω 中。因为对某些 ω,$\mathbb{P}(\omega)$ 允许为零,我们甚至可以将一些一定不会发生的结果加入 Ω 中。显然,由式(2.1.5)可知,如果 A 和 B 为 Ω 中不相交的子集,那么:

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \tag{2.1.7}$$

2.2 随机变量、分布和期望

随机试验一般会得到一些数据,这就产生了随机变量的概念。

定义 2.2.1 设 $(\Omega,\mathbb{P})$ 为有限概率空间,**随机变量**为定义在 Ω 上的一个实值函数(有时我们也允许随机变量取值为 $+\infty$ 和 $-\infty$)。

例 2.2.2(股票价格) 回忆由式(2.1.1)给出的三次独立抛掷硬币结果

的空间 Ω，如图 1.2.2 所示，我们按以下公式定义股票价格：

$$S_0(\omega_1\omega_2\omega_3)=4, \quad \forall \omega_1\omega_2\omega_3\in\Omega$$

$$S_1(\omega_1\omega_2\omega_3)=\begin{cases}8, & \text{如果 } \omega_1=H\\ 2, & \text{如果 } \omega_1=T\end{cases}$$

$$S_2(\omega_1\omega_2\omega_3)=\begin{cases}16, & \text{如果 } \omega_1=\omega_2=H\\ 4, & \text{如果 } \omega_1\neq\omega_2\\ 1, & \text{如果 } \omega_1=\omega_2=T\end{cases}$$

$$S_3(\omega_1\omega_2\omega_3)=\begin{cases}32, & \text{如果 } \omega_1=\omega_2=\omega_3=H\\ 8, & \text{如果抛掷结果为两次正面和一次背面}\\ 2, & \text{如果抛掷结果为一次正面和两次背面}\\ 0.50, & \text{如果 } \omega_1=\omega_2=\omega_3=T\end{cases}$$

这里我们把 S_0,S_1,S_2,S_3 的自变量记作 $\omega_1\omega_2\omega_3$，尽管有些随机变量并不依赖所有硬币抛掷过程。尤其是 S_0 事实上并非随机变量，因为不管硬币抛掷结果如何，它都取值 4。这样的随机变量有时称为**退化的随机变量**。 □

习惯上把随机变量的自变量记成 ω，即使 ω 为一个序列 $\omega=\omega_1\omega_2\omega_3$。我们以后将不加区分地使用这两种记号。更常见的是并不写出随机变量的自变量，比如直接写 S_3，而不写 $S_3(\omega_1\omega_2\omega_3)$ 或者 $S_3(\omega)$。

根据定义 2.2.1，一个随机变量是一个将样本空间 Ω 映射到实数集的函数。一个随机变量的**分布**是对随机变量取不同值的概率的具体描述。**随机变量不是分布，分布也不是随机变量**。以后在通过历史数据估计得到的真实概率测度与风险中性概率测度之间转换时，这一点非常重要。测度的变换将改变随机变量的分布，但是不会改变随机变量本身。下面的例子清楚地表明了两者的区别。

例 2.2.3 抛掷硬币三次，所有可能结果的集合为：

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

定义随机变量为：

$$X=\text{出现正面的次数}, \quad Y=\text{出现背面的次数}$$

于是：

$$\begin{aligned}X(HHH)&=3\\ X(HHT)=X(HTH)=X(THH)&=2\\ X(HTT)=X(THT)=X(TTH)&=1\\ X(TTT)&=0\\ Y(TTT)&=3\\ Y(TTH)=Y(THT)=Y(HTT)&=2\\ Y(THH)=Y(HTH)=Y(HHT)&=1\\ Y(HHH)&=0\end{aligned}$$

刻划这些随机变量,我们不需要知道各种结果的概率。然而,一旦给定了 Ω 上的概率测度,我们就可以确定 X 和 Y 的分布。例如,如果我们给定概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 如下:每次抛掷出现正面的概率为$\frac{1}{2}$,Ω 中每个元素的概率为$\frac{1}{8}$,则

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega\in\Omega;X(\omega)=0\}=\widetilde{\mathbb{P}}\{TTT\}=\frac{1}{8}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega\in\Omega;X(\omega)=1\}=\widetilde{\mathbb{P}}\{HTT,THT,TTH\}=\frac{3}{8}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega\in\Omega;X(\omega)=2\}=\widetilde{\mathbb{P}}\{HHT,HTH,THH\}=\frac{3}{8}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega\in\Omega;X(\omega)=3\}=\widetilde{\mathbb{P}}\{HHH\}=\frac{1}{8}$$

我们将繁冗的记号$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega\in\Omega;X(\omega)=j\}$简记为$\widetilde{\mathbb{P}}\{X=j\}$。然而,记住符号$\widetilde{\mathbb{P}}\{X=j\}$表示 Ω 中满足 $X(\omega)=j$ 的元素所组成的子集的概率还是有益的。在测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下,X 取四个值 0,1,2,3 的概率分别为:

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{X=0\}=\frac{1}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{X=1\}=\frac{3}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{X=2\}=\frac{3}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{X=3\}=\frac{1}{8}$$

这一 X 取各种不同值的概率的列表给出了在概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下随机变量 X 的分布。

随机变量 Y 不同于 X,它是抛掷结果为背面的次数。然而,在测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下,Y 具有与 X 相同的分布:

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{Y=0\}=\frac{1}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{Y=1\}=\frac{3}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{Y=2\}=\frac{3}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{Y=3\}=\frac{1}{8}$$

值得注意的是:随机变量为定义在 Ω 上的函数,而它的分布则是随机变量取不同值的概率的列表。

假设我们选择这样一个 Ω 上的概率测度$\mathbb{P}$,使得每次抛掷出现正面的概率为$\frac{2}{3}$,出现背面的概率为$\frac{1}{3}$,那么我们就有:

$$\mathbb{P}\{X=0\}=\frac{1}{27},\quad \mathbb{P}\{X=1\}=\frac{6}{27},\quad \mathbb{P}\{X=2\}=\frac{12}{27},\quad \mathbb{P}\{X=3\}=\frac{8}{27}$$

随机变量 X 在概率测度$\mathbb{P}$ 下的分布与在$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的分布不同。若不考虑决定其分布的概率测度,这是同一个(记录抛掷结果为正面的次数的)随机变量。我们以后在考虑真实概率和风险中性概率下的资产价格时,也会遇到这种情况。

尽管在测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下,随机变量 X 与 Y 的分布相同,但是在测度$\mathbb{P}$ 下,随机变量 X 和 Y 有不同的分布。事实上:

$$\mathbb{P}\{Y=0\}=\frac{8}{27},\quad \mathbb{P}\{Y=1\}=\frac{12}{27},\quad \mathbb{P}\{Y=2\}=\frac{6}{27},\quad \mathbb{P}\{Y=3\}=\frac{1}{27}\qquad\square$$

定义 2.2.4 设 X 为定义在有限概率空间$(\Omega,\mathbb{P})$上的随机变量。X 的**期望**(或**期望值**)定义为：

$$\mathbb{E}X=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)$$

当用风险中性测度$\widetilde{\mathbb{P}}$计算期望时，我们采用记号：

$$\widetilde{\mathbb{E}}X=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\,\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$$

X 的**方差**定义为：

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$$

由定义可知，期望是线性的。如果 X 和 Y 为随机变量，c_1，c_2 为常数，那么：

$$\mathbb{E}(c_1X+c_2Y)=c_1\,\mathbb{E}X+c_2\,\mathbb{E}Y$$

尤其是，如果 $l(x)=ax+b$ 是一个关于哑变量 x 的线性函数(其中 a 和 b 为常数)，那么$\mathbb{E}[l(X)]=l(\mathbb{E}X)$。关于凸函数，我们有下面的不等式。

定理 2.2.5［詹森(Jensen)不等式］ 设 X 为定义在有限概率空间上的随机变量，$\varphi(x)$为哑变量 x 的凸函数，则有：

$$\mathbb{E}[\varphi(X)]\geqslant\varphi(\mathbb{E}X)$$

【证明】 我们首先证明凸函数是位于其下的所有线性函数的最大值；也就是说，对每个 $x\in\mathbb{R}$，有：

$$\varphi(x)=\max\{l(x);l\text{ 为线性函数，且 }l(y)\leqslant\varphi(y),\forall y\in\mathbb{R}\}\tag{2.2.1}$$

因为我们只考虑位于 φ 之下的线性函数，显然有：

$$\varphi(x)\geqslant\max\{l(x);l\text{ 为线性函数，且 }l(y)\leqslant\varphi(y),\forall y\in\mathbb{R}\}$$

另一方面，设 x 为$\mathbb{R}$中任意一点，由于 φ 为凸函数，总是存在位于 φ 之下的线性函数 l，使得在点 x 处 $\varphi(x)=l(x)$，称之为 **φ 在点 x 处的支撑线**(见图 2.2.1)。因此：

$$\varphi(x)\leqslant\max\{l(x);l\text{ 为线性函数，且 }l(y)\leqslant\varphi(y),\forall y\in\mathbb{R}\}$$

至此，式(2.2.1)得证。现在设 l 为位于 φ 之下的线性函数，我们有：

$$\mathbb{E}[\varphi(X)]\geqslant\mathbb{E}[l(X)]=l(\mathbb{E}X)$$

因为这个不等式对位于 φ 之下每个线性函数 l 均成立，我们对所有 l 取右边的最大值，得到：

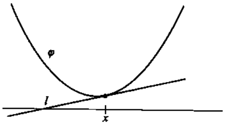

图 2.2.1 φ在点 x 的支撑线

$$\mathrm{E}[\varphi(X)] \geqslant \max\{l(\mathrm{E}\,X); l \text{ 为线性函数，且 } l(y) \leqslant \varphi(y), \forall y \in \mathbb{R}\} = \varphi(\mathrm{E}\,X)$$

□

由詹森不等式，直接可得：

$$\mathrm{E}[X^2] \geqslant (\mathrm{E}\,X)^2$$

这一公式也可由下式推得：

$$0 \leqslant \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}\,X)^2] = \mathrm{E}[X^2 - 2X\,\mathrm{E}\,X + (\mathrm{E}\,X)^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}\,X)^2$$

2.3 条件期望

在第一章二叉树定价模型中，我们由公式(1.1.8)选择风险中性概率 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$，即：

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{2.3.1}$$

容易验证这两个概率满足：

$$\frac{\tilde{p}u + \tilde{q}d}{1+r} = 1 \tag{2.3.2}$$

因此，在每个时刻 n 对每个抛掷硬币结果的序列 $\omega_1 \cdots \omega_n$，我们有：

$$S_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) + \tilde{q}S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)] \tag{2.3.3}$$

(即股票在时刻 n 的价格为时刻 $n+1$ 两种可能股价的加权平均贴现值，其中 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 为计算平均时的权重。)为了简化记号，定义：

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n[S_{n+1}](\omega_1 \cdots \omega_n) = \tilde{p}S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) + \tilde{q}S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T) \tag{2.3.4}$$

这样就可以把式(2.3.3)重写成：

$$S_n = \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathrm{E}}_n[S_{n+1}] \tag{2.3.5}$$

并称$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S_{n+1}]$为**基于时刻 n 信息的 S_{n+1} 的条件期望**。该条件期望可以看作是基于前 n 次抛掷硬币的已知结果对 S_{n+1} 值的一个估计。

例如，如图 2.3.1 所示，利用风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$，我们有$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2](H)=10$ 和$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_2](T)=2.50$。如果简单地写出$\widetilde{\mathbb{E}}_1(S_2)$而没有具体说明第一次抛掷硬币的结果如何，我们得到的是在时刻 0 未知的量，其值由抛掷硬币的随机试验决定。根据定义 2.2.1，这是一个随机变量。

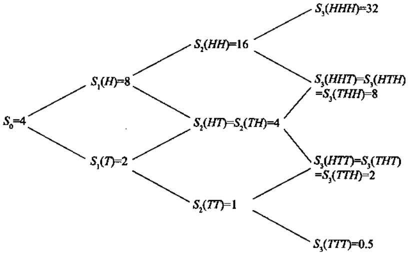

图 2.3.1　三时段模型

更为通常的是，只要 X 是一个依赖于前 N 次抛掷硬币结果的随机变量，我们就可以由比 N 更早的时刻 n 的信息估计 X 的值。下面的定义推广了式(2.3.4)。

定义 2.3.1　*设 n 满足 $1\leqslant n\leqslant N$，对于给定的(前 n 次抛掷硬币的结果)序列 $\omega_1\cdots\omega_n$，存在 2^{N-n} 种可能的后续 $\omega_{n+1}\cdots\omega_N$。用 $\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)$表示在后续 $\omega_{n+1}\cdots\omega_N$ 中出现正面的次数，$\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)$表示出现背面的次数。我们定义：*

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[X](\omega_1\cdots\omega_n)=\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N}\tilde{p}^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}\tilde{q}^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}X(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N)\tag{2.3.6}$$

*并称$\widetilde{\mathbb{E}}_n[X]$为***基于时刻 n 信息的 X 的条件期望**。

根据时刻 0 的已知信息，条件期望$\widetilde{\mathbb{E}}_n[X]$是随机变量，因为它的值依赖于前 n 次抛掷硬币的结果，而这些信息直到时刻 n 我们才能知道。例如，如图 2.3.1 所示，利用风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$，我们可以求得：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3](H)=12.50,\quad \widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3](T)=3.125$$

因此,$\widetilde{\mathbb{E}}_1[S_3]$是一个随机变量。

定义 2.3.1 (续) 条件期望的两个极端情形分别是:

(i) $\widetilde{\mathbb{E}}_0[X]$——不依赖任何信息 X 的条件期望,定义为:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_0[X]=\widetilde{\mathbb{E}}X \tag{2.3.7}$$

(ii) $\widetilde{\mathbb{E}}_N[X]$——基于所有 N 次抛掷硬币的信息 X 的条件期望,定义为:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_N[X]=X \tag{2.3.8}$$

上面计算出的条件期望使用了风险中性概率 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$,这点由出现在符号$\widetilde{\mathbb{E}}_n$上方的"~"来标明。当然,条件期望也可由真实概率 p 和 q 计算,记为$\mathbb{E}_n$。

作为随机变量,条件期望有五个将被广泛运用的基本性质。它们在以下定理中列出。我们用真实概率下计算的条件期望来描述它们,风险中性概率下的条件期望也有类似结果。

定理 2.3.2 (条件期望的基本性质) 设 N 为正整数,X 和 Y 为依赖于前 N 次抛掷硬币结果的随机变量。对于给定的 $0\leqslant n\leqslant N$,以下性质成立。

(i) **条件期望的线性性**。对于所有常数 c_1 和 c_2,我们有:

$$\mathbb{E}_n[c_1X+c_2Y]=c_1\,\mathbb{E}_n[X]+c_2\,\mathbb{E}_n[Y]$$

(ii) **提取已知量**。如果 X 实际上只依赖于前 n 次硬币抛掷,那么:

$$\mathbb{E}_n[XY]=X\cdot\mathbb{E}_n[Y]$$

(iii) **累次条件期望**。如果 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$,那么:

$$\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_m[X]]=\mathbb{E}_n[X]$$

特别地,$\mathbb{E}[\mathbb{E}_m[X]]=\mathbb{E}X$。

(iv) **独立性**。如果 X 只依赖从第 $n+1$ 次至第 N 次抛掷硬币的结果,那么:

$$\mathbb{E}_n[X]=\mathbb{E}\,X$$

(v) **条件詹森不等式**。如果 $\varphi(x)$为哑变量 x 的凸函数,那么:

$$\mathbb{E}_n[\varphi(X)]\geqslant\varphi(\mathbb{E}_n[X])$$

定理 2.3.2 的证明见附录。我们用基于图 2.3.1 的例子来说明定理的前四个性质,其中概率 $p=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3}$。第五个性质,条件詹森不等式可由条件期望的线性性推得,就如同詹森不等式可由期望的线性性推得(见定理 2.2.5 的证明)。

例 2.3.3(条件期望的线性性) 在图 2.3.1 中,取 $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$,我们算得:

$$E_1[S_2](H)=\frac{2}{3}\cdot 16+\frac{1}{3}\cdot 4=12$$

$$E_1[S_3](H)=\frac{4}{9}\cdot 32+\frac{2}{9}\cdot 8+\frac{2}{9}\cdot 8+\frac{1}{9}\cdot 2=18$$

因此,$E_1[S_2](H)+E_1[S_3](H)=12+18=30$。但是又有:

$$E_1[S_2+S_3](H)=\frac{4}{9}(16+32)+\frac{2}{9}(16+8)+\frac{2}{9}(4+8)+\frac{1}{9}(4+2)=30$$

同理计算可得:

$$E_1[S_2+S_3](T)=7.50=E_1[S_2](T)+E_1[S_3](T)$$

总之,不论第一次抛掷硬币的结果如何,都有:

$$E_1[S_2+S_3]=E_1[S_2]+E_1[S_3]$$

例 2.3.4(提取已知量) 首先由例 2.3.3 可知:

$$E_1[S_2](H)=\frac{2}{3}\cdot 16+\frac{1}{3}\cdot 4=12$$

如果我们想基于时刻 1 的信息估计 S_1S_2,我们可以提取因子 S_1,如下面的计算所示:

$$E_1[S_1S_2](H)=\frac{2}{3}\cdot 128+\frac{1}{3}\cdot 32=96=8\cdot 12=S_1(H)E_1[S_2](H)$$

同理计算可得:

$$E_1[S_1S_2](T)=6=S_1(T)E_1[S_2](T)$$

总之,不论第一次抛掷硬币的结果如何,都有:

$$E_1[S_1S_2]=S_1\,E_1[S_2]$$

例 2.3.5(累次条件期望) 我们首先基于时刻 2 的信息估计 S_3:

$$E_2[S_3](HH)=\frac{2}{3}\cdot 32+\frac{1}{3}\cdot 8=24$$

$$E_2[S_3](HT)=\frac{2}{3}\cdot 8+\frac{1}{3}\cdot 2=6$$

$$E_2[S_3](TH)=\frac{2}{3}\cdot 8+\frac{1}{3}\cdot 2=6$$

$$E_2[S_3](TT)=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot \frac{1}{2}=1.50$$

现在,我们基于时刻 1 的信息估计上面的估计值:

$$\mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[S_3]](H)=\frac{2}{3}\mathbb{E}_2[S_3](HH)+\frac{1}{3}\mathbb{E}_2[S_3](HT)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 24+\frac{1}{3}\cdot 6=18$$

$$\mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[S_3]](T)=\frac{2}{3}\mathbb{E}_2[S_3](TH)+\frac{1}{3}\mathbb{E}_2[S_3](TT)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1.50=4.50$$

估计值的估计是均值的均值,可以想象我们能通过更为综合的平均来得到同样的结果。这种更为综合的平均就是基于时刻 1 的信息来直接估计 S_3:

$$\mathbb{E}_1[S_3](H)=\frac{4}{9}\cdot 32+\frac{2}{9}\cdot 8+\frac{2}{9}\cdot 8+\frac{1}{9}\cdot 2=18$$

$$\mathbb{E}_1[S_3](T)=\frac{4}{9}\cdot 8+\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=4.50$$

总之,不论第一次抛掷硬币的结果如何,都有:

$$\mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[S_3]]=\mathbb{E}_1[S_3]$$

例 2.3.6(独立性) 根据第二次抛掷硬币的结果出现正面还是背面,商$\frac{S_2}{S_1}$相应取值 2 或者$\frac{1}{2}$。尤其是,$\frac{S_2}{S_1}$并不依赖第一次抛掷硬币的结果。我们计算:

$$\mathbb{E}_1\left[\frac{S_2}{S_1}\right](H)=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_2(HH)}{S_1(H)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{S_2(HT)}{S_1(H)}=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}_1\left[\frac{S_2}{S_1}\right](T)=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_2(TH)}{S_1(T)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{S_2(TT)}{S_1(T)}=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

发现$\mathbb{E}_1\left[\frac{S_2}{S_1}\right]$并不依赖第一次抛掷硬币的结果(事实上并不是随机变量),而且相等于

$$\mathbb{E}\frac{S_2}{S_1}=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2.4 鞅

在第一章二叉树定价模型中,我们选择风险中性概率 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$,使得在每个时刻 n,对任何抛掷硬币的结果序列 $\omega_1\cdots\omega_n$ 有式(2.3.3)。利用 2.3 节中引入的条件期望的记号,式(2.3.3)可以改写成式(2.3.5)。如果我们将式

(2.3.5)两边除以$(1+r)^n$，得：

$$\frac{S_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right] \tag{2.4.1}$$

这里，把$\frac{1}{(1+r)^{n+1}}$写在条件期望里面还是外面并不重要，因为它是常量[见定理2.3.2(i)]。在随机利率模型中，情况就会有所不同。我们将把这一因子写在条件期望里面，因为这样与随机利率模型中的写法一致。

方程(2.4.1)表明一个重要的事实：在风险中性测度下，对不支付红利的股票，**基于时刻 n 的信息对时刻 $n+1$ 的股票价格贴现值的最好估计就是时刻 n 的股票价格贴现值**。风险中性概率的选取正是用来强化这一事实。满足这一条件的过程被称为鞅。我们在真实概率 p 和 q 下给出鞅的正式定义，在风险中性概率 $\widetilde{p}$ 和 $\widetilde{q}$ 下，鞅的定义可以通过把式(2.4.2)中的$\mathbb{E}_n$ 换成 $\widetilde{\mathbb{E}}_n$ 得到。

定义 2.4.1 *考虑二叉树资产定价模型。设 $M_0,M_1,\cdots,M_N$ 为随机变量序列，每个 M_n 只依赖前 n 次抛掷硬币(M_0 为常量)。这样的随机变量序列称为***适应随机过程***。*

(i) *如果*

$$M_n=\mathbb{E}_n[M_{n+1}],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.2}$$

*则我们称这个过程为***鞅***。*

(ii) *如果*

$$M_n\leqslant\mathbb{E}_n[M_{n+1}],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

*则我们称这个过程为***下鞅***(尽管它可能有递增趋势)。*

(iii) *如果*

$$M_n\geqslant\mathbb{E}_n[M_{n+1}],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

*则我们称这个过程为***上鞅***(尽管它可能有递减趋势)。*

注 2.4.2 (2.4.2)中的鞅性质为“一步超前”条件。然而，它蕴含了关于任意多步的类似条件。事实上，如果 $M_0,M_1,\cdots,M_N$ 为鞅且 $n\leqslant N-2$，那么(2.4.2)中的鞅性质表明：

$$M_{n+1}=\mathbb{E}_{n+1}[M_{n+2}]$$

两边同时取基于时刻 n 信息的条件期望，并利用定理2.3.2中的累次条件期望性质(iii)，我们有：

$$\mathbb{E}_n[M_{n+1}]=\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_{n+1}[M_{n+2}]]=\mathbb{E}_n[M_{n+2}]$$

由鞅性质(2.4.2)，上式左边是 M_n，因此我们就得到了“两步超前”性质：

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_{n+2}]$$

继续这样的论证,我们可以得知:

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_m], \quad \forall\, 0 \leqslant n \leqslant m \leqslant N \tag{2.4.3}$$

上式可被称为“多步超前”形式的鞅性质。

注 2.4.3 鞅的期望为不依赖于时间的常量,即如果 $M_0, M_1, \cdots, M_N$ 为鞅,则:

$$M_0 = \mathbb{E}[M_n], \quad n = 0, 1, \cdots N \tag{2.4.4}$$

事实上,如果 $M_0, M_1 \cdots M_N$ 为鞅,我们可以在式(2.4.2)两边取期望,利用定理 2.3.2(iii)得到,对每个 n 有 $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}]$。这表明:

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_1] = \cdots = \mathbb{E}[M_{N-1}] = \mathbb{E}[M_N]$$

但 M_0 不是随机变量,所以 $M_0 = \mathbb{E}[M_0]$,式(2.4.4)成立。 □

为了得到一个鞅,式(2.4.2)必须对所有可能的硬币抛掷结果序列成立。如果上升概率 $\hat{p} = \frac{1}{3}$,下降概率 $\hat{q} = \frac{2}{3}$,那么图 2.3.1 中的股票价格过程是一个鞅。在图 2.3.1 上的树中的每个节点,股票价格恰为下一时刻两种可能股价的以 $\hat{p}$、$\hat{q}$ 为权重的加权平均,例如:

$$S_1(T) = 2 = \frac{1}{3} \cdot S_2(TH) + \frac{2}{3} \cdot S_2(TT)$$

类似的等式在树中所有其他节点也成立,因此我们在这些概率下得到一个鞅。

鞅没有递增或者递减的趋势,因为它下一时刻值的均值总是当前时刻的值。股票价格有递增的趋势,事实上其平均增长速度应该高于货币市场以补偿投资者的内在风险。在图 2.3.1 中,p 和 q 的更为现实的选择是 $p = \frac{2}{3}$ 和 $q = \frac{1}{3}$。这时,在树中每个节点,我们有:

$$\mathbb{E}_n[S_{n+1}] = \frac{3}{2} S_n$$

(即平均而言,下一时刻的股票价格比当前股价要高出 50%)。这一增长率高于我们在这个模型中使用的 25% 的利率。尤其当 $p = \frac{2}{3}$、$q = \frac{1}{3}$ 且 $r = \frac{1}{4}$ 时,贴现股票价格有增长的趋势。注意到当 $r = \frac{1}{4}$ 时,$\frac{1}{1+r} = \frac{4}{5}$,因此在时刻 n 的贴现股票价格为 $\left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$。计算可得:

$$\mathrm{E}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}S_{n+1}\right]=\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\mathrm{E}_n[S_{n+1}]=\left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot S_n\geqslant\left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$$

在真实概率 $p=\frac{2}{3}$ 和 $q=\frac{1}{3}$ 下，贴现股票价格过程是下鞅，这在实际市场中十分典型。

另一方面，我们选择风险中性概率使得贴现股票价格过程是一个鞅。图 2.3.1 中的贴现股票价格在概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$ 下是一个鞅，读者可以验证以下等式

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}S_{n+1}\right]=\left(\frac{4}{5}\right)^n S_n \tag{2.4.5}$$

对图中每个节点成立。下面的定理表明这个例子是有代表性的。

定理 2.4.4 *考虑一般的二叉树模型，其中 $0<d<1+r<u$，设风险中性概率如下给出：*

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

那么在风险中性测度下，贴现股票价格过程是一个鞅，即式(2.4.1)在每个时刻 n 对任意的抛掷硬币结果序列成立。

我们给出这个定理的两个证明：一个较为初等，不依赖于定理 2.3.2；另一个较深，要用到定理 2.3.2。第二个证明以后将被稍加修改用于连续时间模型。

注意到定理 2.4.4 中股票不支付红利。股票支付红利的情形将在习题 2.10 中详细说明。

【证明 1】 给定 n 和 $\omega_1\cdots\omega_n$，那么：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right](\omega_1\cdots\omega_n)\\
&=\frac{1}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\\
&=\frac{1}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{1+r}[\tilde{p}uS_n(\omega_1\cdots\omega_n)+\tilde{q}dS_n(\omega_1\cdots\omega_n)]\\
&=\frac{S_n(\omega_1\cdots\omega_n)}{(1+r)^n}\cdot\frac{\tilde{p}u+\tilde{q}d}{1+r}\\
&=\frac{S_n(\omega_1\cdots\omega_n)}{(1+r)^n}
\end{aligned}$$

【证明 2】 注意到 $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ 只依赖于第 $n+1$ 次抛掷硬币的情况，由定理 2.3.2 的性质，我们计算：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{S_n}{(1+r)^{n+1}}\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n}\right]\\&=\frac{S_n}{(1+r)^n}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n}\right]\qquad\text{(提取已知量)}\\&=\frac{S_n}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}\frac{S_{n+1}}{S_n}\qquad\text{(独立性)}\\&=\frac{S_n}{(1+r)^n}\cdot\frac{\tilde{p}u+\tilde{q}d}{1+r}\\&=\frac{S_n}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

□

在 N 次抛掷硬币的二叉树模型中,设想某个投资者在每个时刻 n 持有 Δ_n 份股票,并且持有这个头寸直到时刻 $n+1$,再调整为新的 Δ_{n+1}份的头寸。如果有必要的话,可以在货币市场通过投资和借贷来融资,构建投资组合。"组合变量"Δ_n 依赖于前 n 次抛掷硬币,Δ_{n+1}则依赖于前 $n+1$ 次抛掷硬币。于是,由定义 2.4.1,**组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$ 是适应的**。如果投资者以初始财富 X_0 开始,X_n 表示时刻 n 的财富,那么财富的变化过程由第一章中的**财富方程**(1.2.14)刻划,我们重写如下:

$$X_{n+1}=\Delta_nS_{n+1}+(1+r)(X_n-\Delta_nS_n),\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.6}$$

注意每个 X_n 只依赖于前 n 次抛掷硬币的结果(即**财富过程**是适应的)。

我们可能想知道投资者财富的平均增长率。如果考虑真实概率下的平均,那么答案将取决于投资者的资产组合过程。尤其是,由于股票的平均增长率高于货币市场,通过持有股票多头,投资者可以获得比利率更高的增长率。事实上,通过向货币市场借贷,投资者有可能获得任意高的平均增长率。当然,像这种杠杆般的头寸也是极冒风险的。

另一方面,如果我们想知道投资者财富在风险中性概率下的平均增长率,这就与投资者持有的组合过程无关。在风险中性概率下,股票的平均增长率等于利率。不论投资者财富在股票和货币市场之间如何分配,都将获得与利率相同的平均增长率。尽管在风险中性测度下,某些组合过程风险要更大些,它们的平均增长率还是一样的。我们把这个结果作为定理给出,其证明可以推广到连续时间的情形。

定理 2.4.5 *考虑 N 时段的二叉树模型。设 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$ 为适应组合过程,X_0 为实数,$X_0,X_1,\cdots,X_N$ 为由式(2.4.6)递归产生的财富过程。那么,贴现财富过程 $\frac{X_n}{(1+r)^n}$,$n=0,1,\cdots,N$ 为风险中性测度下的鞅,即:*

$$\frac{X_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.7}$$

【证明】 我们通过计算可得:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]\\&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{\Delta_n S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]+\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\right]\quad(\text{线性性})\\&=\Delta_n\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right]+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\quad(\text{提取已知量})\\&=\Delta_n\frac{S_n}{(1+r)^n}+\frac{X_n-\Delta_n S_n}{(1+r)^n}\quad(\text{定理 2.4.4})\\&=\frac{X_n}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

□

推论 2.4.6 在定理 2.4.5 的条件下，我们有：

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{X_n}{(1+r)^n}=X_0,\quad n=0,1,\cdots,N\tag{2.4.8}$$

【证明】 该推论基于鞅的期望值不会随着时间改变，因而恒等于时刻 0 的鞅值这一事实（见注 2.4.3）。将此应用于 $\widetilde{p}$ -鞅 $\frac{X_n}{(1+r)^n}$，$n=0,1,\cdots,N$，我们就得到了式(2.4.8)。 □

定理 2.4.5 及其推论有两点重要结果：首先，在二叉树模型中不存在套利。如果有套利，我们可以从 $X_0=0$ 开始建立资产组合过程，其相应财富过程 $X_0,X_1,\cdots,X_N$ 对所有抛掷硬币序列 ω 满足 $X_N(\omega)\geqslant 0$，并且对至少一个抛掷硬币序列 $\bar{\omega}$ 有 $X_N(\bar{\omega})>0$。于是就有 $\widetilde{\mathbb{E}}X_0=0$ 和 $\widetilde{\mathbb{E}}\frac{X_N}{(1+r)^N}>0$，这与推论 2.4.6 矛盾。

一般地，如果一个模型中存在一个风险中性测度（就哪条价格路径有零概率而言，该测度与真实概率测度一致；同时在该测度下，所有基础资产的贴现价格过程为鞅），那么这个模型中就不存在套利。这一结论有时被称为**资产定价第一基本定理**。这一结论的证明本质上已包含在前段中：在风险中性测度下，贴现财富过程期望值为常数，因此它不能以零值开始并且之后以正概率严格为正，除非它也以正概率严格为负。资产定价第一基本定理对于后面在期限结构模型中排除套利是有用的，并由此可以导致关于远期利率的赫斯—加罗—墨顿(Heath-Jarrow-Morton)无套利条件。

定理 2.4.5 的另一个结果是下面的**风险中性定价公式**。设 V_N 是一个随机变量（衍生证券在时刻 N 的支付），它依赖于前 N 次抛掷硬币的结果。由定理 1.2.2 可知存在初始财富 X_0 和复制组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$，使得不论抛掷硬币的最终结果如何，相应的财富过程 $X_0,X_1,\cdots,X_N$ 都满足 $X_N=V_N$。因为 $\frac{X_n}{(1+r)^n}$，$n=0,1,\cdots,N$ 是一个鞅，注 2.4.2 中关于“多步超前”的鞅性质表明：

$$\frac{X_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right]=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] \tag{2.4.9}$$

根据定义 1.2.3,我们定义衍生证券在时刻 n 的价格 $V_n=X_n$。因此,式(2.4.9)可以重写成:

$$\frac{V_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right] \tag{2.4.10}$$

或者,可等价地写成:

$$V_n=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right] \tag{2.4.11}$$

我们将此总结为一个定理。

定理 2.4.7 (风险中性定价公式) *考虑 N 时段二叉树资产定价模型,其中 $0<d<1+r<u$,并且存在风险中性概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$。设 V_N 是一个随机变量(衍生证券在时刻 N 的支付),它依赖于抛掷硬币的结果。那么,对于 0 到 N 之间的 n,衍生证券在时刻 n 的价格由*风险中性定价公式*(2.4.11)给出。进一步,在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 之下,衍生证券的贴现价格是一个鞅,即:*

$$\frac{V_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.12}$$

由式(2.4.11)定义的随机变量 V_n 与定理 1.2.2 中定义的随机变量 V_n 是一致的。

习题 2.8 概述了定理 2.4.7 证明的其余部分。值得注意的是,我们选择风险中性测度正是为了使贴现股票价格过程成为一个鞅。根据定理 2.4.7,这又导致在风险中性测度下,衍生证券的贴现价格过程也是一个鞅。

到目前为止,我们只讨论了在某个单独日期支付的衍生证券。而许多衍生证券,如附息债券和利率互换等,会有一系列的支付。对于这样的证券,我们有以下的定价和对冲公式。

定理 2.4.8 (现金流定价) *考虑 N 时段二叉树资产定价模型,其中$0<d<1+r<u$,并且存在风险中性概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$。设 $C_0,C_1,\cdots,C_N$ 为随机变量序列,其中 C_n 只依赖于 $\omega_1\cdots\omega_n$。在时刻 $n,\cdots,N$,相应的支付分别为$C_n,\cdots,C_N$ 的衍生证券在时刻 n 的价格为:*

$$V_n=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\sum_{k=n}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N \tag{2.4.13}$$

价格过程 $V_n,n=0,1,\cdots,N$ 满足:

$$\begin{aligned}C_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\cdots\omega_n)-\frac{1}{1+r}[&\widetilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)\\&+\widetilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

定义：

$$\Delta_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)-V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)-S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)} \tag{2.4.15}$$

其中 n 在 0 到 $N-1$ 之间变化。如果我们令 $X_0=V_0$，并按时间前向递归定义资产组合价值过程 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 如下：

$$X_{n+1}=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-C_n-\Delta_n S_n) \tag{2.4.16}$$

则对所有 n 和 $\omega_1\cdots\omega_n$，我们有：

$$X_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\cdots\omega_n) \tag{2.4.17}$$

在定理 2.4.8 中，V_n 为支付序列 $C_n,\cdots,C_N$ 在时刻 n 的所谓**净现值**。它也正是与在时刻 $k=n,k=n+1,\cdots,k=N$ 的支付 C_k 相应的条件期望 $\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}\right]$之和。注意到时刻 n 的支付也在其中。支付 C_n 只依赖于前 n 次抛掷，因此可以拿到条件期望$\widetilde{\mathbb{E}}_n$ 的外面，即：

$$V_n=C_n+\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\sum_{k=n+1}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.4.18}$$

对于 $n=N$ 的情形，式(2.4.13)简化成：

$$V_N=C_N \tag{2.4.19}$$

考虑持有现金流 $C_0,C_1,\cdots,C_N$ 的空头的投资者（即投资者在每个时刻 n 必须支付款额 C_n；我们允许该支付可正可负，如果支付额为负值，空头投资者事实上是收到现金）。假设该空头投资者在股票和货币市场投资，那么到时刻 n，在支付 C_n 发生之前的资产组合价值为 X_n。然后，投资者支付 C_n 并建立股票头寸 Δ_n，这将使得在支付 C_{n+1} 之前，时刻 $n+1$ 的资产组合价值为式(2.4.16)所表示的 X_{n+1}。如果投资者以 $X_0=V_0$ 开始，并根据式(2.4.15)选择股票头寸 Δ_n，那么式(2.4.17)成立，尤其是 $X_N=V_N=C_N$[见式(2.4.17)和式(2.4.19)]。最终到时刻 N 支付 C_N 后余额为零。这样，该投资者就完全对冲了现金流的空头。这也正是把 V_n 称为未来现金流(包括时刻 n 的付款 C_n)在时刻 n 的价格的理由。

【定理 2.4.8 的证明】 我们通过对 n 作归纳来证明式(2.4.17)。归纳假设是对于 $n\in\{0,1,\cdots,N-1\}$和所有 $\omega_1\cdots\omega_n$，有 $X_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\cdots\omega_n)$。我们需要证明：

$$X_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H) \tag{2.4.20}$$

$$X_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T) \tag{2.4.21}$$

我们只证明式(2.4.20)，式(2.4.21)同理可证。

由式(2.4.18)和累次条件期望[见定理 2.3.2(iii)],我们有:

$$V_n = C_n + \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\sum_{k=n+1}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k-(n+1)}}\right]\right] = C_n + \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}V_{n+1}\right]$$

以上最后一步,我们利用了把 n 换成 $n+1$ 的式(2.4.13)。换言之,对所有 $\omega_1\cdots\omega_n$,我们有:

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)-C_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]$$

由于 $\omega_1\cdots\omega_n$ 在后面的证明中被固定,不妨将其略去。例如,上面的方程可以简写成:

$$V_n-C_n=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)]$$

计算可得:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(H)&=\Delta_nS_{n+1}(H)+(1+r)(X_n-C_n-\Delta_nS_n)\\
&=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H)-S_{n+1}(T)}(S_{n+1}(H)-(1+r)S_n)+(1+r)(V_n-C_n)\\
&=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}(uS_n-(1+r)S_n)+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T))\frac{u-1-r}{u-d}+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T))\tilde{q}+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(\tilde{p}+\tilde{q})V_{n+1}(H)=V_{n+1}(H)
\end{aligned}$$

这就是式(2.4.20)。 □

2.5 马尔可夫过程

在 1.3 节中我们发现:如果仔细考虑从一个时段到另一个时段时,真正需要记住的是哪些信息,那么定理 1.2.2 中衍生证券定价算法的计算要求经常可以大大简化。在例 1.3.1 中,股票价格是相关的,但是使它到达当前价格的路径是无关的。在例 1.3.2 中,股票价格和截至当前时刻股票价格的最大值是相关的。在本节中,我们把确定哪些相关、哪些无关的步骤予以规范化。

定义 2.5.1 *考虑二叉树资产定价模型。设 $X_0,X_1,\cdots,X_N$ 为适应过程。如果对每个 0 到 $N-1$ 之间的 n 以及每个函数 $f(x)$,存在另一个函数 $g(x)$(依赖于 n 和 f),使得:*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]=g(X_n) \tag{2.5.1}$$

则称 $X_0,X_1,\cdots,X_N$ 是一个**马尔可夫(Markov)过程**。

由定义，$\mathbb{E}_n[f(M_{n+1})]$是随机变量，它依赖于前 n 次抛掷硬币的结果。马尔可夫性质表明，对抛掷硬币结果的依赖是通过 X_n 体现的（即为了估计 $\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]$所需要的关于抛掷硬币的信息归结于 X_n）。比起找到一个确定函数 g 的公式，现在我们更关心的是说明它的存在性。函数 g 的存在告诉我们：如果衍生证券支付的随机性只是依赖于 X_N，则一定存在一个衍生证券的定价算法，其中我们不需要储存有关路径的信息（参见定理 2.5.8）。在本节的例子中，我们将会给出一种寻找函数 g 的方法。

例 2.5.2（股票价格过程） 在二叉树模型中，时刻 $n+1$ 的股价通过以下公式由时刻 n 的股价给出：

$$S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1})=\begin{cases}uS_n(\omega_1\cdots\omega_n), & \text{如果 } \omega_{n+1}=H\\ dS_n(\omega_1\cdots\omega_n), & \text{如果 } \omega_{n+1}=T\end{cases}$$

于是：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})](\omega_1\cdots\omega_n)=pf(uS_n(\omega_1\cdots\omega_n))+qf(dS_n(\omega_1\cdots\omega_n))$$

上述等式右端只是通过 $S_n(\omega_1\cdots\omega_n)$依赖于抛掷硬币的过程 $\omega_1\cdots\omega_n$。略去 $\omega_1\cdots\omega_n$，我们可将这个等式重写成：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})]=g(S_n)$$

其中，哑变量 x 的函数 $g(x)$定义为 $g(x)=pf(ux)+qf(dx)$。这表明股票价格过程是一个马尔可夫过程。

的确，不论是在真实概率还是在风险中性概率测度下，股票价格过程都是马尔可夫过程。设衍生证券在时刻 N 的支付 V_N 为股票价格 S_N 的函数 v_N[即 $V_N=v_N(S_N)$]。为求衍生证券在时刻 n 的价格 V_n，我们使用风险中性定价公式(2.4.12)，它可以简化为：

$$V_n=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[V_{n+1}],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

由于 $V_N=v_N(S_N)$且股票价格为马尔可夫过程，故存在函数 v_{N-1}，使得：

$$V_{N-1}=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{N-1}[v_N(S_N)]=v_{N-1}(S_{N-1})$$

同理，存在函数 v_{N-2}，使得：

$$V_{N-2}=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{N-2}[v_{N-1}(S_{N-1})]=v_{N-2}(S_{N-2})$$

通常存在函数 v_n，使得 $V_n=v_n(S_n)$成立。而且，我们可以按照如下递归算法求出这些函数：

$$v_n(s)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us)+\tilde{q}v_{n+1}(ds)],\quad n=N-1,N-2,\cdots,0 \tag{2.5.2}$$

这个算法在关于任何衍生证券的二叉树模型中均有效，只要该衍生证券在时刻 N 的支付是时刻 N 股票价格的函数就行。尤其对于看涨期权和看跌期权，我们有相同的算法。唯一的区别在于 $v_N(s)$ 的表达式不同。对于看涨期权，我们有 $v_N(s)=(s-K)^+$；对于看跌期权，我们有 $v_N(s)=(K-s)^+$。

鞅的性质是式(2.5.1) 中 $f(x)=x$ 且 $g(x)=x$ 的特殊情形。为使一个过程为马尔可夫过程，对每个函数 f，必须存在相应的函数 g，使得式(2.5.1)成立。并非每个鞅都是马尔可夫过程。另一方面，即使当 $f(x)=x$ 时，马尔可夫性质只要求存在某个函数 g，有 $\mathbb{E}_n[M_{n+1}]=g(M_n)$。并不要求函数 $g(x)=x$。因此，并非每个马尔可夫过程都是鞅。事实上，例 2.5.2 表明股票价格在真实概率和风险中性概率测度下都是马尔可夫过程；但是，在这两种测度下，都显然不是鞅。然而，如果 $pu+qd=1$，那么在真实概率测度下，股票价格既是一个鞅，又是一个马尔可夫过程。

验证一个过程是马尔可夫过程，以下引理经常是关键一步。

引理 2.5.3 (独立性) *在 N 阶段二叉树资产定价模型中，设 n 是 0 到 N 之间的整数。假设随机变量 $X^1,\cdots,X^K$ 只依赖第 1 到 n 次抛掷硬币的过程，随机变量 $Y^1,\cdots,Y^L$ 只依赖第 $n+1$ 到 N 次抛掷硬币的过程。(这里 $1,\cdots,K$ 和 $1,\cdots,L$ 分别是 X 和 Y 的上标，而不是指数。)设 $f(x^1,\cdots,x^K,y^1,\cdots,y^L)$ 是哑变量 $x^1,\cdots,x^K$ 和 $y^1,\cdots,y^L$ 的函数，并且定义：*

$$g(x^1,\cdots,x^K)=\mathbb{E}\,f(x^1,\cdots,x^K,Y^1,\cdots,Y^L) \tag{2.5.3}$$

则有：

$$\mathbb{E}_n[f(X^1,\cdots,X^K,Y^1,\cdots,Y^L)]=g(X^1,\cdots,X^K) \tag{2.5.4}$$

在下面的讨论和引理的证明中，我们假设 $K=L=1$。于是式(2.5.3)有如下形式：

$$g(x)=\mathbb{E}\,f(x,Y) \tag{2.5.3$'$}$$

同时式(2.5.4)的形式为：

$$\mathbb{E}_n[f(X,Y)]=g(X) \tag{2.5.4$'$}$$

其中假设随机变量 X 只依赖前 n 次抛掷硬币，随机变量 Y 只依赖第 $n+1$ 到 N 次抛掷硬币。

这个引理推广了定理 2.3.2(ii)“提取已知量”的性质。因为 X 在时刻 n“已知”，我们希望在计算条件期望 $\mathbb{E}_n[f(X,Y)]$ 时将它“提取出来”。然而，X 在 f 的自变量中，不能如定理 2.3.2(ii)那样简单地作为因子提取。于是，我们用任意固定的哑变量 x 代替随机变量 X 来使其保持常量，然后计算随

机变量 $f(x,Y)$ 的条件期望，它的随机性只是由于 Y 依赖第 $n+1$ 到 N 次的抛掷硬币。由定理 2.3.2(iv)，这个条件期望与式(2.5.3)′中的无条件期望相同。最后，我们注意到 $\mathbb{E}_n f(X,Y)$ 必须依赖于随机变量 X 的值，所以在计算得到 g 之后，再将哑变量 x 用随机变量 X 代回。

在例 2.5.2 的情形，我们可以取 $X=S_n$，它只依赖前 n 次抛掷硬币，取 $Y=\frac{S_{n+1}}{S_n}$，它只依赖第 $n+1$ 次抛掷硬币：如果第 $n+1$ 次抛掷出现正面，则取值 u；如果出现背面，则取值 d。我们需要计算：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})]=\mathbb{E}_n[f(XY)]$$

用哑变量 x 取代 X，算得：

$$g(x)=\mathbb{E}\,f(xY)=pf(ux)+qf(dx)$$

因此：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1})]=g(S_n)$$

【引理 2.5.3 的证明】 设 $\omega_1\cdots\omega_n$ 任意固定。通过条件期望的定义(2.3.6)，有：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_n[f(X,Y)](\omega_1\cdots\omega_n)\\&=\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} f(X(\omega_1\cdots\omega_n),Y(\omega_{n+1}\cdots\omega_N))p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}\end{aligned}$$

然而：

$$g(x)=\mathbb{E}[f(x,Y)]=\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} f(x,Y(\omega_{n+1}\cdots\omega_N))p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}$$

显然有：

$$\mathbb{E}_n[f(X,Y)](\omega_1\cdots\omega_n)=g(X(\omega_1\cdots\omega_n))$$

□

例 2.5.4(非马尔可夫过程) 在图 2.3.1 的二叉树模型中，考虑股价的迄今最大值过程 $M_n=\max_{0\leqslant k\leqslant n}S_k$(如图 2.5.1 所示)。其中 $p=\frac{2}{3}$ 且 $q=\frac{1}{3}$，我们有：

$$\mathbb{E}_2[M_3](TH)=\frac{2}{3}M_3[THH]+\frac{1}{3}M_3[THT]=\frac{16}{3}+\frac{4}{3}=6\,\frac{2}{3}$$

但是：

$$\mathbb{E}_2[M_3](TT)=\frac{2}{3}M_3[TTH]+\frac{1}{3}M_3[TTT]=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$$

由于 $M_2(TH)=M_2(TT)=4$，不可能存在函数 g 使得 $\mathbb{E}_2[M_3](TH)=$

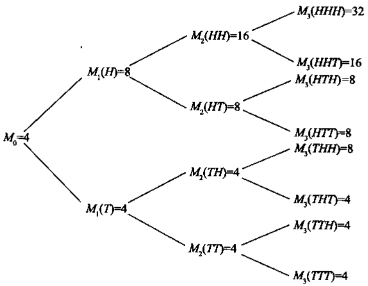

图 2.5.1 股价的迄今最大值过程

$g(M_2(TH))$且$\mathbb{E}_2[M_3](TT)=g(M_2(TT))$。这两个等式右端相等,但左端不等。因此,股价的迄今最大值过程不是马尔可夫过程。在该过程中,我们只记录了时刻 2 的迄今最高股价为 4,而没有记录时刻 2 的股票价格,这就导致某些信息的缺失,这些信息与该过程在时刻 2 之后的演化相关。 □

当我们遇到一个非马尔可夫过程时,我们可以通过增加一些所谓的**状态变量**来重新获得马尔可夫性质。使用“状态变量”这个称呼是因为:如果能够成功地通过增加这些变量重新获得马尔可夫性质,我们就找到了一种途径,利用这些变量来描述市场的“状态”。这种重新获得马尔可夫性质的方法要求我们将定义 2.5.1 推广到多维过程。

定义 2.5.5 *考虑二叉树资产定价模型。设$\{(X_n^1,X_n^2,\cdots,X_n^K);n=0,1,\cdots,N\}$为一个 K 维适应过程,即 K 个一维适应过程。如果对每个 0 到 $N-1$ 之间的 n 以及每个函数 $f(x^1,\cdots,x^K)$,存在另一个函数 $g(x^1,\cdots,x^K)$(依赖于 n 和 f),使得:*

$$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1}^1,\cdots,X_{n+1}^K)]=g(X_n^1,\cdots,X_n^K) \tag{2.5.5}$$

则称$\{(X_n^1,X_n^2,\cdots,X_n^K);n=0,1,\cdots,N\}$是一个 ***K* 维马尔可夫过程**。

例 2.5.6 在一个 N 时段二叉树模型中,考虑二维适应过程$\{(S_n,M_n);n=0,1,\cdots,N\}$,其中 S_n 为时刻 n 的股票价格,$M_n=\max_{0\le k\le n}S_k$为截至时刻 n 的股价最大值。我们将证明这个二维过程是马尔可夫过程。为此,我们定义 $Y=\frac{S_{n+1}}{S_n}$,它只依赖于第 $n+1$ 次抛掷硬币的结果。于是:

$$S_{n+1}=S_nY$$

并且：

$$M_{n+1}=M_n\vee S_{n+1}=M_n\vee(S_nY)$$

其中，$x\vee y=\max\{x,y\}$。我们希望计算：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1},M_{n+1})]=\mathbb{E}_n[f(S_nY,M_n\vee(S_nY))]$$

根据引理 2.5.3，我们用哑变量 s 代替 S_n，用哑变量 m 代替 M_n，并且计算：

$$g(s,m)=\mathbb{E}\,f(sY,m\vee(sY))=pf(us,m\vee(us))+qf(ds,m\vee(ds))$$

于是：

$$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1},M_{n+1})]=g(S_n,M_n)$$

由于我们已得到$\mathbb{E}_n[f(S_{n+1},M_{n+1})]$的公式，其中唯一的随机性通过随机变量 S_n 和M_n 体现。我们断言这个二维过程是马尔可夫过程。在这个例子中，我们使用的是真实概率测度。可以类似地证明，在风险中性概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$下，$\{(S_n,M_n);n=0,1,\cdots,N\}$是二维马尔可夫过程。 □

注 2.5.7 上述马尔可夫性质，无论是定义 2.5.1 中的一维形式还是定义 2.5.5 中的多维形式，是“一步超前”的性质，给出了用 X_n 表示 X_{n+1}的条件期望的一个公式。然而，它蕴含了对于任意多步都有类似的条件。事实上，如果 $X_0,X_1,\cdots,X_N$ 是一个马尔可夫过程且 $n\leqslant N-2$，那么“一步超前”的马尔可夫性质表明对每个函数 h 存在函数 f，使得：

$$\mathbb{E}_{n+1}[h(X_{n+2})]=f(X_{n+1})$$

基于时刻 n 的信息，在两边取条件期望并且使用定理 2.3.3(iii)中的累次条件期望性质，我们得到：

$$\mathbb{E}_n[h(X_{n+2})]=\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_{n+1}[h(X_{n+2})]]=\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})]$$

由“一步超前”的马尔可夫性质，存在函数 g，使得上式右端等于 $g(X_n)$，这样我们就得到“两步超前”的马尔可夫性质：

$$\mathbb{E}_n[h(X_{n+2})]=g(X_n)$$

继续这样的论证，我们得到：只要 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$ 且 h 为任意函数，则必有另外一个函数 g 使得以下“多步超前”的马尔可夫性质成立：

$$\mathbb{E}_n[h(X_m)]=g(X_n) \tag{2.5.6}$$

同理，如果$\{(X_n^1,X_n^2,\cdots,X_n^K);n=0,1,\cdots,N\}$是一个 K 维马尔可夫过程，那么只要 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$ 且 $h(x^1,\cdots,x^K)$为任意函数，则存在另一个函数 $g(x^1,\cdots,x^K)$，使得：

$$\mathbb{E}_n[h(X_m^1,\cdots,X_m^K)]=g(X_n^1,\cdots,X_n^K) \tag{2.5.7}$$

□

在二叉树定价模型中，假设在风险中性概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$下有一个马尔可夫过程$X_0,X_1,\cdots,X_N$，并且衍生证券在时刻N的支付V_N是X_N的函数v_N[即$V_N=v_N(X_N)$]。V_N和v_N之间的差别在于前者的自变量是抛掷硬币的序列$\omega_1\cdots\omega_N$；后者的自变量是实数，有时用哑变量x来表示。尤其是，$v_N(x)$没有随机性。然而，如果我们用随机变量X_N[实际上是$X_N(\omega_1\cdots\omega_N)$]取代哑变量$x$，那么我们就有了随机变量。事实上，我们有：

$$V_N(\omega_1\cdots\omega_N)=v_N(X_N(\omega_1\cdots\omega_N)),\quad \forall\omega_1\cdots\omega_N$$

风险中性定价公式(2.4.11)表明，衍生证券在较早时刻n的价格为：

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right](\omega_1\cdots\omega_n),\quad \forall\omega_1\cdots\omega_n$$

另一方面，“多步超前”的马尔可夫性质表明存在一个函数v_n，使得：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right](\omega_1\cdots\omega_n)=v_n(X_n(\omega_1\cdots\omega_n)),\quad \forall\omega_1\cdots\omega_n$$

因此，衍生证券在时刻n的价格为X_n的函数，即：

$$V_n=v_n(X_n)$$

我们可以计算函数v_n来取代随机变量V_n的计算，这在计算上更容易实现。尤其是，如果马尔可夫过程$X_0,X_1,\cdots,X_N$就是股票价格本身，我们就有算法(2.5.2)。

同样的思想可用于风险中性测度$\widetilde{\mathbb{P}}$下的多维马尔可夫过程。例1.3.2正是这种情形，其中衍生证券的支付为$V_3=M_3-S_3$，即截至时刻3的股价最大值与时刻3的股票价格之差。我们可以用二维马尔可夫过程$\{(S_n,M_n);n=0,1,2,3\}$来处理这个问题，这点实际上也隐含在那个例子中。

这里，我们将例1.3.2推广到N时段二叉树模型，其中的衍生证券在时刻N的支付为股票价格和迄今股价最大值的函数$v_N(S_N,M_N)$[S_N和M_N未必同时出现在函数v_N中，而我们只是想说这些是V_N所依赖的仅有的随机变量。例如，可以有$V_N=(M_N-K)^+$，即使股票价格在这个特别的V_N中并不出现，我们还是需要它才能施行下面的定价算法(2.5.9)，因为股价的迄今最大值过程本身不是马尔可夫过程]。根据“多步超前”的马尔可夫性质，对0到N之间的任意n，必定存在一个(非随机)函数$v_n(s,m)$，使得期权在时刻n的价格为：

$$V_n=v_n(S_n,M_n)=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{v_N(S_N,M_N)}{(1+r)^{N-n}}\right]$$

我们可以利用独立性引理2.5.3得到计算函数v_n的一个算法。我们总是有

风险中性定价公式(参见 2.4.12)：

$$V_n=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[V_{n+1}]$$

将衍生证券在时刻 n 的价格与时刻 $n+1$ 的价格相联系。假设对于 0 到 $N-1$之间的某个 n,我们已经计算出函数 v_{n+1}使得 $V_{n+1}=v_{n+1}(S_{n+1},M_{n+1})$,则：

$$\begin{aligned}V_n &=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[V_{n+1}]\\ &=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n[v_{n+1}(S_{n+1},M_{n+1})]\\ &=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[v_{n+1}\left(S_n\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n},M_n\vee\left(S_n\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

为计算最后的表达式,因为 S_n 和 M_n 只依赖于前 n 次抛掷硬币,我们用哑变量 s 和 m 替换 S_n 和 M_n;因为$\frac{S_{n+1}}{S_n}$不依赖于前 n 次抛掷硬币,我们关于$\frac{S_{n+1}}{S_n}$取无条件期望,即定义：

$$\begin{aligned}v_n(s,m)&=\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}\left[v_{n+1}\left(s\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n},m\vee\left(s\cdot\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)\right)\right]\\ &=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us,m\vee(us))+\tilde{q}v_{n+1}(ds,m\vee(ds))]\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

则由独立性引理 2.5.3 可得 $V_n=v_n(S_n,M_n)$。

我们只需要知道 $v_n(s,m)$当 $m\geqslant s$ 时的值,因为 $M_n\geqslant S_n$。我们可在式(2.5.8)中施加这一条件。而当 $m\geqslant s$ 时,如果 $d\leqslant 1$(通常如此),我们就有 $m\vee(ds)=m$。于是,式(2.5.8) 可以重写成

$$\begin{aligned}v_n(s,m)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us,m\vee(us))+\tilde{q}v_{n+1}(ds,m)],\\ m\geqslant s>0,\quad n=N-1,N-2,\cdots,0\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

该算法对任何在时刻 N 的支付只依赖于随机变量 S_N 和 M_N 的衍生证券均有效。

在例 1.3.2 中,我们先有 $V_3=v_3(s,m)$,其中 $v_3(s,m)=m-s$。我们用式(2.5.9)来计算 v_2,然后再用它来计算 v_1,最后计算 v_0。这些步骤的计算过程详见例 1.3.2。

在连续时间情形下,我们将发现与递归方程(2.5.9)相应的是偏微分方程。从连续时间风险中性定价公式过渡到这些偏微分方程的过程是**费曼—卡茨(Feynman-Kac)定理**。

上述讨论归结为以下定理。

定理 2.5.8 设 $X_0, X_1, \cdots, X_N$ 为二叉树模型中的风险中性概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的马尔可夫过程。设 $v_N(x)$ 为一个哑变量 x 的函数，考虑一个在时刻 N 的支付为 $v_N(X_N)$ 的衍生证券。那么，对于每个 0 到 N 之间的 n，衍生证券的价格 V_n 为 X_n 的某个函数 v_n，即：

$$V_n = v_n(X_n), \quad n = 0, 1, \cdots, N \tag{2.5.10}$$

存在一个计算 v_n 的递归算法，确切的公式依赖于基本的马尔可夫过程 X_0, $X_1, \cdots, X_N$。对于多维马尔可夫过程，类似结果也成立。

2.6 本章小结

本章以结果为 ω 的随机试验开始给出有关概率的阐述。所有可能结果的集合称为**样本空间** Ω，在这个空间中，我们有概率测度 $\mathbb{P}$。当 Ω 为有限的，我们通过对每个 $\omega \in \Omega$ 给定一个概率 $\mathbb{P}(\omega)$ 来描述 $\mathbb{P}$。随机变量是一个从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的函数，随机变量 X 的期望为 $\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$。若 Ω 上还有一个概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$，我们有另一个计算期望的方法，即 $\widetilde{\mathbb{E}}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$，即使在两种概率测度下的期望不同，随机变量 X 仍是一样的。关键一点就是随机变量不能被当作与其分布等同。当我们改变概率测度时，分布(从而期望)也相应改变，但是随机变量没有发生变化。

在二叉树模型中，我们有抛掷硬币序列 $\omega_1 \cdots \omega_n$，基于这些信息，可以计算依赖于抛掷硬币的结果 $\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1} \cdots \omega_N$ 的随机变量 X 的条件期望。这可以通过关于“剩余”的抛掷硬币的所有可能结果 $\omega_{n+1} \cdots \omega_N$ 求平均得到。如果我们计算风险中性概率测度下的条件期望，则有：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}_n[X](\omega_1 \cdots \omega_n) \\
&= \sum_{\omega_{n+1} \cdots \omega_N} \widetilde{p}^{\# H(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} \widetilde{q}^{\# T(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} X(\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1} \cdots \omega_N)
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

这一条件期望是一个随机变量，因为它依赖于前 n 次抛掷硬币过程 $\omega_1 \cdots \omega_n$。条件期望有定理 2.3.2 中描述的五个基本性质。

在多时段二叉树模型中，风险中性概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅是一系列随机变量 $M_0, M_1, \cdots, M_N$，其中 M_n 只依赖于前 n 次硬币抛掷，并且不论 n 和 $\omega_1 \cdots \omega_n$ 如何，都有：

$$M_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \widetilde{\mathbb{E}}_n[M_{n+1}](\omega_1 \cdots \omega_n)$$

鞅既没有递增趋势也没有递减趋势。基于时刻 n 我们所知道的信息，鞅在

时刻 $n+1$ 的期望值为其在时刻 n 的值。

在风险中性概率测度下，股票的贴现价格为一个鞅；投资于股票和货币市场账户的任何资产组合的贴现价格都是鞅。尤其是，如果 X_n 是资产组合在时刻 n 的价值，则：

$$\frac{X_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right],\quad 0\leqslant n\leqslant N$$

如果我们希望 X_N 与衍生证券在终止时刻 N 的价值 V_N 一致，那么对所有时刻 $n=0,1,\cdots,N$ 必须有：

$$\frac{X_n}{(1+r)^n}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right]=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]\tag{2.4.9}$$

如果一个资产组合做到了这一点，我们定义衍生证券在时刻 n 的值 V_n 为 X_n，这样就得到了风险中性定价公式：

$$V_n=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right]\tag{2.4.11}$$

一个**马尔可夫过程**是具有以下性质的随机变量序列 $X_0,X_1,\cdots,X_N$：假设 n 为 0 到 $N-1$ 之间的某个时刻，我们已经观察到前 n 次抛掷硬币的结果 $\omega_1\cdots\omega_n$，希望对一个关于 X_{n+1} 的函数，或者更一般地，一个关于 X_{n+k} 的函数（其中 k 在 1 到 $N-n$ 之间）做出估计。我们既知道具体的硬币抛掷结果 $\omega_1\cdots\omega_n$，也知道相应的值 $X_n(\omega_1\cdots\omega_n)$，并可以基于这些信息得到想要的估计。对于一个马尔可夫过程，除了已经包含在值 $X_n(\omega_1\cdots\omega_n)$ 中的信息外，具体的硬币抛掷结果 $\omega_1\cdots\omega_n$（所谓“路径”）对于我们做出估计并不能提供更多的信息。

考虑一个在风险中性测度下为马尔可夫过程的原生资产价格过程 X_0，$X_1,\cdots,X_N$，以及一个衍生证券，它在时刻 N 的支付为时刻 N 原生资产价格的函数，即 $V_N=v_N(X_N)$。衍生证券在终止时刻之前的所有时刻 n 的价格是相应时刻原生资产价格的函数，即有：

$$V_n=v_n(X_n),\quad n=0,1,\cdots,N\tag{2.5.10}$$

这里，V_n 是一个依赖于抛掷硬币的随机变量（也有可能是路径依赖的）。另一方面，$v_n(x)$ 为一个实数 x 的函数。当我们用随机变量 X_n 来替换 x 后，$v_n(X_n)$ 也变成随机的，但肯定不是路径依赖的。因此，方程(2.5.10)保证了该衍生证券的价格过程不是路径依赖的。

2.7 评 注

通过样本空间来阐述的概率理论可以追溯到柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov)[29],他发展的框架可以推广到无限概率空间上。我们在第二卷第一章和第二章将讨论这个主题。杜布(Doob)[13]发现了鞅,他将这一概念以及“鞅”这个起名归因于威利(Ville)[43]所讨论的赌徒策略。

风险中性定价公式最早由哈里森(Harrison)和克雷普斯(Kreps)[17]以及哈里森和普利斯卡[18] 给出。

2.8 习 题

习题 2.1 利用定义 2.1.1 证明下面结论。

(i) 如果 A 为一个事件,A^c 表示它的补集,那么$\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$。

(ii) 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 为有限事件集,那么

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\leqslant \sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(A_n);\tag{2.8.1}$$

如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 互不相交,那么式(2.8.1)中等号成立。

习题 2.2 考虑图 2.3.1 中的股票价格过程 S_3。

(i) 在风险中性概率测度 $\tilde{p}=\frac{1}{2}$和 $\tilde{q}=\frac{1}{2}$下,求 S_3 的分布。

(ii) 计算$\widetilde{\mathbb{E}}S_1,\widetilde{\mathbb{E}}S_2,\widetilde{\mathbb{E}}S_3$。在$\widetilde{\mathbb{P}}$之下,股票的平均增长率为多少?

(iii) 在真实概率 $p=\frac{2}{3}$和 $q=\frac{1}{3}$下,以上(i)、(ii)的情况如何?

习题 2.3 证明鞅的凸函数是一个下鞅。换言之,设 $M_0,M_1,\cdots,M_N$ 为鞅,φ 为凸函数,证明:$\varphi(M_0),\varphi(M_1),\cdots,\varphi(M_N)$是一个下鞅。

习题 2.4 反复抛掷一枚硬币。假设每次抛掷出现正面的概率为$\frac{1}{2}$,与出现背面的概率相同。如果第 j 次抛掷结果为正面,令 $X_j=1$;如果为背面,令 $X_j=-1$。考虑如下定义的随机过程 $M_0,M_1,\cdots,M_N$,其中 $M_0=0$ 且

$$M_n=\sum_{j=1}^{n}X_j,n\geqslant 1$$

称这一过程为**对称随机游动**。每次出现正面,它增加 1;出现背面,它减少 1。

(i) 用定理 2.3.2 中的性质证明 $M_0,M_1,M_2,\cdots$是一个鞅。

(ii) 设σ为一个正常数,对 $n\geqslant 0$,定义

$$S_n=e^{\sigma M_n}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^n$$

证明 $S_0,S_1,S_2,\cdots$是一个鞅。尽管对称随机游动 M_n 没有递增的趋势,但“几何对称随机游动”$e^{\sigma M_n}$有增加的趋势,这是把鞅放入指数函数(为凸函数)的结果(见习题 2.3)。为了再次得到鞅,我们必须利用$\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}$作为贴现率,

“贴现”几何对称随机游动。该项严格小于 1，除非 $\sigma=0$。

习题 2.5 设 $M_0,M_1,M_2,\cdots$ 为习题 2.4 中的对称随机游动。定义 $I_0=0$且

$$I_n=\sum_{j=0}^{n-1}M_j(M_{j+1}-M_j),n=1,2,\cdots$$

(i) 证明 $I_n=\frac{1}{2}M_n^2-\frac{n}{2}$。

(ii) 设 n 为任意非负整数，$f(i)$为自变量 i 的任意函数。利用 n 和 f，定义另一个函数 $g(i)$ 满足$\mathbb{E}_n[f(I_{n+1})]=g(I_n)$。注意尽管方程右端的函数 $g(I_n)$可能依赖于 n，但是 g 的自变量中唯一可能出现的随机变量为 I_n；随机变量 M_n 不出现。利用(i)中公式证明：$I_0,I_1,I_2,\cdots$是一个马尔可夫过程。

习题 2.6 (离散时间随机积分) 假设 $M_0,M_1,\cdots,M_N$ 为一个鞅，Δ_0，$\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$为适应过程。定义**离散时间随机积分**(有时称为**鞅变换**) $I_0,I_1,\cdots,I_N$ 如下：记 $I_0=0$ 且

$$I_n=\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_j(M_{j+1}-M_j),\quad n=1,\cdots,N$$

证明 $I_0,I_1,\cdots,I_N$ 是一个鞅。

习题 2.7 在二叉树模型中，给出一个非马尔可夫但是鞅的随机过程实例。

习题 2.8 考虑一个 N 时段二叉树模型。

(i) 设 $M_0,M_1,\cdots,M_N$ 和$M_0',M_1',\cdots,M_N'$为风险中性测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅。证明：如果 $M_N=M_N'$(对每个可能的抛掷硬币序列均成立)，那么对每个 0 到 N 之间的 n，我们有 $M_n=M_n'$(对每个可能的抛掷硬币序列均成立)。

(ii) 设 V_N为某个衍生证券在时刻 N 的支付，这是一个依赖于所有 N 次抛掷硬币结果的随机变量。由第一章算法(1.2.16)归纳定义 V_{N-1}，$V_{N-2},\cdots,V_0$，证明：

$$V_0,\quad\frac{V_1}{1+r},\cdots,\frac{V_{N-1}}{(1+r)^{N-1}},\frac{V_N}{(1+r)^N}$$

是一个$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅。

(iii) 使用本章中风险中性定价公式(2.4.11)，定义：

$$V_n'=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

证明：

$$V_0',\frac{V_1'}{1+r},\cdots,\frac{V_{N-1}'}{(1+r)^{N-1}},\frac{V_N}{(1+r)^N}$$

是一个鞅。

(iv) 证明:对每个 n,有 $V_n=V'_n$[即定理 1.2.2 中的算法(1.2.16)与第二章风险中性定价公式(2.4.11)给出同样的衍生证券价格]。

习题 2.9 (随机波动率、随机利率) 考虑习题 1.9 中描述的两时段随机波动率、随机利率模型。股票价格和利率如图 2.8.1 所示。

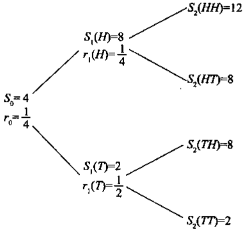

图 2.8.1 随机波动率、随机利率模型

(i) 确定风险中性概率

$$\widetilde{\mathbb{P}}(HH),\quad \widetilde{\mathbb{P}}(HT),\quad \widetilde{\mathbb{P}}(TH),\quad \widetilde{\mathbb{P}}(TT)$$

使得在时刻 2 支付为 V_2 的期权在时刻 0 的值由风险中性公式给出:

$$V_0=\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{V_2}{(1+r_0)(1+r_1)}\right]$$

(ii) 设 $V_2=(S_2-7)^+$,计算 $V_0, V_1(H), V_1(T)$。

(iii) 设投资者在时刻 0 以 V_0 出售(ii)中的期权,计算在时刻 0 时他应该持有的股票头寸 Δ_0,使得在时刻 1,不论第一次抛掷硬币的结果是正面还是背面,资产组合的价值为 V_1。

(iv) 假设(iii)中第一次抛掷硬币的结果为正面,该投资者应该持有多少股票头寸 $\Delta_1(H)$,才能确保不论第二次抛掷的结果为正面还是背面,其资产组合在时刻 2 的价值为 $(S_2-7)^+$?

习题 2.10 (支付红利的股票) 如同第一章,考虑二叉树资产定价模型,假设在每一步股价的变动之后,股票支付红利且股价相应下降。为使这个情形能在方程中得到描述,我们定义:

$$Y_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1})=\begin{cases}u, & \text{如果 } \omega_{n+1}=H\\ d, & \text{如果 } \omega_{n+1}=T\end{cases}$$

注意到 Y_{n+1} 只依赖第 $n+1$ 次硬币抛掷。在第一章二叉树模型中，$Y_{n+1}S_n$ 为股票在时刻 $n+1$ 的价格。在现在考虑的支付红利的模型中，我们有取值在 0 到 1 之间随机变量 $A_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1})$，使得时刻 $n+1$ 的红利可以表示为 $A_{n+1}Y_{n+1}S_n$。支付红利之后，在时刻 $n+1$ 的股票价格为：

$$S_{n+1}=(1-A_{n+1})Y_{n+1}S_n$$

投资者以初始财富 X_0 开始，每个时刻 n 持有 Δ_n 份股票，其中 Δ_n 只依赖于前 n 次抛掷硬币。该投资者的资产组合价值服从以下财富方程[见式(2.4.6)]：

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n)+\Delta_n A_{n+1}Y_{n+1}S_n\\&=\Delta_n Y_{n+1}S_n+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n)\end{aligned}\tag{2.8.2}$$

(i) 证明在风险中性测度下，贴现财富过程为一个鞅[即定理 2.4.5 对财富过程(2.8.2)仍然成立]。依照惯例，风险中性测度仍然由以下等式定义：

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

(ii) 证明风险中性定价公式仍然适用(即定理 2.4.7 对支付红利的模型仍然成立)。

(iii) 证明在风险中性测度下，贴现股票价格不是鞅(即定理 2.4.4 不再成立)。然而，如果 A_{n+1} 为 $(0,1)$ 之间的一个常量 α，那么不论 n 的值以及抛掷硬币的结果 $\omega_1\cdots\omega_{n+1}$ 如何，在风险中性测度下 $\frac{S_n}{(1-\alpha)^n(1+r)^n}$ 是一个鞅。

习题 2.11 (涨—跌平价公式) 在 N 时段二叉树模型中考虑一个无红利的股票。欧式看涨期权在时刻 N 的支付为 $C_N=(S_N-K)^+$。看涨期权在较早时刻的价格 C_n 由风险中性定价公式(2.4.11)给出：

$$C_n=\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

同时，考虑一个时刻 N 的支付为 $P_N=(K-S_N)^+$ 的看跌期权，它在较早时刻的价格为：

$$P_n=\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{P_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

最后，考虑一个以 K 美元在时刻 N 时购买 1 份股票的**远期合约**。时刻 N 该合约的价格为 $F_N=S_N-K$，它在较早时刻的价格为：

$$F_n=\tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{F_N}{(1+r)^{N-n}}\right],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

(注意,与看涨期权不同,远期合约要求必须在时刻 N 以 K 美元购买股票,如果 $S_N<K$,则支付为负值。)

(i) 如果在时刻 0,购买 1 份远期合约和 1 份看跌期权并持有它们直到终止时刻,那么收到的支付与看涨期权一致,即 $C_N=F_N+P_N$。试解释其理由。

(ii) 利用上面给出的关于 C_n、P_n 和 F_n 的风险中性定价公式,以及条件期望的线性性,证明对任何 n,有 $C_n=F_n+P_n$ 成立。

(iii) 利用在风险中性测度下贴现股票价格过程为鞅这一事实,证明 $F_0=S_0-\frac{K}{(1+r)^N}$。

(iv) 假设投资者在时刻 0 拥有 F_0,买入 1 份股票(必要时通过借贷完成这项投资),不作任何进一步的交易。证明到时刻 N 的资产组合价值为 F_n(这称为远期合约的**静态复制**。如果投资者在时刻 0 以 F_0 售出远期合约,那么可以使用静态复制来对冲远期合约的空头)。

(v) 股票在时刻 0 的**远期价格** K 定义为使得远期合约在时刻 0 价格为零的值。这个模型中的远期价格为 $(1+r)^N S_0$。证明在时刻 0 时,以远期价格敲定的看涨期权的价格与以远期价格敲定的看跌期权的价格相等。这一事实称为**涨—跌平价公式**。

(vi) 如果我们选择 $K=(1+r)^N S_0$,由 (v) 可以知道 $C_0=P_0$。是否有 $C_n=P_n$ 对每个 n 成立?

习题 2.12 (选择期权) 设 $1\leqslant m\leqslant N-1$,给定 $K>0$。**选择期权**为一个在时刻 0 出售的合约,其持有者在时刻 m 有权收到一个看涨或看跌期权的支付。选择期权的持有人可以一直等待到时刻 m 再做出选择。选定的看涨或看跌期权以敲定价格 K 在时刻 N 终止。证明选择期权时刻 0 的价格等于终止期为 N,敲定价格为 K 的看涨期权时刻 0 的价格与终止期为 m,敲定价格为 $\frac{K}{(1+r)^{N-m}}$ 的看跌期权时刻 0 的价格之和。(提示:利用涨—跌平价公式,见习题 2.11。)

习题 2.13 (亚式期权) 考虑 N 时段二叉树模型,一个**亚式期权**的支付基于股票价格的平均值,即:

$$V_N = f\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n\right)$$

其中函数 f 取决于期权合约的细节。

(i) 定义 $Y_n=\sum_{k=0}^{n} S_k$,利用独立性引理 2.5.3 证明二维过程 (S_n,Y_n),$n=0,1,\cdots,N$ 是马尔可夫的。

(ii) 根据定理 2.5.8,亚式期权在时刻 n 的价格 V_n 为 S_n 和 Y_n 的函数

v_n，即 $V_n=v_n(S_n,Y_n)$，$n=0,1,\cdots,N$。

给出一个计算 $v_N(s,y)$ 的公式，并提供一个利用 v_{n+1} 来计算 $v_n(s,y)$ 的算法。

习题 2.14［亚式期权（续）］ 考虑 N 时段二叉树模型，M 是 0 与 $N-1$ 之间的固定整数。考虑一个亚式期权，其在时刻 N 的支付为：

$$V_N = f\left(\frac{1}{N-M}\sum_{n=M+1}^{N} S_n\right)$$

其中函数 f 取决于期权合约的细节。

(i) 定义：

$$Y_n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant M \\ \sum\limits_{k=M+1}^{n} S_k, & M+1 \leqslant n \leqslant N \end{cases}$$

证明：在风险中性测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下，二维过程 (S_n,Y_n)，$n=0,1,\cdots,N$ 是马尔可夫的。

(ii) 根据定理 2.5.8，亚式期权在时刻 n 的价格 V_n 为 S_n 和 Y_n 的函数 v_n，即：

$$V_n=v_n(S_n,Y_n), \quad n=0,1,\cdots,N$$

当 $n\leqslant M$ 时，Y_n 并非随机，因此对这样的 n，v_n 是单独 S_n 的函数，从而：

$$V_n=\begin{cases} v_n(S_n), & 0\leqslant n\leqslant M \\ v_n(S_n,Y_n), & M+1\leqslant n\leqslant N \end{cases}$$

给出计算 $v_N(s,y)$ 的公式，并提供一个利用 v_{n+1} 来计算 $v_n(s,y)$ 的算法。注意对于 $n<M$ 和 $n>M$ 的算法是不同的，并且单独有一个利用 $v_{M+1}(\cdot,\cdot)$ 计算 $v_M(s)$ 的公式。

3 状态价格

3.1 测度变换

在第一章的二叉树无套利定价模型以及第二卷第四章和第五章的连续时间模型中，有两个概率测度值得注意：一个是**真实概率测度**，它是我们通过对于模型参数的经验估计而得到的；另一个是**风险中性概率测度**，在这一概率测度下，资产价格贴现过程是鞅。这两个概率测度对于模型中的资产价格路径给出了不同的权重。然而，关于哪些价格路径是可能的（即出现的概率为正），它们是一致的；只是它们给出的这些正概率值不同。真实概率测度是"正确"的，而风险中性概率测度是虚构的，但却十分有用，它使得我们能够简洁地表述那些方程组的求解结果[例如，第一章中的方程组(1.1.3)和(1.1.4)以及由此得到的公式(1.1.7)]。

考虑一般的有限样本空间 Ω 上的两个概率测度 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}$。假定 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 对 Ω 中的每个元素都给出正概率，因此我们可以写出下面的商：

$$Z(\omega)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} \tag{3.1.1}$$

Z 是随机变量，因为它依赖于随机试验的结果 ω。Z 被称作 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的**拉东—尼柯迪姆(Radon-Nikodým)导数**，尽管在有限样本空间 Ω 的情形，它其实是商而不是导数。随机变量 Z 具有三个重要性质，我们将其表述为下面的定理。

定理 3.1.1 设 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是有限样本空间 Ω 上的两个概率测度，对任意的 $\omega\in\Omega$，$\mathbb{P}(\omega)>0$，$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)>0$，定义随机变量 Z 如式(3.1.1)。我们有：

(i) $\mathbb{P}(Z>0)=1$；

(ii) $\mathbb{E}Z=1$；

(iii) 对任意的随机变量 Y，有：

$$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[ZY] \tag{3.1.2}$$

【证明】 根据我们的假定：对任意的 $\omega\in\Omega$，$\mathbb{P}(\omega)>0$，$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)>0$，性质(i)立即可得。性质(ii)可由以下计算验证：

$$\mathbb{E}Z=\sum_{\omega\in\Omega}Z(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}\mathbb{P}(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)=1$$

最后的等式由 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是概率测度得出。以下类似的计算可验证性质(iii)：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}Y&=\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)\,\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}P(\omega)\\&=\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)Z(\omega)\,\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{E}[ZY]\end{aligned}$$ □

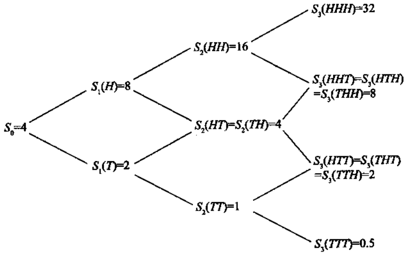

图 3.1.1　三时段模型

例 3.1.2　考虑图 3.1.1 中的三时段模型。样本空间为：

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

取 $p=\frac{2}{3}$ 作为出现正面的真实概率，$q=\frac{1}{3}$ 作为出现背面的真实概率。于是，真实概率测度为：

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(HHH)=\frac{8}{27},\ \mathbb{P}(HHT)=\frac{4}{27},\ \mathbb{P}(HTH)=\frac{4}{27},\ \mathbb{P}(HTT)=\frac{2}{27},\\ \mathbb{P}(THH)=\frac{4}{27},\ \mathbb{P}(THT)=\frac{2}{27},\ \mathbb{P}(TTH)=\frac{2}{27},\ \mathbb{P}(TTT)=\frac{1}{27}\end{gathered}\tag{3.1.3}$$

取利率 $r=\frac{1}{4}$，则出现正面的风险中性概率 $\tilde{p}=\frac{1}{2}$，出现背面的风险中性概率

$\tilde{q}=\frac{1}{2}$。风险中性概率测度为：

$$\widetilde{\mathbb{P}}(HHH)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(HHT)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(HTH)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(HTT)=\frac{1}{8},$$
$$\widetilde{\mathbb{P}}(THH)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(THT)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(TTH)=\frac{1}{8},\ \widetilde{\mathbb{P}}(TTT)=\frac{1}{8} \tag{3.1.4}$$

于是，$\widetilde{\mathbb{P}}$ 关于$\mathbb{P}$ 的拉东—尼柯迪姆导数为：

$$Z(HHH)=\frac{27}{64},\ Z(HHT)=\frac{27}{32},\ Z(HTH)=\frac{27}{32},\ Z(HTT)=\frac{27}{16},$$
$$Z(THH)=\frac{27}{32},\ Z(THT)=\frac{27}{16},\ Z(TTH)=\frac{27}{16},\ Z(TTT)=\frac{27}{8} \tag{3.1.5}$$

在例 1.2.4 中，我们就这一模型给出了回望期权在时刻 0 的价值，其中在时刻 3 的支付为：

$$V_3(HHH)=0,\ V_3(HHT)=8,\ V_3(HTH)=0,\ V_3(HTT)=6,$$
$$V_3(THH)=0,\ V_3(THT)=2,\ V_3(TTH)=2,\ V_3(TTT)=3.50$$

根据第二章的风险中性定价公式(2.4.11)，该回望期权在时刻 0 的价值为：

$$\begin{aligned} V_0 &= \widetilde{\mathbb{E}}\frac{V_3}{(1+r)^3} \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \sum_{\omega\in\Omega} V_3(\omega)\,\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) \\ &= 0.512\left[0\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3.50\cdot\frac{1}{8}\right] \\ &= 1.376 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

这正是例 1.2.4 中所确定的为了构建复制资产组合而在时刻 0 需要的花费。利用随机变量 Z，我们可将式(3.1.6)重写成：

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}\frac{V_3 Z}{(1+r)^3} \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \sum_{\omega\in\Omega} V_3(\omega) Z(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) \\ &= 0.512\Big[0\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{8}{27}+8\cdot\frac{27}{32}\cdot\frac{4}{27}+0\cdot\frac{27}{32}\cdot\frac{4}{27}+6\cdot\frac{27}{16}\cdot\frac{2}{27} \\ &\quad +0\cdot\frac{27}{32}\cdot\frac{4}{27}+2\cdot\frac{27}{16}\cdot\frac{2}{27}+2\cdot\frac{27}{16}\cdot\frac{2}{27}+3.50\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{27}\Big] \\ &= 1.376 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

与式(3.1.6)相比较，式(3.1.7)不必用到风险中性概率测度。然而，并非直

接在真实概率测度下计算期权支付贴现的期望值,而是先利用随机变量 Z 对期权支付进行加权。由此得到以下定义中的**状态价格**概念。 □

定义 3.1.3 考虑 N 时段二叉树模型,设真实概率测度为 $\mathbb{P}$,风险中性概率测度为 $\widetilde{\mathbb{P}}$。Z 表示 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的拉东—尼柯迪姆导数,即:

$$Z(\omega_1\cdots\omega_N)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1\cdots\omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1\cdots\omega_N)}=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1\cdots\omega_N)}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1\cdots\omega_N)} \tag{3.1.8}$$

其中 $\#H(\omega_1\cdots\omega_N)$ 表示序列 $\omega_1\cdots\omega_N$ 中出现正面的次数,$\#T(\omega_1\cdots\omega_N)$ 表示序列 $\omega_1\cdots\omega_N$ 中出现背面的次数。定义**状态价格密度**随机变量为:

$$\zeta(\omega)=\frac{Z(\omega)}{(1+r)^N} \tag{3.1.9}$$

并且称 $\zeta(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ 为相应于 ω 的**状态价格**。

设 $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_N$ 是 N 时段模型中一个特定的抛掷硬币结果序列,考虑这样一个衍生证券:如果出现 $\bar{\omega}$,它在时刻 N 的支付为 1,否则支付为 0,即

$$V_N(\omega)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \omega=\bar{\omega}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

根据风险中性定价公式,该衍生证券在时刻 0 的价值为:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{V_N}{(1+r)^N}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\bar{\omega})}{(1+r)^N}=\frac{Z(\bar{\omega})\mathbb{P}(\bar{\omega})}{(1+r)^N}=\zeta(\bar{\omega})\mathbb{P}(\bar{\omega})$$

状态价格 $\zeta(\bar{\omega})\mathbb{P}(\bar{\omega})$ 给出了当且仅当出现 $\bar{\omega}$ 时在时刻 N 支付为 1 的合约在时刻 0 的价格。这个价格应当包含从时刻 N 到时刻 0 的贴现因子以体现货币的时间价值,事实上在式(3.1.9)中确实出现了 $\frac{1}{(1+r)^N}$ 这一项。这个价格自然应当考虑出现 $\bar{\omega}$ 的概率,因此定义状态价格的公式中含有因子 $\mathbb{P}(\bar{\omega})$。仅有这两个因子尚不足以解释风险因素。如果只用到这两项,将衍生证券在时刻 0 的价格取为 $\mathbb{E}\frac{V_N}{(1+r)^N}$,则时刻 0 的资产价格仅依赖于真实概率测度下的期望回报。然而事实上,资产价格与期望回报以及所承受的风险都有关。出现在相应于 $\bar{\omega}$ 的状态价格中的 $Z(\bar{\omega})$ 这一项,就说明了风险因素。例如,由式(3.1.5)可知,只要在三次抛掷硬币过程中出现两次或三次正面,就有 $Z<1$;否则 $Z>1$。因子 Z 的存在,降低了最终高于初始股价 $S_0=4$ 的那些股票价格路径的重要性,并且提升了最终低于初始股价的那些股票价格路径的重要性。正是这一效应,使得持有股票的初始价值要低于最终时刻 3 股价的贴现期望值 $\mathbb{E}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 S_3\right]$。

状态价格 $\zeta(\bar{\omega})\mathbb{P}(\bar{\omega})$ 告诉我们当且仅当出现 $\bar{\omega}$ 时在时刻 N 支付为 1 的

合约在时刻 0 的价格。状态价格密度$\frac{Z(\bar{\omega})}{(1+r)^N}$告诉我们相应于每个单位真实概率该合约在时刻 0 的价格,因而被称为密度。

当然,大部分合约相应于一些不同的 ω 都会有支付,并且支付也未必是 1。这样的合约可以被视为那些简单合约的组合,每一个简单合约当且仅当某个特定的 ω 出现时支付为 1,从而合约价格可通过将各部分价格相加求得。回顾第二章中的风险中性定价公式(2.4.11),在时刻 N 支付为 V_N 的任何衍生证券在时刻 0 的价格为 $V_0=\widetilde{\mathbb{E}}\frac{V_N}{(1+r)^N}$。利用状态价格密度,可以简单地将其重写为:

$$V_0=\mathbb{E}[\zeta V_N]=\sum_{\omega\in\Omega}V_N(\omega)\zeta(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) \tag{3.1.10}$$

方程(3.1.7)就是一个特殊情形,其中 $\zeta(\omega)$这一项被分解为因子$\frac{1}{(1+r)^3}$和 $Z(\omega)$。

3.2 拉东—尼柯迪姆导数过程

在上一节,我们考虑了 N 时段二叉树模型中风险中性概率测度关于真实概率测度的拉东—尼柯迪姆导数。这个随机变量 Z 依赖于模型中的 N 次抛掷硬币结果。为了得到依赖于较少次抛掷硬币结果的相应的随机变量,我们可以基于时刻 $n<N$ 的信息,对 Z 进行估计。这种估计在其他场合也会出现,因此以下我们给出一个一般的结论,其中并不要求 Z 是拉东—尼柯迪姆导数。

定理 3.2.1 设 Z 是 N 时段二叉树模型中的一个随机变量,定义:

$$Z_n=\mathbb{E}_nZ,\quad n=0,1,\cdots,N \tag{3.2.1}$$

则 $Z_n,n=0,1,\cdots,N$ 在真实概率测度$\mathbb{P}$ 下是一个鞅。

【证明】 对于 $n=0,1,\cdots,N-1$,利用定理 2.3.2(iii)“累次条件期望”性质,可以算得:

$$\mathbb{E}_n[Z_{n+1}]=\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_{n+1}[Z]]=\mathbb{E}_n[Z]=Z_n$$

这表明 $Z_n,n=0,1,\cdots,N$ 是一个鞅。 □

注 3.2.2 尽管定理 3.2.1 是在真实概率测度$\mathbb{P}$ 下表述的,然而在风险中性概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下,类似定理也成立。证明是相同的。

在对随机变量接连作估计时,随着时间(和信息)的增加,估计将会更加精确。然而,定理 3.2.1 表明它们并无增长或下降的趋势。如果较后的估计平均而言要高于较前的估计,那么这一增长的趋势应该已经被纳入较前的

估计。这类似于有效股票市场的情形：如果某一股票的表现将优于风险水平相同的其他股票，那么这应该已经反映在当前股价中，因而进一步的优良表现不再可能。

例 3.2.3 考虑例 3.1.2 中的三时段模型。在该例中，我们确定了风险中性概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$关于真实概率测度$\mathbb{P}$的拉东—尼柯迪姆导数，由式(3.1.5)给出。对于 $n=0,1,2,3$，定义 $Z_n=\mathbb{E}_n[Z]$。尤其是，对所有 $\omega_1\omega_2\omega_3$，$Z_3(\omega_1\omega_2\omega_3)=Z(\omega_1\omega_2\omega_3)$。我们算得：

$$Z_2(HH)=\frac{2}{3}Z_3(HHH)+\frac{1}{3}Z_3(HHT)=\frac{9}{16}$$

$$Z_2(HT)=\frac{2}{3}Z_3(HTH)+\frac{1}{3}Z_3(HTT)=\frac{9}{8}$$

$$Z_2(TH)=\frac{2}{3}Z_3(THH)+\frac{1}{3}Z_3(THT)=\frac{9}{8}$$

$$Z_2(TT)=\frac{2}{3}Z_3(TTH)+\frac{1}{3}Z_3(TTT)=\frac{9}{4}$$

按定义，$Z_1=\mathbb{E}_1[Z]$，而定理 3.2.1 允许我们利用鞅性质计算 $Z_1=\mathbb{E}_1[Z_2]$。于是就有：

$$Z_1(H)=\frac{2}{3}Z_2(HH)+\frac{1}{3}Z_2(HT)=\frac{3}{4}$$

$$Z_1(T)=\frac{2}{3}Z_2(TH)+\frac{1}{3}Z_2(TT)=\frac{3}{2}$$

按定义，$Z_0=\mathbb{E}[Z]$，由定理 3.1.1(ii)，$\mathbb{E}[Z]=1$；我们也可以利用鞅性质计算 $Z_0=\mathbb{E}_0[Z_1]=\mathbb{E}[Z_1]$。于是就有：

$$Z_0=\frac{2}{3}Z_1(H)+\frac{1}{3}Z_1(T)=1$$

图 3.2.1 给出了拉东—尼柯迪姆导数过程 Z_n，$n=0,1,2,3$。 □

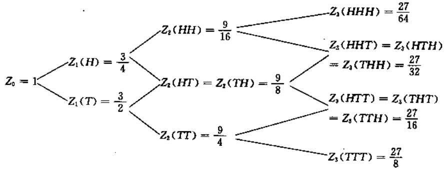

图 3.2.1 拉东—尼柯迪姆导数过程

定义 3.2.4 在 N 时段二叉树模型中，设真实概率测度为$\mathbb{P}$，风险中性

概率测度为$\widetilde{\mathbb{P}}$。假定对任何抛掷硬币结果序列 ω，$\mathbb{P}(\omega)>0$，$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)>0$，并定义拉东—尼柯迪姆导数为随机变量 $Z(\omega)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$。定义**拉东—尼柯迪姆导数过程**如下：

$$Z_n=\mathbb{E}_n[Z],\quad n=0,1,\cdots,N \tag{3.2.2}$$

特别是，$Z_N=Z$ 且 $Z_0=1$。

我们可以通过在真实概率测度下计算期望值$\mathbb{E}[ZY]$来求得随机变量 Y 在风险中性概率测度下的期望。如果 Y 仅依赖于前 n 次抛掷硬币结果，其中 $n<N$，那么计算还能进一步简化。

引理 3.2.5 *假设条件如同定义 3.2.4。如果随机变量 Y 仅依赖于前 n 次抛掷硬币结果，其中 $0\leqslant n\leqslant N$，则：*

$$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[Z_nY] \tag{3.2.3}$$

【证明】 依次利用定理 3.1.1(iii)、定理 2.3.2(iii)(累次条件期望)、定理 2.3.2(ii)(提取已知量)以及 Z_n 的定义，验证以下每一步等式：

$$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[ZY]=\mathbb{E}[\mathbb{E}_n[ZY]]=\mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}_n[Z]]=\mathbb{E}[YZ_n] \qquad \square$$

引理 3.2.5 的以下一个应用颇具启发性。给定前 n 次抛掷硬币的结果序列$\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n$，定义：

$$Y(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \omega_1\cdots\omega_n=\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

换言之，当且仅当前 n 次抛掷硬币出现我们预先给定的结果序列，Y 取值为 1，而与后继的抛掷硬币结果 $\omega_{n+1}\cdots\omega_N$ 无关。于是：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}Y&=\widetilde{\mathbb{P}}\{\text{前 } n \text{ 次抛掷硬币结果为 } \bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n\}\\&=\tilde{p}^{\#H(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)}\tilde{q}^{\#T(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)}\end{aligned}$$

其中记号 $\#H(\cdots)$ 和 $\#T(\cdots)$ 的解释见定义 3.1.3。另一方面：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[YZ_n]&=Z_n(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)\mathbb{P}\{\text{前 } n \text{ 次抛掷硬币结果为 } \bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n\}\\&=Z_n(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)p^{\#H(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)}q^{\#T(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)}\end{aligned}$$

引理 3.2.5 断言上述两个量相等，因此：

$$Z_n(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)} \tag{3.2.4}$$

上式可以利用图 3.2.1 来验证。例如，在该图中我们有：

$$Z_2(HH)=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^2\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^0=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{9}{16}$$

和

$$Z_3(HTT)=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^1\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^1\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{27}{16}$$

由上可知，对每一个 n，$Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)$是得到抛掷硬币结果 $\omega_1\cdots\omega_n$ 的风险中性概率与真实概率的比值。引理 3.2.5 断言：如果 Y 仅依赖于前 n 次抛掷硬币结果，那么我们不必考虑时刻 n 以后抛掷硬币的结果。这种情况下，我们可以用 Z_n 来替代定理 3.1.1(iii)公式$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[ZY]$中的拉东—尼柯迪姆导数 Z，而 Z_n 与 Z 的算法相仿，只不过 Z_n 是前 n 次硬币抛掷而非全部 N 次抛掷的两种概率的比值。

除了两种测度$\mathbb{P}$ 和$\widetilde{\mathbb{P}}$ 下期望值的关系之外，我们还希望建立两种测度下条件期望之间的联系公式。以下引理给出了这一公式。

引理 3.2.6 假设条件如同定义 3.2.4。假设随机变量 Y 仅依赖于前 m 次抛掷硬币结果，其中 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$，则：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_nY=\frac{1}{Z_n}\mathbb{E}_n[Z_mY] \tag{3.2.5}$$

【证明】 给定 $\omega_1\cdots\omega_n$，可以算得：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}_n[Y](\omega_1\cdots\omega_n)\\
&=\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m}Y(\omega_1\cdots\omega_m)\tilde{p}^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\tilde{q}^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\\
&=\left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)^{\#H(\omega_1\cdots\omega_n)}\left(\frac{q}{\tilde{q}}\right)^{\#T(\omega_1\cdots\omega_n)}\\
&\quad\cdot\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m}\left[Y(\omega_1\cdots\omega_m)\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1\cdots\omega_m)}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1\cdots\omega_m)}\right.\\
&\qquad\left.\cdot\,p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\right]\\
&=\frac{1}{Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)}\cdot\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m}Y(\omega_1\cdots\omega_m)Z_m(\omega_1\cdots\omega_m)p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\\
&=\frac{1}{Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)}\mathbb{E}_n[YZ_m](\omega_1\cdots\omega_n)
\end{aligned}$$

□

现在，我们可以给出另一种形式的风险中性定价公式。

定理 3.2.7 考虑 N 时段二叉树模型，其中 $0<d<1+r<u$，假定出现正面的真实概率 p 和出现背面的真实概率 q 都是正数。出现正面和背面的风险中性概率如下给定：

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

设$\mathbb{P}$和$\widetilde{\mathbb{P}}$分别表示相应的真实概率和风险中性概率测度，Z是$\widetilde{\mathbb{P}}$关于$\mathbb{P}$的拉东—尼柯迪姆导数，$Z_n,n=0,1,\cdots,N$是拉东—尼柯迪姆导数过程。

考虑一个衍生证券，它在时刻N的支付V_N可能依赖于全部N次抛掷硬币的结果。对于$n=0,1,\cdots,N$，该衍生证券在时刻n的价格为：

$$V_n=\widetilde{\mathbb{E}}_n\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}=\frac{(1+r)^n}{Z_n}\mathbb{E}_n\frac{Z_NV_N}{(1+r)^N}=\frac{1}{\zeta_n}\mathbb{E}_n[\zeta_NV_N]\tag{3.2.6}$$

其中**状态价格密度过程**ζ_n由下式定义：

$$\zeta_n=\frac{Z_n}{(1+r)^n},\quad n=0,1,\cdots,N\tag{3.2.7}$$

【证明】 式(3.2.6)中的第一个等式是第二章中的式(2.4.11)，第二个等式由引理3.2.6得到，第三个等式是利用了状态价格密度过程ζ_n的定义。 □

3.3 资本资产定价模型

无套利定价方法是关于资产价格的两种不同的建模方式之一。另一种是基于供需平衡的**资本资产定价模型**，其中投资者的效用函数将消费量转化为满意度。资本资产定价模型有助于对市场的定性化，但却无法获得由无套利方法所能得到的精确的定量结果。而且，对于理想化的完全市场，无套利论证是必需的。另一方面，很多市场是不完全的，因此仅有无套利定价方法是不够的。从理论上，对于这样的市场，只有基于效用的模型才是合理的，尽管人们普遍运用“风险中性”定价，哪怕被定价的资产无法由其他更基本的资产来复制。

本书主要阐述完全市场中的无套利定价及其数学方法。然而，数学方法是广泛适用的。在这一节中，它将被用来解决资本资产定价模型中的一个核心问题：由投资产生的效用期望值的最大化。

在无套利定价方法中，有两个概率测度：真实概率测度和风险中性概率测度。在对衍生证券定价时，我们只需考虑风险中性概率测度。然而，有两种情形与真实概率测度有关：资产管理和风险管理。在资产管理中，人们需要权衡风险与真实(而非风险中性)期望回报；在风险管理中，人们关心的是灾难性事件的真实概率。不过，在这两种情形中，仍涉及风险中性概率测度。在风险管理中，需要进行风险评估的资产组合中通常含有衍生证券，其理论价格必须利用风险中性概率测度算得；在资产管理中，也会以本节中将提及的方式涉及风险中性概率测度。

我们现在考虑资本资产定价问题。所谓**效用函数**，是指实数集上定义的一个非减的凹函数。它可以取值为$-\infty$，但不能取值为$+\infty$。$\ln x$是一个常用的效用函数，它通常只对$x>0$有定义。我们约定：对$x\leqslant 0$，$\ln x=-\infty$，这样，它就对所有$x\in\mathbb{R}$都有定义，并且是非减的凹函数。函数U称为是凹的，如果：

$$U(\alpha x+(1-\alpha)y)\geqslant \alpha U(x)+(1-\alpha)U(y), \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \quad \alpha\in(0,1) \tag{3.3.1}$$

如果对所有$x\neq y$，式(3.3.1)中的不等式是严格的，我们就称U是**严格凹的**。事实上，我们总假定函数U在取值为有限处是严格凹的。通过选取$p<1$、$p\neq 0$和$c\in\mathbb{R}$，并且定义：

$$U_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}(x-c)^p, & 如果\ x>c\\ 0, & 如果\ 0<p<1\ 且\ x=c\\ -\infty, & 如果\ p<0\ 且\ x=c\\ -\infty, & 如果\ x<c\end{cases}$$

我们可以得到整个一族效用函数。这些函数的**绝对风险厌恶指数**$-\dfrac{U''(x)}{U'(x)}$是双曲函数$\dfrac{1-p}{x-c}$，$x>c$。这类函数称为**双曲绝对风险厌恶(HARA)函数**。相应于$p=0$的HARA函数是：

$$U_0(x)=\begin{cases}\ln(x-c), & 如果\ x>c\\ -\infty, & 如果\ x\leqslant c\end{cases}$$

效用函数的凹性假定是为了体现风险与回报之间的权衡。例如，考虑如下的赌博：获得支付1和99的概率各为$\frac{1}{2}$。于是，期望支付为50。然而，风险厌恶的赌徒宁可获取50而不愿博取这一随机支付。用X表示这一随机支付，即$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=99)=\frac{1}{2}$。对于凹的效用函数，利用詹森不等式(定理2.2.5，将不等号反向)可得$\mathrm{E}\,U(X)\leqslant U(\mathrm{E}X)$。事实上，如果$U(x)=\ln x$，则$\mathrm{E}\ln X=2.30$，而$\ln\mathrm{E}X=3.91$。如果赌徒旨在最大化支付的期望效用，则我们的模型表明：赌徒宁要非随机的支付$\mathrm{E}X=50$而不愿博取随机支付X。通过比较支付的期望效用而不是比较期望支付，并且适当选取效用函数，我们可以捕捉到投资者对于权衡风险与回报的态度。

考虑N时段二叉树模型，其中参数满足$0<d<1+r<u$。投资者将初始财富X_0投入股票以及货币市场账户，以求最大化其在时刻N财富的期望效用。换言之，投资者具有效用函数U，希望求解以下问题。

问题 3.3.1(最优投资) 给定 X_0,求适应的资产组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots \Delta_{N-1}$,使得在财富方程

$$X_{n+1}=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n),\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

约束下,最大化

$$\mathbb{E}U(X_N) \tag{3.3.2}$$

注意到在式(3.3.2)中是求真实概率测度$\mathbb{P}$下的期望。投资者是风险厌恶型的,并利用自己的效用函数在真实的风险和回报之间作权衡。在风险中性测度下这样做是没有意义的,因为在风险中性测度下股票和货币市场账户具有相同的回报率;希望最大化$\widetilde{\mathbb{E}}U(X)$的投资者只需投资于货币市场。

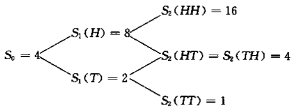

图 3.3.1 二时段模型

例 3.3.2 考虑图 3.3.1 中的二时段模型,其中利率为 $r=\frac{1}{4}$,从而风险中性概率测度为:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(HH)=\frac{1}{4},\quad \widetilde{\mathbb{P}}(HT)=\frac{1}{4},\quad \widetilde{\mathbb{P}}(TH)=\frac{1}{4},\quad \widetilde{\mathbb{P}}(TT)=\frac{1}{4}$$

假定真实概率测度为:

$$\mathbb{P}(HH)=\frac{4}{9},\quad \mathbb{P}(HT)=\frac{2}{9},\quad \mathbb{P}(TH)=\frac{2}{9},\quad \mathbb{P}(TT)=\frac{1}{9}$$

投资者初始财富为 $X_0=4$,希望选择 Δ_0、$\Delta_1(H)$和 $\Delta_1(T)$以求最大化$\mathbb{E}\ln X_2$。注意到:

$$X_1(H)=8\Delta_0+\frac{5}{4}(4-4\Delta_0)=3\Delta_0+5$$

$$X_1(T)=2\Delta_0+\frac{5}{4}(4-4\Delta_0)=-3\Delta_0+5$$

以及

$$\begin{aligned}X_2(HH)&=16\Delta_1(H)+\frac{5}{4}(X_1(H)-8\Delta_1(H))\\&=6\Delta_1(H)+\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4}\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$X_2(HT)=4\Delta_1(H)+\frac{5}{4}(X_1(H)-8\Delta_1(H))$$
$$=-6\Delta_1(H)+\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4} \tag{3.3.4}$$
$$X_2(TH)=4\Delta_1(T)+\frac{5}{4}(X_1(T)-2\Delta_1(T))$$
$$=\frac{3}{2}\Delta_1(T)-\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4} \tag{3.3.5}$$
$$X_2(TT)=\Delta_1(T)+\frac{5}{4}(X_1(T)-2\Delta_1(T))$$
$$=-\frac{3}{2}\Delta_1(T)-\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4} \tag{3.3.6}$$

因此：

$$\mathrm{E}\ln X_2=\frac{4}{9}\ln\left(6\Delta_1(H)+\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4}\right)+\frac{2}{9}\ln\left(-6\Delta_1(H)+\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4}\right)$$
$$+\frac{2}{9}\ln\left(\frac{3}{2}\Delta_1(T)-\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4}\right)+\frac{1}{9}\ln\left(-\frac{3}{2}\Delta_1(T)-\frac{15}{4}\Delta_0+\frac{25}{4}\right)$$

目标是最大化上述表达式，为此，我们计算偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial\Delta_0}\mathrm{E}\ln X_2=\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{X_2(HH)}+\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{X_2(HT)}$$
$$-\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{X_2(TH)}-\frac{1}{9}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{X_2(TT)}$$
$$=\frac{5}{12}\left(\frac{4}{X_2(HH)}+\frac{2}{X_2(HT)}-\frac{2}{X_2(TH)}-\frac{1}{X_2(TT)}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial\Delta_1(H)}\mathrm{E}\ln X_2=\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{X_2(HH)}-\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{X_2(HT)}$$
$$=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{X_2(HH)}-\frac{1}{X_2(HT)}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial\Delta_1(T)}\mathrm{E}\ln X_2=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{X_2(TH)}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{X_2(TT)}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{X_2(TH)}-\frac{1}{X_2(TT)}\right)$$

令这些偏导数为零，我们得到三个方程：

$$\frac{4}{X_2(HH)}+\frac{2}{X_2(HT)}=\frac{2}{X_2(TH)}+\frac{1}{X_2(TT)} \tag{3.3.7}$$
$$\frac{2}{X_2(HH)}=\frac{1}{X_2(HT)} \tag{3.3.8}$$
$$\frac{2}{X_2(TH)}=\frac{1}{X_2(TT)} \tag{3.3.9}$$

在式(3.3.8)和式(3.3.9)中交叉相乘,我们得到:

$$X_2(HH)=2X_2(HT) \tag{3.3.10}$$

$$X_2(TH)=2X_2(TT) \tag{3.3.11}$$

将这两个方程代入式(3.3.7),再交叉相乘,我们得到第三个方程:

$$X_2(HT)=2X_2(TT) \tag{3.3.12}$$

这样,我们就有关于四个未知量 $X_2(HH)$、$X_2(HT)$、$X_2(TH)$和 $X_2(TT)$的三个线性方程(3.3.10)~(3.3.12)。

一种求解方法是回顾由三个未知量$\Delta_1(H)$、$\Delta_1(T)$和Δ_0表示$X_2(HH)$、$X_2(HT)$、$X_2(TH)$和$X_2(TT)$的四个公式(3.3.3)~(3.3.6),代入后,再求解所得的关于三个未知量的三个线性方程,这就解得:

$$\Delta_0=\frac{5}{9},\quad \Delta_1(H)=\frac{25}{54},\quad \Delta_1(T)=\frac{25}{27} \tag{3.3.13}$$

我们虽已求得最优的资产组合,然而所使用的方法却并不理想。特别是,随着时段数的增加,变元$\Delta_n(\omega)$的数量呈指数增长,而我们最后需要求解关于这些变元的线性方程组。

另一种求解方法是寻求涉及 $X_2(HH)$、$X_2(HT)$、$X_2(TH)$和 $X_2(TT)$的第四个方程,然后求解由它和前面三个方程(3.3.10)~(3.3.12)组成的关于四个未知量的方程组。第四个方程可以由推论 2.4.6 得到:

$$4=\frac{16}{25}\left[\frac{1}{4}X_2(HH)+\frac{1}{4}X_2(HT)+\frac{1}{4}X_2(TH)+\frac{1}{4}X_2(TT)\right] \tag{3.3.14}$$

由式(3.3.10)~(3.3.12)和式(3.3.14)可直接解得:

$$X_2(HH)=\frac{100}{9},\quad X_2(HT)=\frac{50}{9},\quad X_2(TH)=\frac{50}{9},\quad X_2(TT)=\frac{25}{9} \tag{3.3.15}$$

于是,根据定理 1.2.2 的算法,可以求得$\Delta_1(H)$、$\Delta_1(T)$和Δ_0。尤其是:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(H)&=\frac{X_2(HH)-X_2(HT)}{S_2(HH)-S_2(HT)}=\frac{25}{54}\\
\Delta_1(T)&=\frac{X_2(TH)-X_2(TT)}{S_2(TH)-S_2(TT)}=\frac{25}{27}\\
X_1(H)&=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}X_2(HH)+\frac{1}{2}X_2(HT)\right]=\frac{20}{3}\\
X_1(T)&=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}X_2(TH)+\frac{1}{2}X_2(TT)\right]=\frac{10}{3}\\
\Delta_0&=\frac{X_1(H)-X_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}=\frac{5}{9}
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

□

在上例的第二种求解方法中用到的方程(3.3.14)是基于如下事实：在风险中性测度下，资产组合过程的期望贴现值总是等于初始值 X_0(见推论 2.4.6)，即：

$$\widetilde{\mathrm{E}}\frac{X_N}{(1+r)^N}=X_0 \tag{3.3.17}$$

这就在问题 3.3.1 的求解中引入了风险中性测度，尽管在原问题的陈述中只出现了真实概率测度。这也提示我们可用以下问题取代问题 3.3.1。

问题 3.3.3 给定 X_0，求随机变量 X_N(并不涉及资产组合过程)，使之最大化

$$\mathrm{E}U(X_N) \tag{3.3.18}$$

并且满足：

$$\widetilde{\mathrm{E}}\frac{X_N}{(1+r)^N}=X_0 \tag{3.3.19}$$

引理 3.3.4 假设 $\Delta_0^*,\Delta_1^*,\cdots,\Delta_{N-1}^*$ 是问题 3.3.1 的一个最优资产组合过程，X_N^* 是相应最优的时刻 N 的财富随机变量，则 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解。反之，假设 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解，则存在一个资产组合过程 $\Delta_0^*,\Delta_1^*,\cdots,\Delta_{N-1}^*$，使得相应的初始值为 X_0 的财富过程在时刻 N 的值为 X_N^*，并且这一资产组合过程是问题 3.3.1 的最优解。

【证明】 假设 $\Delta_0^*,\Delta_1^*,\cdots,\Delta_{N-1}^*$ 是问题 3.3.1 的一个最优资产组合过程，X_N^* 是相应最优的时刻 N 的财富随机变量。要证明 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解，必须验证它满足约束(3.3.19)，并且对于满足这一约束的所有 X_N，都有 $\mathrm{E}U(X_N)\leqslant\mathrm{E}U(X_N^*)$。作为初始值为 X_0 的财富过程在时刻 N 的值，X_N^* 满足式(3.3.17)，也就是式(3.3.19)。现设 X_N 是满足约束(3.3.19)的任一随机变量，我们可以将 X_N 视为一个衍生证券，则由第二章的风险中性定价公式(2.4.11)，这一衍生证券在时刻 0 的价格就是式(3.3.19)中出现的 X_0。尤其是，从初始财富 X_0 出发，可以构建一个能够复制 X_N 的资产组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$，即相应于这一资产组合过程的时刻 N 的财富值是 X_N(详见定理 1.2.2)。由于 X_N^* 是问题 3.3.1 的一个最优的财富终值随机变量，而 X_N 则是另一个财富终值随机变量，故必有 $\mathrm{E}U(X_N)\leqslant\mathrm{E}U(X_N^*)$。这表明 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解。

反之，假设 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解，再次利用定理 1.2.2，我们可以构建一个资产组合过程 $\Delta_0^*,\Delta_1^*,\cdots,\Delta_{N-1}^*$，使得相应的初始值为 X_0 的财富过程在时刻 N 的值为 X_N^*。设 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$ 是另一个资产组合过程，它使得相应的初始值为 X_0 的财富过程在时刻 N 的值为某个 X_N。为了证明由 X_N^* 构建的资产组合过程 $\Delta_0^*,\Delta_1^*,\cdots,\Delta_{N-1}^*$ 是问题 3.3.1 的一个最优解，必须验证：

$$\mathbb{E}U(X_N)\leqslant\mathbb{E}U(X_N^*) \tag{3.3.20}$$

注意到 X_N 满足式(3.3.17),也就是式(3.3.19),而 X_N^* 是问题 3.3.3 的最优解,这就蕴含了式(3.3.20)成立。 □

引理 3.3.4 将最优投资问题(即问题 3.3.1)的求解分解为易于操作的两个步骤:第一步,求得随机变量 X_N,它是问题 3.3.3 的最优解;第二步,以 X_0 为初始财富,构建一个能够复制 X_N 的资产组合过程。第二步只要利用定理 1.2.2 中的算法。以下需要弄清楚的是如何实施第一步。在给出一般方法之前,我们先就例 3.3.2 进行剖析。

例 3.3.2(续) 首先,计算$\widetilde{\mathbb{P}}$ 关于$\mathbb{P}$ 的拉东一尼柯迪姆导数:

$$Z(HH)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(HH)}{\mathbb{P}(HH)}=\frac{9}{16},\quad Z(HT)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(HT)}{\mathbb{P}(HT)}=\frac{9}{8},$$

$$Z(TH)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(TH)}{\mathbb{P}(TH)}=\frac{9}{8},\quad Z(TT)=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}(TT)}{\mathbb{P}(TT)}=\frac{9}{4}$$

为简便起见,我们用下标表示状态价格密度 ζ 的不同值:

$$\zeta_1=\zeta(HH)=\frac{Z(HH)}{(1+r)^2}=\frac{9}{25}$$

$$\zeta_2=\zeta(HT)=\frac{Z(HT)}{(1+r)^2}=\frac{18}{25}$$

$$\zeta_3=\zeta(TH)=\frac{Z(TH)}{(1+r)^2}=\frac{18}{25}$$

$$\zeta_4=\zeta(TT)=\frac{Z(TT)}{(1+r)^2}=\frac{36}{25}$$

并采用记号:

$$p_1=\mathbb{P}(HH)=\frac{4}{9},\quad p_2=\mathbb{P}(HT)=\frac{2}{9},$$

$$p_3=\mathbb{P}(TH)=\frac{2}{9},\quad p_4=\mathbb{P}(TT)=\frac{1}{9}$$

最后,我们记:

$$x_1=X_2(HH),\quad x_2=X_2(HT),\quad x_3=X_2(TH),\quad x_4=X_2(TT)$$

利用这些记号,问题 3.3.3 可以表述为:

求向量(x_1,x_2,x_3,x_4),在 $\sum_{m=1}^4 p_m\zeta_m x_m=X_0$ 的约束下,最大化$\sum_{m=1}^4 p_m U(x_m)$。

代人具体数字,并利用效用函数为对数函数这一事实,上述问题可以重写为:

求向量(x_1,x_2,x_3,x_4),在

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{25}x_1+\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}x_2+\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}x_3+\frac{1}{9}\cdot\frac{36}{25}x_4=4 \qquad (3.3.21)$$

的约束下，最大化

$$\frac{4}{9}\ln x_1+\frac{2}{9}\ln x_2+\frac{2}{9}\ln x_3+\frac{1}{9}\ln x_4$$

这一问题的拉格朗日(Lagrange)函数为：

$$L=\frac{4}{9}\ln x_1+\frac{2}{9}\ln x_2+\frac{2}{9}\ln x_3+\frac{1}{9}\ln x_4-\lambda\Big(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{25}x_1+\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}x_2 +\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}x_3+\frac{1}{9}\cdot\frac{36}{25}x_4-4\Big)$$

拉格朗日乘子方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}L=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{x_1}-\lambda\frac{9}{25}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}L=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x_2}-\lambda\frac{18}{25}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3}L=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{x_3}-\lambda\frac{18}{25}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_4}L=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x_4}-\lambda\frac{36}{25}\right)=0$$

由此解得：

$$x_1=\frac{25}{9\lambda},\ x_2=\frac{25}{18\lambda},\ x_3=\frac{25}{18\lambda},\ x_4=\frac{25}{36\lambda}$$

将这些公式代入式(3.3.21)，得：

$$\frac{4}{9\lambda}+\frac{2}{9\lambda}+\frac{2}{9\lambda}+\frac{1}{9\lambda}=4$$

这表明$\frac{1}{\lambda}=4$。在时刻 2 的最优财富值为：

$$X_2(HH)=x_1=\frac{100}{9},\quad X_2(HT)=x_2=\frac{50}{9},$$
$$X_2(TH)=x_3=\frac{50}{9},\quad X_2(TT)=x_4=\frac{25}{9}$$

这与式(3.3.15)相同。与前面一样，我们可以由这些公式算得最优资产组合过程Δ_0、$\Delta_1(H)$和$\Delta_1(T)$。 □

一般地，问题 3.3.3 可按上例中的思路求解。由于问题的陈述中同时出现真实概率测度和风险中性概率测度，使问题略显复杂。我们可以引入$\widetilde{\mathbb{P}}$关于$\mathbb{P}$的拉东—尼柯迪姆导数 Z，重写式(3.3.19)，使其不涉及风险中性测度。

这样,约束条件就变为:

$$\mathrm{E}\frac{Z_N X_N}{(1+r)^N}=X_0 \tag{3.3.19$'$}$$

利用状态价格密度 $\zeta=\frac{Z}{(1+r)^N}$,式(3.3.19)可被进一步重写为:

$$\mathrm{E}\,\zeta X_N=X_0 \tag{3.3.19$''$}$$

在 N 时段模型中,共有 $M=2^N$ 个可能的抛掷硬币结果序列,标记为:

$$\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^M$$

我们用上标来表明 ω^m 是整个抛掷硬币结果序列,而不是某个序列中的第 m 次抛掷结果。定义 $\zeta_m=\zeta(\omega^m)$,$p_m=\mathrm{P}(\omega^m)$,$x_m=X_N(\omega^m)$,则问题 3.3.3 可被重述如下:

问题 3.3.5 给定 X_0,求向量$(x_1,x_2,\cdots,x_M)$在

$$\sum_{m=1}^{M}p_m x_m\zeta_m = X_0$$

的约束下,最大化

$$\sum_{m=1}^{M}p_m U(x_m)$$

问题 3.3.5 的拉格朗日函数为:

$$L=\sum_{m=1}^{M}p_m U(x_m)-\lambda\left(\sum_{m=1}^{M}p_m x_m\zeta_m - X_0\right)$$

拉格朗日乘子方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}L=p_m U'(x_m)-\lambda p_m\zeta_m=0,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{3.3.22}$$

这些方程可以化简为:

$$U'(x_m)=\lambda\zeta_m,\quad m=1,2,\cdots,M \tag{3.3.23}$$

回顾 x_m 和 ζ_m 的定义,我们可将其重写为:

$$U'(X_N)=\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} \tag{3.3.24}$$

这里,我们需要考虑U'的反函数。由于函数U在其取值有限处是严格凹的,它的导数递减,从而存在反函数,记为 I。例如,若 $U(x)=\ln x$,则 $U'(x)=\frac{1}{x}$。令 $y=U'(x)=\frac{1}{x}$,可解得 $I(y)=\frac{1}{y}$。只要确定了反函数,我们就可以反解式(3.3.24),得到:

$$X_N = I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right) \tag{3.3.25}$$

这就给出了通过乘子 λ 表示的最优解 X_N 的公式。为求乘子 λ，可将 X_N 代入式(3.3.19)′：

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N} I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right] = X_0 \tag{3.3.26}$$

解此方程，求出 λ，代入式(3.3.25)，得到 X_N，再利用定理 1.2.2 中的算法，确定最优资产组合过程 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_{N-1}$。所有这些步骤在例 3.3.2(续)中都曾被实施过。

上述讨论可归结为下面的定理。

定理 3.3.6 *问题 3.3.1 可以如下求解：先解关于 λ 的方程(3.3.26)，再由式(3.3.25)计算 X_N，最后利用定理 1.2.2 中的算法，确定最优资产组合过程 $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_{N-1}$ 以及相应的资产组合价值过程 $X_1, X_2, \cdots, X_N$。式(3.3.26)中出现的函数 I 是问题 3.3.1 中效用函数 U 的导数 U' 的反函数，即 $x = I(y)$ 当且仅当 $y = U'(x)$。*

3.4 本章小结

本章详细介绍了二叉树模型中从真实概率测度到风险中性概率测度的变换，以及在有限概率模型中从一个概率测度到另一个概率测度的变换。关键的量是**拉东—尼柯迪姆导数**：

$$Z(\omega) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} \tag{3.1.1}$$

在有限概率模型中，这是两个概率测度的商。拉东—尼柯迪姆导数是严格为正的随机变量，并且$\mathbb{E}Z=1$。随机变量 Y 在两种概率测度下的期望通过以下公式相联系：

$$\widetilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[ZY] \tag{3.1.2}$$

在二叉树模型中，假定抛掷硬币出现正面和背面的真实概率分别为 p 和 q，而风险中性概率分别为 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$，那么除了**拉东—尼柯迪姆导数随机变量**：

$$Z(\omega_1 \cdots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \cdots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \cdots \omega_N)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\# H(\omega_1 \cdots \omega_N)} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\# T(\omega_1 \cdots \omega_N)} \tag{3.1.8}$$

我们还有**拉东—尼柯迪姆导数过程**：

$$Z_n = \mathbb{E}_n Z, \quad n = 0, 1, \cdots, N \tag{3.2.1}$$

这一过程也可由以下公式给出：

$$Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1\cdots\omega_n)}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1\cdots\omega_n)} \tag{3.2.4}$$

换言之，$Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)$是前 n 次抛掷硬币结果的风险中性概率与真实概率的比值。若随机变量 Y 仅依赖于前 n 次抛掷硬币的结果，其中 $0\leqslant n\leqslant N$，则方程(3.1.2)可取如下形式：

$$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[Z_nY] \tag{3.2.3}$$

这表明：当 Y 可以由前 n 次抛掷硬币结果决定时，在联系 Y 的$\widetilde{\mathbb{P}}$ 期望和$\mathbb{P}$ 期望的公式中，我们只需考虑前 n 次抛掷硬币结果的风险中性概率与真实概率的比值。

在风险中性概率测度$\widetilde{\mathbb{P}}$ 和真实概率测度$\mathbb{P}$ 下的条件期望联系如下：如果随机变量 Y 仅依赖于前 m 次抛掷硬币结果，其中 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$，则：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_nY=\frac{1}{Z_n}\mathbb{E}_n[Z_mY] \tag{3.2.5}$$

在计算条件期望$\widetilde{\mathbb{E}}_nY$ 时，设想我们已知前 n 次抛掷硬币结果 $\omega_1\cdots\omega_n$，并由假设 Y 不依赖于 $\omega_{m+1}\cdots\omega_N$；我们尚未知的而且影响 Y 值的抛掷硬币结果 $\omega_{n+1}\cdots\omega_m$ 具有 $\widetilde{\mathbb{P}}$ - 概率 $\tilde{p}^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\tilde{q}^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}$ 和 $\mathbb{P}$ - 概率 $p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}$，这两个概率的比值为：

$$\frac{Z_m(\omega_1\cdots\omega_m)}{Z_n(\omega_1\cdots\omega_n)}=\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}\left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)}$$

于是，在式(3.2.5)中，这个商随机变量被用于将$\widetilde{\mathbb{P}}$ -条件期望改写为$\mathbb{P}$ -条件期望。关于这一点，注意式(3.2.5)的右端也可以被写成$\mathbb{E}_n\left[\frac{Z_m}{Z_n}Y\right]$，因为 Z_n 仅依赖于前 n 次抛掷硬币结果。

由二叉树模型中的拉东—尼柯迪姆导数随机变量 Z 可引出**状态价格密度**：

$$\zeta(\omega)=\frac{Z(\omega)}{(1+r)^N}$$

可以将 $\zeta(\omega)$解释为在时刻 N 当且仅当抛掷硬币结果序列是 ω 时支付为 1 的衍生证券在时刻 0 相应于每单位真实概率的价格(见定义 3.1.3 后面的讨论)。换言之，所谓 ω **的状态价格** $\zeta(\omega)\mathbb{P}(\omega)$就是在时刻 N 当且仅当抛掷硬币结果序列是 ω 时支付为 1 的衍生证券在时刻 0 的价值。

我们可以利用状态价格密度求解下面的最优投资问题。

问题 3.3.1(最优投资) 给定 X_0,求适应的资产组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$,使得在财富方程

$$X_{n+1}=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-\Delta_n S_n),\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

约束下,最大化

$$\mathbb{E}U(X_N)\tag{3.3.2}$$

我们列出 N 时段模型中 $M=2^N$ 个可能的抛掷硬币结果序列,标记为 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^M$,并定义 $\zeta_m=\zeta(\omega^m)$,$p_m=\mathbb{P}(\omega^m)$ 以及 $x_m=X_N(\omega^m)$,则问题 3.3.1 可被转化为下面的问题。

问题 3.3.5 给定 X_0,求向量$(x_1,x_2,\cdots,x_M)$在

$$\sum_{m=1}^{M}p_m x_m\zeta_m=X_0$$

的约束下,最大化

$$\sum_{m=1}^{M}p_m U(x_m)$$

在问题 3.3.1 中,求解范围是所有资产组合过程,而在问题 3.3.5 中,求解范围是所有 M 个变元 $x_1,\cdots,x_M$。问题 3.3.5 较为简单,可用拉格朗日乘子法求解。最优的 x_m 值满足:

$$U'(x_m)=\lambda\zeta_m,\quad m=1,2,\cdots,M\tag{3.3.23}$$

其中,λ 是拉格朗日乘子。由此得到公式:

$$X_N=I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\tag{3.3.25}$$

其中,I 是严格递减函数 U' 的反函数,拉格朗日乘子 λ 的选取使得以下方程成立:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N}I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)\right]=X_0\tag{3.3.26}$$

一旦通过上述方程求得最优终端财富 X_N,我们可将其视为某一衍生证券的支付,再利用定理 1.2.2 中的算法,确定出作为衍生证券空头对冲的资产组合过程 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{N-1}$,这也是问题 3.3.1 的最优解。

3.5 评 注

人们也许会认为在时刻 N,当且仅当抛掷硬币结果是"状态"ω 时支付为

1 的衍生证券在时刻 0 的价值应该是期望支付,即 ω 的(真实而非风险中性)概率。然而,这没有考虑到一旦"状态"ω 不出现时支付为 0 的风险。提出状态价格来解释风险可追溯到阿罗和德布鲁(Arrow and Debreu)[1]。

最优投资问题,或者更一般的,最优消费和投资问题是许多研究工作的主题。这方面的原始文献是关于离散时间模型的哈坎松(Hakansson)[16]和关于连续时间模型的默顿[32],[33],[35](默顿的这些论文收集在[36]中)。利用状态价格密度过程的解法源于普利斯卡[37],并在考克斯和黄(Huang)[7],[8]以及卡拉察斯、莱霍茨基和施里夫(Karatzas, Lehoczky and Shreve)[27]中得到进一步发展。除了[16],所有模型都是关于连续时间的。本书专门就二叉树模型作了阐述。卡拉察斯和施里夫[28]中提供了关于这一方向的研究综述,包括投资组合有约束以及借贷与投资有不同利率等情形。

3.6 习 题

习题 3.1 在定理 3.1.1 的条件下,证明下列与该定理中(i)~(iii)类似的性质:

(i′) $\widetilde{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{Z}>0\right)=1$;

(ii′) $\widetilde{\mathbb{E}}\frac{1}{Z}=1$;

(iii′) 对任何随机变量 Y,有:

$$\mathbb{E}Y=\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{Z}\cdot Y\right]$$

换言之,$\frac{1}{Z}$在由$\widetilde{\mathbb{E}}$到$\mathbb{E}$的转换中的作用,正如同 Z 在由$\mathbb{E}$到$\widetilde{\mathbb{E}}$的转换中的作用。

习题 3.2 设$\mathbb{P}$是有限概率空间 Ω 上的概率测度。本题中,我们允许对于某些 $\omega\in\Omega$,有$\mathbb{P}(\omega)=0$。设 Z 是 Ω 上的随机变量,满足$\mathbb{P}(Z\geqslant0)=1$ 和 $\mathbb{E}Z=1$。对于 $\omega\in\Omega$,定义$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)=Z(\omega)\mathbb{P}(\omega)$,并对于 $A\subset\Omega$,定义$\widetilde{\mathbb{P}}(A)=\sum_{\omega\in A}\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$。试证明以下命题:

(i) $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是一个概率测度,即$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)=1$。

(ii) 设 Y 是随机变量,则$\widetilde{\mathbb{E}}Y=\mathbb{E}[ZY]$。

(iii) 若$\mathbb{P}(A)=0$,则$\widetilde{\mathbb{P}}(A)=0$。

(iv) 假定$\mathbb{P}(Z>0)=1$,证明:若$\widetilde{\mathbb{P}}(A)=0$,则$\mathbb{P}(A)=0$。

两个概率测度被称为是等价的,如果它们对于概率为 0 的事件是一致的

(即 $P(A)=0$ 当且仅当 $\widetilde{\mathbb{P}}(A)=0$)。由上述(iii)和(iv),可知在 $\mathbb{P}(Z>0)=1$ 的条件下,$\mathbb{P}$ 与 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 等价。

(v) 证明:如果 $\mathbb{P}$ 与 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 等价,那么它们对于概率为 1 的事件是一致的(即 $\mathbb{P}(A)=1$ 当且仅当 $\widetilde{\mathbb{P}}(A)=1$)。

(vi) 构造一个例子,其中仅有 $\mathbb{P}(Z\geqslant 0)=1$ 成立,并且 $\mathbb{P}$ 与 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 不等价。

在金融模型中,风险中性概率测度与真实概率测度总是等价的。关于哪些事件是可能的、哪些事件是不可能的,它们是一致的。

习题 3.3 利用图 3.1.1 中的股票价格模型,设真实概率为 $p=\frac{2}{3}$ 和 $q=\frac{1}{3}$,定义 S_3 在不同时刻的估计为:

$$M_n=E_n[S_3],\quad n=0,1,2,3$$

在与图 3.1.1 类似的树中填入 M_n 的值。验证 $M_n, n=0,1,2,3$ 是一个鞅。

习题 3.4 本题引用例 3.1.2 中的模型,其中的拉东—尼柯迪姆导数过程 Z_n 出现在图 3.2.1 中。

(i) 计算状态价格密度:

$$\begin{aligned}&\zeta_3(HHH),\\&\zeta_3(HHT)=\zeta_3(HTH)=\zeta_3(THH),\\&\zeta_3(HTT)=\zeta_3(THT)=\zeta_3(TTH),\\&\zeta_3(TTT)\end{aligned}$$

(ii) 利用(i)中得到的数据,通过公式(3.1.10)求习题 1.8 中的亚式期权在时刻 0 的价格。这里需要算出该习题(ii)中的 $v_0(4,4)$。

(iii) 计算状态价格密度 $\zeta_2(HT)=\zeta_2(TH)$。

(iv) 利用风险中性定价公式(3.2.6),即:

$$V_2(HT)=\frac{1}{\zeta_2(HT)}\mathbb{E}_2[\zeta_3V_3](HT)$$
$$V_2(TH)=\frac{1}{\zeta_2(TH)}\mathbb{E}_2[\zeta_3V_3](TH)$$

计算 $V_2(HT)$ 和 $V_2(TH)$。应该求得 $V_2(HT)=v_2(4,16)$ 以及 $V_2(TH)=v_2(4,10)$,其中 $v_2(s,y)$ 在习题 1.8(ii)中已算得。注意,$V_2(HT)\neq V_2(TH)$。

习题 3.5 (随机波动率、随机利率) 考虑习题 2.9 中的模型。假定真实概率测度为:

$$\mathbb{P}(HH)=\frac{4}{9},\quad \mathbb{P}(HT)=\frac{2}{9},\quad \mathbb{P}(TH)=\frac{2}{9},\quad \mathbb{P}(TT)=\frac{1}{9}$$

风险中性概率测度在习题 2.9 中已算得。

(i) 计算$\widetilde{\mathbb{P}}$关于$\mathbb{P}$的拉东—尼柯迪姆导数 $Z(HH)$、$Z(HT)$、$Z(TH)$ 和$Z(TT)$。

(ii) 拉东—尼柯迪姆导数过程 Z_0, Z_1, Z_2 满足 $Z_2=Z$。计算 $Z_1(H)$、$Z_1(T)$和 Z_0。注意 $Z_0=\mathbb{E}Z=1$。

(iii) 与本题模型相应的、不含风险中性测度的风险中性定价公式(3.2.6)为:

$$
\begin{aligned}
V_1(H) &= \frac{1+r_0}{Z_1(H)}\mathbb{E}_1\left[\frac{Z_2}{(1+r_0)(1+r_1)}V_2\right](H) \\
&= \frac{1}{Z_1(H)(1+r_1(H))}\mathbb{E}_1[Z_2V_2](H) \\
V_1(T) &= \frac{1+r_0}{Z_1(T)}\mathbb{E}_1\left[\frac{Z_2}{(1+r_0)(1+r_1)}V_2\right](T) \\
&= \frac{1}{Z_1(T)(1+r_1(T))}\mathbb{E}_1[Z_2V_2](T) \\
V_0 &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_2}{(1+r_0)(1+r_1)}V_2\right]
\end{aligned}
$$

在 $V_2=(S_2-7)^+$ 的情形下,计算 $V_1(H)$、$V_1(T)$和 V_0 并将结果与习题 2.6(ii)的答案进行比较。

习题 3.6 就 N 时段二叉树模型考虑问题 3.3.1,其中效用函数 $U(x)=\ln x$。证明:相应于最优资产组合过程的最优财富过程为 $X_n=\frac{X_0}{\zeta_n}$,$n=0,1,\cdots,N$,其中 ζ_n 是由式(3.2.7)定义的状态价格密度过程。

习题 3.7 就 N 时段二叉树模型考虑问题 3.3.1,其中效用函数 $U(x)=\frac{1}{p}x^p$,$p<1$,$p\neq 0$,证明时刻 N 的最优财富为:

$$
X_N=\frac{X_0(1+r)^N Z^{\frac{1}{p-1}}}{\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-1}}\right]}
$$

其中 Z 是$\widetilde{\mathbb{P}}$关于$\mathbb{P}$的拉东—尼柯迪姆导数。

习题 3.8 在求解问题 3.3.5 时,我们用到了拉格朗日乘子定理,然而并没有验证定理的假设条件。尤其是,根据该定理,如果约束函数的梯度不是零向量,则最优解一定满足拉格朗日乘子方程(3.3.22)。在问题 3.3.5 的情形下,这一梯度向量($p_1\zeta_1,\cdots,p_m\zeta_m$)不是零向量,因此定理假设是满足的。然而,即使定理假设满足,也并不保证最优解存在;事实上,拉格朗日乘子方程的解也有可能极小化期望效用。拉格朗日乘子方程的解还有可能既不是最大元也不是最小元。在本习题中,我们提出另一种验证由式

(3.3.25)给出的随机变量 X_N 最大化期望效用的方法。

首先作一下记号的改变,将由式(3.3.25)给出的随机变量记为 X_N^* 而不是 X_N,换言之,有:

$$X_N^* = I\left[\frac{\lambda}{(1+r)^N}Z\right] \tag{3.6.1}$$

其中,λ 是方程(3.3.26)的解。这样,我们就可以用记号 X_N 表示满足式(3.3.19)的任意(而不必是最优的)随机变量。我们必须证明:

$$\mathbb{E}U(X_N) \leqslant \mathbb{E}U(X_N^*) \tag{3.6.2}$$

(i) 对于固定的 $y>0$,证明 $x=I(y)$ 最大化 x 的函数 $U(x)-yx$,从而有:

$$U(x)-yx \leqslant U(I(y))-yI(y),\ \forall x \tag{3.6.3}$$

(ii) 在式(3.6.3)中,以随机变量 X_N 取代哑变量 x,并以随机变量 $\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}$ 取代哑变量 y,然后两边同时取期望并利用式(3.3.19)和式(3.3.26),可推得式(3.6.2)成立。

习题 3.9 (最大化达标概率) (库尔道夫(Kulldorff,1993)[30],赫斯(Heath,1995)[19])

为了测试你的投资策略的有效性,一位资金雄厚的出资人将向你提供一小笔资金 X_0,你可以在 N 时段二叉树模型框架下,进行投资运作,条件是你的资产组合价值在任何时刻都不能为负。如果到时刻 N,你的资产组合价值 X_N 至少达到出资人事先指定的正数 γ,你将会得到一大笔出资人委托你运作的资金。因此,你的问题如下:

$$最大化\mathbb{P}(X_N \geqslant \gamma)$$

其中,X_N 是初始财富值为 X_0 的资产组合财富过程在时刻 N 的价值,并且资产组合财富过程 X_n 在任何时刻都满足:

$$X_n \geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,N$$

以将问题 3.3.1 归结为问题 3.3.3 的同样方式,上述问题可以重述为:

$$最大化\mathbb{P}(X_N \geqslant \gamma)$$

约束条件为:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\frac{X_N}{(1+r)^N} = X_0, X_n \geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,N$$

(i) 证明:如果 $X_N \geqslant 0$,则 $X_n \geqslant 0$, $\forall n=1,2,\cdots,N$。

(ii) 考虑函数

$$U(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } 0\leqslant x<\gamma \\ 1, & \text{如果 } x\geqslant\gamma\end{cases}$$

证明对于每一个固定的 $y>0$,我们有:

$$U(x)-yx\leqslant U(I(y))-yI(y), \quad \forall x\geqslant 0$$

其中:

$$I(y)=\begin{cases}\gamma, & \text{如果 } 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{\gamma} \\ 0, & \text{如果 } y>\dfrac{1}{\gamma}\end{cases}$$

(iii) 假定以下方程存在解 λ:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z}{(1+r)^N}I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r_0)(1+r)^N}\right)\right]=X_0 \tag{3.6.4}$$

仿照习题 3.8 中的证法,证明最优的 X_N 由下式给出:

$$X_N^*=I\left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N}\right)$$

(iv) 如同推导问题 3.3.5 的做法,列出 $M=2^N$ 个可能的抛掷硬币结果序列,标记为 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^M$,并定义 $\zeta_m=\zeta(\omega^m)$,$p_m=\mathbb{P}(\omega^m)$,这里我们按 ζ_m 的升序排出这些序列,即我们标记这些可能的抛掷硬币结果序列,使得:

$$\zeta_1\leqslant\zeta_2\leqslant\cdots\leqslant\zeta_M$$

证明:假定方程(3.6.4)存在解 λ 等价于假定对于某个正数 K,我们有 $\zeta_K<\zeta_{K+1}$,并且

$$\sum_{m=1}^{K}\zeta_m p_m=\frac{X_0}{\gamma} \tag{3.6.5}$$

(v) 证明 X_N^* 由下式给出:

$$X_N^*(\omega^m)=\begin{cases}\gamma, & \text{如果 } m\leqslant K \\ 0, & \text{如果 } m\geqslant K+1\end{cases}$$

4

美式衍生证券

4.1 引 言

欧式期权合约中指定了到期日，而期权一旦被行权的话，也只能在到期日实施。如果期权持有人可以在到期日之前的任何时刻(包括到期日)行权，这样的期权被称为**美式期权**。由于这一提前实施特征，美式期权的价值至少如同欧式期权。有时，这种价值上的差别可以忽略，甚至为零，这时，美式期权与欧式期权相近甚至可以互相替代。在本章中我们将看到，对于不支付红利的股票的看涨期权，提前实施并无价值，即美式和欧式看涨期权价格相同。对于其他情形，例如看跌期权，这种提前实施特征具有实质性的价值，所谓**提前实施溢价**。介于美式期权与欧式期权之间的是**百慕大期权**，持有人可以在合约规定的某些日期提前行权。

由于美式期权可以在到期日之前的任何时刻被提前实施，因此在任何时刻，其价值都不低于即时行权可以获得的支付(这被称为期权的**内在价值**)。

欧式期权的贴现价格过程在风险中性测度下是一个鞅；与此不同，美式期权的贴现价格过程在风险中性测度下是一个上鞅。美式期权的持有人可能会错失最优的实施时刻，这样，期权价值将有减少的倾向，因而具有上鞅性质。然而，在提前实施并非最优的时段，美式期权的贴现价格过程的表现如同一个鞅。

为了对美式期权定价，就像欧式期权的情形一样，我们设想通过出售期权获得初始资本，然后考虑如何构建投资组合来对冲期权的空头。在到期日之前的任何时刻，都需要随时准备支付，因为我们并不知道期权何时会被实施。我们将确定对我们而言最坏的行权时刻。对于期权持有人而言，这将是**最优实施时刻**(以后我们就如此称呼)。然后，我们计算为了建立对冲组合(以应对期权持有人有可能在最优实施时刻行权)所需要的初始资本。最后，考虑如何建立投资组合，无论期权持有人是否在最优实施时刻行权，

我们都能成功地对冲期权的空头。我们的结论是:期权的初始价格正是为了对冲最优实施所需要的初始资本。

在 4.2 节中,我们给出最基本的美式衍生证券定价算法,其中衍生产品的支付非路径依赖(即支付仅与原生资产的即时价格有关,而不依赖于在此之前的任何价格)。为了建立包括路径依赖情形的完整的美式衍生证券定价理论,我们需要 4.3 节中引入的**停时**概念。由此,我们在 4.4 节中给出美式衍生证券的一般理论。其中一个结论就是:对于无红利支付股票的美式看涨期权,提前行权是不明智的。与此相关的一些结果将在 4.5 节中给出。

4.2 非路径依赖美式衍生产品

这一节中,我们将给出衍生产品的支付非路径依赖时美式衍生证券的定价算法。首先,我们回顾欧式衍生证券当支付非路径依赖时的定价算法。在 N 时段二叉树模型中,假设上升因子 u 、下降因子 d 以及利率 r 满足无套利条件 $0<d<1+r<u$。考虑一个衍生证券,它在时刻 N 的支付为 $g(S_N)$,这里 g 是某个给定函数。由于股票价格是马尔可夫过程,我们可将衍生证券在任何时刻 n 的价值 V_n 表示为该时刻股价的函数 v_n,即 $V_n=v_n(S_n)$,$n=0,1,\cdots,N$(定理 2.5.8)。根据风险中性定价公式[见式(2.4.12)及其马尔可夫简化形式式(2.5.2)],对于 $0\leqslant n\leqslant N$,函数 v_n 可由以下**欧式算法**确定:

$$v_N(s)=\max\{g(s),0\} \tag{4.2.1}$$

$$v_n(s)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us)+\tilde{q}v_{n+1}(ds)],\quad n=N-1,N-2,\cdots,0 \tag{4.2.2}$$

其中,$\tilde{p}=\dfrac{1+r-d}{u-d}$和 $\tilde{q}=\dfrac{u-1-r}{u-d}$分别是股价上升和下降的风险中性概率。(用以对冲期权空头的)复制资产组合则由下式给出([见式(1.2.17)]:

$$\Delta_n=\frac{v_{n+1}(uS_n)-v_{n+1}(dS_n)}{(u-d)S_n},\quad n=0,1,\cdots,N \tag{4.2.3}$$

现在考虑**美式衍生证券**。仍然给定期权的支付函数 g。在任何时刻 $n\leqslant N$,衍生证券的持有人可以行权并获得支付 $g(S_n)$(这一节中,支付仅依赖于行权时刻的股票价格 S_n,而不依赖于股价路径)。于是,(用以对冲期权空头的)复制资产组合的价值 X_n 总是满足:

$$X_n\geqslant g(S_n),\quad n=0,1,\cdots,N \tag{4.2.4}$$

衍生证券在每一时刻 n 的价值至少等于所谓的**内在价值** $g(S_n)$,而复制资产组合在时刻 n 的价值必须等于衍生证券的价值。

由上可知，为了给一个美式衍生证券定价，我们应将欧式算法 (4.2.2) 改换为以下的**美式算法**：

$$v_N(s)=\max\{g(s),0\} \tag{4.2.5}$$

$$v_n(s)=\max\{g(s),\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(us)+\tilde{q}v_{n+1}(ds)]\},$$
$$n=N-1,N-2,\cdots,0 \tag{4.2.6}$$

从而 $V_n=v_n(S_n)$ 将是美式衍生证券在时刻 n 的价值。

例 4.2.1 在图 4.2.1 的二时段模型中，设利率 $r=\frac{1}{4}$，于是风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。考虑一个在时刻 2 到期、敲定价格为 5 的美式看跌期权。换言之，如果期权持有人在时刻 n 行权，将获得支付 $5-S_n$。取 $g(s)=5-s$，则美式算法 (4.2.5)、(4.2.6) 变成：

$$v_2(s)=\max\{5-s,0\}$$

$$v_n(s)=\max\left\{5-s,\frac{2}{5}\left[v_{n+1}(2s)+v_{n+1}\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right\},n=1,0$$

尤其是：

$$v_2(16)=0$$
$$v_2(4)=1$$
$$v_2(1)=4$$
$$v_1(8)=\max\left\{(5-8),\frac{2}{5}(0+1)\right\}=\max\{-3,0.40\}=0.40$$
$$v_1(2)=\max\left\{(5-2),\frac{2}{5}(1+4)\right\}=\max\{3,2\}=3$$
$$v_0(4)=\max\left\{(5-4),\frac{2}{5}(0.40+3)\right\}=\max\{1,1.36\}=1.36$$

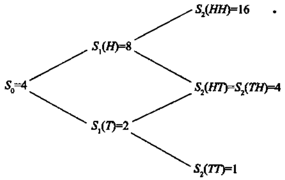

图 4.2.1 二时段模型

这一算法求得的 $v_1(2)$ 值与欧式算法的结果不同,这里,时刻 2 期权价格的贴现期望值 $\frac{2}{5}(1+4)$ 严格小于其内在价值。由于 $v_1(2)$ 严格大于相应欧式看跌期权价格,美式看跌期权的初始价格 $v_0(4)$ 也严格大于相应欧式看跌期权的初始价格。图 4.2.2 给出了美式看跌期权的价格。

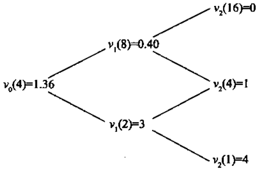

图 4.2.2 美式看跌期权的价格

现在来构建复制资产组合。我们以初始资本 1.36 开始,计算 Δ_0,使得对冲组合在时刻 1 的价值等于期权价值。如果第一次抛掷硬币结果为正面,这就要求:

$$\begin{aligned} 0.40 &= v_1(S_1(H)) \\ &= S_1(H)\Delta_0+(1+r)(X_0-\Delta_0 S_0) \\ &= 8\Delta_0+\frac{5}{4}(1.36-4\Delta_0) \\ &= 3\Delta_0+1.70 \end{aligned}$$

从而 $\Delta_0=-0.43$。另一方面,如果第一次抛掷硬币结果为背面,我们必须有:

$$\begin{aligned} 3 &= v_1(S_1(T)) \\ &= S_1(T)\Delta_0+(1+r)(X_0-\Delta_0 S_0) \\ &= 2\Delta_0+\frac{5}{4}(1.36-4\Delta_0) \\ &= -3\Delta_0+1.70 \end{aligned}$$

从而也得到 $\Delta_0=-0.43$。我们还能利用式(4.2.3) 计算 Δ_0:

$$\Delta_0=\frac{v_1(8)-v_1(2)}{8-2}=\frac{0.40-3}{8-2}=-0.43$$

无论如何,只要我们以初始资本 $X_0=1.36$ 开始,在初始时刻持有 Δ_0 份股票,则到时刻 1,不论抛掷硬币结果如何,我们都将有 $X_1=V_1=v_1(S_1)$。

假设第一次抛掷硬币结果为背面。期权持有人可能会在时刻 1 行权,这种情况下,我们需要支付 3 美元(正好是对冲组合的价值)给期权持有人,并

且不必再作对冲。然而，期权持有人也可能拒绝行权，这种情况下，期权仍然存在，我们必须继续作对冲。

我们进一步详细考察当第一次抛掷硬币结果为背面而期权持有人在时刻 1 没有行权的情形。注意到在下一时段，如果第二次抛掷硬币结果为正面，期权价值为 $v_2(4)=1$；如果第二次抛掷硬币结果为背面，期权价值为 $v_2(1)=4$。由风险中性定价公式，为构建对冲组合应对这两种可能性，我们在时刻 1 所需要的资本为：

$$\frac{2}{5}(v_2(4)+v_2(1))=2$$

然而，我们的对冲组合在时刻 1 的价值为 3 美元，于是我们可以消费 1 美元并用余下的 2 美元继续对冲。由此可见，这种情况下期权持有人错失了最优实施时刻。

具体而言，我们消费 1 美元并将股票头寸调整为 $\Delta_1(T)$。如果第二次抛掷硬币结果为正面，我们希望：

$$\begin{aligned}1&=v_2(S_2(TH))\\&=4\Delta_1(T)+\frac{5}{4}(2-2\Delta_1(T))\\&=1.5\Delta_1(T)+2.50\end{aligned}$$

从而 $\Delta_1(T)=-1$。如果第二次抛掷硬币结果为背面，我们希望：

$$\begin{aligned}4&=v_2(S_2(TT))\\&=\Delta_1(T)+\frac{5}{4}(2-2\Delta_1(T))\\&=-1.5\Delta_1(T)+2.50\end{aligned}$$

从而也有 $\Delta_1(T)=-1$。我们还能直接利用式(4.2.3) 求得这一结果：

$$\Delta_1(T)=\frac{v_2(4)-v_2(1)}{4-1}=\frac{1-4}{4-1}=-1$$

为完整起见，我们考虑第一次抛掷硬币结果为正面的情形。这样，在时刻 1，资产组合的价值为 $X_1(H)=0.40$，我们选取：

$$\Delta_1(H)=\frac{v_2(16)-v_2(4)}{16-4}=\frac{0-1}{16-4}=-\frac{1}{12}$$

如果第二次抛掷硬币结果为正面，我们的对冲组合在时刻 2 的价值为：

$$X_2(HH)=16\Delta_1(H)+\frac{5}{4}(0.40-8\Delta_1(H))=0=v_2(16)$$

如果第二次抛掷硬币结果为背面，我们的对冲组合在时刻 2 的价值为：

$$X_2(HT)=4\Delta_1(H)+\frac{5}{4}(0.40-8\Delta_1(H))=1=v_2(4)$$

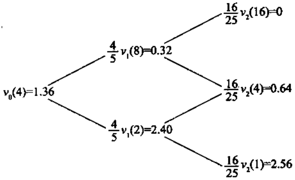

图 4.2.3 美式看跌期权的贴现价格

最后，我们来考虑图 4.2.3 中美式看跌期权的贴现价格过程。在风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$ 下，它们形成一个上鞅。在每一个节点上，美式看跌期权的贴现价格大于或者等于紧接的两个节点上贴现价格的平均值。这个价格过程不是一个鞅，因为在时刻 1 相应于第一次抛掷硬币结果为背面的节点上，严格不等式成立。 □

下面的定理概括了例 4.2.1 中的思路以及美式算法(4.2.5)和(4.2.6)。事实上，我们将证明更为一般的定理 4.4.3 和定理 4.4.4，它们涵盖了路径无关和路径依赖的情形。因此，我们不必专门证明下面的定理 4.2.2。

定理 4.2.2 (路径无关美式衍生产品的复制) *考虑 N 时段二叉树资产定价模型，其中 $0<d<1+r<u$，并且有：*

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

给定支付函数 $g(s)$，并由式(4.2.5)和(4.2.6) 关于时间倒向递归定义函数列 $v_N(s),v_{N-1}(s),\cdots,v_0(s)$，然后定义：

$$\Delta_n=\frac{v_{n+1}(uS_n)-v_{n+1}(dS_n)}{(u-d)S_n} \tag{4.2.7}$$

$$C_n=v_n(S_n)-\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(uS_n)+\tilde{q}v_{n+1}(dS_n)] \tag{4.2.8}$$

其中，$n=0,1,\cdots,N-1$。对所有的 n，我们有 $C_n\geqslant 0$。若令 $X_0=v_0(S_0)$ 并且关于时间正向递归定义资产组合的价值过程 $X_0,X_1,\cdots,X_N$：

$$X_{n+1}=\Delta_nS_{n+1}+(1+r)(X_n-C_n-\Delta_nS_n) \tag{4.2.9}$$

则对所有的 n 和所有的 $\omega_1\cdots\omega_n$，我们有：

$$X_n(\omega_1\cdots\omega_n)=v_n(S_n(\omega_1\cdots\omega_n)) \tag{4.2.10}$$

尤其是，$X_n\geqslant g(S_n)$，$n=0,1,\cdots,N$。

除了包含有消费的可能性之外，方程（4.2.9）与第一章的财富方程(1.2.14)是相同的。定理4.2.2确保我们能够成功地对冲在每一时刻n的内在价值为$g(S_n)$的美式衍生证券的空头。事实上，我们不仅能够对冲，有时也许还能消费。由于式(4.2.10)以及由式(4.2.6)保证了$v_n(S_n)\geqslant g(S_n)$这一事实，我们的对冲组合价值X_n总是至少等于衍生证券的内在价值。C_n的非负性也来自式(4.2.6)，因为式(4.2.6)表明：

$$v_n(S_n)\geqslant\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{n+1}(uS_n)+\tilde{q}v_{n+1}(dS_n)]$$

4.3 停　时

一般而言，美式衍生证券应该被实施的时刻是随机的，它依赖于原生资产的价格变动。在例4.2.1中我们断言，如果第一次抛掷硬币结果为背面，该例子中的美式看跌期权的持有人应该在时刻1行权。另一方面，如果第一次抛掷硬币结果为正面，则看跌期权的持有人不应该在时刻1行权，而是要等待第二次抛掷硬币的结果。事实上，如果第一次抛掷硬币结果为正面，则股票价格为$S_1(H)=8$，该看跌期权是虚值的。如果第二次抛掷硬币的结果还是正面，则股票价格为$S_2(HH)=16$，该看跌期权仍是虚值的，持有人应该不再行权而让它作废。另一方面，如果第一次抛掷硬币结果为正面，而第二次抛掷硬币结果为背面，则股票价格$S_2(HT)=4$，该看跌期权在时刻2是实值的，持有人应该行权。我们用下面的随机变量τ来刻划上述行权法则：

$$\tau(HH)=\infty,\quad \tau(HT)=2,\quad \tau(TH)=1,\quad \tau(TT)=1 \tag{4.3.1}$$

图4.3.1显示了这一行权法则。

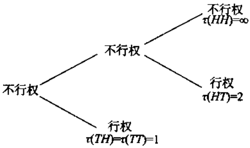

图4.3.1　行权法则τ

对于τ取值为∞的那些路径，期权将不被实施而作废。在例4.2.1中，这样的路径只有对应HH的那一条。对于抛掷硬币结果为HT的情形，应

在时刻 2 行权。对于抛掷硬币结果为 TH 或 TT 的情形,应在时刻 1 行权。通过式(4.3.1) 定义在 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$ 上的随机变量 τ 在集合 $\{0,1,2,\infty\}$ 中取值。至少对于 Ω 中的三个样本点,我们可以将其视为通过行权从而"停止"美式看跌期权的对冲问题。这是以下定义 4.3.1 中**停时**的一个特例。

如果第一次抛掷硬币的结果为正面,上述例子中看跌期权的持有人会后悔没能在时刻 0 行权。尤其是,如果持有人对抛掷硬币结果有先见之明,就会采取以下行权法则:

$$\rho(HH)=0,\quad \rho(HT)=0,\quad \rho(TH)=1,\quad \rho(TT)=2 \qquad (4.3.2)$$

图 4.3.2 显示了这一行权法则。根据这样的行权法则,不论抛掷硬币结果如何,看跌期权的持有人都能够实值行权。问题在于,如果没有"内部信息",行权法则 ρ 是无法实施的。它要求基于第一次抛掷硬币结果做出是否在时刻 0 行权的决定。如果第一次抛掷硬币结果为背面,再基于第二次抛掷硬币结果做出是否在时刻 1 行权的决定。这不是下面定义 4.3.1 意义下的停时。

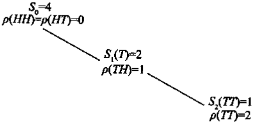

图 4.3.2 行权法则 ρ

定义 4.3.1 在 N 时段二叉树模型中,**停时** τ 是一个随机变量,取值为 $0,1,\cdots,N$ 或者∞,并且满足下列条件:如果 $\tau(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N)=n$,那么对所有的 $\omega_{n+1}'\cdots\omega_N'$ 都有 $\tau(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}'\cdots\omega_N')=n$。

上述定义中的条件:如果 $\tau(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N)=n$,那么对所有的 $\omega_{n+1}'\cdots\omega_N'$ 都有 $\tau(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}'\cdots\omega_N')=n$,说明停时仅依赖于能够获得的信息。如果停时出现在时刻 n,那么这一决定仅仅是基于前 n 次抛掷硬币的结果,与随后抛掷硬币的结果无关。

只要有一个随机过程和一个停时,我们就能定义一个**停止过程**(见图 4.3.3)。例如,设 Y_n是图 4.2.3 中的美式看跌期权的贴现价格过程,即:

$$Y_0=1.36,\quad Y_1(H)=0.32,\quad Y_1(T)=2.40,$$
$$Y_2(HH)=0,\quad Y_2(HT)=Y_2(TH)=0.64,\quad Y_2(TT)=2.56$$

设 τ 是式(4.3.1) 给出的停时。我们通过下面的公式定义一个停止过程 $Y_{n\wedge\tau}$(记号 $n\wedge\tau$ 表示 n 与 τ 的较小值)。令:

$$Y_{0\wedge\tau}=Y_0=1.36$$

因为不论抛掷硬币结果如何，$0\wedge\tau=0$。同理：

$$Y_{1\wedge\tau}=Y_1$$

因为不论抛掷硬币结果如何，$1\wedge\tau=1$。然而，$2\wedge\tau$ 依赖于抛掷硬币结果：如果是 HH 或者 HT，则 $2\wedge\tau=2$；如果是 TH 或者 TT，则 $2\wedge\tau=1$。因此，我们有四种情况：

$$Y_{2\wedge\tau}(HH)=Y_2(HH)=0,\ Y_{2\wedge\tau}(HT)=Y_2(HT)=0.64,$$
$$Y_{2\wedge\tau}(TH)=Y_1(T)=2.40,\ Y_{2\wedge\tau}(TT)=Y_1(T)=2.40$$

注意到即使 τ 的取值为 1，上述构造的过程在时刻 1 后还在继续。时间并不停止，然而这一过程的值冻结在时刻 τ。将 $Y_{n\wedge\tau}$ 称为**冻结过程**也许更合适，不过**停止过程**这个术语已经被广泛使用。

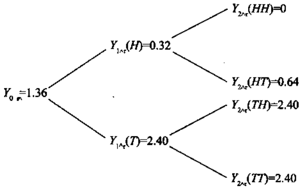

图 4.3.3 停止过程

图 4.2.3 中的美式看跌期权的贴现价格过程 $Y_n=\left(\frac{4}{5}\right)^n v_n(S_n)$ 在风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$ 下是一个上鞅，但不是一个鞅，因为：

$$2.40=Y_1(T)>\frac{1}{2}Y_2(TH)+\frac{1}{2}Y_2(TT)=\frac{1}{2}\cdot 0.64+\frac{1}{2}\cdot 2.56=1.60$$

停止过程 $Y_{n\wedge\tau}$ 是一个鞅。尤其是：

$$2.40=Y_{1\wedge\tau}(T)=\frac{1}{2}Y_{2\wedge\tau}(TH)+\frac{1}{2}Y_{2\wedge\tau}(TT)=\frac{1}{2}\cdot 2.40+\frac{1}{2}\cdot 2.40$$

这一点，一般也是对的。在风险中性概率测度下，美式衍生证券的贴现价格过程是一个上鞅。然而，如果这个过程停止于最优实施时刻，它就成为一个鞅。如果在某个时刻，严格的上鞅不等式成立，那么该衍生证券的持有人已错失了最优实施机会。

我们已经通过例子知道,可以停止一个非鞅过程得到一个鞅。当然,如果被停止的过程原本就是一个鞅,那么得到的停止过程一定是一个鞅,可能与原先的是不同的鞅。这是关于停时的一般定理(称为可选抽样定理)的一个结论。

定理 4.3.2 (可选抽样——第一定理) 将一个鞅停止于停时得到的停止过程仍是一个鞅。将一个上鞅(或下鞅)停止于停时得到的停止过程仍是一个上鞅(或下鞅)。

我们通过例子来说明定理的第一部分。在图 4.3.4 中,我们考虑贴现股票价格过程 $M_n=\left(\frac{4}{5}\right)^n S_n$,在风险中性概率 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$下,这是一个鞅。在每一个节点,其值为紧接的两个节点处相应值的平均。在图 4.3.5 中,同样的过程被停止于式(4.3.1) 给出的停时 τ。仍然是每一个节点处的值为紧接的两个节点处相应值的平均。

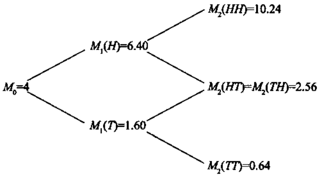

图 4.3.4 贴现股价过程

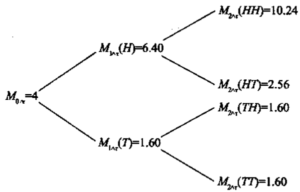

图 4.3.5 贴现股价过程停止于停时

在图 4.3.3 中,一个上鞅停止于停时,得到的是一个鞅,当然得到的也是上鞅。这也就给出了定理 4.3.2 第二个论断的一个说明。

最后，我们注意到如果将图 4.3.4 中的贴现股价过程停止于式(4.3.2)给出的随机变量 ρ(不是一个停时)，就会破坏鞅性质。图 4.3.6 中给出了所得到的停止过程。随机时间 ρ 是超前的，在股价即将上升时就决定停止。这就引起贴现股价向下偏移。

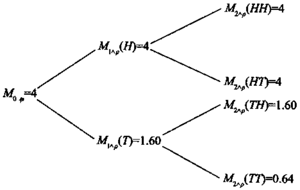

图 4.3.6 贴现股价过程停止于非停时

下鞅具有上升的倾向。特别地，如果 X_n 是一个下鞅，则 $\mathbb{E}X_m \leqslant \mathbb{E}X_n$，$\forall m \leqslant n$。用 $\tau \wedge n$ 替换 m(其中 τ 是一个停时)，这一不等式仍然成立。

定理 4.3.3(可选抽样——第二定理) 设 $X_n, n=0,1,\cdots,N$ 是一个下鞅，τ 是一个停时，则 $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} \leqslant \mathbb{E}X_n$；如果 X_n 是一个上鞅，则 $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} \geqslant \mathbb{E}X_n$；如果 X_n 是一个鞅，则 $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau} = \mathbb{E}X_n$。

定理 4.3.3 中的期望是在使得 X_n 是一个下鞅(或者上鞅，或者鞅)的概率下计算的。特别地，如果 X_n 是二叉树模型中风险中性概率下的一个下鞅，则定理结论应该是 $\widetilde{\mathbb{E}}X_{n\wedge\tau} \leqslant \widetilde{\mathbb{E}}X_n$。

4.4 一般美式衍生产品

这一节，我们介绍内在价值可能路径依赖的美式衍生证券。对于这样的衍生证券，我们定义其价格过程并推导相关的性质。我们还将表明如何对冲这类衍生证券的空头并研究最优实施时刻。这一节做出的所有论断都给出了数学证明。

我们的讨论限于 N 时段二叉树模型的框架，其中上升因子 u、下降因子 d 以及利率 r 满足无套利条件：$0<d<1+r<u$。在这样的模型中，定义 $\mathcal{S}_n$ 为取值在 $\{n,n+1,\cdots,N,\infty\}$ 中的所有停时 τ 的集合。尤其是，集合 $\mathcal{S}_0$ 包括了所有停时。在 $\mathcal{S}_N$ 中的一个停时，可以在某些路径上取值为 N，在另一些路径上取值为∞，此外不能取其他值。

定义 4.4.1 对每一个 $n, n=0,1,\cdots,N$，设 G_n 是依赖于前 n 次抛掷硬币结果的随机变量。具有内在价值过程 G_n 的美式衍生证券是一个合约，它

可以在时刻 N 之前的任何时刻(包括时刻 N)被实施,并且如果在时刻 n 被实施,支付为 G_n。我们通过以下**美式风险中性定价公式**来定义这一合约的**价格过程**:

$$V_n=\max_{\tau\in\mathcal{S}_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}}G_\tau\right],\quad n=0,1,\cdots,N \qquad (4.4.1)$$

式(4.4.1)背后的想法是这样的:假设美式衍生证券在时刻 $0,1,\cdots,n-1$都未被实施,我们试图确定其在时刻 n 的价值。在时刻 n,衍生证券的持有人可以选择立即实施或者是推迟到以后某个时刻实施。如果实施的话,行权日期可以依赖于直到实施时刻的股价路径,但仅限于此。换言之,行权日期将是一个停时 τ。由于时刻 n 之前没有行权,这个停时一定在 $\mathcal{S}_n$ 中。当然,如果持有人永不行权($\tau=\infty$),则其获得支付为 0。出现在式(4.4.1)中的$\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}$告诉我们对相应于 $\tau=\infty$的那些路径,需要用 0 替代$\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\dfrac{1}{(1+r)^{\tau-n}}G_\tau$。一旦持有人根据停时 $\tau\in\mathcal{S}_n$ 行权,衍生证券在时刻 n 的价值就是其支付在风险中性概率下的贴现期望值。因此就要选择停时 τ,使得该值尽可能大。

由此定义立刻推得:

$$V_N=\max\{G_N,0\} \qquad (4.4.2)$$

为证明这一点,我们在式(4.4.1)中取 $n=N$,使之成为:

$$V_N=\sup_{\tau\in\mathcal{S}_N}\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-N}}G_\tau$$

S_N 中的停时,只能取值 N 和∞,对于这样的停时,有:

$$\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-N}}G_\tau=\mathbb{I}_{\{\tau=N\}}G_N$$

为了使之尽可能大,我们应该选取 $\tau(\omega_1\cdots\omega_N)=N$,如果 $G_N(\omega_1\cdots\omega_N)>0$;$\tau(\omega_1\cdots\omega_N)=\infty$,如果 $G_N(\omega_1\cdots\omega_N)\leqslant 0$。对于这样选取的 τ,我们有$\mathbb{I}_{\{\tau=N\}}G_N=\max\{G_N,0\}$,从而式(4.4.2)成立。

在由定义 4.4.1 推得其他结论之前,我们重新考察例 4.2.1,验证定义 4.4.1 与该例中得到的美式看跌期权的价格是一致的。

例 4.2.1(续) 对于图 4.2.1 中的股价过程,敲定价格为 5 的美式看跌期权的内在价值见图 4.4.1。这里 $N=2$,因而式(4.4.2)成为:

$$V_2(HH)=0,\quad V_2(HT)=V_2(TH)=1,\quad V_2(TT)=4$$

对于 $n=1$ 运用式(4.4.1),首先考虑第一次抛掷硬币结果为正面的情形,于是:

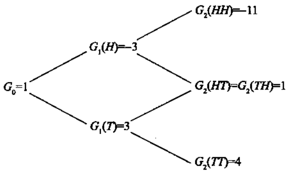

图 4.4.1　内在价值

$$V_1(H)=\max_{\tau\in\mathscr{S}_1}\widetilde{\mathbb{E}}_1\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-1}G_\tau\right](H) \tag{4.4.3}$$

为了使式(4.4.3)右端的条件期望尽可能大，应该取 $\tau(HH)=\infty$（在 HH 的情形不行权）且 $\tau(HT)=2$（在 HT 的情形，于时刻 2 行权）。由于在时刻 2 是否行权的决定基于时刻 2 能获得的信息，这符合停时所要求的性质。这一行权策略使得式(4.4.3)等于

$$V_1(H)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}G_2(HT)=0.40$$

然后考虑第一次抛掷硬币结果为背面的情形，这时：

$$V_1(T)=\max_{\tau\in\mathscr{S}_1}\widetilde{\mathbb{E}}_1\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-1}G_\tau\right](T) \tag{4.4.4}$$

为了在已知第一次抛掷硬币结果为背面的情况下使式(4.4.4)右端的条件期望尽可能大，我们需要考虑两种可能：在时刻 1 行权或者在时刻 2 行权。显然我们希望在其中一个时刻行权，因为无论第二次抛掷硬币结果如何，期权都将是实值的。如果取 $\tau(TH)=\tau(TT)=1$，则：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-1}G_\tau\right](T)=G_1(T)=3$$

如果取 $\tau(TH)=\tau(TT)=2$，则：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-1}G_\tau\right](T)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4\right)=2$$

我们不能取 $\tau(TH)=1$ 且 $\tau(TT)=2$，因为这将破坏停时所要求的性质。于是，由式(4.4.4)可知 $V_1(T)=3$。

最后，对于 $n=0$，我们有：

$$V_0=\max_{\tau\in\mathscr{S}_0}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau}G_\tau\right] \tag{4.4.5}$$

这时,有许多停时可以考虑(见习题 4.5),但是,只有下列停时才能使得 $\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau}G_{\tau}\right]$尽可能大:

$$\tau(HH)=\infty,\quad \tau(HT)=2,\quad \tau(TH)=\tau(TT)=1 \tag{4.4.6}$$

选取这一停时,式(4.4.5)成为:

$$\begin{aligned} V_0 &=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^2 G_2(HT)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot G_1(T) \\ &=\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{25}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot 3 \\ &=1.36 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

上面得到的期权价格记录在图 4.4.2 中,它们与图 4.2.2 中的价格是一致的,唯一的区别是在图 4.2.2 中这些价格是作为股价的函数 v_n,而这里是作为随机变量(即抛掷硬币结果的函数)。两个图中的价格由公式 $V_n=v_n(S_n)$相联系。

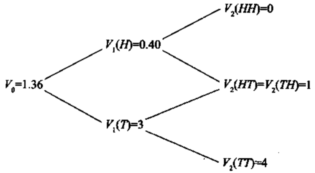

图 4.4.2　美式看跌期权价格

现在,我们来推导由定义 4.4.1 给出的美式衍生证券价格过程的性质。这些性质说明了式(4.4.1)中的 V_n 被称为美式衍生证券价格的理由。

定理 4.4.2　*由定义 4.4.1 给出的美式衍生证券价格过程具有如下性质:*

(i) *对所有的 n, $V_n\geqslant\max\{G_n,0\}$;*

(ii) *贴现过程 $\frac{1}{(1+r)^n}V_n$ 是一个上鞅;*

(iii) *如果另有过程 Y_n 满足:对所有的 n, $Y_n\geqslant\max\{G_n,0\}$ 且 $\frac{1}{(1+r)^n}Y_n$ 是一个上鞅,则对所有的 n, $Y_n\geqslant V_n$。*

性质(iii)也可被表述为:V_n 是满足性质(i)和(ii)的最小过程。

我们将看到,定理 4.4.2 的性质(ii)确保投资者能以初始资本 V_0 构建对冲资产组合,使得在任何时刻 n,资产组合的价值为 V_n。性质(i)确保这样操作的投资者可以成功地对冲衍生证券的空头,无论衍生证券持有人何时

行权，对冲资产组合的价值足以支付该衍生证券。于是性质(i)和(ii)保证了式(4.4.1)中的价格 V_n 可以被衍生证券出售者接受。性质(iii)则表明，为确保衍生证券出售者能接受，式(4.4.1)中的价格 V_n 是最低的。因此性质(iii)保证了价格 V_n 对于衍生证券的购买者是公平的。

【证明】 首先证明性质(i)。给定 n，考虑 $\mathcal{S}_n$ 中这样的停时 $\hat{\tau}$：无论抛掷硬币结果如何，它都取值为 n。于是：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\hat{\tau}\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\hat{\tau}-n}}G_{\hat{\tau}}\right]=G_n$$

由于 V_n 是对于所有停时 $\tau\in\mathcal{S}_n$，$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}}G_\tau\right]$的一切可能值中最大的，故必有 $V_n\geqslant G_n$。另一方面，选取 $\mathcal{S}_n$ 中这样的停时 $\bar{\tau}$：无论抛掷硬币结果如何，它都取值为∞。则：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\bar{\tau}\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\bar{\tau}-n}}G_{\bar{\tau}}\right]=0$$

同样由 V_n 的最大性，必有 $V_n\geqslant 0$。因此，性质(i)成立。

再证明性质(ii)。给定 n，假设 τ^* 是在 V_{n+1} 定义中取最大值的停时，即 $\tau^*\in\mathcal{S}_{n+1}$并且：

$$V_{n+1}=\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}}G_{\tau^*}\right]\tag{4.4.8}$$

注意到，$\tau^*\in\mathcal{S}_n$ 也成立，故由累次条件期望可得：

$$\begin{aligned}V_n&\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}}G_{\tau^*}\right]\\&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}}G_{\tau^*}\right]\right]\\&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}}G_{\tau^*}\right]\right]\\&=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}V_{n+1}\right]\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

两边同除以$(1+r)^n$，就得到了贴现价格过程的上鞅性质：

$$\frac{1}{(1+r)^n}V_n\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}}V_{n+1}\right]$$

最后证明性质(iii)。设 Y_n 是另一个满足条件(i)和(ii)的过程。给定 $n\leqslant N$，设 τ 是 $\mathcal{S}_n$ 中的停时。由于对所有的 k，$Y_k\geqslant\max\{G_k,0\}$，我们有：

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}G_\tau&\leqslant\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\max\{G_\tau,0\}\\&\leqslant\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\max\{G_{N\wedge\tau},0\}+\mathbb{I}_{\{\tau=\infty\}}\max\{G_{N\wedge\tau},0\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\{G_{N\wedge\tau}, 0\} \\
&\leqslant Y_{N\wedge\tau}
\end{aligned}
$$

再利用可选抽样定理 4.3.2 以及关于$\frac{1}{(1+r)^k}Y_k$ 的上鞅性质,可得:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}G_\tau\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}G_\tau\right] \\
&\leqslant \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}Y_{N\wedge\tau}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau}}Y_{n\wedge\tau} \\
&= \frac{1}{(1+r)^n}Y_n
\end{aligned}
$$

上述最后的等式是因为停时 $\tau\in\mathscr{S}_n$ 在任何路径上的取值都大于或者等于 n 这一事实。两边同乘以$(1+r)^n$,得到:

$$
\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}}G_\tau\right]\leqslant Y_n
$$

由于 V_n 是对于所有停时 $\tau\in\mathscr{S}_n$,$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}}G_\tau\right]$的一切可能值中最大的,而这些值全都小于或者等于 Y_n,故必有 $V_n\leqslant Y_n$。 □

现在,我们将由式(4.2.5)和式(4.2.6) 给出的美式定价算法推广到路径依赖的衍生证券。

定理 4.4.3 对于定义 4.4.1 中给出的路径依赖的衍生证券价格过程,我们有如下美式定价算法:

$$
V_N(\omega_1\cdots\omega_N) = \max\{G_N(\omega_1\cdots\omega_N), 0\} \tag{4.4.10}
$$

$$
V_n(\omega_1\cdots\omega_n) = \max\{G_n(\omega_1\cdots\omega_n)
$$

$$
\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)]\}, \quad n=N-1,\cdots,0 \tag{4.4.11}
$$

【证明】 我们将证明由式(4.4.10)和(4.4.11)递归定义的 V_n 满足定理 4.4.2 的性质(i)和(ii),并且是具有这些性质的最小过程。然而根据定理 4.4.2,由式(4.4.1)给出的是具有这些性质的最小过程,因此算法(4.4.10)和(4.4.11)所生成的就是公式 (4.4.1) 给出的同一过程。

首先验证 V_n 满足定理 4.4.2 的性质(i)。显然,由式(4.4.10) 定义的 V_N 满足 $n=N$ 时的性质(i)。关于时间作倒向归纳,假设对于 0 与 $N-1$ 之间的某个 n,有 $V_{n+1}\geqslant\max\{G_{n+1}, 0\}$;于是,由式(4.4.11) 可得:

$$
V_n(\omega_1\cdots\omega_n)\geqslant\max\{G_n(\omega_1\cdots\omega_n), 0\}
$$

这就证明由式(4.4.10)和(4.4.11)递归定义的 V_n 满足定理 4.4.2 的性质(i)。

然后验证 $\frac{1}{(1+r)^n}V_n$ 是一个上鞅。由式(4.4.11) 立即可得:

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)\geqslant\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]$$

$$=\widetilde{\mathrm{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}V_{n+1}\right](\omega_1\cdots\omega_n) \tag{4.4.12}$$

两边同乘以$\frac{1}{(1+r)^n}$,就得到所要验证的上鞅性质。

最后,我们必须证明由式(4.4.10)和式(4.4.11)定义的 V_n 是满足定理 4.4.2 的性质(i)和(ii)的最小过程。设 $\bar{V}_n$ 是满足定理 4.4.2 的性质(i)和(ii)的任一过程。由式(4.4.10),显然有 $\bar{V}_N\geqslant\max\{G_N,0\}=V_N$。按时间作倒向归纳,假设对于 0 与 $N-1$ 之间的某个 n,有 $\bar{V}_{n+1}\geqslant V_{n+1}$;注意到上鞅性质(ii)蕴含不等式 (4.4.12),由 $\bar{V}_n$ 满足定理 4.4.2 的性质(i)和(ii)以及归纳假设可得:

$$\bar{V}_n(\omega_1\cdots\omega_n)\geqslant\max\{G_n(\omega_1\cdots\omega_n),$$
$$\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\},\quad\forall n=N-1,\cdots,0 \tag{4.4.13}$$

而由式(4.4.11) 定义的 $V_n(\omega_1\cdots\omega_n)$等于式(4.4.13) 的右端。这就证明了 V_n 是满足定理 4.4.2 的性质(i)和(ii)的最小过程。 □

为了表明定义 4.4.1 中确实给出了路径依赖美式衍生证券的价格过程,我们必须证明可以利用这一过程进行空头对冲。为此,需要将定理 4.2.2 推广到路径依赖的情形。

定理 4.4.4(路径依赖美式衍生产品的复制) *考虑 N 时段二叉树资产定价模型,其中 $0<d<1+r<u$,并且有:*

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

对于任意 $n,n=0,1,\cdots,N$,设 G_n 是依赖于前 n 次抛掷硬币结果的随机变量。利用定义 4.4.1 中给出的 V_n,定义:

$$\Delta_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)}{S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)} \tag{4.4.14}$$

$$C_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n)-\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)] \tag{4.4.15}$$

其中 $n=0,1,\cdots,N-1$。对所有的 n,我们有 $C_n\geqslant 0$。若令 $X_0=V_0$ 并且按时间正向递归定义资产组合的价值过程 $X_0,X_1,\cdots,X_N$:

$$X_{n+1}=\Delta_n S_{n+1}+(1+r)(X_n-C_n-\Delta_n S_n) \tag{4.4.16}$$

则对所有的 n 和所有的 $\omega_1\cdots\omega_n$,有:

$$X_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\cdots\omega_n) \tag{4.4.17}$$

尤其是,$X_n\geqslant G_n$,$n=0,1,\cdots,N$。

【证明】 C_n 的非负性由定理 4.4.2 的性质(ii)或者等价地由式(4.4.12)直接可得。

为了证明式(4.4.17),我们对 n 作归纳法。这一部分的证明与定理 2.4.8 的证明是相同的。归纳假设是:对于 $n\in\{0,1,\cdots N-1\}$ 和所有 $\omega_1\cdots\omega_n$,有 $X_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_n(\omega_1\cdots\omega_n)$。我们需要证明:

$$X_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H) \tag{4.4.18}$$

$$X_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T) \tag{4.4.19}$$

这里我们只证明 (4.4.18),(4.4.19) 同理可证。

首先,注意到:

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)-C_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n H)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n T)]$$

由于 $\omega_1\cdots\omega_n$ 在后面的证明中被固定,不妨将其略去。例如,上面的方程可以简写成:

$$V_n-C_n=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)]$$

计算可得:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(H)&=\Delta_n S_{n+1}(H)+(1+r)(X_n-C_n-\Delta_n S_n)\\
&=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H)-S_{n+1}(T)}(S_{n+1}(H)-(1+r)S_n)+(1+r)(V_n-C_n)\\
&=\frac{V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}(uS_n-(1+r)S_n)+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T))\frac{u-1-r}{u-d}+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T))\tilde{q}+\tilde{p}V_{n+1}(H)+\tilde{q}V_{n+1}(T)\\
&=(\tilde{p}+\tilde{q})V_{n+1}(H)=V_{n+1}(H)
\end{aligned}$$

这就是式(4.4.18)。

由式(4.4.17)和定理 4.4.2 的性质(i)可以推得定理最后的结论:

$$X_n\geqslant G_n,\quad \forall n$$ □

定理 4.4.4 表明:由式(4.4.1) 给出的美式衍生证券价格 V_n 可以被衍

生证券出售者接受,因为出售者能够建立空头对冲。接下来我们将说明这个价格也是购买者可以接受的。固定 n,假定直到时刻 n 衍生证券尚未被实施,并将式(4.4.1) 中取最大值的停时记为 $\tau^* \in \mathcal{S}_n$,于是:

$$V_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leqslant N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}} G_{\tau^*}\right] \tag{4.4.20}$$

对于 $k=n,n+1,\cdots,N$,定义:

$$C_k = \mathbb{I}_{\{\tau^*=k\}} G_k$$

如果衍生证券的持有人根据停时 τ^* 行权,则将在时刻 $n,n+1,\cdots,N$ 分别收到现金流 $C_n,C_{n+1},\cdots,C_N$。事实上,这些 C_k 中至多仅有一个值为非零。如果期权在到期日 N 或者在此之前被实施,那么相应于行权时刻的 C_k 就是其中仅有的非零支付。然而,沿着不同的路径,支付时刻可能并不相同。在任何情况下,式(4.4.20)都将成为:

$$V_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\sum_{k=n}^{N} \mathbb{I}_{\{\tau^*=k\}} \frac{1}{(1+r)^{k-n}} G_k\right] = \widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\sum_{k=n}^{N} \frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}\right]$$

由定理 2.4.8 可知,这正是在时刻 $n,n+1,\cdots,N$ 分别收到 $C_n,C_{n+1},\cdots,C_N$ 这一现金流的价值。一旦期权持有人决定根据停时 τ^* 行权,这也恰好是其所持有的合约价值。因此,由式(4.4.1) 给出的美式衍生证券价格 V_n 价格也是购买者可以接受的。

还需要提供美式衍生证券持有人选择最优实施时刻的方法。我们就 $n=0$ 考虑这一问题[即对于 $n=0$,寻求停时 $\tau^* \in \mathcal{S}_0$,使得式(4.4.1) 的右端取最大值]。

定理 4.4.5(最优实施) *对于 $n=0$,使得式(4.4.1)的右端取最大值的停时为:*

$$\tau^* = \min\{n; V_n = G_n\} \tag{4.4.21}$$

即:

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leqslant N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*}} G_{\tau^*}\right] \tag{4.4.22}$$

美式衍生证券的价值总是大于或者等于其内在价值。式(4.4.21)中的停时 τ^* 是两者相等的第一时刻。有可能两者永不相等。例如,美式看跌期权的价值总是大于或者等于 0,然而,看跌期权有可能总是虚值(即内在价值为负)。在这种情况下,式(4.4.21) 的右端是在空集上取最小值(使得 $V_n = G_n$ 的整数 n 的集合是空集),按照数学上的约定,空集上的最小值是 ∞。对于我们,$\tau^* = \infty$ 是美式衍生证券永远不被实施的同义语。

【定理 4.4.5 的证明】 首先注意到,在风险中性概率测度下,停止过程

$$\frac{1}{(1+r)^{n\wedge\tau^*}}V_{n\wedge\tau^*} \tag{4.4.23}$$

是一个鞅。这可由式(4.4.11)推得。事实上,如果前 n 次抛掷硬币的结果为 $\omega_1\cdots\omega_n$ 并且沿着这一路径 $\tau^*\geqslant n+1$,则 $V_n(\omega_1\cdots\omega_n)>G_n(\omega_1\cdots\omega_n)$,并由式(4.4.11)可得:

$$\begin{aligned}V_{n\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_n)&=V_n(\omega_1\cdots\omega_n)\\&=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\\&=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{(n+1)\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{(n+1)\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\end{aligned}$$

这是过程(4.4.23)的鞅性质。另一方面,如果沿着 $\omega_1\cdots\omega_n$ 有 $\tau^*\leqslant n$,则:

$$\begin{aligned}V_{n\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_n)&=V_{\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_{\tau^*})\\&=\tilde{p}V_{\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_{\tau^*})+\tilde{q}V_{\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_{\tau^*})\\&=\tilde{p}V_{(n+1)\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{(n+1)\wedge\tau^*}(\omega_1\cdots\omega_nT)\end{aligned}$$

我们仍然得到鞅性质。

由于停止过程(4.4.23)是一个鞅,我们有:

$$\begin{aligned}V_0&=\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau^*}}V_{N\wedge\tau^*}\right]\\&=\tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*}}G_{\tau^*}\right]+\tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*=\infty\}}\frac{1}{(1+r)^N}V_N\right]\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

但是在 $\tau^*=\infty$ 的那些路径上,必有 $V_n>G_n$ 对所有 n 成立,尤其是,$V_N>G_N$。根据式(4.4.10),这仅当 $G_N<0$ 且 $V_N=0$ 时才有可能发生。因此,$\mathbb{I}_{\{\tau^*=\infty\}}V_N=0$,式(4.4.24)被简化为:

$$V_0=\tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau^*\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^{\tau^*}}G_{\tau^*}\right] \tag{4.4.25}$$

这就是式(4.4.22)。 □

4.5 美式看涨期权

在例4.2.1中我们看到:有时候(在到期日之前)"提前"实施美式看跌期权是最优的。对于无红利支付的美式看涨期权,提前实施是无益的。我们下面将看到,这是由条件期望的詹森不等式得到的结论。

设 $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是满足 $g(0)=0$ 的凸函数(见图4.5.1)。这意味着对任意的 $s_1\geqslant0,s_2\geqslant0$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,我们有:

$$g(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)\leqslant\lambda g(s_1)+(1-\lambda)g(s_2) \tag{4.5.1}$$

例如，敲定价格为 K 的看涨期权的支付 $g(s)=(s-K)^+$ 就是这样的凸函数。

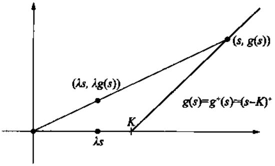

图 4.5.1 满足 $g(0)=0$ 的凸函数

定理 4.5.1 考虑 N 时段二叉树资产定价模型，其中 $0<d<1+r<u$，$r\geqslant0$。设美式衍生证券的支付为满足 $g(0)=0$ 的凸函数 $g(s)$，则该衍生证券在时刻 0 的价值(见定义 4.4.1)：

$$V_0^A=\max_{\tau\in\mathcal{S}_0}\widetilde{\mathrm{E}}\left[\mathrm{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)\right] \tag{4.5.2}$$

相同于在到期日 N 支付为 $g(S_N)$ 的欧式衍生证券的价值(见定理 2.4.7)：

$$V_0^E=\widetilde{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^N}\max\{g(S_N),0\}\right] \tag{4.5.3}$$

【证明】 定理的假定并不排除函数 g 可以取负值。因此我们引进函数：

$$g^+(s)=\max\{g(s),0\}$$

它只取非负值并且满足 $g^+(0)=0$；而且，g^+ 是凸函数。先来证明这一点。考虑到 g 满足式(4.5.1)，我们有：

$$g(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)\leqslant\lambda g^+(s_1)+(1-\lambda)g^+(s_2),\quad \forall s_1\geqslant0,s_2\geqslant0,\lambda\in[0,1]$$

显然还有 $0\leqslant\lambda g^+(s_1)+(1-\lambda)g^+(s_2)$，因此：

$$g^+(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)=\max\{0,g(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)\}\leqslant\lambda g^+(s_1)+(1-\lambda)g^+(s_2)$$

上述不等式给出了 g^+ 的凸性。在上述凸性不等式中取 $s_1=s$ 和 $s_2=0$，我们得到：

$$g^+(\lambda s)\leqslant\lambda g^+(s),\quad \forall s\geqslant0,\ \lambda\in[0,1] \tag{4.5.4}$$

因为 $\frac{1}{(1+r)^n}S_n$ 在风险中性概率测度下是一个鞅，我们有 $S_n=$

$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right]$,从而:

$$g^+(S_n)=g^+\left(\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right]\right)$$

由定理 2.3.2(v)关于条件期望的詹森不等式可得:

$$g^+\left(\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right]\right)\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[g^+\left(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right)\right] \tag{4.5.5}$$

在式(4.5.4) 中取 $\lambda=\frac{1}{1+r}$,又得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[g^+\left(\frac{1}{1+r}S_{n+1}\right)\right]\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1})\right] \tag{4.5.6}$$

综上所述,我们得到:

$$g^+(S_n)\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+r}g^+(S_{n+1})\right]$$

两边同乘以 $\frac{1}{(1+r)^n}$,得到贴现内在价值过程 $\frac{1}{(1+r)^n}g^+(S_n)$ 的下鞅性质:

$$\frac{1}{(1+r)^n}g^+(S_n)\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}}g^+(S_{n+1})\right]$$

鉴于贴现内在价值过程是一个下鞅,由定理 4.3.3 知,对任何停时 $\tau\in\mathcal{S}_0$ 有:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})\right]\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^N}g^+(S_N)\right]=V_0^E \tag{4.5.7}$$

如果 $\tau\leqslant N$,则有:

$$\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)=\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g(S_{N\wedge\tau})\leqslant\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})$$

如果 $\tau=\infty$,则有:

$$\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)=0\leqslant\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})$$

无论何种情况,都有同样的结果,因此:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)\right]\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^{N\wedge\tau}}g^+(S_{N\wedge\tau})\right]\leqslant V_0^E$$

其中最后一步用到了式(4.5.7)。上述不等式对任何停时 $\tau\in\mathcal{S}_0$ 都成立,故必有:

$$V_0^A=\max_{\tau\in\mathcal{S}_0}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant N\}}\frac{1}{(1+r)^\tau}g(S_\tau)\right]\leqslant V_0^E$$ □

定理 4.5.1 表明:(无红利支付的)美式看涨期权的提前实施特征对其价值没有贡献。通过定理的证明过程可知,这是因为看涨期权的贴现内在价值过程在风险中性概率下是一个下鞅(即具有上升趋势)。美式看跌期权的贴现内在价值过程则不是一个下鞅。如果 $g^+(s)=(K-s)^+$,詹森不等式(4.5.5)仍然成立,但是式(4.5.6)不成立。由詹森不等式,看跌期权的凸支付函数使得其贴现内在价值过程具有上升的趋势,但是,这又被第二个效应抵消了。由于看跌期权的持有人一旦行权可获得 K,故有可能提前实施以免被打折贴现。在股价较低的情形,这第二个效应变得比凸性更为重要,从而使提前实施成为最优。对于看涨期权,持有人行权时将付出 K,故宁可在实施之前被打折贴现。这就增强了凸性的效应,更不愿提前实施。

4.6 本章小结

欧式衍生证券只能在所谓到期日这一个时刻被实施,而美式衍生证券允许持有人在到期日之前的任何时刻(包括到期日)行权。这就使得美式衍生证券在任何时刻的价值至少不低于其持有人即刻行权所获得的支付,即所谓**内在价值**。在风险中性概率测度下,欧式衍生证券的贴现过程是一个鞅,而美式衍生证券的贴现过程则是一个上鞅。在应该被实施的时刻,美式衍生证券的价值具有下降的倾向。事实上,美式衍生证券的价值过程是满足下列条件的最小的非负过程:任何时刻不低于其内在价值并且其贴现过程在风险中性概率测度下是一个上鞅。这是定理 4.4.2 的内容。由此导致定理 4.4.3 中的美式衍生证券的定价算法:

$$V_N(\omega_1\cdots\omega_N)=\max\{G_N(\omega_1\cdots\omega_N),0\} \tag{4.4.10}$$

$$V_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\max\{G_n(\omega_1\cdots\omega_n),\ \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)]\},\quad n=N-1,\cdots,0 \tag{4.4.11}$$

这里 $G_n(\omega_1\cdots\omega_n)$ 是当前 n 次抛掷硬币结果为 $\omega_1\cdots\omega_n$ 时,衍生证券在时刻 n 的内在价值。

美式衍生证券价值贴现过程的上鞅性质使得持有衍生证券空头的投资者能够成功对冲。对冲资产组合的构建公式与用于欧式衍生证券的相同:

$$\Delta_n(\omega_1\cdots\omega_n)=\frac{V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)}{S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)-S_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)} \tag{4.4.14}$$

在衍生证券价值贴现过程具有严格下降倾向的时段 n,空头对冲组合持有人可以消费掉

$$C_n(\omega_1\cdots\omega_n)=V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_n)-\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nH)+\tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\cdots\omega_nT)] \tag{4.4.15}$$

并仍然能维持对冲。这是定理 4.4.4 的内容。

美式衍生证券的持有人应该在衍生证券价值等同于内在价值的第一时刻行权。按照这一行权法则,所获得支付在时刻 0 的风险中性贴现值与美式衍生证券在时刻 0 的价格相同(即这一法则能让美式衍生证券的持有人获得该合约的全部价值)。这是定理 4.4.5 的内容。

上述论断的证明要用到停时概念,这是关于实施的随机时间,见定义 4.3.1。美式衍生证券持有人的行权策略必须是一个停时(即行权策略可以依赖于以往的股价变动,但必须在无法看到未来股价变动的情况下决策)。一旦停时被选定,就能计算相应于这一停时的衍生证券支付贴现过程的风险中性期望值。美式衍生证券的价值是(相应于所有停时)支付贴现过程风险中性期望的最大值。这就是定义 4.4.1。

将鞅、上鞅、下鞅停止于停时所得到的停止过程仍然(是鞅、上鞅、下鞅)具有相同的倾向。尤其是,如果 $X_n, n=0,1,\cdots,N$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下是一个下鞅、τ 是一个停时,则 $X_{n\wedge\tau}, n=0,1,\cdots,N$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下仍是一个下鞅且 $\widetilde{\mathbb{E}}X_{n\wedge\tau}\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}X_n$。这类结果被称为**可选抽样**。

利用可选抽样可以证明:无红利支付股票的美式看涨期权与同一股票的欧式看涨期权的价值相同(即美式看涨期权中的提前实施机会价值为 0)。这是定理 4.5.1 的内容。

4.7 评 注

关于美式衍生证券基于停时的严格分析始于本苏桑(Bensoussan)[2],并由卡拉察斯[26]继续。卡拉察斯和施里夫[28]中有一个综述(整个材料中讨论的是连续时间模型,本书中则专门讨论二叉树模型)。

4.8 习 题

习题 4.1 在图 1.2.2 的三时段模型中,设利率 $r=\frac{1}{4}$,从而风险中性概率为 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。

(i) 确定时刻 3 到期且内在价值为 $g_P(s)=(4-s)^+$ 的美式看跌期权在时刻 0 的价格 V_0^P。

(ii) 确定时刻 3 到期且内在价值为 $g_C(s)=(s-4)^+$ 的美式看涨期权在

时刻 0 的价格 V_0^C。

(iii) 确定时刻 3 到期且内在价值为 $g_S(s)=g_P(s)+g_C(s)$ 的美式双向期权在时刻 0 的价格 V_0^S。

(iv) 解释为何 $V_0^S<V_0^P+V_0^C$。

习题 4.2 在例 4.2.1 中，我们已计算出敲定价格为 5 的美式看跌期权在时刻 0 的价格为 1.36。假设某投资者在时刻 0 借入 1.36 并购买美式看跌期权。投资者该如何通过股票和货币市场交易以及美式看跌期权的最优实施获得足够的资金偿付其债务(该项债务每个时段的增长率为 25%)。

习题 4.3 在图 1.2.2 的三时段模型中，设利率 $r=\frac{1}{4}$，从而风险中性概率为 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。求在每个时刻 n, $n=0,1,2,3$, 内在价值为 $\left(4-\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}S_j\right)^+$ 的路径依赖美式衍生证券在时刻 0 的价格以及最优实施策略(最优停时)。这里的内在价值是一个关于时刻 0 与时刻 n 之间平均股价的看跌期权支付值。

习题 4.4 考虑例 4.2.1 中敲定价格为 5 的美式看跌期权。在时刻 0 我们将该期权出售，购买者拥有关于股价变动的内部信息，并采用式(4.3.2)中的行权策略 ρ。具体而言，如果第一次抛掷硬币将出现 H，看跌期权的持有人就在时刻 0 行权，这时期权的内在价值为 1；如果第一次抛掷硬币的结果为 T 并且第二次抛掷硬币将出现 H，持有人就在时刻 1 行权，这时期权的内在价值为 3；如果前两次抛掷硬币结果为 TT，持有人就在时刻 1 行权，这时期权的内在价值为 4。总之，美式看跌期权持有人获得的支付为如下随机变量：

$$Y(HH)=1,\quad Y(HT)=1,\quad Y(TH)=3,\quad Y(TT)=4 \tag{4.8.1}$$

该支付从支付时刻到时刻 0 的贴现的风险中性期望值为：

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\rho}Y\right]=\frac{1}{4}\left[1+1+\frac{4}{5}\cdot 3+\frac{16}{25}\cdot 4\right]=1.74 \tag{4.8.2}$$

在例 4.2.1 中，我们计算出该看跌期权在时刻 0 的价格仅为 1.36。为了在售出期权后能够成功对冲我们的期权空头，是否应向该购买者收取更多的费用？说明你的理由。

习题 4.5 在式(4.4.5)中，要对 $\mathcal{S}_0$ 中所有停时来计算最大值。列出 $\mathcal{S}_0$ 中所有停时(26 个)，从中找出在期权为虚值时不行权的所有停时(11 个)。对后一集合中的每一个停时 τ，计算 $\widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau\leqslant 2\}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau}G_\tau\right]$。验证使该量取最大值的是由式(4.4.6) 给出的停时，在式(4.4.7) 中已算得该最大值为 1.36。

习题 4.6(美式看跌期权的价格估计) 对每个 $n, n=0,1,\cdots,N$，设 G_n

是依赖于前 n 次抛掷硬币结果的随机变量。考虑一个衍生证券,持有人可以在任何时刻 $n \leqslant N$ 行权,获得支付 G_n;但是,如果时刻 N 之前一直未行权,则时刻 N 必须行权。该衍生证券在时刻 0 的价值为:

$$V_0 = \max_{\tau \in \mathscr{S}_0, \tau \leqslant N} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{(1+r)^\tau} G_\tau\right] \tag{4.8.3}$$

与定义 4.4.1 中美式衍生证券的价格公式 (4.4.1) 不同,这里,我们仅考虑取值为 $0,1,\cdots,N$ 的停时(不能取∞值)。

(i) 考虑 $G_n = K - S_n$,衍生证券持有人可以在任何时刻 $n \leqslant N$ 售出一份股票并获得支付 K;但是,如果时刻 N 之前一直未实施,则时刻 N 必须实施。证明:最优实施策略是在时刻 0 出售股票,从而该衍生证券的价值为$K - S_0$。

(ii) 解释为何由(i)中的衍生证券和敲定价格为 K、到期日为 N 的欧式看涨期权所组成的资产组合的价值至少等于敲定价格为 K、到期日为 N 的美式看跌期权的价值。记欧式看涨期权在时刻 0 的价值为 V_0^{EC} 的,美式看跌期权在时刻 0 的价值为 V_0^{AP},推导 V_0^{AP} 的上界:

$$V_0^{AP} \leqslant K - S_0 + V_0^{EC} \tag{4.8.4}$$

(iii) 利用看跌—看涨平价公式(习题 2.11)推导 V_0^{AP} 的下界:

$$\frac{K}{(1+r)^N} - S_0 + V_0^{EC} \leqslant V_0^{AP} \tag{4.8.5}$$

习题 4.7 对于习题 4.6 中时刻 0 的价值由式(4.8.3)给出的衍生证券,考虑 $G_n = S_n - K$。衍生证券持有人可以在任何时刻 $n \leqslant N$ 通过支付 K 购买一份股票;但是,如果时刻 N 之前一直未实施,则时刻 N 必须实施。确定该衍生证券在时刻 0 的价值以及最优实施策略。

5
随机游动

5.1 引 言

这一节，我们考虑对称随机游动，这相当于第二卷第三章介绍的布朗运动的离散时间情形。我们推导随机游动的若干性质，以后我们将看到布朗运动也有类似的性质。尤其是，本章中我们将考虑对称随机游动的**首达时间和反射原理**。对于布朗运动，这些概念在各种奇异期权的计算中会被用到。

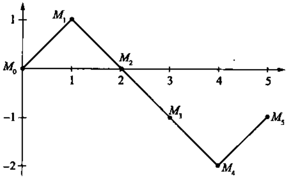

图 5.1.1 随机游动的前五步

为构造对称随机游动，我们反复抛掷一枚公正的硬币（每次抛掷，出现正面 H 的概率 p 以及出现背面 T 的概率 $q=1-p$ 都等于$\frac{1}{2}$）。接连不断抛掷硬币的结果记为 $\omega_1\omega_2\omega_3\cdots$。设：

$$X_j=\begin{cases}1, & \omega_j=H\\ -1, & \omega_j=T\end{cases} \tag{5.1.1}$$

定义 $M_0=0$，并且：

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n = 1,2,\cdots \tag{5.1.2}$$

过程 $M_n, n=0,1,2,\cdots$就是一个**对称随机游动**。相应于每次硬币抛掷，上升或下降一个单位，上升与下降的概率相同。如果 $p\neq\frac{1}{2}$，仍然会得到随机游动，但可能是非对称的。对称与非对称随机游动所有可能路径的集合是相同的，不同的只是这些路径的概率。

对称随机游动既是鞅又是马尔可夫过程。

5.2 首达时间

5.1 节中的对称随机游动在时刻 0 取值为零。给定整数 m，随机游动首次达到水平 m 的时刻记为 τ_m，即：

$$\tau_m = \min\{n; M_n = m\} \tag{5.2.1}$$

如果随机游动永远达不到 m，我们定义 $\tau_m=\infty$。

随机变量 τ_m 是一个停时，称为随机游动关于水平 m 的**首达时间**。我们将确定它的分布。我们将看到，τ_m 以概率 1 为限(即随机游动最终达到水平 m 的概率为 1)，但是$\mathbb{E}\tau_m=\infty$。一旦关于对称随机游动确定了 τ_m 的分布，我们将了解如何修正公式以获得关于非对称随机游动的 τ_m 分布的有关结果。

关于对称随机游动首达时间 τ_m 的分布的研究用到式(5.2.2)中的鞅，它曾在习题 2.4(ii)中被讨论过。

引理 5.2.1 *设 M_n 是一个对称随机游动。给定数 σ 并定义过程：*

$$S_n = e^{\sigma M_n}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^n \tag{5.2.2}$$

则 $S_n, n=0,1,2,\cdots$是一个鞅。

【证明】 由式(5.1.1)和式(5.1.2)，我们有：

$$S_{n+1} = S_n\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)e^{\sigma X_{n+1}}$$

通过提取已知量[定理 2.3.2(ii)]并利用独立性[定理 2.3.2(iv)]，可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n S_{n+1} &= S_n\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)\mathbb{E}\, e^{\sigma X_{n+1}} \\ &= S_n\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)\left(\frac{1}{2}e^{\sigma}+\frac{1}{2}e^{-\sigma}\right) \\ &= S_n\end{aligned}$$

这表明 $S_n, n=0,1,2,\cdots$ 是一个鞅。 □

因为将一个鞅停止于一个停时，得到的停止过程仍然是一个鞅(定理 4.3.2)，过程 $S_{n\wedge\tau_m}$ 是一个鞅，从而期望值为常数，即：

$$1=S_0=\mathrm{E}\,S_{n\wedge\tau_m}=\mathbf{E}\left[e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}\right],\quad \forall n\geqslant 0 \qquad (5.2.3)$$

我们将在式(5.2.3)中令 $n\to\infty$。为此，必须确定当 $n\to\infty$ 时 $e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}$ 的极限。我们将两个因子分别考虑。

首先注意到，函数 $\cosh(\sigma)=\frac{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}{2}$ 在 $\sigma=0$ 处取得最小值 1。因此对所有 $\sigma>0$，$\cosh(\sigma)>1$，从而：

$$0<\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)<1,\quad \forall\sigma>0 \qquad (5.2.4)$$

固定 $\sigma>0$，由式(5.2.4)可得：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}=\begin{cases}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m}, & \tau_m<\infty\\ 0, & \tau_m=\infty\end{cases} \qquad (5.2.5)$$

可以将式(5.2.5)的右端表示为 $\mathbb{I}_{\{\tau_m<\infty\}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m}$，它概括了两种情形。

考虑另一个因子 $e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}$，假定 $m>0$ 并注意到停止于水平 m 首达时间的鞅 $M_{n\wedge\tau_m}\leqslant m$。因此，无论 τ_m 是否有限，都有：

$$0\leqslant e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\leqslant e^{\sigma m} \qquad (5.2.6)$$

还有：

$$\lim_{n\to\infty}e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}=e^{\sigma M_{\tau_m}}=e^{\sigma m},\quad 如果\ \tau_m<\infty \qquad (5.2.7)$$

将式(5.2.5)和式(5.2.7)相乘，可得：

$$\lim_{n\to\infty}e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}=e^{\sigma m}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m},\quad 如果\ \tau_m<\infty \quad (5.2.8)$$

我们并不知道沿着 $\tau_m=\infty$ 的那些路径，$e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}$ 当 $n\to\infty$ 时是否存在极限，但这没关系，因为这一项是有界的[见式(5.2.6)]，而 $\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}$ 的极限为 0。因此：

$$\lim_{n\to\infty}e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}=0,\quad 如果\ \tau_m=\infty \qquad (5.2.9)$$

由式(5.2.8)和式(5.2.9)可知：

$$\lim_{n\to\infty} e^{\sigma M_{n\wedge\tau_m}}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{n\wedge\tau_m}=\mathbb{I}_{\{\tau_m<\infty\}}e^{\sigma m}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m} \qquad (5.2.10)$$

在式(5.2.3)中取极限可得[1]：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_m<\infty\}}e^{\sigma m}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m}\right]=1 \qquad (5.2.11)$$

式(5.2.11)是在 $\sigma>0$ 的假定下推导的，我们曾在此假定下推得式(5.2.5)。于是式(5.2.11)对所有 $\sigma>0$ 成立。我们不能在式(5.2.11)中直接令 $\sigma=0$，但可以在其两边同时令 $\sigma\downarrow 0$，取极限[2]，这就得到$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_m<\infty\}}]=1$，即：

$$\mathbb{P}\{\tau<\infty\}=1 \qquad (5.2.12)$$

这表明对称随机游动达到水平 m 的概率为 1。但是，存在对称随机游动永远不能达到水平 m 的路径。例如，对于在任何时刻累计出现背面的次数总是超过正面出现次数的路径(这样的路径有可能形如 $TTHTTHTHHT\cdots$)，对称随机游动以 0 开始，以后永远取严格负值。沿着这样的路径，对称随机游动永远不能达到正的水平 m。式(5.2.12)断言，虽然这样的路径有无穷多(事实上有不可数无穷多)，总而言之，这些路径的集合具有零概率。上述讨论中，假定了 m 是严格正的[我们曾在这一假定下推得式(5.2.6)]，然而，由于随机游动的对称性，式(5.2.12)对于严格负的 m 也是成立的。

如果某一事件出现的概率为 1，我们就称该事件**几乎必然发生**。我们已证明了下述定理：

定理 5.2.2 设 m 是任一非零整数。对称随机游动几乎必然达到水平 m，即水平 m 的首达时间 τ_m 几乎必然有限。

为了确定首达时间 τ_m 的分布，我们研究其矩母函数 $\varphi_{\tau_m}(u)=\mathbb{E}e^{u\tau_m}$。对所有 $x\geqslant 0$，$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\geqslant x$。因此对正数 u，有 $e^{u\tau_m}\geqslant u\tau_m$，从而 $\varphi_{\tau_m}(u)=\mathbb{E}e^{u\tau_m}\geqslant u\mathbb{E}\tau_m$。由下面的推论 5.2.4，$\mathbb{E}\tau_m=\infty$，这表明对于 $u>0$，$\varphi_{\tau_m}(u)=\infty$。而对于 $u=0$，我们有 $\varphi_{\tau_m}(u)=1$。因此，我们仅对 $u<0$ 时的矩母函数 $\varphi_{\tau_m}(u)$ 感兴趣。对于 $u<0$，令 $\alpha=e^u$，则 $0<\alpha<1$ 且 $\varphi_{\tau_m}(u)=\mathbb{E}\alpha^{\tau_m}$。

定理 5.2.3 设 m 是非零整数。对称随机游动的首达时间 τ_m 满足：

[1] 由一列随机变量的收敛性并不是总能推得其期望的收敛性。在现在的情形，之所以可以这么做，是因为式(5.2.10)中出现的随机变量介于两个常数 0 与 $e^{\sigma m}$ 之间。适用的定理是第二卷第一章的控制收敛定理 1.4.9。

[2] 式(5.2.11)左端的极限计算需要再次运用第二卷第一章的控制收敛定理 1.4.9。

$$\mathrm{E}\,\alpha^{\tau_m}=\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^{|m|},\quad \forall\alpha\in(0.1) \tag{5.2.13}$$

【证明】 对于对称随机游动，τ_m 和 τ_{-m} 具有同样的分布，故只需对 $m>0$ 给出定理证明。设 m 是正整数。由于 $P\{\tau_m<\infty\}=1$，式(5.2.11)可以简化为：

$$\mathrm{E}\left[e^{\sigma m}\left(\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}\right)^{\tau_m}\right]=1 \tag{5.2.14}$$

上式对所有 $\sigma>0$ 成立。

为了从式(5.2.14)得到式(5.2.13)，给定 $\alpha\in(0,1)$，并求出 $\sigma>0$，使得：

$$\alpha=\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} \tag{5.2.15}$$

这等价于：

$$\alpha e^{\sigma}+\alpha e^{-\sigma}-2=0$$

而上式又等价于：

$$\alpha(e^{-\sigma})^2-2e^{-\sigma}+\alpha=0$$

这是关于未知量 $e^{-\sigma}$ 的二次方程，其解为：

$$e^{-\sigma}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\alpha^2}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

我们需要求出满足上式的正数 $\sigma>0$，因此 $e^{-\sigma}$ 严格小于 1。这表明应取上式中相应于负号的解 $e^{-\sigma}$，即：

$$e^{-\sigma}=\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \tag{5.2.16}$$

我们来验证，由式(5.2.16)确定的 σ 是严格正的。由于 α 满足 $0<\alpha<1$，有：

$$0<(1-\alpha)^2<1-\alpha<1-\alpha^2$$

两边取正平方根，可得 $1-\alpha<\sqrt{1-\alpha^2}$。于是，$1-\sqrt{1-\alpha^2}<\alpha$，两边同除以 α，可知式(5.2.16)的右端严格小于 1。这表明由式(5.2.16)确定的 σ 是严格正的。

由式(5.2.16)相联系的 σ 和 α，必定满足式(5.2.15)，因此式(5.2.14)可以重写为：

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^{m}\alpha^{\tau_m}\right]=1$$

由于$\left(\frac{\alpha}{1-\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^m$并非随机,我们可以将其从期望中提出并用来除上式两边,即得关于正整数 m 的式(5.2.13)。 □

推论 5.2.4 在定理 5.2.3 的条件下,有:

$$\mathrm{E}\,\tau_m=\infty \tag{5.2.17}$$

【证明】[1]首先证明$\mathrm{E}\tau_1=\infty$。为此,在式(5.2.13)两边同时关于 α 求导:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\tau_1\alpha^{\tau_1-1}\right]&=\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{E}\alpha^{\tau_1}\\
&=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\\
&=\frac{-\frac{1}{2}(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(-2\alpha)\alpha-(1-(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}})}{\alpha^2}\\
&=\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}-1+(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2}\\
&=\frac{\alpha^2-\sqrt{(1-\alpha^2)}+1-\alpha^2}{\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}}\\
&=\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}}
\end{aligned}$$

上式对所有 $\alpha\in(0,1)$成立,我们不能直接将 $\alpha=1$ 代入其中,但可以在其两边同时令 $\alpha\uparrow 1$ 取极限,从而得到$\mathrm{E}\tau_1=\infty$。

对于 $m\geqslant 1$,我们有 $\tau_m\geqslant\tau_1$,于是$\mathrm{E}\tau_m\geqslant\mathrm{E}\tau_1=\infty$。对于负整数 m,则由随机游动的对称性,可得$\mathrm{E}\tau_m=\infty$。 □

利用式(5.2.13),可以计算出随机变量 τ_1 的分布。$m=1$ 时,式(5.2.13)为:

$$\mathrm{E}\,\alpha^{\tau_1}=\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha},\quad \forall\alpha\in(0,1) \tag{5.2.18}$$

由于随机游动仅在奇数步才可能达到水平 1,故式(5.2.18)的左端可以改写为:

$$\mathrm{E}\,\alpha^{\tau_1}=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{2j-1}\,\mathrm{P}\{\tau_1=2j-1\} \tag{5.2.19}$$

我们来求式(5.2.18)的右端的幂级数展开式。令 $f(x)=1-\sqrt{1-x}$,则:

[1] 在推论 5.2.4 的证明中,有两处涉及极限与期望的交换。第一处(对$\mathrm{E}\alpha^{\tau_1}$关于 α 求导)可与第二卷第一章习题 1.8 同理论证。第二处(令 $\alpha\uparrow 1$ 取极限)可运用第二卷第一章中的单调收敛定理 1.4.5。

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

一般地，f 的第 j 阶导数为：

$$f^{(j)}(x)=\frac{1\cdot 3\cdots(2j-3)}{2^j}(1-x)^{-\frac{2j-1}{2}},\quad j=1,2,3,\cdots$$

在 $x=0$ 的取值分别为：

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{1}{4},\quad f'''(0)=\frac{3}{8}$$

一般地：

$$\begin{aligned} f^{(j)}(0)&=\frac{1\cdot 3\cdots(2j-3)}{2^j}\\ &=\frac{1\cdot 3\cdots(2j-3)}{2^j}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2j-2)}{2^{j-1}(j-1)!}\\ &=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-2)!}{(j-1)!},\quad j=1,2,3,\cdots \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

（这里用到了定义 $0!=1$。）$f(x)$的泰勒(Taylor)级数展开式为：

$$f(x)=1-\sqrt{1-x}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(0)x^j=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}x^j$$

于是：

$$\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}=\frac{f(\alpha^2)}{\alpha}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!} \tag{5.2.21}$$

我们已经对式(5.2.18)的两边分别给出了幂级数展开式——式(5.2.19)和式(5.2.21)。令它们相等，就有：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{2j-1}\,\mathrm{P}\{\tau_1=2j-1\}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!},\quad \forall\alpha\in(0,1)$$

为使上面两个级数对所有 $\alpha\in(0,1)$都相等，只有令它们的系数逐项相等（即在两个级数中乘以 α^{2j-1} 的项必须相等），这就给出下列公式：

$$\mathrm{P}\{\tau_1=2j-1\}=\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1},\quad j=1,2,\cdots \tag{5.2.22}$$

我们对前几个 j 值来验证公式(5.2.22)。对于 $j=1$，我们有：

$$\mathbb{P}\{\tau_1=1\}=\frac{0!}{1!0!}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

仅当第一次抛掷硬币结果为 H 时,才有可能 $\tau_1=1$。对于对称随机游动,其概率为$\frac{1}{2}$。对于 $j=2$,有:

$$\mathbb{P}\{\tau_1=3\}=\frac{2!}{2!1!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

仅当前三次抛掷硬币结果为 THH 时,才有可能 $\tau_1=3$,其概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^3$。对于$j=3$,有:

$$\mathbb{P}\{\tau_1=5\}=\frac{4!}{3!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

仅有两种情形使得 $\tau_1=5$:前 5 次抛掷硬币的结果为 $THTHH$ 或者 $TTHHH$,每一结果出现的概率均为$\left(\frac{1}{2}\right)^5$。

由这些例子,我们知道该如何解释出现在式(5.2.22)右端的两个因子:$\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}$ 是在第 $2j-1$ 步首次达到水平 1(从而 $\tau_1=2j-1$)的路径的数目,$\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}$是每一路径的概率。假设随机游动并不对称:抛掷硬币结果出现 H 的概率为 p,出现 T 的概率为 $q=1-p$。这时,在第 $2j-1$ 步首次达到水平 1 的路径的数目不受影响。然而,由于每一路径必含 j 步上升、$j-1$ 步下降,其概率均为 p^jq^{j-1}。由此,我们得到以下定理。

定理 5.2.5 设 τ_1 是上升概率为 p、下降概率为 $q=1-p$ 的随机游动的水平 1 首达时间,则:

$$\mathbb{P}\{\tau_1=2j-1\}=\frac{(2j-2)!}{j!\ (j-1)!}p^jq^{j-1},\quad j=1,2,\cdots \tag{5.2.23}$$

5.3 反射原理

这一节,基于**反射原理**,我们给出定理 5.2.5 的第二个证明。同样的方法,在以后关于布朗运动的研究中也将会用到。与上一节类似,我们先考虑对称随机游动并得到公式(5.2.22)。关于进一步推得定理 5.2.5 的论证,与上一节相同。

假设我们将硬币接连抛掷(奇数)$2j-1$ 次,相应随机游动路径中有一些会达到水平 1。在三次抛掷的情形,共有 8 条可能的路径,其中有 5 条达到水平 1(见图 5.3.1)。考虑一条在某个时刻 $\tau_1\leqslant 2j-1$ 达到水平 1 的路径。

从该时刻开始，我们作一条“反射”路径：在以后每一时刻，如果原路径下降，它就上升；如果原路径上升，它就下降。这样，如果原路径在时刻 $2j-1$ 超出水平 1，则反射路径就会低于水平 1；反之亦然。如果原路径在时刻 $2j-1$ 位于水平 1，则反射路径也将位于水平 1。

为了计算截至时刻 $2j-1$ 曾达到过水平 1 的路径总数，我们可以计算在时刻 $2j-1$ 超出水平 1 的路径数目，在时刻 $2j-1$ 位于水平 1 的路径数目以及在时刻 $2j-1$ 其反射路径超出水平 1 的路径数目。如果反射路径在时刻 $2j-1$ 超出水平 1，则原路径在时刻 $2j-1$ 之前曾达到水平 1，而在时刻 $2j-1$ 低于水平 1。在图 5.3.1 中，在时刻 3 超出水平 1 的路径只有一条：HHH；在时刻 3 位于水平 1 的路径有三条：HHT、HTH 和 THH；反射路径在时刻 3 超出水平 1 的路径有一条：HTT。这五条路径就是截至时刻 3 所有曾达到过水平 1 的路径。

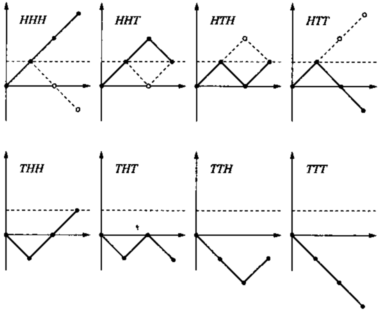

图 5.3.1　8 条路径以及 4 条反射路径

在时刻 $2j-1$ 超出水平 1 的路径数目与在时刻 $2j-1$ 其反射路径超出水平 1 的路径数目相同。在图 5.3.1 中，这样的路径各有一条。于是，为了计算截至时刻 $2j-1$ 曾达到过水平 1 的路径总数，我们可以计算在时刻 $2j-1$ 位于水平 1 的路径数目，然后加上在时刻 $2j-1$ 超出水平 1 的路径数目的两倍。换言之，对于对称随机游动，有：

$$\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant 2j-1\} = \mathbb{P}\{M_{2j-1}=1\} + 2\,\mathbb{P}\{M_{2j-1} \geqslant 3\}$$

然而，对于对称随机游动，$\mathbb{P}\{M_{2j-1} \geqslant 3\} = \mathbb{P}\{M_{2j-1} \leqslant -3\}$，于是就有：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_1\leqslant 2j-1\}&=\mathbb{P}\{M_{2j-1}=1\}+\mathbb{P}\{M_{2j-1}\geqslant 3\}+\mathbb{P}\{M_{2j-1}\leqslant -3\}\\&=1-\mathbb{P}\{M_{2j-1}=-1\}\end{aligned}$$

为使 $M_{2j-1}=-1$,在前 $2j-1$ 次硬币抛掷中,必须有 $j-1$ 次出现正面以及 j 次出现背面。这样的路径数目为:

$$\binom{2j-1}{j}=\frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!}$$

并且每一路径的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}$。因此:

$$\mathbb{P}\{M_{2j-1}=-1\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!}$$

同理:

$$\mathbb{P}\{M_{2j-3}=-1\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-3}\frac{(2j-3)!}{(j-1)!(j-2)!}$$

由此可得,对于 $j\geqslant 2$,有:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_1=2j-1\}&=\mathbb{P}\{\tau_1\leqslant 2j-1\}-\mathbb{P}\{\tau_1\leqslant 2j-3\}\\&=\mathbb{P}\{M_{2j-3}=-1\}-\mathbb{P}\{M_{2j-1}=-1\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-3}\frac{(2j-3)!}{(j-1)!(j-2)!}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!}[4j(j-1)-(2j-1)(2j-2)]\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!}[2j(2j-2)-(2j-1)(2j-2)]\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!}(2j-2)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}\end{aligned}$$

我们再次得到了(5.2.22)。

5.4 永久美式看跌期权:一个例子

这一节,作为一个特例,我们将给出**永久美式看跌期权**的定价与对冲。"永久"是指该看跌期权没有到期日。事实上,这并非真实存在的交易工具,而是一个数学概念,它是联系第四章关于离散时间美式期权定价与对冲的讨论以及第二卷第八章关于连续时间美式衍生证券的分析的一个桥梁。

考虑二叉树模型,其中上升因子 $u=2$,下降因子 $d=\frac{1}{2}$,利率 $r=\frac{1}{4}$。对

于这一模型，风险中性概率[见式(1.1.8)]$\widetilde{p}=\widetilde{q}=\frac{1}{2}$，时刻 n 的股价为：

$$S_n=S_0\cdot 2^{M_n} \tag{5.4.1}$$

其中 M_n 是式(5.1.2)中的随机游动。在风险中性概率下，M_n 是对称随机游动。

考虑一个美式看跌期权，敲定价格 $K=4$，没有到期日。在任何时刻 n，该看跌期权的持有人可以行权，以 4 美元的价格售出一份时价为 S_n 美元的股票。我们的兴趣在于该看跌期权的价值（作为原生资产股票价格的函数）。由于没有到期日，设想该期权的价值仅依赖于股价不依赖于时间是合理的。同样，设想最优行权策略仅依赖于股价不依赖于时间也是合理的。

假定初始股价为 $S_0=4$，可能的行权策略有：

策略 0：立即行权。这相应于停时 $\tau_0=0$，即随机游动 M_n 达到水平 0 的第一时刻。在这一行权策略下，期权价值 $V^{(\tau_0)}=0$。

策略 1：在股价跌至 2 的第一时刻行权。这相应于停时 τ_{-1}，即随机游动 M_n 达到水平 -1 的第一时刻。在这一行权策略下，期权价值记为 $V^{(\tau_{-1})}$，并在下文中计算。

策略 2：在股价跌至 1 的第一时刻行权。这相应于停时 τ_{-2}，即随机游动 M_n 达到水平 -2 的第一时刻。在这一行权策略下，期权价值记为 $V^{(\tau_{-2})}$，并在下文中计算。

设 m 是正整数。如果看跌期权的持有人采用行权策略 τ_{-m}，即在股价跌至 $4\cdot 2^{-m}$ 的第一时刻行权，则该期权的风险中性价值为：

$$V^{(\tau_{-m})}=\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau_{-m}}(K-S_{\tau_{-m}})\right]=4(1-2^{-m})\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau_{-m}}\right] \tag{5.4.2}$$

这是行权时刻期权支付从行权时刻贴现到初始时刻的风险中性期望值。由于 M_n 在风险中性概率下是对称随机游动，我们可以利用定理 5.2.3 来计算式(5.4.2)的右端。在该定理中取 $\alpha=\frac{4}{5}$，则：

$$\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}=\frac{5}{4}\cdot\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)=\frac{5}{4}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{9}{25}}\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$$

由定理 5.2.3 可得：

$$V^{(\tau_{-m})}=4(1-2^{-m})\left(\frac{1}{2}\right)^m,\quad m=1,2,\cdots \tag{5.4.3}$$

特别是：

$$V^{(\tau_{-1})}=4\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=1$$

$$V^{(\tau_{-2})}=4\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$V^{(\tau_{-3})}=4\left(1-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$$

基于上述计算,我们猜想最优策略是在股价跌至 2 的第一时刻行权。至少在 $S_0=4$ 的情形,这一策略似乎给出了期权的最大价值(见图 5.4.1)。有理由认为行权策略的最优性不应依赖于初始股价。换言之,我们可以设想,无论初始股价如何,持有人都应该在股价跌至 2 的第一时刻行权。如果初始股价低于或者等于 2,则应立即行权。

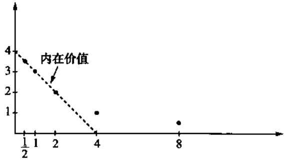

图 5.4.1 永久美式看跌期权价格 $v(2^j)$

为验证上段所述行权策略的最优性,我们首先来确定按照在股价跌至 2 的第一时刻行权这一策略相应于不同初始股价期权的价值。如果 $S_0=2^j$,其中 $j\leqslant 1$,则 $S_0\leqslant 2$,持有人立即行权。在此策略下,期权的价值为其内在价值:

$$v(2^j)=4-2^j,\quad j=1,0,-1,-2,\cdots \tag{5.4.4}$$

现假设初始股价 $S_0=2^j$,其中 $j\geqslant 2$。我们的行权策略(在股价跌至 2 的第一时刻行权)要求随机游动达到水平 $-(j-1)$。相应于初始股价 $S_0=4$ 和 $S_0=8$,期权价值为:

$$v(4)=\widetilde{\mathrm{E}}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau_{-1}}(K-S_{\tau_{-1}})\right]=2\,\widetilde{\mathrm{E}}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau_{-1}}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=1$$

$$v(8)=\widetilde{\mathrm{E}}\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{\tau_{-2}}(K-S_{\tau_{-2}})\right]=2\,\widetilde{\mathrm{E}}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau_{-2}}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}$$

一般地:

$$\begin{aligned}v(2^j)&=\widetilde{\mathrm{E}}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau_{-(j-1)}}(4-S_{\tau_{-(j-1)}})\right]\\&=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}=\frac{4}{2^j},\quad j=2,3,4,\cdots\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

注意到当 $j=1$ 时,公式(5.4.5)与(5.4.4)给出的价值相同。

我们只考虑形如 2^j 的股价，如果初始股价具有这一形式，则以后所有股价都具有这一形式（只是整数 j 不同）。现在，我们有关于最优行权策略的猜测（只要股价低于或者等于 2 就行权）和关于期权价值函数的猜测：

$$v(2^j)=\begin{cases}4-2^j, & j\leqslant 1\\ \dfrac{4}{2^j}, & j\geqslant 1\end{cases}\tag{5.4.6}$$

为验证这些猜想，我们需要证明与定理 4.4.2 类似的三条性质：

(i) $v(S_n)\geqslant(4-S_n)^+$, $n=0,1,\cdots$;

(ii) 贴现过程 $\left(\frac{4}{5}\right)^n v(S_n)$ 在风险中性概率测度下是一个上鞅；

(iii) $v(S_n)$ 是满足(i)和(ii)的最小过程。

如果投资者在时刻 0 售出期权，获得 $v(S_0)$，则性质(ii)确保投资者能以初始资本 $v(S_0)$ 构建对冲资产组合（或许还能有所消费），该资产组合在任何时刻 n 的价值为 $v(S_n)$（详见定理 4.4.4 的证明）。性质(i)确保这样操作的投资者可以成功对冲期权的空头；无论期权持有人何时行权，对冲资产组合的价值足以支付该期权。于是，性质(i)和(ii)保证期权价格 $v(S_n)$ 可以让期权出售者满意。性质(iii)则保证该期权价格也能让期权的购买者满意。

我们现在验证式(5.4.6)中的价格函数 $v(2^j)$ 满足性质(i)、(ii)和(iii)。

性质(i)：对于 $S_n=2^j$，其中 $j\leqslant 1$，由式(5.4.6)立即可得 $v(S_n)=4-S_n=(4-S_n)^+$。对于 $S_n=2^j$，其中 $j\geqslant 2$，我们有 $v(S_n)\geqslant 0=(4-S_n)^+$。

性质(ii)：对于 $S_n=2^j$，其中 $j\leqslant 0$，有：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(S_{n+1})\right]&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(2^{j+1})+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(2^{j-1})\\&=\left(\frac{4}{5}\right)^n\left[\frac{2}{5}v(2^{j+1})+\frac{2}{5}v(2^{j-1})\right]\\&=\left(\frac{4}{5}\right)^n\left[\frac{2}{5}(4-2^{j+1})+\frac{2}{5}(4-2^{j-1})\right]\\&=\left(\frac{4}{5}\right)^n\left[\frac{16}{5}-\frac{1}{5}(4+1)2^j\right]\\&=\left(\frac{4}{5}\right)^n\left[\frac{16}{5}-2^j\right]\\&<\left(\frac{4}{5}\right)^n(4-2^j)=\left(\frac{4}{5}\right)^n v(S_n)\end{aligned}$$

由上可知，在股价低于或者等于 1 的“实施区域”，期权价值的贴现过程是一个严格上鞅。对于 $S_n=2^j$，其中 $j\geqslant 2$，同理有：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(S_{n+1})\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(2^{j+1})+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(2^{j-1})$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left[\frac{2}{5}v(2^{j+1})+\frac{2}{5}v(2^{j-1})\right]\\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{2^{j+1}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{2^{j-1}}\right]\\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left[\frac{4}{5\cdot 2^{j}}+\frac{16}{5\cdot 2^{j}}\right]\\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\frac{4}{2^{j}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}v(S_n) \qquad (5.4.7)
\end{aligned}
$$

由上可知,在股价高于或者等于 4 的“持有区域”,期权价值的贴现过程是一个鞅。对于 $S_n=2$,即股价在介于“实施区域”和“持有区域”之间的边界上,我们算得:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(S_{n+1})\right]&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(4)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(1)\\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left[\frac{2}{5}v(4)+\frac{2}{5}v(1)\right]\\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left[\frac{2}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot 3\right]\\
&<\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\cdot 2=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}v(S_n)
\end{aligned}
$$

我们又有严格上鞅。这意味着:如果股价是 2,那么由立即实施产生的价值严格大于由未来的实施权利产生的价值。当股价为 2 时,期权应该立即被实施。当股价低于 2 时也是如此。

性质(iii):设过程 $Y_n,n=0,1,\cdots$满足:

(a) $Y_n\geqslant(4-S_n)^+,n=0,1,\cdots$;

(b) 贴现过程$\left(\frac{4}{5}\right)^nY_n$ 在风险中性概率测度下是一个上鞅。

我们必须证明对所有的 $n,v(S_n)\leqslant Y_n$。为此,固定 n,并分两种情形考虑。如果 $S_n\leqslant 2$,则由式(5.4.6)和(a)可得 $v(S_n)=4-S_n\leqslant Y_n$。对于其他情形,$S_n=2^j$,其中 $j\geqslant 2$。我们将时刻 n 之后股价跌至 2 的第一时刻记为 τ,利用以时刻 n 开始的式(5.4.5),有:

$$
v(S_n)=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-n}(4-S_\tau)\right]=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-n}(4-S_\tau)^+\right] \qquad (5.4.8)
$$

其中第二个等式是因为 $4-S_\tau=2>0$。另一方面,由(b)、第四章的可选抽样定理 4.3.2 以及(a)可知,对所有 $k\geqslant n$,有:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{4}{5}\right)^{n}Y_n&=\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau\wedge n}Y_{\tau\wedge n}\\
&\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau\wedge k}Y_{\tau\wedge k}\right]
\end{aligned}
$$

$$\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau\wedge k}(4-S_{\tau\wedge k})^+\right] \tag{5.4.9}$$

在式(5.4.9)中令 $k\to\infty$,有:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n Y_n\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau}(4-S_{\tau})^+\right]$$

两边同除以$\left(\frac{4}{5}\right)^n$,即得:

$$Y_n\geqslant\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{\tau-n}(4-S_{\tau})^+\right] \tag{5.4.10}$$

由式(5.4.8)和式(5.4.10)可知,$v(S_n)\leqslant Y_n$。

性质(iii)保证:在时刻 n 股价为 S_n 时,永久美式看跌期权的购买者出资 $v(S_n)$ 并未超额支付。在股价 $S_n\geqslant 4$ 的情形,证明中关键的等式是式(5.4.8),它表明:如果期权购买者采取在股价跌至 2 的第一时刻行权的策略,则所获得支付的风险中性期望贴现值正是其购买期权的出资额。当然,如果 $S_n\leqslant 2$,期权购买者立即行权,所获支付(期权的内在价值)也恰好等于其购买价格 $v(S_n)$。任何情况下,由对行权策略的评估推导的美式衍生证券价格都满足性质(iii),从而不会令购买者超额支付。

以上给出的关于在股价低于或者等于 2 的第一时刻行权这一策略最优性的证明,是一个概率论证明。我们考虑了随机过程 $v(S_n)$并证明其贴现过程在风险中性概率下是一个上鞅。我们现在给出第二种证明方法,这是关于永久美式看跌期权价值函数 v 的偏微分方程刻划的离散形式。

首先,注意到(5.4.6)可以改写为:

$$v(s)=\begin{cases}4-s, & s\leqslant 2\\ \dfrac{4}{s}, & s\geqslant 4\end{cases} \tag{5.4.11}$$

与前面一样,我们仍然只对形如 $s=2^j$(其中 j 为整数)感兴趣。性质(i)、(ii)和(iii)可改为:

(i)′ $v(s)\geqslant(4-s)^+$;

(ii)′ $v(s)\geqslant\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]$;

(iii)′ $v(s)$是满足(i)′和(ii)′的最小函数。换言之,如果 $w(s)$是满足(i)′和(ii)′的另一个函数,则对每一个形如 $s=2^j$ 的 s,$v(s)\leqslant w(s)$。

显然,(i)′和(iii)′只是性质(i)和(iii)的重述。由性质(ii)′可得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}v(S_{n+1})\right]=\left(\frac{4}{5}\right)^n\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2S_n)+\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}S_n\right)\right]\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^n v(S_n)$$

这正给出了性质(ii)。

如果在(i)$'$和(ii)$'$中严格不等式同时成立,我们有理由设想还有更小的函数满足(i)$'$和(ii)$'$。事实正是如此,其证明过于冗长,不便在这里给出。由于性质(iii)$'$,在(i)$'$和(ii)$'$中严格不等式不会同时成立。于是我们有第四个性质:

(iv)$'$对每一个形如$s=2^j$的s,在(i)$'$和(ii)$'$中至少有一个等式成立。

在$v(s)$由式(5.4.11)定义的情形下,对于$s\leqslant 2$,(i)$'$中的等式成立。对于$s\geqslant 4$,本质上如同式(5.4.7),可以验证(ii)$'$中的等式成立:

$$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{2s}+\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{s}$$
$$=\frac{4}{5s}+\frac{16}{5s}=\frac{20}{5s}=\frac{4}{s}=v(s)$$

性质(i)$'$、(ii)$'$和(iv)$'$可以方便地归结为一个方程:

$$v(s)=\max\left\{(4-s)^+,\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right\}\qquad(5.4.12)$$

对于$s>4$,$4-s$取负值,$v(s)$等于$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v(\frac{s}{2})\right]$,不等于$(4-s)^+$。于是,对于这样的值$s$,在式(5.4.12)中将$(4-s)^+$改成$4-s$也没关系。对于$s\leqslant 4$,$(4-s)^+$与$4-s$的值相等。因此,我们可将式(5.4.12)简单地改写为:

$$v(s)=\max\left\{4-s,\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right\}\qquad(5.4.13)$$

这是关于永久美式看跌期权定价问题的所谓**贝尔曼(Bellman)方程**。

永久美式看跌期权的价值$v(s)$必定满足式(5.4.13),并且这个方程也有助于确定该期权的价值。不过,还有可能存在不同于式(5.4.11)所给出的函数也满足这一方程。例如,函数

$$w(s)=\frac{4}{s},\quad\forall s=2^j\qquad(5.4.14)$$

也满足式(5.4.13)。我们要求的函数$v(s)$是式(5.4.13)的**最小解**[见(iii)$'$]。在由(5.4.13)求解$v(s)$时,我们可以利用**边界条件**来排除无关的解。尤其是,永久美式看跌期权的价值必须满足:

$$\lim_{s\downarrow 0}v(s)=4,\quad\lim_{s\to\infty}v(s)=0\qquad(5.4.15)$$

其中第一个条件排除了式(5.4.14)中的函数$w(s)$。

对于内在价值为$g(s)$的永久衍生证券,当原生资产股价为s时,期权价值$v(s)$满足贝尔曼方程:

$$v(s)=\max\left\{g(s),\frac{1}{1+r}[\tilde{p}v(us)+\tilde{q}v(ds)]\right\}\qquad(5.4.16)$$

这与第四章中关于美式衍生证券的定价方程(4.2.6)相同，只是对于永久衍生证券，其价格与时间无关；即为 $v(s)$，而非 $v_n(s)$ 和 $v_{n+1}(s)$。如果 $g(s)=K-s$，即我们在对敲定价格为 K 的看跌期权定价，则 $v(s)$ 应满足边界条件：

$$\lim_{s\downarrow 0} v(s)=K,\quad \lim_{s\to\infty} v(s)=0 \tag{5.4.17}$$

如果 $g(s)=s-K$，即我们在对敲定价格为 K 的看涨期权定价，则 $v(s)$ 应满足边界条件：

$$\lim_{s\downarrow 0} v(s)=0,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{v(s)}{s}=1 \tag{5.4.18}$$

(见习题 5.8)。

5.5 本章小结

设 τ_m 是对称随机游动首次达到水平 m 的时间，其中 m 为非零整数，则：

$$\mathbb{P}\{\tau_m<\infty\}=1 \tag{5.2.12}$$

然而：

$$\mathbb{E}\,\tau_m=\infty \tag{5.2.17}$$

如果随机游动非对称，上升概率 p 大于 $\frac{1}{2}$，则对于正整数 m，我们有 $\mathbb{P}\{\tau_m<\infty\}=1$ 且 $\mathbb{E}\tau_m<\infty$(τ_1 的情形见习题 5.2)。如果 $0<p<\frac{1}{2}$，m 是正整数，则 $\mathbb{P}\{\tau_m=\infty\}>0$ 且 $\mathbb{E}\tau_m=\infty$(τ_1 的情形见习题 5.3)。

对于对称和非对称随机游动，都能算得 τ_m 的矩母函数[关于对称随机游动，见式(5.2.13)，非对称情形见习题 5.2 和习题 5.3]。利用矩母函数，可以确定 τ_m 的分布，尽管对于较大的 m，计算并不容易。对于上升概率为 p、下降概率为 $q=1-p$ 的随机游动，τ_1 的分布为：

$$\mathbb{P}\{\tau_1=2j-1\}=\frac{(2j-2)!}{j!\,(j-1)!}p^j q^{j-1},\quad j=1,2,\cdots \tag{5.2.23}$$

$m=2$ 的情形见习题 5.4。

计算 τ_m 的分布的另一种方法是利用**反射原理**。该原理背后的想法是：在最终时刻之前达到过水平 m 但在最终时刻低于水平 m 的路径与在最终时刻超出水平 m 的路径数目相等。由此，我们可以计算截至最终时刻达到过水平 m 的路径数目。反射原理还能被用来确定在时刻 n 随机游动及其截至时刻 n 的最大值的联合分布，见习题 5.5。

利用随机游动的矩母函数公式，可求得永久美式看跌期权持有人采取

在股价跌至给定阈值的第一时刻行权的策略时,所获支付的风险中性期望贴现值。我们可以确定最大化贴现支付的风险中性期望值的行权阈值。5.4 节中给出了一个例子。为了说明这样求得的看跌期权价格是正确的,需要验证美式衍生证券的以下三条性质:(i)期权价格不低于其内在价值;(ii)期权价格贴现过程在风险中性测度下是一个上鞅;(iii)期权价格应是满足(i)和(ii)的所有可能价格中最低的。5.4 节中的例子中完成了这些验证。

也可以通过求解贝尔曼方程得到永久美式期权的价格。对于 5.4 节中的看跌期权,贝尔曼方程为:

$$v(s)=\max\left\{4-s,\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right\} \qquad (5.4.13)$$

该方程必须对所有可能格点上的股价 s 成立。在第二卷第八章中研究的连续时间形式的方程必须对所有正值 s 成立。离散时间和连续时间的贝尔曼方程都可能存在与问题无关的解。在连续时间情形,可以利用所考虑期权应满足的适当的边界条件来排除那些无关解。在离散时间情形,必须同时利用边界条件和仔细考虑可能股价的格点的性质来排除那些无关的解。特别地,对于一般的永久美式看跌问题,连续时间的贝尔曼方程具有比离散时间情形更为简单的解。

5.6 评 注

5.4 节中的永久美式看跌问题的解是在 1994 年卡耐基·梅隆大学举办的暑期大学生数学研讨班上,由伊雷妮·比列加斯(Irene Villegas)利用习题 5.9 中的方法求得的。这是最优停时问题的一个例子。关于最优停时问题的经典文献是希里亚耶夫(Shiryaev)[39],希里亚耶夫、卡巴诺夫(Kabanov)、克拉姆科夫(Kramkov)和梅尔尼科夫(Melnikov)[41]中在二叉树模型框架下考虑了一般的永久美式看跌问题,他们的工作被收录在希里亚耶夫[40]中。

5.7 习 题

习题 5.1 对于对称随机游动,考虑水平 m 的首达时间 τ_m。随机变量 $\tau_2-\tau_1$ 是随机游动从水平 1 到水平 2 所需要的步数,它与随机游动从水平 0 到水平 1 所需要的步数 τ_1 有相同的分布。而且,$\tau_2-\tau_1$ 与 τ_1 是相互独立的;后者仅依赖于第 $1,2,\cdots,\tau_1$ 次硬币抛掷,而前者仅依赖于 $\tau_1+1,\tau_1+2,\cdots,\tau_2$ 次硬币抛掷。

(i) 利用这些事实,解释为何

$$\mathbb{E}\,\alpha^{\tau_2}=(\mathbb{E}\,\alpha^{\tau_1})^2,\quad \forall\alpha\in(0,1)$$

(ii) 不用式(5.2.13),解释为何对任何正整数 m 必有:

$$\mathbb{E}\alpha^{\tau_m}=(\mathbb{E}\alpha^{\tau_1})^m,\quad \forall\alpha\in(0,1)\tag{5.7.1}$$

(iii) 如果随机游动不是对称的,式(5.7.1)是否还成立?给出你的理由。

习题 5.2(向上漂移随机游动的首达时间) 考虑上升概率为 p、下降概率为 $q=1-p$ 的非对称随机游动,其中 $\frac{1}{2}<p<1$,于是 $0<q<\frac{1}{2}$。采用式(5.2.1)中的记号,设 τ_1 是随机游动从水平 0 到水平 1 的第一时刻。如果随机游动永远不能达到水平 1,则 $\tau_1=\infty$。

(i) 定义 $f(\sigma)=pe^{\sigma}+qe^{-\sigma}$。证明:对所有 $\sigma>0$,$f(\sigma)>1$。

(ii) 证明:对所有 $\sigma>0$,过程

$$S_n=e^{\sigma M_n}\left(\frac{1}{f(\sigma)}\right)^n$$

是一个鞅。

(iii) 证明对所有 $\sigma>0$,有:

$$e^{-\sigma}=\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_1<\infty\}}\left(\frac{1}{f(\sigma)}\right)^{\tau_1}\right]$$

由此证明$\mathbb{P}\{\tau_1<\infty\}=1$。

(iv) 计算$\mathbb{E}\alpha^{\tau_1}$,$\alpha\in(0,1)$。

(v) 计算$\mathbb{E}\tau_1$。

习题 5.3(向下漂移随机游动的首达时间) 修改习题 5.2,假设 $0<p<\frac{1}{2}$,于是$\frac{1}{2}<q<1$。

(i) 求正数 σ_0,使得函数 $f(\sigma)=pe^{\sigma}+qe^{-\sigma}$满足:$f(\sigma_0)=1$,并且对所有 $\sigma>\sigma_0$,$f(\sigma)>1$。

(ii) 确定$\mathbb{P}\{\tau_1<\infty\}$。(这个量不再等于 1。)

(iii) 计算$\mathbb{E}\alpha^{\tau_1}$,$\alpha\in(0,1)$。

(iv) 计算 $\mathbb{E}[I_{\{\tau_1<\infty\}}\tau_1]$。(由于$\mathbb{P}\{\tau_1=\infty\}>0$,我们有$\mathbb{E}\tau_1=\infty$。)

习题 5.4(τ_2 的分布) 考虑对称随机游动,设 τ_2 是随机游动从水平 0 到水平 1 的第一时刻。根据定理 5.2.3,有:

$$\mathbb{E}\alpha^{\tau_2}=\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^2,\quad \forall\alpha\in(0.1)$$

利用式(5.2.21)中的幂级数,可将上式右端展开为:

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^2=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}-1$$

$$=-1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j-2}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}$$
$$=\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2j-2}\frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$$

(i) 利用上述幂级数确定$\mathbb{P}\{\tau_2=2k\},k=1,2,\cdots$。

(ii) 利用反射原理确定$\mathbb{P}\{\tau_2=2k\},k=1,2,\cdots$。

习题 5.5(随机游动及其迄今最大值的联合分布) 设M_n是一个对称随机游动,定义它的**迄今最大值过程为:**

$$M_n^*=\max_{1\leqslant k\leqslant n}M_k \tag{5.7.2}$$

设n和m是正偶数,b是小于或者等于m的偶数。假定$m\leqslant n$以及$2m-b\leqslant n$。

(i) 利用基于反射路径的方法,证明:

$$\mathbb{P}\{M_n^*\geqslant m,M_n=b\}=\mathbb{P}\{M_n=2m-b\}$$
$$=\frac{n!}{(\frac{n-b}{2}+m)!\ (\frac{n+b}{2}-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii) 对于上升概率为p、下降概率为$q=1-p$的非对称随机游动,其中$0<p<1$,求$\mathbb{P}\{M_n^*\geqslant m,M_n=b\}$。

习题 5.6 5.4 节中的永久美式看跌期权价值是具有相同敲定价格 4、到期时刻为n的美式看跌期权价值当$n\to\infty$时的极限。若初始价格$S_0=4$,永久美式看跌期权价值是 1[见式(5.4.6),取$j=2$]。证明:若初始价格$S_0=4$,则相应的美式看跌期权的价值时刻 1 到期的为 0.80,时刻 3 到期的为 0.928,时刻 5 到期的为 0.968 96。

习题 5.7(永久美式看跌期权的空头对冲) 假设你已经售出 5.4 节中的永久美式看跌期权并正在进行空头对冲。假设当前时刻股价为s,而你的对冲资产组合的价值为$v(s)$。你的对冲策略是首先消费掉

$$c(s)=v(s)-\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right] \tag{5.7.3}$$

然后取股票头寸

$$\delta(s)=\frac{v(2s)-v(\frac{s}{2})}{2s-\frac{s}{2}} \tag{5.7.4}$$

[见定理 4.2.2。将式(5.7.3)和式(5.7.4)中的哑变量s用股价S_n替换,就得到该定理中的过程C_n和Δ_n,即$C_n=c(S_n)$和$\Delta_n=\delta(S_n)$。]只要你如此对

冲，不论下一时刻股价上升还是下降，你的对冲资产组合的价值总是等于永久美式看跌期权的价值。

(i) 就 $j\leqslant 0$、$j=1$ 和 $j\geqslant 2$ 三种情形，计算 $c(s)$，其中 $s=2^j$。

(ii) 就 $j\leqslant 0$、$j=1$ 和 $j\geqslant 2$ 三种情形，计算 $\delta(s)$，其中 $s=2^j$。

(iii) 验证在上述三种情形下，对冲均有效(即不论下一时刻股价上升还是下降，你的对冲资产组合的价值总是等于永久美式看跌期权的价值)。

习题 5.8(永久美式看涨期权) 如同 5.4 节的永久美式看跌期权，永久美式看涨期权也没有到期日。考虑二叉树模型，其中上升因子 u、下降因子 d 和利率 r 满足无套利条件 $0<d<1+r<u$。风险中性概率为：

$$\tilde{p}=\frac{1+r-d}{u-d},\quad \tilde{q}=\frac{u-1-r}{u-d}$$

永久美式看涨期权的内在价值为 $g(s)=s-K$，其中 $K>0$ 是敲定价格。本习题的目的是证明永久美式看涨期权的价值总是等于原生资产股价，并且没有最优实施时刻。

(i) 令 $v(s)=s$，证明 $v(S_n)$ 总是不低于看涨期权的内在价值 $g(S_n)$，并且 $\left(\frac{1}{1+r}\right)^n v(S_n)$ 在风险中性概率下是一个上鞅。事实上，$\left(\frac{1}{1+r}\right)^n v(S_n)$ 在风险中性概率下是一个鞅。这些都类似于 5.4 节中永久美式看跌期权的性质(i)和(ii)。

(ii) 为了证明 $v(s)=s$ 作为永久美式看涨期权的价值并未高估，我们必须找出期权购买者的好的策略。证明：如果看涨期权的购买者在时刻 n 行权，无论时刻 n 的股价如何，其所获得支付的风险中性期望贴现值总是 $S_0-\frac{K}{(1+r)^n}$。由于这对任何 n 都成立，而

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_0-\frac{K}{(1+r)^n}\right]=S_0$$

因此，永久美式看涨期权在时刻 0 的价值至少是 S_0。(在任何其他的时刻都是如此，永久美式看涨期权的价值至少等于当前股价。)

(iii) 作为以上(i)和(ii)的替代，我们可以通过验证 $v(s)=s$ 满足方程(5.4.16)和边界条件(5.4.18)来说明永久美式看涨期权的价值 $v(s)=s$。

(iv) 证明永久美式看涨期权没有最优实施时刻。

习题 5.9(伊雷妮·比列加斯提供的解法) 以下是 5.4 节中永久美式看跌期权的贝尔曼方程(5.4.13)的一个解法。

(i) 首先对于较大的 s 值确定 $v(s)$。对于较大的 s 值，看跌期权不宜实施，故式(5.4.13)中的最大值由第二项

$$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}v(2s)+\frac{1}{2}v\left(\frac{s}{2}\right)\right]=\frac{2}{5}v(2s)+\frac{2}{5}v\left(\frac{s}{2}\right)$$

给出,于是我们求解方程:

$$v(s)=\frac{2}{5}v(2s)+\frac{2}{5}v\left(\frac{s}{2}\right) \tag{5.7.5}$$

上述方程的解都是形如 s^p(p 为常数)的函数的线性组合。将 s^p 代入式(5.7.5),得到关于 2^p 的二次方程,解得 $2^p=2$ 或 $2^p=\frac{1}{2}$。这就得到 $p=1$ 和 $p=-1$,即 $v_1(s)=s$ 和 $v_2(s)=\frac{1}{s}$ 是方程(5.7.5)的两个解。

(ii) 方程(5.7.5)的一般解是 $v_1(s)$ 和 $v_2(s)$ 的线性组合,即:

$$v(s)=As+\frac{B}{s} \tag{5.7.6}$$

对于较大的 s 值,永久美式看跌期权的价值由式(5.7.6)给出。还需要确定常数 A 和 B。利用式(5.4.15)中第二个边界条件,证明 $A=0$。

(iii) 我们已知:对于较大的 s 值,$v(s)=\frac{B}{s}$,其中 B 待定。对于较小的 s 值,看跌期权的价值等于其内在价值 $4-s$。我们必须选择 B,使得这两个函数能在某一点相等,即求出 B,使得函数

$$f_B(s)=\frac{B}{s}-(4-s)$$

在某个 $s>0$ 处取值为 0。证明:当 $B>4$ 时,对任何 $s>0$,$f_B(s)\neq 0$;当 $B\leqslant 4$ 时,方程 $f_B(s)=0$ 有解。

(iv) 设 $B\leqslant 4$,s_B 是方程 $f_B(s)=0$ 的解,并且 s_B 是模型中股价的允许取值(即 $s_B=2^j$,其中 j 是整数)。若永久美式看跌期权持有人在股价小于或者等于 s_B 的第一时刻行权,则其获得支付的风险中性期望贴现值等于$v_B(S_0)$,其中 $v_B(s)$ 由

$$v_B(s)=\begin{cases}4-s, & s\leqslant s_B\\ \dfrac{B}{s}, & s\geqslant s_B\end{cases} \tag{5.7.7}$$

给出。那么,什么样的 B 和 s_B 的值能够最大化期权的价值?

(v) 函数 $v_B(s)$ 的导数,当 $s<s_B$ 时为 $v_B'(s)=-1$,当 $s>s_B$ 时为 $v_B'(s)=-\frac{B}{s^2}$。证明:对期权持有人而言最好的 B 和 s_B 的值,使得 $v_B(s)$ 的导数在$s=s_B$ 处连续。

6 依赖利率的资产

6.1 引 言

本章中，我们先建立简单的利率二叉树模型，然后考察一些其价值依赖于利率的资产。这类资产通常被称为**固定收益资产**。

最简单的固定收益资产是**零息债券**，它将在指定的日期（称为**到期日**）支付指定的金额（称为**面值**）。只要利率大于0，在到期日之前其价值总是低于面值。相应于每一个给定的到期日，我们可以如下定义零息债券的**收益率**：它是一个常数利率，在时刻0以零息债券的时刻0价格为本金，按这一利率计息，在债券到期日，本息合计恰为零息债券的面值。理论上，相应于每个可能的到期日，都有一个零息债券；因此，相应于当前时刻（时刻0）以后的任何时刻，都有一个收益率。**收益率曲线**是以到期日为自变量、收益率为因变量的函数。人们感兴趣的是，建立这样的模型不仅能确定某一特定时刻的收益率曲线，还能反映收益率曲线沿时间正向的随机演化过程。这类模型被称为**利率的期限结构**模型。

对于每个可能的到期日都存在零息债券，这就产生了套利的问题。期限结构模型有大量可交易资产——所有零息债券以及其他可能的固定收益资产。如何令人确信无法利用这些交易工具在模型中发现套利机会呢？不论人们对真实世界中存在套利的看法如何，有一点是肯定的：用于定价和对冲的模型不能允许套利。如果模型允许套利，则任何问题的答案都毫无意义。某一资产的期权如何定价？如果可以初始资本为0，利用模型中的套利机会来对冲期权空头，那就可以认为期权价格为0。我们无法令人信服地给出任何其他价格。

本章中，我们通过在风险中性测度下建立模型以避免套利问题。换言之，我们将首先在风险中性测度下描述利率的演化过程，然后利用风险中性定价公式确定零息债券以及所有其他固定收益资产的价格。这样的结构保证了所有资产的贴现价格过程是鞅，从而（当所有附息和任何其他现金支付

都再投资于资产组合时)所有资产组合的贴现价格过程都是鞅。这就是6.2节中的主要结果——定理6.2.6的内容。由于初始值为0的鞅的期望值恒为0,作为鞅的资产组合贴现过程不存在套利;它不能以正概率在未来某个时刻取正值,除非也以正概率在那个时刻取负值。

从利率出发利用风险中性定价建立的模型被称为**短期利率模型**。韦萨切克—赫尔—怀特(*Vasicek-Hull-White*)模型[42]、[23]以及考克斯—英格索尔—罗斯(*Cox-Ingersoll-Ross*)模型[10]是连续时间情形这类模型的例子。连续时间情形的经典模型由赫斯、加罗和墨顿[20]、[21]给出,它以对收益率曲线随机演化过程的描述开始并推导出模型无套利的条件。这一模型也许可被称为**整体收益率模型**,因为它是以全部收益率曲线作为出发点。这两类模型的差别在实际中具有基本的重要性。然而,在整体收益率模型中也还是有利率,并且所有其他资产通过风险中性定价公式与利率相联系。虽然在整体收益率模型中,利率演化过程一般要比在本章考虑的二叉树模型中复杂得多,本章中的一些思想还是可以被运用于整体收益率模型。

两个通常的离散时间模型是霍—李(*Ho-Lee*)模型和布莱克—德曼—托伊(*Black-Derman-Toy*)模型。我们利用前者作为例6.4.4的基础,后者作为例6.5.5的基础。

6.2 利率二叉树模型

设Ω是N次抛掷硬币的2^N个可能结果$\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$的集合,$\widetilde{\mathbb{P}}$是$\Omega$上的概率测度,在$\widetilde{\mathbb{P}}$下每个结果序列$\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$都具有正概率。我们定义**利率过程**为下列随机变量:

$$R_0, R_1, \cdots, R_{N-1}$$

其中R_0并非随机变量,对于$n=0,1,\cdots,N-1$,R_n仅依赖于前n次抛掷硬币结果$\omega_1\cdots\omega_n$。时刻n投资于货币市场的1美元在时刻$n+1$增长为$1+R_n$美元。虽然利率是随机的,但是在时刻n,我们知道从时刻n到时刻$n+1$整个时段货币市场投资适用的利率。这比股票的随机性要少一些。如果在时刻n投资于股票,我们并不知道在下一时刻$n+1$这笔投资的价值是多少。

对所有n和$\omega_1\cdots\omega_n$,假定$R_n>0$是很自然的,这与常理相符。然而,在模型分析中,我们只要求:

$$R_n(\omega_1\cdots\omega_n) > -1,\ \forall n \text{ 和 } \omega_1,\cdots,\omega_n \tag{6.2.1}$$

这也是我们仅有的假定。

我们定义**贴现过程**为:

$$D_n=\frac{1}{(1+R_0)\cdots(1+R_{n-1})},\ n=1,2,\cdots,N,\ D_0=1 \tag{6.2.2}$$

注意 D_n 仅依赖于前 $n-1$ 次抛掷硬币的结果，这与通常的情形不同，通常下标表示该随机变量依赖硬币抛掷的次数。

由风险中性定价公式，在时刻 m 将收到的支付 X（这里 X 仅依赖于$\omega_1\cdots\omega_m$）在时刻 0 的价值是该支付的风险中性期望贴现值：

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_mX]$$

利用这一公式，我们可以定义在时刻 m 支付为 1 的零息债券在时刻 0 的价格为：

$$B_{0,m}=\widetilde{\mathbb{E}}[D_m] \tag{6.2.3}$$

该债券的收益率是满足下式的 y_m：

$$\frac{1}{B_{0,m}}=(1+y_m)^m$$

在时刻 0，投资 1 美元可以购买$\frac{1}{B_{0,m}}$份时刻 m 到期的零息债券，并在时刻 m 获得支付$\frac{1}{B_{0,m}}$。这相当于投资 1 美元，在时刻 0 到时刻 m 期间，按常数利率 y_m 计息。我们可从上述方程中解得 y_m：

$$y_m=\left(\frac{1}{B_{0,m}}\right)^{\frac{1}{m}}-1$$

为了定义于时刻 m 到期的零息债券在时刻 n 的价格（其中 $0\leqslant n\leqslant m$），我们需要推广定义 2.3.1 中的条件期望概念。考虑以下例子。

例 6.2.1 设 $N=3$，于是：

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

再假定：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{HHH\}=\frac{2}{9},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{HHT\}=\frac{1}{9},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{HTH\}=\frac{1}{12},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{HTT\}=\frac{1}{12},$$
$$\widetilde{\mathbb{P}}\{THH\}=\frac{1}{6},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{THT\}=\frac{1}{12},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{TTH\}=\frac{1}{8},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{TTT\}=\frac{1}{8}$$

这些正数的和为 1。定义前两次抛掷硬币结果分别为 HH、HT、TH 和 TT 的事件集合：

$$A_{HH}=\{\omega_1=H,\omega_2=H\}=\{HHH,HHT\}$$
$$A_{HT}=\{\omega_1=H,\omega_2=T\}=\{HTH,HTT\}$$
$$A_{TH}=\{\omega_1=T,\omega_2=H\}=\{THH,THT\}$$
$$A_{TT}=\{\omega_1=T,\omega_2=T\}=\{TTH,TTT\}$$

我们有：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HH}\}=\frac{1}{3},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HT}\}=\frac{1}{6},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TH}\}=\frac{1}{4},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TT}\}=\frac{1}{4}$$

类似地，定义第一次抛掷硬币的结果分别为 H 和 T 的事件集合：

$$A_H=\{\omega_1=H\}=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$$

$$A_T=\{\omega_1=T\}=\{THH,THT,TTH,TTT\}$$

对于这些集合，我们有：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_H\}=\frac{1}{2},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{A_T\}=\frac{1}{2}$$

假设接连三次抛掷硬币，前两次结果为 HH，于是我们知道三次抛掷硬币的结果一定属于事件集合 A_{HH}。基于这一信息，第三次结果出现 H 的概率为：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=H,\omega_2=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{HHH\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HH}\}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

类似地，我们有：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=H,\omega_2=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{HHT\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HH}\}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=H,\omega_2=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{HTH\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HT}\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=H,\omega_2=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{HTT\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HT}\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=T,\omega_2=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{THH\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TH}\}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=T,\omega_2=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{THT\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TH}\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=T,\omega_2=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{TTH\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TT}\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=T,\omega_2=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{TTT\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TT}\}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

假设接连三次抛掷硬币，第一次的结果为 H，于是我们知道三次抛掷硬币的结果一定属于事件集合 A_H。基于这一信息，第二次结果出现 H 的概率为：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H|\omega_1=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HH}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_H\}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

同理：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T|\omega_1=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{HT}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_H\}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H|\omega_1=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TH}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_T\}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T|\omega_1=T\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{TT}\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_T\}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

这些条件概率（我们将称之为 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 的**转移概率**）都已标记在图 6.2.1 中。在图 6.2.1 中，每一路径的（无条件）概率则分别标记在这八条路径的右端。

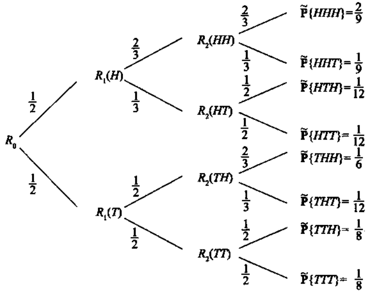

图 6.2.1 三时段利率模型

我们可用两种方法来计算 $\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=H\}$，即利用公式：

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=H\}\\&=\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H|\omega_1=H\}\cdot\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=H,\omega_2=H\}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

或者利用公式：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=H\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{HHH\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{A_H\}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

无论用哪种方法，我们都得到：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=H\}=\frac{4}{9},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=T|\omega_1=H\}=\frac{2}{9},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=H|\omega_1=H\}=\frac{1}{6},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=T|\omega_1=H\}=\frac{1}{6},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=T\}=\frac{1}{3},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=T|\omega_1=T\}=\frac{1}{6},$$

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=H|\omega_1=T\}=\frac{1}{4},\quad \widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=T|\omega_1=T\}=\frac{1}{4}$$

最后，设有随机变量 $X(\omega_1\omega_2\omega_3)$，我们利用以下公式定义基于第一次抛掷硬币结果该随机变量的条件期望：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_1[X](H)=&X(HHH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=H\}\\&+X(HHT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=T|\omega_1=H\}\\&+X(HTH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=H|\omega_1=H\}\\&+X(HTT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=T|\omega_1=H\}\\&=\frac{4}{9}X(HHH)+\frac{2}{9}X(HHT)+\frac{1}{6}X(HTH)+\frac{1}{6}X(HTT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_1[X](T)=&X(THH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=H|\omega_1=T\}\\&+X(THT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=H,\omega_3=T|\omega_1=T\}\\&+X(TTH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=H|\omega_1=T\}\\&+X(TTT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_2=T,\omega_3=T|\omega_1=T\}\\&=\frac{1}{3}X(THH)+\frac{1}{6}X(THT)+\frac{1}{4}X(TTH)+\frac{1}{4}X(TTT)\end{aligned}$$

注意 $\widetilde{\mathbb{E}}_1[X]$是随机变量，它依赖于第一次抛掷硬币的结果。我们利用以下公式定义基于前两次抛掷硬币结果随机变量 $X(\omega_1\omega_2\omega_3)$的条件期望：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](HH)=X(HHH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=H,\omega_2=H\}$$
$$+X(HHT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=H,\omega_2=H\}$$
$$=\frac{2}{3}X(HHH)+\frac{1}{3}X(HHT)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](HT)=X(HTH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=H,\omega_2=T\}$$
$$+X(HTT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=H,\omega_2=T\}$$
$$=\frac{1}{2}X(HTH)+\frac{1}{2}X(HTT)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](TH)=X(THH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=T,\omega_2=H\}$$
$$+X(THT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=T,\omega_2=H\}$$
$$=\frac{2}{3}X(THH)+\frac{1}{3}X(THT)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](TT)=X(TTH)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=H|\omega_1=T,\omega_2=T\}$$
$$+X(TTT)\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_3=T|\omega_1=T,\omega_2=T\}$$
$$=\frac{1}{2}X(TTH)+\frac{1}{2}X(TTT)$$

注意 $\widetilde{\mathbb{E}}_2[X]$也是随机变量，它依赖于前两次抛掷硬币的结果。

如果随机变量 X 仅依赖于前两次抛掷硬币的结果，则上述条件期望的计算可以简化。特别地，我们有：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1[X](H)=\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)X(HH)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)X(HT)$$
$$=\frac{2}{3}X(HH)+\frac{1}{3}X(HT)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1[X](T)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)X(TH)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)X(TT)$$
$$=\frac{1}{2}X(TH)+\frac{1}{2}X(TT)$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](HH)=X(HH),\ \widetilde{\mathbb{E}}_2[X](HT)=X(HT)$$
$$\widetilde{\mathbb{E}}_2[X](TH)=X(TH),\ \widetilde{\mathbb{E}}_2[X](TT)=X(TT)$$ □

上述例子是以下定义的特殊情形。

定义 6.2.2 设 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是 N 次抛掷硬币所有可能结果的空间 Ω 上的概率测度，Ω 中每个结果序列 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下都具有正概率。设 $1\leqslant n\leqslant N-1$，$\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\cdots\bar{\omega}_N$ 是 N 次抛掷硬币的一个结果序列。我们定义：

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_{n+1}=\bar{\omega}_{n+1},\cdots,\omega_N=\bar{\omega}_N|\omega_1=\bar{\omega}_1,\cdots,\omega_n=\bar{\omega}_n\}=\frac{\widetilde{\mathbb{P}}\{\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n\bar{\omega}_{n+1}\cdots\bar{\omega}_N\}}{\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_1=\bar{\omega}_1,\cdots,\omega_n=\bar{\omega}_n\}}$$

设 X 是随机变量,我们利用以下公式定义**基于时刻 n 的信息随机变量 X 的条件期望**:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[X](\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n)=\sum_{\omega_{n+1},\cdots,\omega_N}X(\bar{\omega}_1\cdots\bar{\omega}_n\bar{\omega}_{n+1}\cdots\bar{\omega}_N)$$
$$\times\widetilde{\mathbb{P}}\{\omega_{n+1}=\bar{\omega}_{n+1},\cdots,\omega_N=\bar{\omega}_N\,|\,\omega_1=\bar{\omega}_1,\cdots,\omega_n=\bar{\omega}_n\}$$

我们还规定 $\widetilde{\mathbb{E}}_0[X]=\widetilde{\mathbb{E}}X$ 以及 $\widetilde{\mathbb{E}}_N[X]=X$。

注 6.2.3 上述定义的条件期望是定义 2.3.1 的推广,它允许非独立的抛掷硬币过程。这样定义的条件期望满足定理 2.3.2 中的所有性质。只要将附录中给出的证明作相应的修改,就得到这些性质的证明。

定义 6.2.4(零息债券价格) 设 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是 N 次抛掷硬币所有可能结果的空间 Ω 上的概率测度,Ω 中每个结果序列 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_N$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下都具有正概率。设 $R_0,R_1,R_2,\cdots,R_{N-1}$ 是利率过程,其中每个 R_n 仅依赖于前 n 次抛掷硬币的结果并且满足式(6.2.1)。由式(6.2.2)定义贴现过程 $D_n,n=0,1,\cdots,N$。对于 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N-1$,**时刻 m 到期的零息债券在时刻 n 的价格**定义为:

$$B_{n,m}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{D_m}{D_n}\right]\tag{6.2.4}$$

根据式(6.2.4),时刻 m 到期的零息债券在时刻 m 的价格为 $B_{m,m}=1$。这里,为方便起见,我们假定债券面值为 1。如果债券面值为其他某个 C,则在到期日 m 到期之前的任何时刻 n,债券价值为 $CB_{n,m}$。如果 $n=0$,式(6.2.4)便成为式(6.2.3)。

注 6.2.5 可以利用"提取已知量"的性质[定理 2.3.2(ii)]将式(6.2.4)改写为:

$$D_nB_{n,m}=\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_m]\tag{6.2.5}$$

由此可见,零息债券的贴现价格过程 $D_nB_{n,m},n=0,1,\cdots,m$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下是一个鞅。特别地,如果 $0\leqslant k\leqslant n\leqslant m$,则由式(6.2.5)和"累次条件期望"性质[定理 2.3.2(iii)]得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_k[D_nB_{n,m}]=\widetilde{\mathbb{E}}_k[\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_m]]=\widetilde{\mathbb{E}}_k[D_m]=D_kB_{k,m}$$

这正是鞅性质。选择定义 6.2.4,正是为了让零息债券的贴现价格过程是一个鞅。

假定投资者可以对每一到期日的零息债券进行交易,并且可以在货币市场投资。我们将证明投资者的贴现财富过程是一个鞅。由此可知,对于由式(6.2.4)定义的零息债券价格,我们的模型不存在套利。设 $\Delta_{n,m}$ 是投资者在时刻 n 到时刻 $n+1$ 持有的到期日为 m 的零息债券的份额(由于时刻 m 以后到期日为 m 的零息债券不再存在,故必有 $n<m$),这里的 $\Delta_{n,m}$ 仅依赖于

前 n 次硬币抛掷。投资者以非随机的初始财富 X_0 开始，在时刻 n 的财富记为 X_n。于是，投资者在时刻 $n+1$ 的财富由下式给出：

$$X_{n+1}=\Delta_{n,n+1}+\sum_{m=n+2}^{N}\Delta_{n,m}B_{n+1,m}+(1+R_n)(X_n-\sum_{m=n+1}^{N}\Delta_{n,m}B_{n,m}) \tag{6.2.6}$$

式(6.2.6)右端第一项是时刻 $n+1$ 到期的零息债券的支付乘以投资者在时刻 n 到时刻 $n+1$ 持有该债券的头寸。第二项是时刻 $n+2$ 及其以后到期的零息债券的价值乘以投资者在时刻 n 到时刻 $n+1$ 持有这些债券的头寸。第三项的第二个因子是投资者在时刻 n 的现金头寸，它是投资者在时刻 n 的总财富与时刻 n 调整头寸后持有的所有债券价值的差。这个因子被乘上了 1 加时刻 n 到时刻 $n+1$ 期间适用的利率。

定理 6.2.6 无论资产组合随机变量 $\Delta_{n,m}$ 如何选取(但必须满足 $\Delta_{n,m}$ 仅依赖于前 n 次硬币抛掷这一条件)，贴现财富过程 D_nX_n 在 $\widetilde{\mathrm{P}}$ 下都是鞅。

【证明】 利用 $\Delta_{n,m}$ 仅依赖于前 n 次硬币抛掷这一事实、"提取已知量"的性质[定理 2.3.2(ii)]、D_{n+1} 也仅依赖于前 n 次硬币抛掷这一事实以及注 6.2.5中的鞅性质，可算得：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{E}}_n[X_{n+1}]&=\Delta_{n,n+1}+\sum_{m=n+2}^{N}\Delta_{n,m}\widetilde{\mathrm{E}}_n[B_{n+1,m}]+(1+R_n)(X_n-\sum_{m=n+1}^{N}\Delta_{n,m}B_{n,m})\\&=\Delta_{n,n+1}+\sum_{m=n+2}^{N}\frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}}\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{n+1}B_{n+1,m}]+\frac{D_n}{D_{n+1}}(X_n-\sum_{m=n+1}^{N}\Delta_{n,m}B_{n,m})\\&=\Delta_{n,n+1}+\sum_{m=n+2}^{N}\frac{\Delta_{n,m}}{D_{n+1}}D_nB_{n,m}+\frac{D_n}{D_{n+1}}X_n-\frac{D_n}{D_{n+1}}\sum_{m=n+1}^{N}\Delta_{n,m}B_{n,m}\\&=\Delta_{n,n+1}+\frac{D_n}{D_{n+1}}X_n-\frac{D_n}{D_{n+1}}\Delta_{n,n+1}B_{n,n+1}\end{aligned}$$

由于 $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ 仅依赖于前 n 次硬币抛掷，故 $B_{n,n+1}=\widetilde{\mathrm{E}}_n\left[\frac{D_{n+1}}{D_n}\right]=\frac{D_{n+1}}{D_n}$。代入上式，即得：

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n[X_{n+1}]=\frac{D_n}{D_{n+1}}X_n$$

再利用 D_{n+1} 仅依赖于前 n 次硬币抛掷这一事实，可将上式改写为：

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{n+1}X_{n+1}]=D_nX_n$$

这就是贴现财富过程的鞅性质。 □

注 6.2.7 由于贴现财富过程在 $\widetilde{\mathrm{P}}$ 下是鞅，它具有常数期望：

$$\widetilde{\mathrm{E}}[D_nX_n]=X_0,\quad n=0,1,\cdots,N \tag{6.2.7}$$

如果可以通过零息债券交易以及货币市场投资进行套利，则存在初值 $X_0=0$

的资产组合，在未来某个时刻 n，不论抛掷硬币结果如何，总有 $X_n\geqslant 0$，并且相应于某些结果，$X_n>0$。在此情形下，$\widetilde{\mathbb{E}}[D_nX_n]>0=X_0$，而式(6.2.7) 表明这不可能。换言之，通过利用风险中性定价公式(6.2.4) 定义零息债券的价格，我们已经成功地建立了一个无套利模型。

注 6.2.8 由风险中性定价公式，对于 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$，在时刻 m 支付为 V_m 的衍生证券(其中 V_m 仅依赖于前 m 次硬币抛掷)在时刻 n 的价格为：

$$V_n=\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_mV_m] \tag{6.2.8}$$

定理 6.2.6 对此提供了一个部分证明。也就是说，如果有可能构建一个对冲衍生证券空头的资产组合(即在时刻 m，不论抛掷硬币结果如何，资产组合的价值总是 V_m)，则衍生证券在时刻 n 的价值 V_n 必由式(6.2.8) 给出。定理 6.2.6 并未保证这样的对冲资产组合可以构建。

注 6.2.9 在财富方程(6.2.6) 中，允许投资者投资于货币市场以及所有到期日的零息债券。然而，在时刻 n 投资于时刻 $n+1$ 到期的零息债券就相当于在货币市场投资。在时刻 n，投资 1 美元可以购买$\frac{1}{B_{n,n+1}}$份时刻 $n+1$ 到期的零息债券，并且在时刻 $n+1$ 获得支付$\frac{1}{B_{n,n+1}}$，而

$$\frac{1}{B_{n,n+1}}=\frac{1}{\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{D_{n+1}}{D_n}\right]}=\frac{1}{\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{1}{1+R_n}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{1+R_n}}=1+R_n$$

这正是时刻 n 在货币市场投资 1 美元到时刻 $n+1$ 所获得的支付。在式(6.2.6) 中，我们为方便起见也同时考虑了货币市场账户。事实上，在这一离散时间模型的交易资产中不必包括货币市场账户。

给定 $m:0\leqslant m\leqslant N$。一个**附息债券**可以被看作一个常数(即非随机)支付序列 $C_0,C_1,\cdots,C_m$。对于 $0\leqslant n\leqslant m-1$，常数 C_n 是时刻 n 的息票支付(可能为 0)。常数 C_m 是本金与时刻 m 的息票支付之和。对于定义 6.2.4 中的零息债券，$C_0=C_1=\cdots=C_{m-1}=0$ 及 $C_m=1$。通常可将附息债券视为由 C_k 份时刻 k 到期的零息债券($k=0,1,\cdots,m$)的组合，于是，附息债券在时刻 0 的价格为：

$$\sum_{k=0}^{m}C_kB_{0,k}=\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{k=0}^{m}D_kC_k\right]$$

在时刻 n，支付 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$ 已兑现而 C_n 尚未兑现之前，附息债券的价格为：

$$\sum_{k=n}^{m}C_kB_{n,k}=\widetilde{\mathbb{E}}_n\left[\sum_{k=n}^{m}\frac{D_kC_k}{D_n}\right],\quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.2.9}$$

这就将第二章中关于常数支付序列 $C_0,C_1,\cdots,C_m$ 的公式(2.4.13) 推广到

了(非常数)随机利率的情形。

6.3 固定收益衍生产品

在利率二叉树模型中考虑一个资产，我们将其在时刻 n 的价格记为 S_n。它可以是股票，但更多的时候是支付依赖于利率的一个合约。价格 S_n 可以依赖于前 n 次硬币抛掷。我们已取定风险中性概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$，这意味着，贴现资产价格过程在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下是一个鞅：

$$D_nS_n=\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{n+1}S_{n+1}],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{6.3.1}$$

定义 6.3.1 *一份**远期合约**是关于在**交割日** m(这里 $0\leqslant m\leqslant N$)以指定的**交割价格** K 进行资产交易(时刻 m 的资产价格为 S_m)的一份协议。该资产在时刻 n 的 **m-远期价格**(这里 $0\leqslant n\leqslant m$)是使得远期合约在时刻 n 的无套利价格为 0 的交割价格 K 的值。*

定理 6.3.2 *在利率二叉树模型中考虑一个资产，其价格过程为 S_0，$S_1,\cdots,S_N$。假设所有到期日的零息债券均可交易。对于 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$，该资产在时刻 n 的 m-远期价格为：*

$$\mathrm{For}_{n,m}=\frac{S_n}{B_{n,m}} \tag{6.3.2}$$

【证明】 假设投资者在时刻 n 售出交割日为 m、交割价格为 K 的远期合约，并假定 K 的选取使得远期合约在时刻 n 的价格为 0。于是，售出远期合约并无收益。在时刻 n，投资者售出远期合约后立即做空 $\frac{S_n}{B_{n,m}}$ 份零息债券，并用所得收入 S_n 购买一份资产。此后投资者不再进行交易，直到时刻 m 将其持有的资产根据远期合约进行交割，获得收入 K。在结清债券的空头以后，尚有余额 $K-\frac{S_n}{B_{n,m}}$。若余额为正，则有套利。若 $K-\frac{S_n}{B_{n,m}}$ 为负，投资者可进行反向操作，即在时刻 n 购入远期合约后，立即做空一份资产并购买 $\frac{S_n}{B_{n,m}}$ 份零息债券，仍有套利。为了排除套利，K 的值必须由式(6.3.2)确定。 □

注 6.3.3 在上述定理 6.3.2 的证明中构建了远期合约的空头对冲。这称为**静态对冲**，因为在建立对冲的时刻 n 到远期合约的交割日 m 期间无任何交易。只要存在对冲，无论是否静态，对冲组合的贴现价值过程在风险中性测度下一定是鞅，从而有风险中性定价公式。这里，远期合约在时刻 m 的支付 S_m-K 在时刻 n 的贴现价格为：

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_m(S_m-K)]=\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_mS_m]-KD_n\,\widetilde{\mathrm{E}}_n\left[\frac{D_m}{D_n}\right]=D_n(S_n-KB_{n,m})$$

其中我们用到了式(6.3.1)中的鞅性质以及 $B_{n,m}$ 的定义(6.2.4)。为了使远期合约在时刻 n 的价格为 0,必须有 $S_n-KB_{n,m}=0$,即 K 的值必须由式(6.3.2)确定。

除了资产的远期价格外,我们还可定义远期利率。给定 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N-1$,假设投资者在时刻 n 做空一份到期日为 m 的零息债券,并用所得收入购买 $\frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}}$ 份时刻 $m+1$ 到期的零息债券。在时刻 n 建立这一组合的成本为 0。在时刻 m,投资者需要投入 1 美元用以结清到期日为 m 的债券空头。在时刻 $m+1$,投资者由到期日为 $m+1$ 的债券多头获得收入 $\frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}}$。这样,在时刻 m 到时刻 $m+1$ 期间,投资者相当于按照以下利率投资于货币市场:

$$F_{n,m}=\frac{B_{n,m}}{B_{n,m+1}}-1=\frac{B_{n,m}-B_{n,m+1}}{B_{n,m+1}} \tag{6.3.3}$$

上述在时刻 m 到时刻 $m+1$ 期间进行投资的利率,是通过在时刻 n 建立债券组合事先"锁定"的。注意到:

$$F_{m,m}=\frac{B_{m,m}}{B_{m,m+1}}-1=\frac{1}{\frac{1}{1+R_m}}-1=R_m$$

能在时刻 m 被锁定的时刻 m 到时刻 $m+1$ 期间适用的利率就是 R_m。

定义 6.3.4 给定 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N-1$,时刻 n 关于在时刻 m 进行投资的**远期利率**由式(6.3.3)定义。

定理 6.3.5 给定 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N-1$,一份在时刻 $m+1$ 支付 R_m 的合约在时刻 n 的无套利价格为 $B_{n,m+1}F_{n,m}=B_{n,m}-B_{n,m+1}$。

【证明】 假设投资者在时刻 n 售出一份在时刻 $m+1$ 支付 R_m 的合约,并因此获得收入 $B_{n,m}-B_{n,m+1}$。然后,该投资者做空一份时刻 $m+1$ 到期的零息债券并购买一份时刻 m 到期的零息债券。建立这个由一份合约空头、一份债券空头和一份债券多头构成的组合成本为 0。投资者在时刻 m 由债券多头获得收入 1 美元,立即投资于货币市场(利率为 R_m)。到时刻 $m+1$,这一投资增长为 $1+R_m$。投资者用其中的 1 美元结清时刻 $m+1$ 到期的债券空头,并用余下的 R_m 支付合约。这样,投资者成功地对冲了在时刻 $m+1$ 支付 R_m 的合约空头。建立对冲组合所需要的初始资本是 $B_{n,m}-B_{n,m+1}$,这就是该合约的无套利价格。 □

根据定理 6.3.2 和定理 6.3.5,在时刻 $m+1$ 支付 R_m 的合约在时刻 n 的远期价格为 $F_{n,m}$[在式(6.3.2) 中以 $m+1$ 替换 m,并令 $S_n=B_{n,m+1}F_{n,m}$]。这是"锁定"利率的另一种方式。假设你在时刻 n 做空一份利率的远期合约

(即你同意在时刻 $m+1$ 收到 $F_{n,m}$ 并同时支付 R_m),这不需要任何花费。这样,你就将时刻 m 的利率锁定在了 $F_{n,m}$。事实上,你可以在时刻 m 投资 1 美元,适用利率为 R_m。到时刻 $m+1$,这一投资增长为 $1+R_m$,而你已经同意在时刻 $m+1$ 收到 $F_{n,m}$ 并同时支付 R_m,清算以后你的净收入是 $1+F_{n,m}$。因此,你实际上在时刻 m 到时刻 $m+1$ 期间是以事先锁定的利率 $F_{n,m}$ 投资 1 美元。

定义 6.3.6 给定 $m,1\leqslant m\leqslant N$。一份 **$m$ 期利率互换**是一份如下合约:它在时刻 $1,\cdots,m$ 的支付分别为 $S_1,\cdots,S_m$,其中

$$S_n=K-R_{n-1},\quad n=1,\cdots,m$$

固定利率 K 是常数。**m 期互换利率** SR_m 是使得 m 期利率互换在时刻 0 的无套利价格等于 0 的 K 的值。

作为互换多头("收到固定")的投资者,在每一时刻 n 都能收到常数支付 K(可以看作 1 美元本金的固定利率),同时付出浮动利率 R_{n-1}。如果该投资者已经有需要支付固定利率的贷款,则互换的多头头寸可将其转变为浮动利率贷款;互换的空头头寸可将浮动利率贷款转变为固定利率贷款。

定理 6.3.7 定义 6.3.6 中的 m 期利率互换在时刻 0 的无套利价格为:

$$\mathrm{Swap}_m=\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}(K-F_{0,n-1})=K\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}-(1-B_{0,m})\quad(6.3.4)$$

m 期互换利率为:

$$SR_m=\frac{\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}F_{0,n-1}}{\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}}=\frac{1-B_{0,m}}{\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}}\quad(6.3.5)$$

【证明】 时刻 n 的支付 K 在时刻 0 的无套利价格为 $KB_{0,n}$,而由定理 6.3.5,时刻 n 的支付 R_{n-1} 在时刻 0 的无套利价格为 $B_{0,n}F_{0,n-1}$。于是,S_n 在时刻 0 的价格为 $B_{0,n}(K-F_{0,n-1})$。关于 n 求和,可得式(6.3.4) 中间的那项。又注意到:

$$\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}F_{0,n-1}=\sum_{n=1}^{m}(B_{0,n-1}-B_{0,n})=1-B_{0,m}$$

由此给出式(6.3.4) 的右端。令时刻 0 的互换价格为 0,求解 K,即得式(6.3.5)。 □

当然,m 期利率互换的无套利价格公式(6.3.4) 与风险中性定价应该是一致的。事实上,由式(6.3.4)、(6.3.3)、(6.2.4)和(6.3.4)可以推得:

$$\begin{aligned}\mathrm{Swap}_m&=\sum_{n=1}^{m}B_{0,n}(K-F_{0,n-1})\\&=\sum_{n=1}^{m}[KB_{0,n}-(B_{0,n-1}-B_{0,n})]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{m}[K\widetilde{\mathbb{E}}D_n - (\widetilde{\mathbb{E}}D_{n-1} - \widetilde{\mathbb{E}}D_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{m}[K\widetilde{\mathbb{E}}D_n - (\widetilde{\mathbb{E}}[D_n(1+R_{n-1})] - \widetilde{\mathbb{E}}D_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{m}[K\widetilde{\mathbb{E}}D_n - \widetilde{\mathbb{E}}(D_nR_{n-1})] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\sum_{n=1}^{m}D_n(K-R_{n-1}) \qquad (6.3.6)
\end{aligned}
$$

上面最后的表达式就是利率互换的风险中性定价公式。

在定理 6.3.2、定理 6.3.5 和定理 6.3.7 中,固定收益衍生证券的价格是通过构建衍生证券空头对冲组合来确定的。只要这样的对冲组合可以被建立,总可以得到风险中性定价,式(6.3.6) 就是一个例子。在这一节余下的部分,我们考虑利率上限和下限的风险中性定价,尽管对于这些工具的空头对冲一般都可以构建,我们不再详述。习题 6.4 提供了构建对冲的一个实例。

定义 6.3.8 给定 $m, 1 \leqslant m \leqslant N$。一份 m **期利率上限**是一份如下合约:它在时刻 $1,\cdots,m$ 的支付分别为 $C_1,\cdots,C_m$,其中

$$C_n = (R_{n-1} - K)^+, \quad n = 1,\cdots,m$$

一份 m **期利率下限**是一份如下合约:它在时刻 $1,\cdots,m$ 的支付分别为 $F_1,\cdots,F_m$,其中

$$F_n = (K - R_{n-1})^+, \quad n = 1,\cdots,m$$

一份仅在时刻 n 给出支付 C_n 的合约称为一份**利率上限单元**,一份仅在时刻 n 给出支付 F_n 的合约称为一份**利率下限单元**。m 期利率上限在时刻 0 的风险中性价格为:

$$\mathrm{Cap}_m = \widetilde{\mathbb{E}}\sum_{n=1}^{m}D_n(R_{n-1}-K)^+ \qquad (6.3.7)$$

m 期利率下限在时刻 0 的风险中性价格为:

$$\mathrm{Floor}_m = \widetilde{\mathbb{E}}\sum_{n=1}^{m}D_n(K-R_{n-1})^+ \qquad (6.3.8)$$

如果某人要为 1 美元贷款而在每个时刻 n 支付浮动利率 R_{n-1},那么持有一份利率上限可以使利率支付以 K 为限。一旦浮动利率超出 K,利率上限将支付差价。同理,如果某人投资 1 美元,在每个时刻 n 将收到浮动利率 R_{n-1},那么持有一份利率下限可以确保收到的利率至少是 K。一旦浮动利率低于 K,利率下限将支付差价。

注意到,我们总有:

$$K-R_{n-1}+(R_{n-1}-K)^{+}=(K-R_{n-1})^{+}$$

换言之，在任何时刻，持有一份利率互换和一份利率上限的组合相当于持有一份利率下限。由此可得：

$$\text{Swap}_m+\text{Cap}_m=\text{Floor}_m \tag{6.3.9}$$

特别地，如果 K 等于 m 期互换利率，则利率上限与利率下限的初始价格相等。

例 6.3.9 我们回到图 6.2.1 的例子，并在利率二叉树中标出利率的值，如图 6.3.1 所示。在表 6.1 中，给出了 $D_1=\frac{1}{1+R_0}$，$D_2=\frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)}$，$D_3=\frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)(1+R_2)}$。表格右端一列给出的是概率$\widetilde{\mathbb{P}}\{A_{\omega_1\omega_2}\}$，即该列第一项是前两次抛掷硬币结果为 HH 的概率。

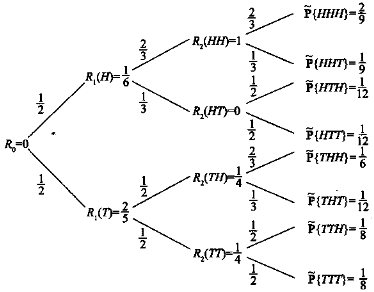

图 6.3.1 三时段利率模型

表 6.1

$\omega_1\omega_2$	$\frac{1}{1+R_0}$	$\frac{1}{1+R_1}$	$\frac{1}{1+R_2}$	D_1	D_2	D_3	$\widetilde{\mathbb{P}}$
HH	1	6/7	1/2	1	6/7	3/7	1/3
HT	1	6/7	1	1	6/7	6/7	1/6
TH	1	5/7	4/5	1	5/7	4/7	1/4
TT	1	5/7	4/5	1	5/7	4/7	1/4

我们可以算得时刻 0 的零息债券价格为：

$$B_{0,1}=\widetilde{\mathbb{E}}D_1=1$$

$$B_{0,2}=\widetilde{\mathbb{E}}D_2=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{14}$$

$$B_{0,3}=\widetilde{\mathbb{E}}D_3=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{7}$$

时刻 1 的零息债券价格为：

$$B_{1,1}=1$$

$$B_{1,2}(H)=\frac{1}{D_1(H)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_2](H)=\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{7}$$

$$B_{1,2}(T)=\frac{1}{D_1(T)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_2](T)=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

$$B_{1,3}(H)=\frac{1}{D_1(H)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_3](H)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$$

$$B_{1,3}(T)=\frac{1}{D_1(T)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_3](T)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$$

时刻 2 的零息债券价格为：

$$B_{2,2}=1$$

$$B_{2,3}(HH)=\frac{1}{D_2(HH)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](HH)=\frac{D_3(HH)}{D_2(HH)}=\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$$

$$B_{2,3}(HT)=\frac{1}{D_2(HT)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](HT)=\frac{D_3(HT)}{D_2(HT)}=\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{7}=1$$

$$B_{2,3}(TH)=\frac{1}{D_2(TH)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](TH)=\frac{D_3(TH)}{D_2(TH)}=\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{5}$$

$$B_{2,3}(TT)=\frac{1}{D_2(TT)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](TT)=\frac{D_3(TT)}{D_2(TT)}=\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{5}$$

我们取 $K=\frac{1}{3}$，并对相应的 3 期利率上限定价。表 6.2 中是该利率上限的支付。

表 6.2

$\omega_1\omega_2$	R_0	$\left(R_0-\frac{1}{3}\right)^+$	R_1	$\left(R_0-\frac{1}{3}\right)^+$	R_2	$\left(R_0-\frac{1}{3}\right)^+$
HH	0	0	1/6	0	1	2/3
HT	0	0	1/6	0	0	0
TH	0	0	2/5	1/15	1/4	0
HT	0	0	2/5	1/15	1/4	0

时刻 1、时刻 2 和时刻 3 的利率上限单元在时刻 0 的价格分别为：

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_1\left(R_0-\frac{1}{3}\right)^+\right]=0$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_2\left(R_1-\frac{1}{3}\right)^+\right]=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{42}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_3\left(R_2-\frac{1}{3}\right)^+\right]=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{21} \tag{6.3.10}$$

从而得到：

$$\mathrm{Cap}_3=0+\frac{1}{42}+\frac{2}{21}=\frac{5}{42}$$

6.4 远期测度

设 V_m 是某个合约(衍生证券或者债券之类的“基础”证券)在时刻 m 的支付。在关于 m 之前某个时刻 n 的合约价格的风险中性定价公式中，涉及条件期望 $\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_mV_m]$。事实上，该合约在时刻 n 的风险中性定价公式为[见式(6.2.8)]

$$V_n=\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_mV_m],\quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.4.1}$$

在 D_m 是随机的情形下，为计算出现在上式中的条件期望，我们需要知道在风险中性测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下 D_m 和 V_m 的**联合条件分布**。这就造成固定收益衍生产品定价的困难。

摆脱困境的一种途径是利用**远期测度**而不是风险中性测度来建立利率模型。其想法是将式(6.4.1) 右端的 D_m 作为拉东—尼柯迪姆导数，变换到另一测度，然后在这新的测度下计算条件期望，就不会再出现 D_m。为明确这一想法，我们从以下定义开始。

定义 6.4.1 给定 $m,1\leqslant m\leqslant N$。定义：

$$Z_{m,m}=\frac{D_m}{B_{0,m}} \tag{6.4.2}$$

并利用 $Z_{m,m}$，由以下公式定义 **m-远期测度** $\widetilde{\mathbb{P}}^m$：

$$\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega)=Z_{m,m}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega),\ \forall\omega\in\Omega$$

为验证 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$是概率测度，我们必须验证 Ω 对应的概率值为 1，这可利用 $\widetilde{\mathbb{E}}Z_{m,m}=1$ 证得。事实上：

$$\widetilde{\mathbb{P}}^m(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{\mathbb{P}}^m(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}Z_{m,m}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)=\widetilde{\mathbb{E}}Z_{m,m}=\frac{1}{B_{0,m}}\widetilde{\mathbb{E}}D_m=1$$

其中最后的等式由零息债券价格的定义[见式(6.2.3)]推得。根据3.2节中的推导,我们可定义**拉东—尼柯迪姆导数过程**为:

$$Z_{n,m}=\widetilde{\mathbb{E}}_n Z_{m,m}, \quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.4.3}$$

如果 V_m 是仅依赖于前 m 次硬币抛掷的随机变量,则由引理3.2.5得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m V_m=\widetilde{\mathbb{E}}[Z_{m,m}V_m] \tag{6.4.4}$$

更一般地,如果 $0\leqslant n\leqslant m$ 并且 V_m 是仅依赖于前 m 次硬币抛掷的随机变量,则由引理3.2.6得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n^m[V_m]=\frac{1}{Z_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}_n[Z_{m,m}V_m] \tag{6.4.5}$$

由 $Z_{m,m}$ 的定义 (6.4.2) 以及公式(6.2.5),式(6.4.3) 可以改写为:

$$Z_{n,m}=\frac{D_n B_{n,m}}{B_{0,m}}, \qquad n=0,\cdots,m \tag{6.4.6}$$

将式(6.4.6)分别代入式(6.4.4)和(6.4.5)中,我们得到下面的结果。

定理 6.4.2 *给定 m,$1\leqslant m\leqslant N$。设 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ 是 m-远期测度。如果 V_m 是仅依赖于前 m 次硬币抛掷的随机变量,则:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^m[V_m]=\frac{1}{B_{0,m}}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_m V_m] \tag{6.4.7}$$

更一般地,如果 V_m 仅依赖于前 m 次硬币抛掷,则:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n^m[V_m]=\frac{1}{D_n B_{n,m}}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_m V_m], \quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.4.8}$$

式(6.4.8) 左端的计算并不涉及 V_m 和 D_m 的相关性,我们只需知道在 m-远期测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ 下 V_m 的条件分布。于是式 (6.4.8) 的左端往往比出现在右端的 $\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_m V_m]$ 更容易计算。不过要注意:m-远期测度仅适用于在时刻 m(而不是其他时刻)支付的衍生产品的定价。

由式(6.4.8) 和 (6.4.1) 可得:

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n^m[V_m]=\frac{V_n}{B_{n,m}}, \quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.4.9}$$

换言之,$\widetilde{\mathbb{E}}_n^m[V_m]$ 是在时刻 m 支付为 V_m 的任何衍生证券或资产在时刻 n 的**以时刻 m 到期的零息债券为计价单位的价格**。这也正是定理6.3.2中给出的衍生证券或资产的 **m-远期价格**。在式(6.4.9)的左端运用累次条件期望,不难证得这一计价方式下的资产价格过程在 m-远期测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ 下是一个鞅。总之,**(无红利支付)资产的 m-远期价格过程在 m-远期测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ 下**

是鞅。

例 6.4.3 由式(6.4.2)可知，与 D_m 一样，$Z_{m,m}$ 也仅依赖于前 $m-1$ 次硬币抛掷。在定义 6.4.1 中令 $m=3$ 并利用例 6.3.9 中的数据，可得式(6.4.2)给出的 $Z_{3,3}$：

$$Z_{3,3}(HH)=\frac{D_3(HH)}{B_{0,3}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{4},\quad Z_{3,3}(HT)=\frac{D_3(HT)}{B_{0,3}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{3}{2},$$

$$Z_{3,3}(TH)=\frac{D_3(TH)}{B_{0,3}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{7}=1,\quad Z_{3,3}(TT)=\frac{D_3(TT)}{B_{0,3}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{7}=1$$

注意到确实有 $\widetilde{\mathbb{E}}Z_{3,3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=1$。对每一个 $\omega\in\Omega$，$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$、$Z_{3,3}(\omega)$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}^3(\omega)=Z_{3,3}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$ 的值在下面的表 6.3 中给出。

表 6.3

$\omega_1\omega_2\omega_3$	$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$Z_{3,3}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$\widetilde{\mathbb{P}}^3(\omega_1\omega_2\omega_3)$
HHH	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
HHT	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$
HTH	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
HTT	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
THH	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$
THT	$\frac{1}{12}$	1	$\frac{1}{12}$
TTH	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$
TTT	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$

如同在例 6.2.1 和图 6.2.1 中，我们可以计算在利率二叉树每个节点处(抛掷硬币出现 H 和 T)的 $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ 条件概率，它们都被标记在图 6.4.1 中。

现在，我们来计算式(6.4.8)的左端，其中时刻 3 的支付 $V_3=\left(R_2-\frac{1}{3}\right)^+$ 是关于时刻 2 利率的利率上限单元。这里，V_3 仅依赖于前两次硬币抛掷，事实上：

$$V_3(\omega_1\omega_2)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & \text{如果 } \omega_1=H,\omega_2=H\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 V_3 仅依赖于前两次硬币抛掷，我们有 $\widetilde{\mathbb{E}}_2^3[V_3]=V_3$。利用图 6.4.1 中的概率，我们算得：

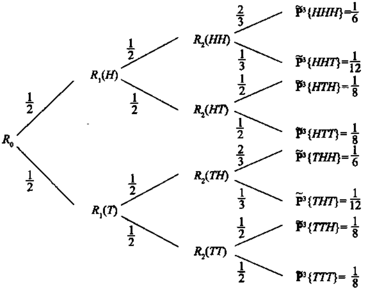

图 6.4.1　利率模型以及 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$ 转移概率

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1^3[V_3](H)=\frac{1}{2}V_3(HH)+\frac{1}{2}V_3(HT)=\frac{1}{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_1^3[V_3](T)=\frac{1}{2}V_3(TH)+\frac{1}{2}V_3(TT)=0$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3]=\frac{1}{4}V_3(HH)+\frac{1}{4}V_3(HT)+\frac{1}{4}V_3(TH)+\frac{1}{4}V_3(TT)=\frac{1}{6}$$

远期价格过程$\widetilde{\mathbb{E}}_n^3[V_3]$，$n=0,1,2,3$ 在图 6.4.2 中给出。我们注意到这一过

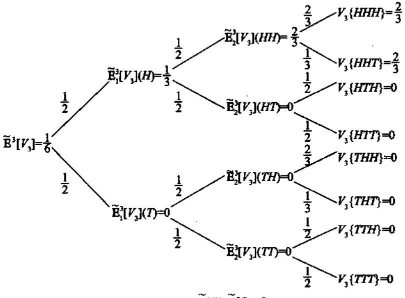

图 6.4.2　$\widetilde{\mathbb{P}}^3$鞅 $\widetilde{\mathbb{E}}_n^3[V_3]$

程在$\widetilde{\mathbb{P}}^3$下是一个鞅，它在每一节点处的值是紧接两个节点处的值利用$\widetilde{\mathbb{P}}^3$转移概率算得的加权平均。最后，我们利用式（6.4.9）计算时刻3的利率上限单元在时刻0的价格：

$$V_0=B_{0,3}\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3]=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{21}$$

其中用到了例6.3.9中算得的债券价格$B_{0,3}=\frac{4}{7}$，这与（6.3.10）的结果一致。 □

例 6.4.4（霍—李模型） 在霍—李模型中，时刻n的利率为：

$$R_n(\omega_1\cdots\omega_n)=a_n+b_n\cdot\#H(\omega_1\cdots\omega_n)$$

其中$a_0,a_1,\cdots$和$b_1,b_2,\cdots$是用于模型校准的常数（即使得模型产生的价格与市场数据一致）。风险中性概率取为$\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。

例6.3.9和例6.4.3中的数据都是为了简化计算而刻意选取的，而霍—李模型可用于在实际应用中产生数据。我们对图6.4.3中的三时段霍—李模型（其中$a_0=0.05,a_1=0.045,a_2=0.04,b_1=b_2=0.01$）重复例6.3.9和例6.4.3中的计算。

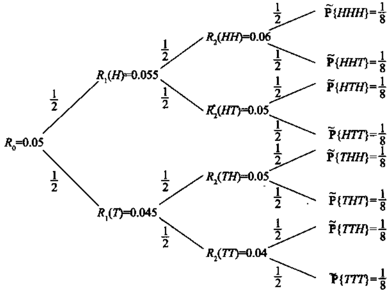

图 6.4.3 三时段霍—李利率模型

在表6.4中，给出了$D_1=\frac{1}{1+R_0}$，$D_2=\frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)}$，$D_3=\frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)(1+R_2)}$。

表 6.4

$\omega_1\omega_2$	$\frac{1}{1+R_0}$	$\frac{1}{1+R_1}$	$\frac{1}{1+R_2}$	D_1	D_2	D_3	$\widetilde{\mathbb{P}}$
HH	0.952 4	0.947 9	0.943 4	0.952 4	0.902 7	0.851 6	1/4
HT	0.952 4	0.947 9	0.952 4	0.952 4	0.902 7	0.859 7	1/4
TH	0.952 4	0.956 9	0.952 4	0.952 4	0.911 4	0.868 0	1/4
TT	0.952 4	0.956 9	0.961 5	0.952 4	0.911 4	0.876 3	1/4

我们可以算得时刻 0 的零息债券价格为:

$$B_{0,1}=\widetilde{\mathbb{E}}\,D_1=0.952\,4,\quad B_{0,2}=\widetilde{\mathbb{E}}\,D_2=0.907\,1,\quad B_{0,3}=\widetilde{\mathbb{E}}\,D_3=0.863\,9$$

时刻 1 的零息债券价格为 $B_{1,1}=1$ 以及

$$B_{1,2}(H)=\frac{1}{D_1(H)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_2](H)=0.947\,9$$

$$B_{1,2}(T)=\frac{1}{D_1(T)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_2](T)=0.956\,9$$

$$B_{1,3}(H)=\frac{1}{D_1(H)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_3](H)=0.898\,5$$

$$B_{1,3}(T)=\frac{1}{D_1(T)}\widetilde{\mathbb{E}}_1[D_3](T)=0.915\,8$$

时刻 2 的零息债券价格为 $B_{2,2}=1$ 以及

$$B_{2,3}(HH)=\frac{1}{D_2(HH)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](HH)=0.943\,4$$

$$B_{2,3}(HT)=\frac{1}{D_2(HT)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](HT)=0.952\,4$$

$$B_{2,3}(TH)=\frac{1}{D_2(TH)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](TH)=0.952\,4$$

$$B_{2,3}(TT)=\frac{1}{D_2(TT)}\widetilde{\mathbb{E}}_2[D_3](TT)=0.961\,5$$

我们取 $K=0.05$,并对相应的 3 期利率上限定价。表 6.5 中是该利率上限的支付。

表 6.5

$\omega_1\omega_2$	R_0	$(R_0-0.05)^+$	R_1	$(R_1-0.05)^+$	R_2	$(R_2-0.05)^+$
HH	0.05	0	0.055	0.005	0.06	0.01
HT	0.05	0	0.055	0.005.	0.05	0
TH	0.05	0	0.045	0	0.05	0
HT	0.05	0	0.045	0	0	0

时刻 1、时刻 2 和时刻 3 的利率上限单元在时刻 0 的价格分别为：

$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_1(R_0-0.05)^+]=0$$
$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_2(R_1-0.05)^+]=0.002\,257$$
$$\widetilde{\mathbb{E}}[D_3(R_2-0.05)^+]=0.002\,129$$

从而由这三个利率上限单元组成的利率上限的价格为 $\mathrm{Cap}_3=0.004\,386$。

以下计算 3-远期测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$，该测度关于风险中性测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 的拉东—尼柯迪姆导数为：

$$Z_{2,3}(HH)=\frac{D_3(HH)}{B_{0,3}}=0.985\,8,\quad Z_{3,3}(HT)=\frac{D_3(HT)}{B_{0,3}}=0.995\,2,$$
$$Z_{3,3}(TH)=\frac{D_3(TH)}{B_{0,3}}=1.004\,7,\quad Z_{3,3}(TT)=\frac{D_3(TT)}{B_{0,3}}=1.014\,4$$

注意到确实有 $\widetilde{\mathbb{E}}Z_{3,3}=\frac{1}{4}[Z_{3,3}(HH)+Z_{3,3}(HT)+Z_{3,3}(TH)+Z_{3,3}(TT)]=1$。对每一个 $\omega\in\Omega$，$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$、$Z_{3,3}(\omega)$和 $\widetilde{\mathbb{P}}^3(\omega)=Z_{3,3}(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)$的值在下面的表 6.6 中给出。

表 6.6

$\omega_1\omega_2\omega_3$	$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$Z_{3,3}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$\widetilde{\mathbb{P}}^3(\omega_1\omega_2\omega_3)$
HHH	$\frac{1}{8}$	0.985 8	0.123 2
HHT	$\frac{1}{8}$	0.985 8	0.123 2
HTH	$\frac{1}{8}$	0.995 2	0.124 4
HTT	$\frac{1}{8}$	0.995 2	0.124 4
THH	$\frac{1}{8}$	1.004 7	0.125 6
THT	$\frac{1}{8}$	1.004 7	0.125 6
TTH	$\frac{1}{8}$	1.014 4	0.126 8
TTT	$\frac{1}{8}$	1.014 4	0.126 8

$\widetilde{\mathbb{P}}^3$转移概率被标记在图 6.4.4 中。

现在，我们来计算式(6.4.8) 的左端，其中时刻 3 的支付 $V_3=(R_2-0.05)^+$是关于时刻 2 利率的利率上限单元。这里，V_3 仅依赖于前两次硬币抛掷，事实上：

$$V_3(\omega_1\omega_2)=\begin{cases}0.01, & \text{如果 } \omega_1=H,\omega_2=H \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 V_3 仅依赖于前两次硬币抛掷,我们有$\widetilde{\mathbb{E}}_2^3[V_3]=V_3$。利用图 6.4.4 中的概率,我们算得的远期价格过程 $\widetilde{\mathbb{E}}_n^3[V_3]$,$n=0,1,2,3$ 在图 6.4.5 中给出。注意到这一过程在 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$下是鞅,它在每一节点处的值是紧接两个节点处的值(利用 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$转移概率算得)的加权平均。

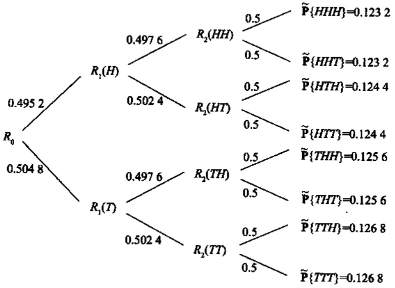

图 6.4.4 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$转移概率

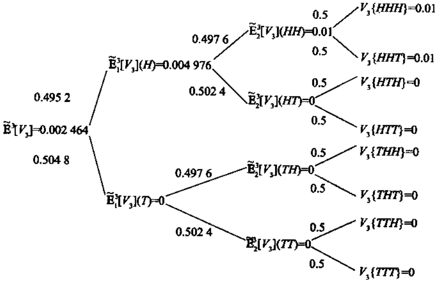

图 6.4.5 $\widetilde{\mathbb{P}}^3$鞅 $\widetilde{\mathbb{E}}_n^3[V_3]$

最后，我们利用式(6.4.9)计算时刻3的利率上限单元在时刻0的价格：

$$V_0=B_{0,3}\widetilde{\mathbb{E}}^3[V_3]=(0.8639)(0.002464)=0.002129 \qquad \square$$

6.5 期 货

类似于远期合约，**期货合约**也是为了在购买或出售某一资产之前，事先锁定交易价格。同时，采用期货合约可以避免远期合约的两个缺点。首先，在确定的交割日之前的任何一天，都可能存在对该交割日的远期合约的需求，因此，市场上就要为每一交割日准备大量起始日不同的远期合约。而期货合约的基本过程是只与交割日相关的**期货价格**，它与起始日无关。投资者可以在任何交易日进入期货合约，对自己关注的交割日的期货价格进行交易。其次，虽然远期合约在初始时刻具有零价格，但是随着标的资产价格的波动，合约价值会取正值或负值。无论何种情况下，都会有一方担心另一方违约。而期货合约采用**逐日盯市**的结算方法，要求投资者当日结算，以杜绝交易违约现象。

定义 6.5.1 *在利率二叉树模型中考虑一个资产，其价格过程为* $S_0,S_1,\cdots,S_N$，*假设所有到期日的零息债券均可交易。对于* $0\leqslant m\leqslant N$，**m-期货价格过程** $\mathrm{Fut}_{n,m}$，$n=0,1,\cdots,m$，*是具有下列性质的一个适应过程：*

(i) $\mathrm{Fut}_{m,m}=S_m$；

(ii) *给定* n，$0\leqslant n\leqslant m-1$。*对所有* $k=n,\cdots,m-1$ *都将在时刻* $k+1$ *收到支付* $\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m}$ *这一合约在时刻* n *的价格为0，即：*

$$\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n\Big[\sum_{k=n}^{m-1}D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})\Big]=0 \tag{6.5.1}$$

在时刻 n，交割日为较后时刻 m 的期货合约多头将在每一时刻 $k+1$ ($k=n,\cdots,m-1$)收到支付 $\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m}$，最后在时刻 m 按照标的资产的市场价格 S_m 进行交割。支付 $\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m}$ 可能为负，此时，多头投资者必须付出而不是收入相应的资金。这种资金的划转是通过期货经纪人为投资者开设的保证金账户进行的。每日交易结束后，经纪人都要在投资者的保证金账户中存入或者提取相应的资金。如果保证金余额不足，经纪人就会发出追加保证金通知，要求投资者在账户中存入更多资金或者平仓(见下文)。

期货合约的空头投资者将在每一时刻 $k+1$ 给出支付 $\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m}$ ($k=n,\cdots,m-1$)，并在时刻 m 按照市场价格 S_m 售出标的资产。空头投资者也同样需要开设保证金账户。

期货合约多头从时刻 n 到时刻 m 收到的支付总额为：

$$\sum_{k=n}^{m-1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})=\mathrm{Fut}_{m,m}-\mathrm{Fut}_{n,m}=S_m-\mathrm{Fut}_{n,m}$$

在按照市场价格 S_m 购买标的资产后，尚余

$$S_m-\mathrm{Fut}_{n,m}-S_m=-\mathrm{Fut}_{n,m}$$

并且拥有该标的资产。实际上，如果忽略资金的时间价值，投资者通过付出 $\mathrm{Fut}_{n,m}$ 获得了标的资产。在这个意义上，未来时刻 m 购买该资产的价格已在时刻 n 被锁定。

条件(6.5.1) 旨在使得期货合约在初始时刻价值为 0。于是，投资者进入期货合约多头(或者空头)除了必须开设保证金账户外，不需要任何费用。由于条件(6.5.1) 对于 0 和 $m-1$ 之间的所有 n 成立，故期货合约在任何时刻价值为 0。特别地，期货合约的多头无需任何花费就可以"售出"其合约(即平仓)。此后，该多头投资者不再收到(正的或负的)支付，也不再承担在时刻 m 以市场价格购买资产的义务。同理，期货合约的空头投资者也可以无需任何花费而在任何时刻平仓。

定理 6.5.2 给定 $m, 0\leqslant m\leqslant N$，则：

$$\mathrm{Fut}_{n,m}=\widetilde{\mathrm{E}}_n[S_m],\quad n=0,1,\cdots,m \tag{6.5.2}$$

是满足定义 6.5.1 条件的唯一过程。

【证明】 首先证明式(6.5.2) 的右端满足定义 6.5.1 的条件。由 $\widetilde{\mathrm{E}}_m[S_m]=S_m$，可知式(6.5.2) 的右端满足定义 6.5.1(i)。为了验证定义 6.5.1(ii)，我们只需证明式(6.5.1) 和式中每一项的 $\widetilde{\mathrm{E}}_n$ 条件期望值为 0，即有：

$$\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{k+1}(\widetilde{\mathrm{E}}_{k+1}[S_m]-\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m])]=0,\quad k=n,\cdots,m-1 \tag{6.5.3}$$

由于 D_{k+1} 仅依赖于前 k 次硬币抛掷，对于 $k=n,\cdots,m-1$，由累次条件期望可得：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{k+1}(\widetilde{\mathrm{E}}_{k+1}[S_m]-\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m])]&=\widetilde{\mathrm{E}}_n[\widetilde{\mathrm{E}}_k[D_{k+1}(\widetilde{\mathrm{E}}_{k+1}[S_m]-\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m])]\\&=\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{k+1}(\widetilde{\mathrm{E}}_k[\widetilde{\mathrm{E}}_{k+1}[S_m]-\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m])]\\&=\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{k+1}(\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m]-\widetilde{\mathrm{E}}_k[S_m])]\\&=0\end{aligned}$$

这就证得了式(6.5.1)。

以下证明式(6.5.2) 的右端是满足定义 6.5.1 的条件的唯一过程。由式(6.5.1)，我们有：

$$\sum_{k=n}^{m-1}\widetilde{\mathrm{E}}_n[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})]=0,\quad \forall n=0,1,\cdots,m-1 \tag{6.5.4}$$

对于 $n=0,1,\cdots,m-2$，在上式中以 $n+1$ 替代 n，并将其从原式中减去，

得到：

$$0=\sum_{k=n}^{m-1}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})]$$
$$-\sum_{k=n+1}^{m-1}\widetilde{\mathbb{E}}_{n+1}[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})] \qquad (6.5.5)$$

在式(6.5.5)中取条件期望$\widetilde{\mathbb{E}}_n$并利用累次条件期望性质，我们有：

$$0=\sum_{k=n}^{m-1}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})]$$
$$-\sum_{k=n+1}^{m-1}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{k+1}(\mathrm{Fut}_{k+1,m}-\mathrm{Fut}_{k,m})]$$
$$=\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{n+1}(\mathrm{Fut}_{n+1,m}-\mathrm{Fut}_{n,m})] \qquad (6.5.6)$$

在式(6.5.4)中令$n=m-1$，可知式(6.5.6)对于$n=m-1$也成立。$\mathrm{Fut}_{n,m}$和D_{n+1}都仅依赖于前n次硬币抛掷，故式(6.5.6)可改写为：

$$D_{n+1}(\widetilde{\mathbb{E}}_n[\mathrm{Fut}_{n+1,m}]-\mathrm{Fut}_{n,m})=0$$

从而得到：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[\mathrm{Fut}_{n+1,m}]=\mathrm{Fut}_{n,m},\quad n=0,1,\cdots,m-1$$

这表明$\mathrm{Fut}_{n,m}, n=0,1,\cdots,m$在$\widetilde{\mathbb{P}}$下是鞅。而由条件(i)$\mathrm{Fut}_{m,m}=S_m$，因此鞅性质蕴含了式(6.5.2)。 □

推论 6.5.3 给定m，$0\leqslant m\leqslant N$，则当且仅当D_m与S_m在$\widetilde{\mathbb{P}}$下不相关时有$\mathrm{For}_{0,m}=\mathrm{Fut}_{0,m}$。特别地，当利率非随机时，上式成立。

【证明】 由定理6.3.2，我们有：

$$\mathrm{For}_{0,m}=\frac{S_0}{B_{0,m}}=\frac{S_0}{\widetilde{\mathbb{E}}D_m}=\frac{\widetilde{\mathbb{E}}[D_mS_m]}{\widetilde{\mathbb{E}}D_m}$$

以及

$$\mathrm{Fut}_{0,m}=\widetilde{\mathbb{E}}\,S_m$$

以上两式相等的充要条件是$\widetilde{\mathbb{E}}[D_mS_m]=\widetilde{\mathbb{E}}[D_m]\widetilde{\mathbb{E}}[S_m]$，这正是$D_m$与$S_m$的不相关性。 □

注 6.5.4 我们注意到：当D_m与S_m负相关时，有$\widetilde{\mathbb{E}}[D_mS_m]<\widetilde{\mathbb{E}}[D_m]\cdot\widetilde{\mathbb{E}}[S_m]$，从而$\mathrm{For}_{0,m}<\mathrm{Fut}_{0,m}$。如果随着资产价格上涨，利率也在上升(从而贴现因子下降)，则D_m与S_m就会呈现负相关。在此情况下，期货多头比远期多头获益更大。因为期货多头能够即时获得支付，从而以较高利率再投资，而远期合约直到交割日m才能结算。由于期货多头更有利，期货合约的初始价格也就更高(即利用期货合约比利用远期合约锁定的资产购买价格

更高)。

例 6.5.5(布莱克—德曼—托伊利率模型) 在布莱克—德曼—托伊(BDT)模型中,时刻 n 的利率为:

$$R_n(\omega_1\cdots\omega_n)=a_n b_n^{\#H(\omega_1\cdots\omega_n)}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots$ 和 $b_1,b_2,\cdots$ 是用于模型校准的常数。风险中性概率取为 $\tilde{p}=\tilde{q}=\frac{1}{2}$。图 6.5.1 中给出了三时段 BDT 模型,其中 $a_n=\frac{0.05}{1.2^n}$, $b_n=1.44$。在此模型中,零息债券的价格为:

$$B_{0,2}=0.9064,\quad B_{0,3}=0.8620,$$
$$B_{1,2}(H)=0.9434,\quad B_{1,2}(T)=0.9600,$$
$$B_{1,3}(H)=0.8893,\quad B_{1,3}(T)=0.9210$$

由此,我们可以计算远期利率 $F_{n,2}=\frac{B_{n,2}-B_{n,3}}{B_{n,3}}$,得到:

$$F_{0,2}=0.05147,\quad F_{1,2}(H)=0.06089,\quad F_{1,2}(T)=0.04231$$

这些是在时刻 3 支付 R_2 的合约的远期价格(这些远期利率中的下标 2 表示利率的起始时刻,不是支付发生的时刻)。在时刻 3 支付 R_2 的合约的期货价格由 $\mathrm{Fut}_{n,3}=\widetilde{\mathbb{E}}_n[R_2]$ 给出,它们是:

$$\mathrm{Fut}_{0,3}=0.05168,\quad \mathrm{Fut}_{1,3}(H)=0.06100,\quad \mathrm{Fut}_{1,3}(T)=0.04236$$

由于注 6.5.4 中讨论的原因,利率期货略高于远期利率。

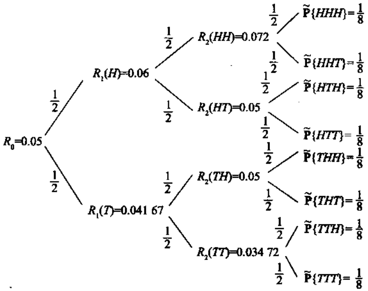

图 6.5.1 三时段布莱克—德曼—托伊利率模型

6.6 本章小结

对于利率为随机的情形，本章在简单的二叉树模型框架下介绍了一些概念。零息债券的价格由风险中性定价公式给出(定义 6.2.4)，并证明这一定价方法排除了套利(注 6.2.7)。然后介绍了远期合约、利率上限与利率下限以及期货合约。其中最后一项期货合约在 6.5 节中讨论，它与远期合约有联系(推论 6.5.3)。

6.4 节提出了**远期测度**的概念，在连续时间模型中，这一概念可用于简化利率上限与利率下限的定价。在例 6.4.3 中对此概念有所说明，但是这一方法的作用只有在连续时间模型中才能完全理解。

6.7 评 注

实际中的许多利率模型是在离散时间框架下建立或者具有离散时间实施形式(例如霍一李模型 [22]，赫斯—加罗—墨顿模型 [21]，以及布莱克—德曼—托伊模型 [4])。远期测度的概念源于杰姆希迪安(Jamshidian)[24]和杰曼、厄尔・卡露伊、罗歇(Geman, El Karoui and Rochet)[15]，在第二卷连续时间框架下还将讨论。这些测度奠定了所谓**市场模型**或**远期 LIBOR 模型**的基础，这些是由圣德曼和桑德曼(Sandmann and Sondermann)[38]和布瑞斯、盖特瑞克、姆斯拉(Brace, Gatarek and Musiela)[6]推导的符合**布莱克利率上限单元公式**的利率模型。远期合约与期货合约的区别由马格瑞伯(Margrabe)[31]和布莱克[3]指出。离散时间模型中期货的无套利定价由考克斯、英格索尔、罗斯[9]和加罗、欧德菲尔德(Oldfield) [25]推导。习题 6.7 取自备受推崇的达菲(Duffie) [14]。

6.8 习 题

习题 6.1 对于由定义 6.2.2 定义的条件期望，证明定理 2.3.2 中的性质成立。

习题 6.2 验证定理 6.3.2 证明中构造的静态对冲组合的价值贴现过程在$\widetilde{\mathbb{P}}$下是鞅。

习题 6.3 设 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N-1$，根据风险中性定价公式，时刻 $m+1$ 支付 R_m 的合约在时刻 n 的价格为$\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{m+1}R_m]$。利用条件期望的性质，证明这与定理 6.3.5 给出的结果相同，即：

$$\frac{1}{D_n}\widetilde{\mathbb{E}}_n[D_{m+1}R_m]=B_{n,m}-B_{n,m+1}$$

习题 6.4 本题利用例 6.3.9 中的数据，对于时刻 3 支付为$\left(R_2-\frac{1}{3}\right)^+$的利率上限单元构建空头对冲。由例 6.3.9 中的第二张表(表 6.2)，该利率上限单元在时刻 3 的支付为：

$$V_3(HH)=\frac{2}{3},\quad V_3(HT)=V_3(TH)=V_3(TT)=0$$

由于该支付仅依赖于前两次硬币抛掷，故利率上限单元在时刻 2 的价格可由贴现确定：

$$V_2(HH)=\frac{1}{1+R_2(HH)}V_3(HH)=\frac{1}{3},\quad V_2(HT)=V_2(TH)=V_2(TT)=0$$

事实上，如果当事件 $\omega_1=H$ 和 $\omega_2=H$ 出现时，利率上限单元的空头对冲组合在时刻 2 的值为$\frac{1}{3}$，则可以简单地将这$\frac{1}{3}$投资于货币市场，从而在时刻 3 获得$\frac{2}{3}$，成功地对冲该利率上限单元的支付。

在例 6.3.9 中，已求得该利率上限单元在时刻 0 的价格为$\frac{2}{21}$[见式(6.3.10)]。

(i) 确定当事件 $\omega_1=H$ 和 $\omega_1=T$ 分别出现时，该利率上限单元在时刻 1 的价格 $V_1(H)$ 和 $V_1(T)$。

(ii) 如何以$\frac{2}{21}$为初始资本，在时刻 0 投资于货币市场和时刻 2 到期的零息债券，使得不论第一次抛掷硬币结果如何，都有资产组合在时刻 1 的价值 $X_1=V_1$？为什么投资于时刻 2 到期的零息债券而不是时刻 3 到期的零息债券？

(iii) 如何以资产组合在时刻 1 的值 X_1 投资于货币市场和时刻 3 到期的零息债券，使得不论前两次抛掷硬币结果如何，都有资产组合在时刻 2 的价值 $X_2=V_2$？为什么投资于时刻 3 到期的零息债券而不是时刻 2 到期的零息债券？

习题 6.5 给定 m，$0\leqslant m\leqslant N-1$，考虑远期利率

$$F_{n,m}=\frac{B_{n,m}-B_{n,m+1}}{B_{n,m+1}},\quad n=0,1,\cdots,m$$

(i) 利用式(6.4.8) 和式(6.2.5)，证明在$(m+1)$—远期测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^{m+1}$下，$F_{n,m}$，$n=0,1,\cdots,m$ 是一个鞅。

(ii) 计算例 6.4.4 中的 $F_{0,2}$，$F_{1,2}(H)$和 $F_{1,2}(T)$，并验证鞅性质

$$\widetilde{\mathbb{E}}^3[F_{1,2}]=F_{0,2}$$

习题 6.6 设利率二叉树模型中，某资产在时刻 m 的价值为 S_m。对于 $n=0,1,\cdots,m$，该资产的远期价格为 $\mathrm{For}_{n,m}=\frac{S_n}{B_{n,m}}$，期货价格为 $\mathrm{Fut}_{n,m}=\widetilde{\mathrm{E}}_n[S_n]$。

(i) 假设投资者在每一时刻 n 做多该资产的远期合约，并在时刻 $n+1$ 售出该合约。证明这样生成在时刻 $n+1$ 的现金流为 $S_{n+1}-\frac{S_n B_{n+1,m}}{B_{n,m}}$。

(ii) 如果利率为常数 r，假设投资者在每一时刻 n 做多 $(1+r)^{m-n-1}$ 份远期合约，并在时刻 $n+1$ 售出这些合约。证明这样生成的现金流等于期货价格差 $\mathrm{Fut}_{n+1,m}-\mathrm{Fut}_{n,m}$。

习题 6.7 考虑一个利率二叉树模型，其中时刻 n 的利率仅依赖于前 n 次抛掷硬币出现正面的次数。换言之，对每一个 n，存在函数 $r_n(k)$，使得：

$$R_n(\omega_1\cdots\omega_n)=r_n(\# H(\omega_1\cdots\omega_n))$$

假设风险中性概率为 $\widetilde{p}=\widetilde{q}=\frac{1}{2}$，霍—李模型(例 6.4 .4)以及布莱克—德曼—托伊模型(例 6.5.5)都满足这些条件。

考虑一个衍生证券，当且仅当前 n 次抛掷硬币出现 k 次正面，其在时刻 n 的支付为 1，即支付函数为 $V_n(k)=\widetilde{\mathbb{I}}_{\{\# H(\omega_1\cdots\omega_n)=k\}}$。定义 $\psi_0(0)=1$，并且对于 $n=1,2,\cdots$，定义

$$\psi_n(k)=\widetilde{\mathrm{E}}[D_n V_n(k)],\quad k=0,1,\cdots,n$$

为该衍生证券在时刻 0 的价格。证明函数 $\psi_n(k)$ 可以如下递归计算：

$$\psi_{n+1}(0)=\frac{\psi_n(0)}{2(1+r_n(0))}$$

$$\psi_{n+1}(k)=\frac{\psi_n(k-1)}{2(1+r_n(k-1))}+\frac{\psi_n(k)}{2(1+r_n(k))},\quad k=1,\cdots,n$$

$$\psi_{n+1}(n+1)=\frac{\psi_n(n)}{2(1+r_n(n))}$$

附录
条件期望基本性质的证明

本附录给出定理 2.3.2 的证明。

定理 2.3.2（条件期望的基本性质） 设 N 为正整数，X 和 Y 为依赖于前 N 次抛掷硬币结果的随机变量。对于给定的 $0\leqslant n\leqslant N$，以下性质成立：

(i)（**条件期望的线性性**） 对于所有常数 c_1 和 c_2，我们有：

$$\mathbb{E}_n[c_1X+c_2Y]=c_1\,\mathbb{E}_n[X]+c_2\,\mathbb{E}_n[Y]$$

(ii)（**提取已知量**） 如果 X 实际上只依赖于前 n 次硬币抛掷，则：

$$\mathbb{E}_n[XY]=X\cdot\mathbb{E}_n[Y]$$

(iii)（**累次条件期望**） 如果 $0\leqslant n\leqslant m\leqslant N$，则：

$$\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_m[X]]=\mathbb{E}_n[X]$$

特别地，有：

$$\mathbb{E}\,[\mathbb{E}_m[X]]=\mathbb{E}\,X$$

(iv)（**独立性**） 如果 X 只依赖从第 $n+1$ 次至第 N 次抛掷硬币结果，则：

$$\mathbb{E}_n[X]=\mathbb{E}\,X$$

(v)（**条件詹森不等式**） 如果 $\varphi(x)$ 为哑变量 x 的凸函数，则：

$$\mathbb{E}_n[\varphi(X)]\geqslant\varphi(\mathbb{E}_n[X])$$

【证明】 我们先回顾条件期望的定义：

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[X](\omega_1\cdots\omega_n)=\sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N}\widetilde{p}^{\,\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}\widetilde{q}^{\,\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)}X(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N)$$

(i)的证明：

$$\mathbb{E}_n[c_1X+c_2Y](\omega_1\cdots\omega_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} [c_1 X(\omega_1\cdots\omega_N) + c_2 Y(\omega_1\cdots\omega_N)] \\
&= c_1 \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_1\cdots\omega_N) \\
&\quad + c_2 \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} Y(\omega_1\cdots\omega_N) \\
&= c_1 \mathbb{E}_n[X](\omega_1\cdots\omega_n) + c_2 \mathbb{E}_n[Y](\omega_1\cdots\omega_n)
\end{aligned}
$$

(ii)的证明：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_n[XY](\omega_1\cdots\omega_n) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_1\cdots\omega_n) Y(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N) \\
&\quad = X(\omega_1\cdots\omega_n) \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} Y(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_N) \\
&\quad = X(\omega_1\cdots\omega_n) \mathbb{E}_n[Y](\omega_1\cdots\omega_n)
\end{aligned}
$$

(iii)的证明：

定义 $Z=\mathbb{E}_m[X]$，则 Z 实际上仅依赖于 $\omega_1\cdots\omega_m$。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_n[\mathbb{E}_m[X]](\omega_1\cdots\omega_n) = \mathbb{E}_n[Z](\omega_1\cdots\omega_n) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} Z(\omega_1\cdots\omega_n\omega_{n+1}\cdots\omega_m) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} Z(\omega_1\cdots\omega_m) \sum_{\omega_{m+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{m+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{m+1}\cdots\omega_N)} \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} Z(\omega_1\cdots\omega_m) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_m} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_m)} \sum_{\omega_{m+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{m+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{m+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_1\cdots\omega_N) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_1\cdots\omega_N) \\
&\quad = \mathbb{E}_n[X](\omega_1\cdots\omega_n)
\end{aligned}
$$

(iv)的证明：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_n[X](\omega_1\cdots\omega_n) \\
&\quad = \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_{n+1}\cdots\omega_N) \\
&\quad = \sum_{\omega_1\cdots\omega_n} p^{\#H(\omega_1\cdots\omega_n)} q^{\#T(\omega_1\cdots\omega_n)} \sum_{\omega_{n+1}\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1}\cdots\omega_N)} X(\omega_{n+1}\cdots\omega_N) \\
&\quad = \sum_{\omega_1\cdots\omega_N} p^{\#H(\omega_1\cdots\omega_N)} q^{\#T(\omega_1\cdots\omega_N)} X(\omega_{n+1}\cdots\omega_N) \\
&\quad = \mathbb{E}X
\end{aligned}
$$

(v)的证明：

设 φ 是凸函数，L 是位于 φ 之下的线性函数 l 的全体[即 $l(y)\leqslant\varphi(y)$，

$\forall y\}$。于是,如同定理2.2.5的证明,我们有:

$$\varphi(x)=\max_{l\in L} l(x), \quad \forall x$$

对任意随机变量X和所有$l\in L$,我们有$\varphi(X)\geqslant l(X)$,从而$\mathbf{E}_n[\varphi(X)]\geqslant \mathbf{E}_n[l(X)]$。另一方面,由性质(i)(线性性),$\mathbf{E}_n[l(X)]=l(\mathbf{E}_n[X])$,因此就有:

$$\mathbf{E}_n[\varphi(X)]\geqslant l(\mathbf{E}_n[X]), \quad \forall l\in L$$

所以:

$$\mathbf{E}_n[\varphi(X)]\geqslant \max_{l\in L} l(\mathbf{E}_n[X])=\varphi(\mathbf{E}_n[X])$$

参考文献

[1] Arrow, K. & DEBREU, G. (1954) Existence of equilibrium for a competitive economy ,*Econometrica* **22**,265 - 290.

[2] Bensoussan, A. (1984) On the theory of option pricing , *Acta Appl. Math* . **2**, 139 - 158.

[3] Black, F. (1976) The pricing of commodity contracts, *J. Fin. Econ.* **3**, 167 - 179.

[4] Black, F. , DERMAN, E. , & TOY, W. (1990) A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options , *Fin. Anal. J.* **46**, 33 - 39.

[5] Black, F. & SCHOLES, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Econ.* **81**,637 - 659.

[6] Brace, A. , GATAREK, D. , & MUSIELA, M. (1997) The market model of interest-rate dynamics, *Math. Fin.* **7**, 127 - 154.

[7] Cox, J.C. & HUANG, C. (1989) Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process, *J. Econ. Theory* **49**, 33 - 83.

[8] Cox, J.C. & HUANG, C. (1991) A variational problem arising in financial economics, *J. Math. Econ.* **20**, 465 - 487.

[9] Cox, J.C. , INGERSOLL, J. E. , & ROSS, S. (1981) The relation between forward prices and futures prices, *J. Fin. Econ.* **9**, 321 - 346.

[10] Cox, J. C. , INGERSOLL, J. E. , & ROSS, S. (1985) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**,385 - 407.

[11] Cox, J.C. , ROSS, S. , & RUBINSTEIN, M. (1979) Option pricing: a simplified approach, *J. Fin. Econ.* **3**, 145 - 166.

[12] Cox, J. C. , ROSS, S. , & RUBINSTEIN, M. (1985) *Option Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[13] Doob, J. (1942) *Stochastic Processes*, J. Wiley & Sons, New York.

[14] Duffie, D. (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[15] Geman, H. , EL KAROUI, N. , & ROCHET, J.-C. (1995) Changes of

numéraire, changes of probability measure, and option pricing, *J. Appl. Prob.* **32**, 443 - 458.

[16] Hakansson, N. (1970) Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions, *Econometrica* **38**, 587 - 607.

[17] Harrison, J. M. & KREPS, D. M. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod security markets, *J. Econ. Theory* **20**, 381 - 408.

[18] Harrison, J. M. & PLISKA, S. R. (1981) Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Proccsses Appl.* **11**, 215 - 260.

[19] Heath, D. (1995) A continuous-time version of Kulldorf's result, preprint, Department of Mathematical Sciences , Carnegie Mellon University.

[20] Heath, D. , JARROW, R. , & MORTON, A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica* **60**, 77 - 105.

[21] Heath, D. , JARROW, R. , & MORTON, A. (1996) Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation, *Fin. Quant. Anal.* **25**, 419 - 440.

[22] Ho, T. & LEE, S. (1986) Term-structure movements and pricing interest rate contingent claims, *J. Fin.* **41**, 1011 - 1029.

[23] Hull, J. & WHITE, A. (1990) Pricing interest rate derivative securities, *Rev. Fin. Stud.* **3**, 573 - 592.

[24] Jamshidian, F. (1997) LIBOR and swap market models and measures, *Fin. Stochastics* **1**, 261 - 291.

[25] Jarrow, R. A. & OLDFIELD, G. S. (1981) Forward contracts and futures contracts, *J. Fin. Econ.* **9**, 373 - 382.

[26] Karatzas, I. (1988) On the pricing of American options, *Appl. Math. Optim.* **17**, 37 - 60.

[27] Karatzas, I. , LEHOCZKY, J. , & SHREVE, S. (1987) Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon, *SIAM J. Control Optim.* **25**, 1557 - 1586.

[28] Karatzas, I. & SHREVE, S. (1998) *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York.

[29] Kolmogorov, A. N. (1933) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ergeb. Math.* **2**, No. 3. Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1946. English translation: *Foundations of Probability Theory*, Chelsca Publishing Co. , New York, 1950.

[30] Kulldorf, M. (1993) Optimal control of a favorable game with a time-limit, *SIAM J. Control Optim.* **31**, 52 - 69.

[31] Margrabe, W. (1978) A theory of forward and futures prices, preprint, Wharton School, University of Pennsylvania.

[32] Merton, R. (1969) Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case, *Rev. Econ. Statist.* **51**, 247 - 257.

[33] Merton, R. (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *J. Econ. Theory* **3**, 373 - 413. Erratum: *ibid.* **6** (1973), 213 - 214.

[34] Merton, R. (1973) Theroy of rational option pricing, *Bell J. Econ. Manage. Sci.* **4**, 141 - 183.

[35] Merton, R. (1973) An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica* **41**, 867 - 888.

[36] Merton, R. (1990) *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Oxford and Cambridge.

[37] Pliska, S. R. (1986) A stochastic calculus model of continuous trading, optimal portfolios, *Math. Oper. Res.* **11**, 371 - 382.

[38] Sandmann, K. & SONDERMANN, D. (1993) A term-structure model for pricing interest-rate derivatives, *Rev. Futures Markets* **12**, 392 - 423.

[39] Shipyaev, A. N. (1978) *Optimal Stopping Rules*, Springer, New York.

[40] Shipyaev, A. N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore.

[41] Shipyaev, A. N., KABANOV, YU. M., KRAMKOV, D. O., & MELNIKOV, A. V. (1995) Towards the theory of pricing options of both European and American types. I. Discrete time, *Theory Prob. Appl.* **39**, 14 - 60.

[42] Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *J. Fin. Econ.* **5**, 177 - 188.

[43] Ville, J. (1939) *Etude Critique de la Notion du Collectif*, Gauthier-Villars, Paris.

Translated Economics Library

Stochastic Calculus for Finance

ISBN 978-7-5642-0267-5

9 787564 202675 >

定价：72.00元（两卷）