

全同粒子体系

多粒子体系的描写

有 N 个粒子组成的体系，

体系的波函数应该和所有粒子的坐标以及时间有关：

$$\Psi = \Psi(q_1, q_2, \cdots, q_N; t),$$

“坐标” q 包括粒子的空间坐标和自旋量子数（也许还有其它的“内部”量子数）。体系的Hamiltonian是：

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U_i(q_i) \right) + \underline{V(q_1, \cdots, q_N)},$$

其中包括了各个粒子的动能和
在外场中的势能以及粒子和粒子之间的相互作用，
由此即可写下体系的Schrödinger方程

全同粒子的不可区别性

假设多粒子体系中的 N 个粒子是全同粒子

全同粒子就是质量、电荷、自旋等内在性质完全相同的粒子。
全同粒子体系例如多电子原子中的电子、固体中的“公用”电子、原子核中的核子等

在量子力学中，全同粒子体系与非全同粒子体系有更多的区别。在经典力学中，即使两个粒子是全同的，它们也仍然是可区别的，因为它们各自有自己的轨道

但是在量子力学中，粒子的状态用波函数描写，当两个粒子的波函数在空间中发生重叠的时候，我们无法区分哪个是“第一个”粒子，哪个是“第二个”粒子。所以，在量子理论中有“**全同粒子不可区别性原理**”

当一个全同粒子体系中各粒子的波函数有重叠的时候，这些全同粒子是不可区别的

波函数的交换对称性和粒子的统计性

对全同粒子体系的波函数引入交换算符 \hat{P}_{ij}

它的作用是把波函数中的第*i*个粒子和第*j*个粒子的坐标交换位置：

$$\hat{P}_{ij}(\cdots, q_i, \cdots, q_j, \cdots; t) = \Psi(\cdots, q_j, \cdots, q_i, \cdots; t), \quad (i \neq j)$$

全同粒子的不可区别性告诉我们：这样交换以后的状态与原来的状态是不可区别的，所以，按照量子力学的基本原理(全同性原理)，

$$\hat{P}_{ij} \Psi = C \Psi, \quad (C \text{ 是常数})$$

$$\hat{P}_{ij} \hat{P}_{ij} \Psi = \Psi,$$

$$C^2 = 1,$$

$$C = +1 \quad \text{或者} \quad -1,$$

$$\hat{P}_{ij} \Psi = +\Psi \quad \text{或者} \quad -\Psi. \quad (\text{对任何 } i \neq j)$$

若 $\hat{P}_{ij} \Psi = +\Psi$ ，则称 Ψ 为交换对称波函数，

若 $\hat{P}_{ij} \Psi = -\Psi$ ，则称 Ψ 为交换反对称波函数。

交换对称性或反对称性是全同粒子体系波函数的特殊的、固有的性质，因此也是（微观）粒子的特殊的、固有的性质。它决定了粒子所服从的统计

自旋为整数的粒子，波函数是交换对称的，服从Bose-Einstein统计，称为玻色子。例如光子（自旋为1）、介子（自旋为0）

自旋为半整数的粒子，波函数是交换反对称的，服从Fermi-Dirac统计，称为费米子。例如电子、质子、中子（自旋都是）

交换对称或反对称波函数的构成

一般地说，一个全同粒子体系的波函数是解Schrödinger方程得到的，未必有确定的交换对称性。所以我们要对它进行“对称化”或“反对称化”

这里只考虑比较简单的情形：无耦合体系，即体系的总波函数是单个粒子波函数的乘积：

没有相互作用的势能

$$\psi(q_1, \cdots, q_N) = \psi_1(q_1) \cdots \psi_N(q_N).$$

这称为单粒子近似

原子核、原子、分子这样的粒子是由质子、中子、电子这些更“基本的”粒子组成的，我们把它们称为“复合粒子”。如果复合粒子的内部自由度是“冻结”的，我们也可以把它们看做是“基本”粒子

那么它们是玻色子还是费米子呢？这里的规则是：如果一个复合粒子包含偶数个费米子，那么它是玻色子；如果它包含奇数个费米子，那么它还是费米子。它所包含的玻色子的数目对此毫无影响

事实上，这正是因为偶数个费米子的总自旋一定是整数，而奇数个费米子的总自旋一定是半整数，这一点可以由角动量的合成规则得到说明

以二粒子体系为例，单粒子近似的波函数是

$$\psi(q_1, q_2) = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2),$$

对称化的波函数是：

$$\psi_S(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(q_1)\psi_2(q_2) + \psi_1(q_2)\psi_2(q_1)],$$

而反对称化的波函数是：

$$\psi_A(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(q_1)\psi_2(q_2) - \psi_1(q_2)\psi_2(q_1)].$$

对于可区别粒子（波函数 ψ_I ），

我们可以说系统的状态是“第一个粒子处于状态 ψ_1 ，

第二个粒子处于状态 ψ_2 ”，

但是对于不可区别粒子（波函数 ψ_S 和 ψ_A ），
我们只能说“有一个粒子处于状态 ψ_1 ，一
个粒子处于状态 ψ_2 ”。

类似的做法可以推广到N个粒子的体系。特别是，一般的反对称化波函数是：

$$\psi_A(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(q_1) & \psi_1(q_2) & \cdots & \psi_1(q_N) \\ \psi_2(q_1) & \psi_2(q_2) & \cdots & \psi_2(q_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(q_1) & \psi_N(q_2) & \cdots & \psi_N(q_N) \end{vmatrix}.$$

这称为Slater行列式

在 ψ_1, \dots, ψ_N 当中有任何两个是相同的函数时，

$$\psi_A(q_1, \dots, q_N) \equiv 0$$

Pauli不相容原理：不可能有两个或更多的费米子处于完全相同的量子状态中

这是量子力学基本公理之一。它在统计物理中起重要的作用

微观粒子波动性的表现

到目前为止，我们已经领会了量子力学的一系列与经典物理不同的表现：

- 1) 粒子的运动由波函数决定，是几率性的，其动力学演化由薛定谔方程决定
- 2) 力学量测量值由波函数本征值决定，其平均值是相应力学量算符在波函数中的积分平均
- 3) 力学量之间能否同时取确定值由力学量算符之间的对易关系决定。不能同时取确定值的情况就是不确定关系

这些新奇的特性都是粒子的波动性在**单粒子**身上的表现。粒子的波动性反映在多粒子系统中就是**全同性原理**

正是由于全同性原理植根于波动性原理，它比其它原理（如系统反射对称性）显得更为基本。例：系统能量本征态不一定是宇称本征态，但是任何多粒子系统不管是否处于本征态，在波函数叠加区域它一定处于全同粒子交换对称的本征态

多粒子系统

多粒子系统本身就带来了某些单粒子系统中没有的复杂性。
例如对单粒子来说：

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

对双自由粒子系统来说，它们的相对坐标和总动量算符却是
对易的（练习）：

$$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0$$

所以可以构造一个波函数，使得它是 $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ 与 $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ 的
共同本征函数

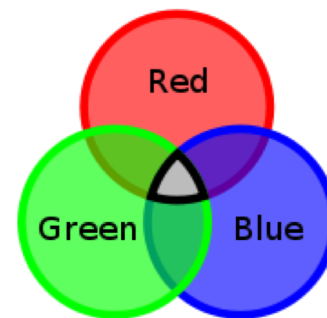
在多粒子系统中，虽然不同粒子的力学量算符都相互对易，
也就是说可以同时取确定的值，但是这些可能的测值之间却
可以有某种关联（量子纠缠、非定域性、爱因斯坦之问），
对这些问题的研究一直处于量子力学的前沿领域

Pauli不相容原理

最初不相容原理是Pauli综合反常塞曼效应、原子不同壳层电子数为偶数等现象归纳得到的，Pauli同时引入了电子自旋的概念来解释壳外电子的填充规律

粒子物理后来发展中遇到了 Δ^{++} 粒子：

$$\Delta^{++} = uuu$$



这个粒子由三个同样的顶夸克组成，电荷一样，自旋相同（同向），同时局限于一个狭小的空间之中（波函数重叠），似乎违背了Pauli不相容原理

后来发现它们还有一个量子数不同-色电荷（color）。色是量子色动力学的基础，它有三种（不妨设为红、绿、蓝）。三个夸克拥有不同的色荷量子数，所以Pauli不相容原理没有被打破

全同粒子的干涉效应

两个自由粒子的空间波函数：

a) 不考虑全同性：

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)},$$

引入质心坐标 $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ 和相对坐标 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ，总动量 $\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ 和相对动量： $\vec{k} = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)/2$ ，波函数为

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}。$$

在以一个粒子为中心，半径为 R 的球壳内找到另一个粒子的几率密度为：

$$P(r) = \int \left| \psi(\vec{R}, \vec{r}) \right|^2 d^3 \vec{R} r^2 d\Omega = Ar^2。$$

全同粒子的干涉效应

b) 两个全同 Bose 子:

$$\psi_+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)),$$

$$\psi_+(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{2} \cos(\vec{k} \bullet \vec{r}) e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}},$$

$$P_+(r) = \int |\psi_+(\vec{R}, \vec{r})|^2 \underline{d^3\vec{R}} \underline{r^2 d\Omega} = Ar^2 \left(1 + \frac{\sin 2kr}{2kr} \right)$$

全同粒子的干涉效应

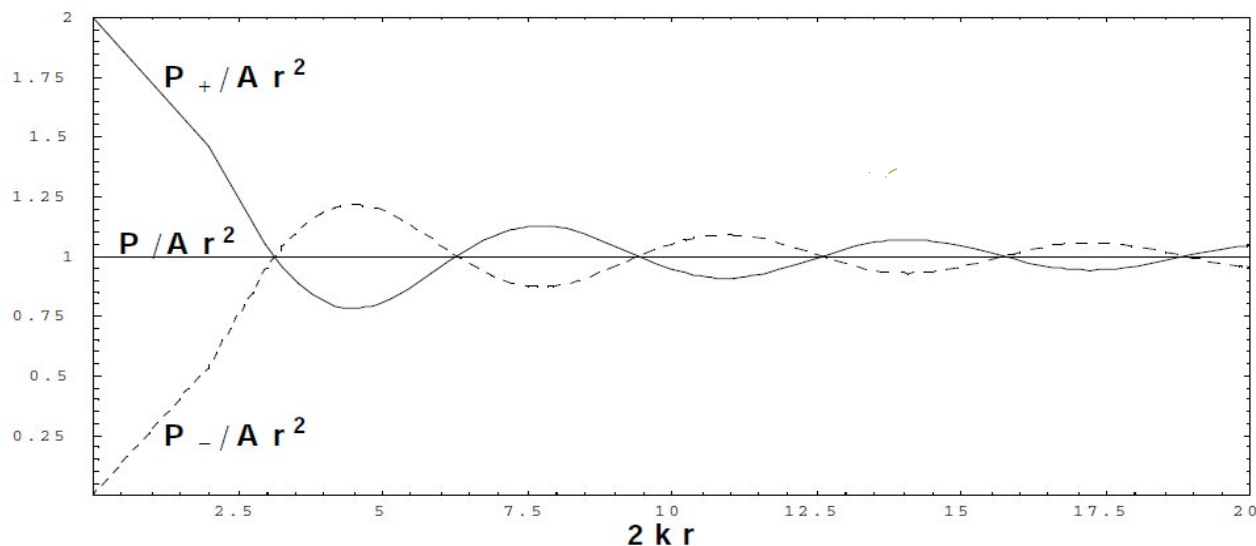
c) 反对称波函数

$$\psi_{-}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) - \psi(\bar{r}_2, \bar{r}_1)),$$

$$\psi_{-}(\bar{R}, \bar{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{2} i \sin(\bar{k} \bullet \bar{r}) e^{i\bar{K} \bullet \bar{R}},$$

$$P_{-}(r) = Ar^2 \left(1 - \frac{\sin 2kr}{2kr} \right)$$

全同粒子的干涉效应



说明：对称空间波函数 \rightarrow 两粒子靠近的几率增大，

反对称空间波函数 \rightarrow 两粒子靠近的几率减小，

似乎在全同粒子间存在一种作用力，玻色子是吸引力，费米子是排斥力。这种力称为交换力，它不是一种真正意义上的力，无施力者，在 $r \rightarrow \infty$ 时，交换力消失。

全同粒子系统的量子特性

全同玻色子系统在低温下呈现超流效应-具有量子特性的宏观物体（玻色-爱因斯坦凝聚） 粘滞系数

全同费米子系统在低温下呈现超导效应-电子之间两两结成库配对（复合玻色子）

Pauli不相容原理使全同费米子体系无法聚集-导致日常桌椅板凳等物体占有的空间尺度

电子在白矮星内部提供简并压力抵抗重力崩塌，但当其质量大于1.4倍太阳质量时电子被压入质子内部形成中子星，中子星内部压强改由中子的简并提供