清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：相对绩效比率和 VaR 约束下的养老基金优化管理问题

系　　别：数学科学系

专　　业：数学与应用数学

姓　　名：夏燚

指导教师：梁宗霞教授

2020 年 5 月 11 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：＿＿＿＿＿＿ 导师签名：＿＿＿＿＿＿ 日　期：＿＿＿＿＿＿

中文摘要

在本文中，我们研究了固定缴费型养老基金对于交易和风险价值（Value-at-Risk）约束的情况下，对绩效指标进行最优化的投资问题。其中绩效指标是相对于某一基准而言，投资组合的高绩效与低绩效之比（相对绩效比率）。

我们先是考虑了对原财富过程进行变换，使得固定缴费项蕴含于财富过程，以便后续使用鞅方法，将原动态规划问题转化为含约束的终端财富的优化问题。其次，根据分式规划的研究方法，我们在相应约束下对原问题进行了线性化处理，通过求解一族含参优化问题来给出原分式规划问题的解。再次，利用 Lagrange 乘子法、凹化（对偶）的方法以及先求解确定性问题再随机化的的方法，求解线性化之后的含约束规划问题。

关键词：相对绩效比率；VaR 约束；鞅方法；随机控制；固定缴费型养老基金

ABSTRACT

In this article, we consider the investment problem of optimizing performance indicators under the conditions of fixed contribution pension funds for trading and value-at-risk constraints. Performance indicators are the ratio of high performance to low performance (relative performance ratio) of a portfolio relative to a certain benchmark.

We first consider transforming the original wealth process so that fixed contributions are embedded in the wealth process, so that the subsequent martingale method can be used to transform the original dynamic programming problem into an optimization problem with constrained terminal wealth. Secondly, according to the research method of fractional programming, we linearize the original problem under the corresponding constraints, and give a solution to the original fractional programming problem by solving a family of parameter-optimized problems. Thirdly, using the Lagrange multiplier method, the concave (dual) method and the method of solving the deterministic problem first and then randomizing, the constrained programming problem after linearization is solved.

Keywords: Performance ratio; Value-at-Risk constraint; Martingale method; Stochastic control; Defined contribution pension plan

目　录

主要符号对照表

HPC	高性能计算 (High Performance Computing)
cluster	集群
Itanium	安腾
SMP	对称多处理
ΔG	活化自由能 (Activation Free Energy)
χ	传输系数 (Transmission Coefficient)
E	能量
v	速度
劝学	君子曰：学不可以已。

第 1 章　引言

1.1　背景介绍

第 2 章　模型建立与问题分析求解

2.1　模型建立

2.1.1　金融市场模型和财富过程

首先考虑一个完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，并在上面考虑由标准布朗运动 $W(t)$ 生成的自然 $\sigma-$ 域流 $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t | 0 \leqslant t \leqslant T\}$。我们所考虑的养老基金问题开始于初始时间 0，退休时间为 T。

基于以上背景，我们考虑一个具有现金（无风险财富过程）和一份风险资产的金融市场模型。其中现金过程满足常微分方程

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt. \tag{2-1}$$

含风险资产满足随机微分方程

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)). \tag{2-2}$$

其中 $r > 0$ 为现金过程所对应的无风险利率，$\mu > r$ 为风险资产的期望收益率，$\sigma > 0$ 为固定常数，其大小反映了风险资产的波动情况。记 $\xi = \frac{\mu - r}{\sigma}$ 为 $W(t)$ 的单位风险价格，也称为夏普率（Sharpe Ratio[1]）。用非随机函数 $c(t) > 0$ 表示投资者在 t 时刻的缴费率。并设 $\pi(t)$ 为对有风险资产的投资数额，并记 $\pi := \left\{\pi_t, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 为整个投资过程，自然地，我们要求 π 是 $\mathbb{F}-$ 循序可测的随机过程并且满足 $\int_0^T \pi(t)^2 dt < \infty$。相应的，投资组合对应的财富过程记为 $X^\pi(t)$。容易看出，财富过程满足如下随机微分方程：

$$dX^\pi(t) = rX^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] + c(t)dt \tag{2-3}$$

定义 2.1： 称一个投资组合 $\pi := \left\{\pi_t, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ 是可接受（admissible）的并且在初值取值为 $x_0 > 0$，如果它属于以下集合：

$$\mathcal{A}\left(x_0\right) := \left\{\pi \in \mathcal{S} : X^\pi(0) = x_0 \text{ 且} X^\pi(t) \geqslant 0, \text{ a.s.}, \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}. \tag{2-4}$$

其中，$\mathcal{S}$ 中的元素为 $\mathbb{F}-$ 循序可测并且满足 $\int_0^T \pi(t)^2 dt < \infty$ 的随机过程 π。

2.2 相对绩效比率问题建立

Keating 和 Shadwick 在他们的文章[2] 中考虑到了所谓的“$\Omega-$ 测度”：给定一个参考水平值 θ，定义随机变量 R 的“$\Omega-$ 测度”为

$$\Omega_{\theta}(R)=\frac{\mathbb{E}[(R-\theta)_{+}]}{\mathbb{E}[(\theta-R)_{+}]} \tag{2-5}$$

其中 $x_{+}:=\max\{x,0\}$ 表示 x 的正部。于是，若考虑由方程 (2-3) 确定的投资组合终端项财富关于“$\Omega-$ 测度”的最优问题，则问题变为：

$$\max_{\pi\in\mathcal{A}(x_0)}\left\{\Omega_{\theta}(X^{\pi}(T)):=\frac{\mathbb{E}[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]}{\mathbb{E}[(\theta-X^{\pi}(T))_{+}]}\right\} \tag{2-6}$$

然而，对于该问题，我们在下面的注释 (2.3) 中会发现该问题是无界的，因此我们考虑对“$\Omega-$ 测度”做变换：引入权重函数 $U:\mathbb{R}_{+}\mapsto\mathbb{R}$ 和 $D:\mathbb{R}_{+}\mapsto\mathbb{R}$ 为单调增加的可测函数，此时目标函数变为

$$R(X^{\pi}(T)):=\frac{\mathbb{E}\{U[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-X^{\pi}(T))_{+}]\}} \tag{2-7}$$

此时分子 $\mathbb{E}\{U[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]\}$ 代表终端值超出参考水平时的收益，而分母 $\mathbb{E}\{D[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]\}$ 代表终端值低于参考水平时的惩罚，因此也称函数 U 为奖赏函数，而函数 D 则被称为惩罚函数。此时，问题变为

$$\max_{\pi\in\mathcal{A}(x_0)}\left\{\frac{\mathbb{E}\{U[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-X^{\pi}(T))_{+}]\}}\right\} \tag{2-8}$$

即为 Hongcan Lin, David Saunders 和 Chengguo Weng 所考虑的问题模型[3]。

更进一步的，我们考虑对该问题增加 VaR 约束：要求终端财富项高于另一参考值 L 的概率至少为 $1-\varepsilon$，即要求

$$P(X^{\pi}(T)\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon \tag{2-9}$$

其中 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ 为给定常数。于是优化问题为

$$\begin{cases}\max\limits_{\pi\in\mathcal{A}(x_0)} & \dfrac{\mathbb{E}\{U[(X^{\pi}(T)-\theta)_{+}]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-X^{\pi}(T))_{+}]\}}\\ s.t. & X^{\pi}(t)\text{满足方程 (2-3)}\\ & P(X^{\pi}(T)\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon\end{cases} \tag{2-10}$$

容易看出，当 $\varepsilon = 1$ 时，该约束相当于无约束，而当 $\varepsilon = 0$ 时，为 Basak[4] 所考虑的。

2.3 问题的转化与求解分析

2.3.1 固定缴费项的转化

考虑到固定缴费项的存在，财富过程 X^π 并不是一个自负盈亏的过程，同时为了处理的方便，我们对固定缴费项进行转化，使得该项直接蕴含于总财富过程 $\tilde{X}^\pi(t)$ 中：做变换

$$\tilde{X}^\pi(t) = X^\pi(t) + C(t). \tag{2-11}$$

其中 $C(t) = \int_t^T c(s)e^{-r(s-t)}ds$ 代表从时间 t 开始到时间 T 这段时间里固定缴费在时刻 t 处的折现价值，也即总财富等于当前现有财富过程和将来固定缴费项在当前的折现的总和。于是方程 (2-3) 转化为

$$\begin{aligned} d\tilde{X}^\pi(t) =& dX^\pi(t) + dC(t) \\ =& rX^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] + c(t)dt - c(t)dt + rC(t)dt \\ =& r\tilde{X}^\pi(t)dt + \pi(t)\sigma[\xi dt + dW(t)] \\ =& [r\tilde{X}^\pi(t) + \pi(t)\sigma\xi]dt + \pi(t)\sigma dW(t) \end{aligned} \tag{2-12}$$

而有 $\tilde{X}^\pi(0) = X^\pi(0) + C(0) = x_0 + \int_0^T c(s)e^{-rs}ds := \tilde{x}_0$。容易看出总财富过程满足

$$\tilde{X}^\pi(T) = X^\pi(T), \tilde{X}^\pi(t) \geqslant 0, \forall\, t \in [0, T] \tag{2-13}$$

根据 Aihua Zhang 和 Christian-Oliver Ewald 的研究[5]，在折现价值 $C(t)$ 较大时，可以允许当前财富值 $X^\pi(t)$ 取负值，也即只需保证总财富过程 $\tilde{X}^\pi(t)$ 非负即可，于是此时可以类似定义

$$\tilde{\mathcal{A}}\left(\tilde{x}_0\right) := \left\{\pi \in \mathcal{S} : \tilde{X}^\pi(0) = \tilde{x}_0 \text{ 且} \tilde{X}^\pi(t) \geqslant 0, \text{ a.s.}, \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}. \tag{2-14}$$

问题变为

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\pi\in\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)} & \dfrac{\mathbb{E}\{U[(\tilde{X}^\pi(T)-\theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-\tilde{X}^\pi(T))_+]\}} \\
s.t. & \tilde{X}^\pi(t)\text{满足方程 (2-12)}, \tilde{X}^\pi(0)=\tilde{x}_0 \\
 & P(\tilde{X}^\pi(T)\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon
\end{cases}
\tag{2-15}
$$

2.3.2 鞅方法

首先考虑定价核 (Pricing Kernel) 过程 $H(t)$

$$
H(t) := \exp\left\{-\left(r+\frac{\xi^2}{2}\right)t-\xi W(t)\right\}. \tag{2-16}
$$

也即满足

$$
\begin{cases}
dH(t)=H(t)[-rdt-\xi dW(t)], \\
H(0)=1
\end{cases}
\tag{2-17}
$$

记 $\mathcal{M}_+$ 为所有非负 $\mathcal{F}_T-$ 可测的随机变量，则有如下定理可将初始对投资组合过程优化的动态规划问题，转化为对可测随机变量优化的静态优化问题。

定理 2.1： 优化问题 (2-15) 和下述优化问题 (2-18) 目标值相等。

$$
\begin{cases}
\max\limits_{Z\in\mathcal{M}_+} & \dfrac{\mathbb{E}\{U[(Z-\theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-Z)_+]\}} \\
s.t. & \mathbb{E}[H(T)Z]\leqslant \tilde{x}_0 \\
 & P(Z\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon
\end{cases}
\tag{2-18}
$$

证明 首先证明优化问题 (2-15) 和下述优化问题 (2-19) 等价

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\pi\in\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}_0)} & \dfrac{\mathbb{E}\{U[(\tilde{X}^\pi(T)-\theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-\tilde{X}^\pi(T))_+]\}} \\
s.t. & \tilde{X}^\pi(t)\text{满足方程 (2-12)}, \tilde{X}^\pi(0)=\tilde{x}_0 \\
 & \mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^\pi(T)]\leqslant \tilde{x}_0 \\
 & P(\tilde{X}^\pi(T)\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon.
\end{cases}
\tag{2-19}
$$

易见问题 (2-19) 只是比问题 (2-15) 多了个约束

$$
\mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^\pi(T)]\leqslant \tilde{x}_0. \tag{2-20}
$$

而注意到 (2-17) 以及 (2-12)，对 $H(t)\tilde{X}^{\pi}(t)$ 利用 Itô 公式，有

$$
\begin{aligned}
d[H(t)\tilde{X}^{\pi}(t)] =& H(t)[r\tilde{X}^{\pi}(t)+\pi(t)\sigma\xi]dt + H(t)\pi(t)\sigma dW(t) \\
&+ \tilde{X}^{\pi}(t)H(t)[-rdt-\xi dW(t)] \\
&+ H(t)(-\xi)\times\pi(t)\sigma dt \\
=& H(t)[\pi(t)\sigma-\xi\tilde{X}^{\pi}(t)]dW(t)
\end{aligned}
\tag{2-21}
$$

于是有

$$
H(t)\tilde{X}^{\pi}(t) = \tilde{X}^{\pi}(0) + \int_0^t H(s)[\pi(s)\sigma-\xi\tilde{X}^{\pi}(s)]dW(s), \quad t\in[o,T] \tag{2-22}
$$

而上式右侧是一个非负局部鞅，于是是一个上鞅 (参见 [6])，于是有

$$
\mathbb{E}[H(T)\tilde{X}^{\pi}(T)] \leqslant \mathbb{E}[H(0)\tilde{X}^{\pi}(0)] = \tilde{x}_0. \tag{2-23}
$$

也即不等式约束 (2-20) 蕴含于条件 (2-12) 中，于是易见问题 (2-19) 与问题 (2-15) 等价。而容易看出问题 (2-18) 与问题 (2-19) 相比较而言，少了条件 (2-12) 的限制，因此问题 (2-18) 的最优目标值不小于问题 (2-19) 的最优目标值。

另一方面，由命题 (2.1)，可知对于问题 (2-18) 的任一最优解，可以找到一个投资组合过程，使其终端财富项刚好为问题 (2-18) 的最优解。于是知优化问题 (2-19) 最优目标值不小于优化问题 (2-18) 最优目标值，进而有两者最优目标值相等。 □

命题 2.1： 设 Z^* 为问题 (2-18) 的最优解，则存在投资组合过程 $\pi^*\in\tilde{\mathcal{A}}\left(\tilde{x}_0\right)$ 使 $\tilde{X}^{\pi^*}(T)=Z^*$.

证明 由 Z^* 为问题 (2-18) 的最优解，易见必有不等式约束 $\mathbb{E}[H(T)Z]\leqslant\tilde{x}_0$ 恰好取到等，即必有 $\mathbb{E}[H(T)Z^*]=\tilde{x}_0$。否则考虑

$$
\tilde{Z} := Z^* + e^{rT}(\tilde{x}_0 - \mathbb{E}[H(T)Z^*]). \tag{2-24}
$$

也即将多余的资产投入无风险收益过程中，容易发现此时 $\tilde{Z}$ 仍是问题 (2-18) 的可行解，但是对应着更大的目标值。定义过程

$$
Y^*(t) := H(t)^{-1}\mathbb{E}[H(T)Z^*|\mathcal{F}_t], \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2-25}
$$

则容易验证过程 $\{H(t)Y^*(t), t \geqslant 0\}$ 为关于域流 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 的鞅。于是由鞅表示定理，存在一个 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 循序可测的过程 $\{\psi(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 使 $\int_0^T \psi(t)^2 dt < \infty, a.s.$ 且

$$H(t)Y^*(t) = \tilde{x}_0 + \int_0^t \psi(s) dW(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2-26}$$

并记

$$\pi^*(t) = H(t)^{-1}\psi(t)\sigma^{-1} + Y^*(t)\xi\sigma^{-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2-27}$$

则有 $\pi^* \in \tilde{\mathcal{A}}\left(\tilde{x}_0\right)$ 且有 $\tilde{X}^{\pi^*}(t) = Y^*(t), 0 \leqslant t \leqslant T$，特别的，有 $\tilde{X}^{\pi^*}(T) = Y^*(T) = Z^*$. □

注释 2.1： 由上述证明可知，定理 (2.1) 和命题 (2.1) 不仅说明了问题 (2-15) 和问题 (2-18) 最优目标值相等，还给出了两个问题最优解的关系，将求解动态优化问题 (2-15) 转化为求解优化问题 (2-18)。于是在后面的求解中，我们只需对优化问题 (2-18) 进行求解即可。以上处理问题的方法常被称为鞅方法 (Martingale method)。

2.3.3 线性化方法

在此之前，为了使问题可以求解，我们首先对奖赏函数 U 和惩罚函数 D 做一些假设：

(H1) 首先自然假设 U 和 D 都是二次可微的严格增加并且初值为 0 的函数。

注释 2.2： U 和 D 的单调性容易由其代表意义做出解释，而初值为 0 的条件使得该问题在终端财富与参考水平近似相等时，与前人所考虑的“$\Omega-$ 测度”结果接近。

注释 2.3： 而根据 Hanqing Jin 和 Xun Yu Zhou 的研究[7]，可以构造一列随机变量 Z_n 满足 $\mathbb{E}[H(T)Z_n] = \tilde{x}_0$ 但 $\mathbb{E}[Z_n] \to \infty$，于是容易看出若报酬函数 U 为凸函数，则优化问题 (2-18) 在没有 VaR 约束的情况下是无界的。于是为了保证问题的收敛性，同时为了求解的方便，我们假设报酬函数 U 为凹函数（这在通常的最大化问题中也比较常见，取目标函数是凹函数，表明投资是风险趋避型）。

更具体的，我们假设报酬函数 U 满足如下条件：

(H2) 假设报酬函数 U 满足 Inada 条件：

$$\lim_{x\searrow 0} U'(x)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty} U'(x)=0. \tag{2-28}$$

(H3) 假设报酬函数 U 是严格凹的，也即假设 $U''(z)<0, \forall z\in(0,\infty)$.
对于惩罚函数 D，不妨假设它是凹函数或者严格凸函数。

此时目标函数为两个函数取期望再做比值的问题，对此我们采用线性化处理的方式：对参数 $\nu\geqslant 0$，考虑求解一族优化问题

$$v(\nu,\tilde{x}_0):=\sup_{Z\in\mathcal{C}(\tilde{x}_0),P(Z\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon} \mathbb{E}\{U[(Z-\theta)_+]\}-\nu\mathbb{E}\{D[(\theta-Z)_+]\} \tag{2-29}$$

其中

$$\mathcal{C}(\tilde{x}_0)=\left\{Z\in\mathcal{M}_+ : \mathbb{E}[H(T)Z]\leqslant\tilde{x}_0\right\} \tag{2-30}$$

首先问题 (2-29) 与问题 (2-18) 有相同的偏好：都倾向于取报酬函数 U 较大而惩罚函数 D 较小。其次，如下定理表明，只需求解这样一族线性化之后的问题 (2-29) 就可以求解问题 (2-18)。

注释 2.4： 与命题 (2.1) 证明类似的，容易看出问题 (2-29) 取最优值时，必有不等式约束取等，也即必有

$$v(\nu,\tilde{x}_0)=\sup_{Z\in\mathcal{M},\mathbb{E}[H(T)Z]=\tilde{x}_0,P(Z\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon} \mathbb{E}\{U[(Z-\theta)_+]\}-\nu\mathbb{E}\{D[(\theta-Z)_+]\} \tag{2-31}$$

成立。

定理 2.2： 假设 $\tilde{x}_0<e^{-rT}\theta$，$\forall\nu\geqslant 0$，记 Z_ν 为问题 (2-29) 的最优解，也即

$$v(\nu,\tilde{x}_0)=\mathbb{E}\{U[(Z_\nu-\theta)_+]\}-\nu\mathbb{E}\{D[(\theta-Z_\nu)_+]\}. \tag{2-32}$$

若存在 $\nu^*\geqslant 0$ 使得

$$\nu^*=\frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{\nu^*}-\theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta-Z_{\nu^*})_+]\}} \tag{2-33}$$

也即若存在 $\nu^*\geqslant 0$ 使 $v(\nu^*,\tilde{x}_0)=0$，则有 $Z^*:=Z_{\nu^*}$ 为问题 (2-18) 最优解，此时 ν^* 为最优目标值。

证明 首先由条件 $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$，以及 $C(\tilde{x}_0)$ 的定义易见 $P(Z < \theta) > 0$，否则有 $\tilde{x}_0 \geqslant \mathbb{E}[H(T)Z] \geqslant \mathbb{E}[H(T)]\theta = e^{-rT}\theta$ 与条件 $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$ 矛盾。于是由 Z^* 的最优性，知 $\forall Z \in \mathcal{M}_+, \mathbb{E}[H(T)Z] \leqslant \tilde{x}_0, P(Z \geqslant L) \geqslant 1-\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}
0 =& v(\nu^*, \tilde{x}_0) \\
=& \mathbb{E}\{U[(Z_{\nu^*} - \theta)_+]\} - \nu^* \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{\nu^*})_+]\} \\
\geqslant& \mathbb{E}\{U[(Z_{\nu} - \theta)_+]\} - \nu^* \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{\nu})_+]\} \\
=& \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\} - \frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{\nu^*} - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{\nu^*})_+]\}} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}
\end{aligned} \tag{2-34}$$

也即

$$\frac{\mathbb{E}\{U[(Z_{\nu^*} - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z_{\nu^*})_+]\}} \geqslant \frac{\mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\}}{\mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}} \tag{2-35}$$

于是有 $Z^* = Z_{\nu^*}$ 为问题 (2-18) 最优解，此时 ν^* 为最优目标值并称其为最优参数。 □

于是以下只需做两件事情

一、 证明最优参数的存在性，也即函数 $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$ 零点的存在性。

二、 求解线性化之后的优化问题 (2-29)。

2.3.4 最优参数的存在性

最优参数 ν^* 的存在性需要额外的条件：假设

(H4) 报酬函数 U 是 Arrow−Pratt 相对风险规避型的并且满足渐进弹性条件，也即满足

$$\liminf_{x\to\infty}\left(-\frac{xU''(x)}{U'(x)}\right) > 0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{xU''(x)}{U'(x)} < 1. \tag{2-36}$$

下面将通过探究函数的性质 $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$ 来给出最优参数的存在性，也即函数 $v(\cdot, \tilde{x}_0) = 0$ 零点的存在性的证明，为此我们需要下面一个引理

引理 2.1： 记

$$\begin{aligned}
M &= \sup_{Z\in\mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z]=\tilde{x}_0} \mathbb{E}\{U[(Z - \theta)_+]\} \\
m &= \inf_{Z\in\mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z]=\tilde{x}_0} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z)_+]\}
\end{aligned} \tag{2-37}$$

则当 $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$ 时，有 $M < \infty, m > 0$.

证明 $M < \infty$ 的证明参见 Hanqing Jin 和 Xun Yu Zhou 等人的文章[8]。反设 $m = 0$，设 $Z_n \in \mathcal{M}, \mathbb{E}[H(T)Z_n] = \tilde{x}_0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{D[(\theta - Z_n)_+]\} = 0$，则有 $D[(\theta - Z_n)_+]$ 依概率收敛到 0，进而有 $\theta - Z_n$ 依概率收敛到 0，进而有 $H(T)(\theta - Z_n)$ 依概率收敛到 0，进而有 $H(T)(\theta - Z_n)$ 依 L^1 收敛到 0，也即 $\mathbb{E}\{H(T)(\theta - Z_n)\} \to 0$，与 $\mathbb{E}\{H(T)(\theta - Z_n)\} = \theta - \tilde{x}_0 e^{rT} > 0$ 矛盾。 □

命题 2.2： 当报酬函数 U 和惩罚函数 D 满足以上假设 (H1)-(H4)，初值 $\tilde{x}_0 < e^{-rT}\theta$ 并且问题 (2-18) 有非平凡值可行解时，也即存在 $Z \in \mathcal{M}_+$，使

$$\begin{cases} \mathbb{E}[H(T)Z] \leqslant \tilde{x}_0 \\ P(Z \geqslant L) \geqslant 1 - \varepsilon \\ P(Z \geqslant \theta) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-38}$$

此时函数 $v(\cdot, \tilde{x}_0)$ 有如下性质

(i) $0 < v(0, \tilde{x}_0) < \infty$.

(ii) $v(\cdot, \tilde{x}_0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是非增函数。

(iii) 对于任意 $0 < \tilde{x}_0$ 给定，有 $v(\cdot, \tilde{x}_0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数。

(iv) $\lim_{\nu\to\infty} v(\nu, \tilde{x}_0) = -\infty$.

证明 首先由条件 (2-38) 易见 $0 < v(0, \tilde{x}_0)$，而由引理 (2.1) 以及注释 (2.4) 自然可得 $v(\nu, \tilde{x}_0) \leqslant M - \nu m$，于是自然有 $v(0, \tilde{x}_0) < \infty$ 以及 $\lim_{\nu\to\infty} v(\nu, \tilde{x}_0) = -\infty$。

对 $\nu_1 < \nu_2, t \in [0, 1]$，设 Z_{ν_2} 极大化 $v(\nu_2, \tilde{x}_0)$，Z_t 极大化 $v(t\nu_1 + (1-t)\nu_2, \tilde{x}_0)$，则有

$$\begin{aligned} v(\nu_2, \tilde{x}_0) &= \mathbb{E}\{U[(Z_{\nu_2} - \theta)_+] - \nu_2 D[(\theta - Z_{\nu_2})_+]\} \\ &\leqslant \mathbb{E}\{U[(Z_{\nu_2} - \theta)_+] - \nu_1 D[(\theta - Z_{\nu_2})_+]\} \\ &\leqslant v(\nu_1, \tilde{x}_0) \end{aligned} \tag{2-39}$$

也即 $v(\cdot, \tilde{x}_0)$ 是非增函数。

$$\begin{aligned} v(t\nu_1 + (1-t)\nu_2, \tilde{x}_0) =& \mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - (t\nu_1 + (1-t)\nu_2) D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ =& t\mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - \nu_1 D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ &+ (1-t)\mathbb{E}\{U[(Z_t - \theta)_+] - \nu_2 D[(\theta - Z_t)_+]\} \\ \leqslant& t v(\nu_1, \tilde{x}_0) + (1-t) v(\nu_2, \tilde{x}_0) \end{aligned} \tag{2-40}$$

于是 $v(\cdot, \tilde{x}_0)$ 是凸函数。 □

推论 2.1： 由 $\upsilon(\cdot,\tilde{x}_0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数，于是是连续函数，又 $0<\upsilon(0,\tilde{x}_0)<\infty$，$\lim_{\nu\to\infty}\upsilon(\nu,\tilde{x}_0)=-\infty$，于是由连续函数界值定理知，存在 ν^* 使 $\upsilon(\nu^*,\tilde{x}_0)=0$，反设存在 $\nu_1<\nu_2$ 均为 $\upsilon(\cdot,\tilde{x}_0)$ 的零点，由 $\lim_{\nu\to\infty}\upsilon(\nu,\tilde{x}_0)=-\infty$ 知，存在 $\nu_3>\nu_2$ 且使 $\upsilon(\nu_3,\tilde{x}_0)<\upsilon(\nu_2,\tilde{x}_0)=0$，于是有

$$\nu_2=\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_3-\nu_1}\nu_3+\frac{\nu_3-\nu_2}{\nu_3-\nu_1}\nu_1, \tag{2-41}$$

而有

$$\upsilon(\nu_2,\tilde{x}_0)=0>\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_3-\nu_1}\upsilon(\nu_3,\tilde{x}_0)+\frac{\nu_3-\nu_2}{\nu_3-\nu_1}\upsilon(\nu_1,\tilde{x}_0). \tag{2-42}$$

与 $\upsilon(\cdot,\tilde{x}_0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数矛盾，于是知 ν^* 是存在唯一的。

下面，我们只需求解线性化之后的优化问题 (2-29) 即可。

2.3.5 VaR 约束的转化

首先为了方便起见，记

$$f_\nu(Z)=U[(Z-\theta)_+]-\nu D[(\theta-Z)_+] \tag{2-43}$$

$$f_{\nu,\lambda}(Z)=U[(Z-\theta)_+]-\nu D[(\theta-Z)_+]+\lambda\mathbf{1}_{Z\geqslant L} \tag{2-44}$$

对于线性化之后的优化问题 (2-29)，也即

$$\begin{aligned}\max_{Z\in\mathcal{M}_+}\quad & \mathbb{E}\{U[(Z-\theta)_+]-\nu D[(\theta-Z)_+]\}=\mathbb{E}\{f_\nu(Z)\}\\ s.t.\quad & \mathbb{E}[H(T)Z]\leqslant\tilde{x}_0\\ & P(Z\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon\end{aligned} \tag{2-45}$$

我们考虑将 VaR 约束变成 Lagrange 惩罚项转化进目标函数中：考虑如下优化问题

$$\begin{aligned}\max_{Z\in\mathcal{M}_+}\quad & \mathbb{E}\{U[(Z-\theta)_+]-\nu D[(\theta-Z)_+]+\lambda\mathbf{1}_{Z\geqslant L}\}=\mathbb{E}\{f_{\nu,\lambda}(Z)\}\\ s.t.\quad & \mathbb{E}[H(T)Z]\leqslant\tilde{x}_0\end{aligned} \tag{2-46}$$

下面定理将给出新优化问题 (2-46) 与优化问题 (2-45) 的关系

定理 2.3： 对每个 $\lambda\geqslant 0$，设 $Z_{\nu,\lambda}$ 为优化问题 (2-46) 最优解，若存在 $\lambda^*\geqslant 0$ 且

$$P(Z_{\nu,\lambda^*}\geqslant L)\geqslant 1-\varepsilon \tag{2-47}$$

$$\lambda^*[P(Z_{\nu,\lambda^*} \geqslant L) - (1-\varepsilon)] = 0 \tag{2-48}$$

则有 $Z_\nu := Z_{\nu,\lambda^*}$ 为优化问题 (2-45) 最优解

证明 首先由条件 (2-47) 知 Z_{ν,λ^*} 是问题 (2-45) 的一个可行解,于是有 $\mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\}$ 不超过优化问题 (2-45) 的最优目标值。

另一方面，对优化问题 (2-45) 的任一可行解 Z，有 Z 亦为优化问题 (2-46) 的可行解，于是有 $\mathbb{E}\{f_{\nu,\lambda^*}(Z)\} \leqslant \mathbb{E}\{f_{\nu,\lambda^*}(Z_{\nu,\lambda^*})\}$，也即

$$\mathbb{E}\{f_\nu(Z)\} + \lambda^* P(Z \geqslant L) \leqslant \mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\} + \lambda^* P(Z_{\nu,\lambda^*} \geqslant L) \tag{2-49}$$

也即

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{f_\nu(Z)\} \leqslant & \mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\} + \lambda^* \left[P(Z_{\nu,\lambda^*} \geqslant L) - P(Z \geqslant L)\right] \\ = & \mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\} + \lambda^* [1 - \varepsilon - P(Z \geqslant L)] \\ \leqslant & \mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\}\end{aligned} \tag{2-50}$$

于是有优化问题 (2-45) 的最优目标值不超过 $\mathbb{E}\{f_\nu(Z_{\nu,\lambda^*})\}$，综上有 Z_{ν,λ^*} 是问题 (2-45) 的最优解。 □

注释 2.5： 容易看出满足定理 (2.3) 的 $\lambda^* \geqslant 0$ 是存在的，事实上若 $\lambda = 0$ 时问题 (2-46) 的最优解满足 VaR 约束，则取 $\lambda^* = 0$ 即可。而若 $\lambda = 0$ 时问题 (2-46) 的最优解不满足 VaR 约束，也即此时 $P(Z_{\nu,\lambda^*} \geqslant L) < 1-\varepsilon$，注意到 $P(Z_{\nu,\lambda} \geqslant L)$ 随 λ 的增大而增大，且当 $\lambda \to \infty$ 时有 $P(Z_{\nu,\lambda} \geqslant L) = 1$，于是易见存在 $\lambda^* \geqslant 0$ 满足定理 (2.3)。于是以下只需解决优化问题 (2-46) 即可

2.3.6 不等式约束的转化与非随机化

与上面 VaR 约束的转化类似的，我们考虑把优化问题 (2-46) 的不等式约束 $\mathbb{E}[H(T)Z] \leqslant \tilde{x}_0$ 同样变成 Lagrange 惩罚项转化进目标函数中：对每个 $\beta > 0$，考虑如下优化问题

$$\max_{Z \in \mathcal{M}_+} \quad \mathbb{E}\{f_{\nu,\lambda}(Z) - \beta H(T) Z\} \tag{2-51}$$

以及优化问题 (2-51) 的非随机化版本：对每个 $y > 0$ 考虑

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+} \quad \mathbb{E}\{f_{\nu,\lambda}(x) - yx.\} \tag{2-52}$$

我们有如下定理给出优化问题 (2-46)、优化问题 (2-51) 和优化问题 (2-52) 的解的关系：

定理 2.4： 对 $\nu \geqslant 0, \lambda \geqslant 0$ 有如下结果

(a) 设 Borel 可测函数 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$ 对每个 $\nu \geqslant 0, \lambda \geqslant 0$ 和 $y > 0$ 均为问题 (2-52) 的最优解，则有 $Z_{\nu,\lambda,\beta} := x^*_{\nu,\lambda}(\beta H(T))$ 为优化问题 (2-51) 的最优解；

(b) 若存在 $\beta^* > 0$ 使 Z_{ν,λ,β^*} 为优化问题 (2-51) 的最优解，且满足不等式约束取到等号，也即使 $\mathbb{E}[H(T)Z_{\nu,\lambda,\beta^*}] = \tilde{x}_0$，则有 $Z_{\nu,\lambda} := Z_{\nu,\lambda,\beta^*}$ 为优化问题 (2-46) 的最优解，此时称 β^* 为最优乘子。

证明 证明参见 Hongcan Lin 和 David Saunders 和 Chengguo Weng 的文章[9] 引理 3.1 和引理 3.2 部分。 □

于是以下只剩下两件事情

一、 证明最优乘子 β^* 的存在性，也即存在 $\beta^* > 0$ 使 Z_{ν,λ,β^*} 为优化问题 (2-51) 的最优解，且满足不等式约束取到等号。

二、 求解非随机优化问题 (2-52)。

2.3.7 求解非随机问题

最优乘子的存在性依赖于非随机问题的解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$ 的性质，为此我们先求解非随机问题 (2-52)。在上面的分析里，我们对惩罚函数 D 做了它是凸函数或者凹函数的假设，下面将对具体情况分类讨论。

惩罚函数是凸函数时

此时记 $I_1(x)$ 为函数 $U'(x)$ 的反函数，$I_2(x)$ 为函数 $D'(x)$ 的反函数，记

$$k_{\nu,\lambda} := \frac{f_\nu(L) + \lambda + \nu D(\theta)}{L} \tag{2-53}$$

如图 2.1，易见此时存在唯一 $z_1 < \theta, z_2 > \theta$ 满足

$$\nu D'(\theta - z_1) = U'(z_2 - \theta) = \frac{U(z_2 - \theta) + \nu D(\theta - z_1)}{(z_2 - \theta) + (\theta - z_1)} \tag{2-54}$$

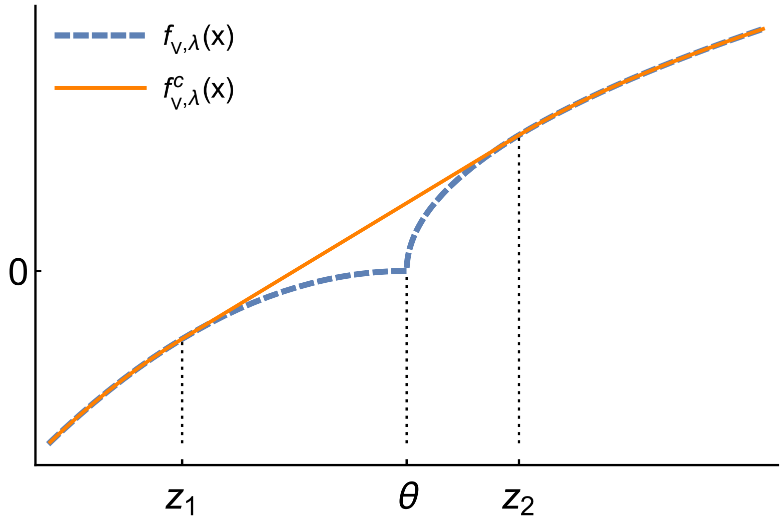

图 2.1　函数 $f_v(x)$ 与其凹包函数示意图

其中函数 $f_v^c(x)$ 为函数 $f_v(x)$ 的凹包函数，也即

$$f_v^c(x) = \inf\left\{g(x)|g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\text{为凹函数且}g(t) \geqslant f_v(t), \forall t \geqslant 0\right\} \tag{2-55}$$

此时函数 $f_v(x)$ 亦即函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 在 $\lambda = 0$ 时的情形。若 $z_1 \geqslant 0$，则容易求得此时非随机问题 (2-52) 解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2(\dfrac{y}{v}) & vD'(\theta - z_1) \leqslant y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leqslant y. \end{cases} \tag{2-56}$$

若 $z_1 < 0$，则此时存在唯一 $z' > \theta$ 满足

$$U'(z' - \theta) = \frac{U(z' - \theta) + vD(\theta)}{z' - 0}. \tag{2-57}$$

容易求得此时非随机问题 (2-52) 解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z' - \theta); \\ 0 & U'(z' - \theta) \leqslant y. \end{cases} \tag{2-58}$$

当 $\lambda > 0$ 时，以下将按照 $L < z_1, z_1 \leqslant L < \theta, \theta = L, \theta < L < z_2$ 这四种情况具体，分别考虑函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 相应的凹包函数，并利用其凹包函数来求解非随机问题 (2-52)。这里，我们知给出得到的结果和相应的示意图，具体计算过程与 Yinghui Dong 和 Harry Zheng 在文章[10] 附录中过程类似。

$L < z_1$ **时**　此时考虑 $k_{v,\lambda}$ 与 $vD'(\theta)$ 的大小关系：

1. 若 $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$，则此时示意图如图 2.2

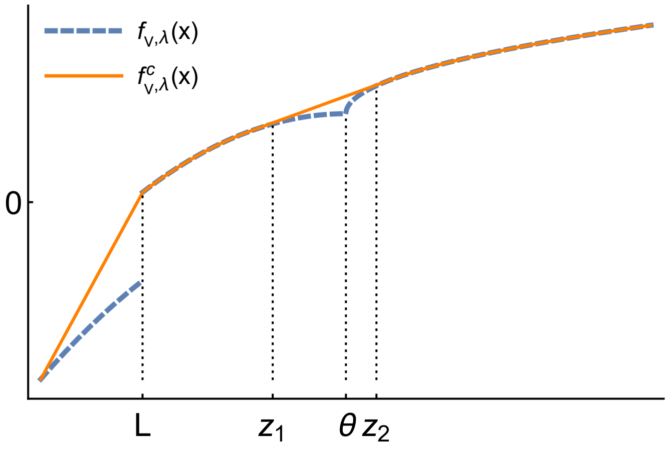

图 2.2　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta - z_1) \leqslant y < vD'(\theta - L); \\ L & vD'(\theta - L) \leqslant y < k_{v,\lambda}; \\ 0 & k_{v,\lambda} \leqslant y. \end{cases} \tag{2-59}$$

其中 $U'(z_2 - \theta) = vD'(\theta - z_1)$。

2. 若 $k_{v,\lambda} \leqslant vD'(\theta)$，则此时存在唯一 $z_3 \in [0, L)$ 满足

$$vD'(\theta - z_3) = \frac{f_v(L) + \lambda + vD(\theta - z_3)}{L - z_3} \tag{2-60}$$

此时示意图如图 2.3

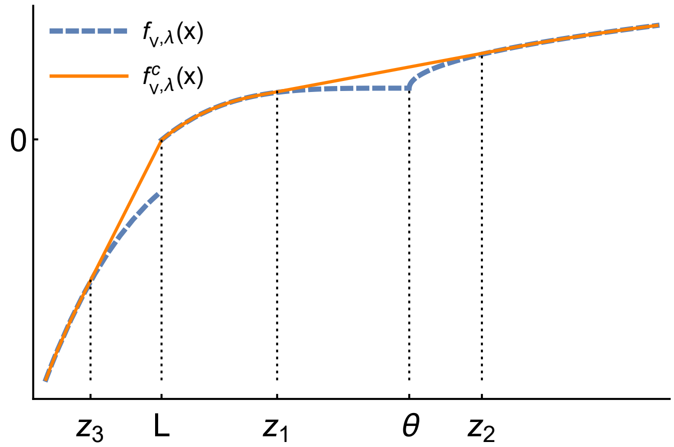

图 2.3　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_2 - \theta); \\ \theta - I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta - z_1) \leqslant y < vD'(\theta - L); \\ L & vD'(\theta - L) \leqslant y < vD'(\theta - z_3); \\ \theta - I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta - z_3) \leqslant y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leqslant y. \end{cases} \tag{2-61}$$

$z_1 \leqslant L < \theta$ 时　此时存在唯一 $z_4 > \theta$ 满足

$$U'(z_4 - \theta) = \frac{U(z_4 - \theta) + vD(\theta - L)}{z_4 - L}. \tag{2-62}$$

此时仍考虑 $k_{v,\lambda}$ 与 $vD'(\theta)$ 的大小关系：

1. 若 $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$，此时考虑 $k_{v,\lambda}$ 与 $U'(z_4 - \theta)$ 的大小关系：
   (a) 若 $k_{v,\lambda} > U'(z_4 - \theta)$，此时示意图如图 2.4

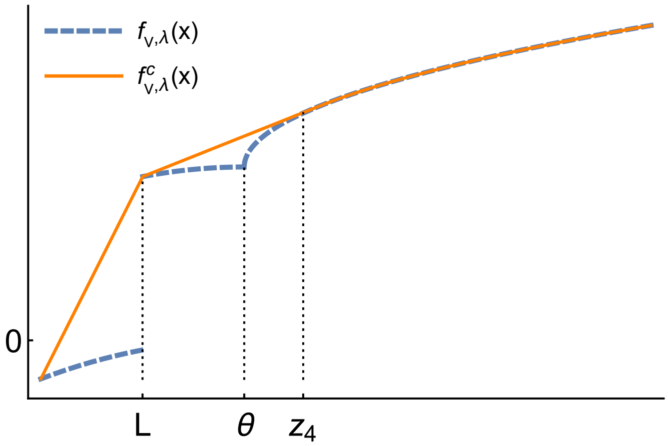

图 2.4　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_4 - \theta); \\ L & U'(z_4 - \theta) \leqslant y < k_{\nu,\lambda}; \\ 0 & k_{\nu,\lambda} \leqslant y. \end{cases} \tag{2-63}$$

(b) 若 $k_{\nu,\lambda} \leqslant U'(z_4 - \theta)$，此时存在唯一 $z_5 > \theta$ 满足

$$U'(z_5 - \theta) = \frac{U(z_5 - \theta) + \lambda + \nu D(\theta)}{z_5 - 0}. \tag{2-64}$$

此时示意图如图 2.5

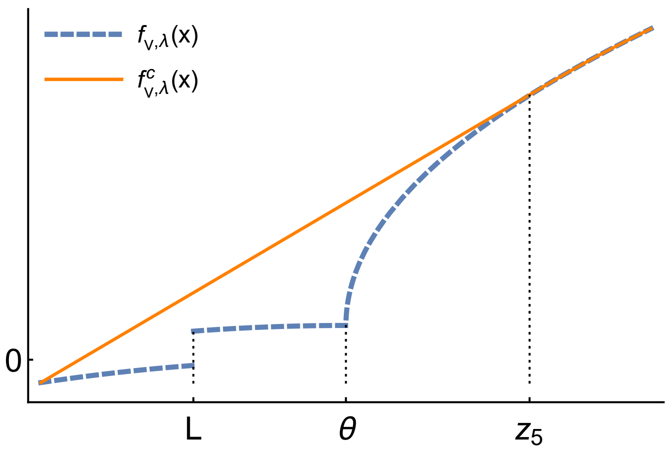

图 2.5　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y)=\begin{cases}I_1(y)+\theta & 0<y<U'(z_5-\theta);\\ 0 & U'(z_5-\theta)\leqslant y.\end{cases}\tag{2-65}$$

2. 若 $k_{\nu,\lambda}\leqslant \nu D'(\theta)$，则此时同样存在唯一 $z_3\in[0,L)$ 满足等式 (2-60)，此时考虑 $\nu D'(\theta-z_3)$ 与 $U'(z_4-\theta)$ 大小关系:
   (a) 若 $\nu D'(\theta-z_3)>U'(z_4-\theta)$，则此时示意图如图 2.6

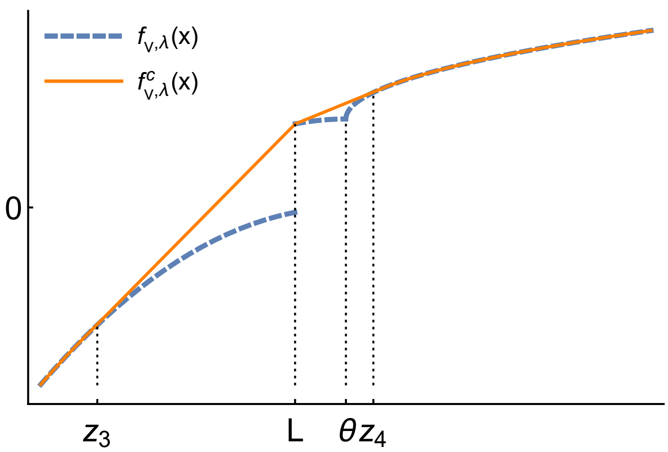

图 2.6　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y)=\begin{cases}I_1(y)+\theta & 0<y<U'(z_4-\theta);\\ L & U'(z_4-\theta)\leqslant y<\nu D'(\theta-z_3);\\ \theta-I_2(\frac{y}{\nu}) & \nu D'(\theta-z_3)\leqslant y<\nu D'(\theta);\\ 0 & \nu D'(\theta)\leqslant y.\end{cases}\tag{2-66}$$

   (b) 若 $\nu D'(\theta-z_3)\leqslant U'(z_4-\theta)$，则此时存在唯一 $z_6<L<\theta<z_7$ 满足

$$\nu D'(\theta-z_6)=U'(z_7-\theta)=\frac{U(z_7-\theta)+\lambda+\nu D(\theta-z_6)}{(z_7-\theta)+(\theta-z_6)}.\tag{2-67}$$

若 $z_6\leqslant 0$ 则此时化归为图 2.5以及解 (2-65) 的情形；若 $0<z_6<L$，此时示意图如图 2.7

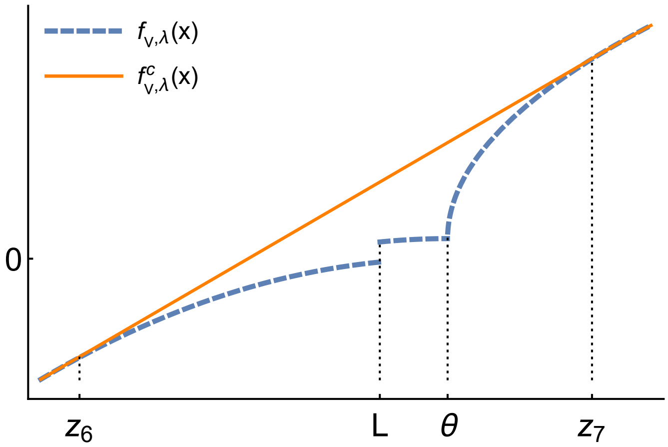

图 2.7　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(z_7 - \theta); \\ \theta - I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta - z_6) \leqslant y < vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta) \leqslant y. \end{cases} \tag{2-68}$$

$L = \theta$ 时　此时类似的，存在唯一 $z'_6 < \theta < z'_7$ 满足

$$vD'(\theta - z'_6) = U'(z'_7 - \theta) = \frac{U(z'_7 - \theta) + \lambda + vD(\theta - z'_6)}{(z'_7 - \theta) + (\theta - z'_6)}. \tag{2-69}$$

若 $z'_6 \leqslant 0$ 则此时化归为图 2.5以及解 (2-65) 的情形；若 $0 < z'_6 < L$，此时化归为图 2.7以及解 (2-68) 的情形。

$L > \theta$ 时　此时存在唯一 $z_8 \in [\theta, L)$ 满足

$$U'(z_8 - \theta) = \frac{U(L - \theta) + \lambda - U(z_8 - \theta)}{L - z_8} = \frac{f_v(L) + \lambda - f_v(z_8)}{L - z_8}. \tag{2-70}$$

此时仍考虑 $k_{v,\lambda}$ 与 $vD'(\theta)$ 的大小关系：

1. 若 $k_{v,\lambda} > vD'(\theta)$，此时考虑 $U'(z_8 - \theta), U'(L - \theta), k_{v,\lambda}$ 三者的关系：
   (a) 若 $U'(z_8 - \theta) > k_{v,\lambda} \geqslant U'(L - \theta)$，此时示意图如图 2.8

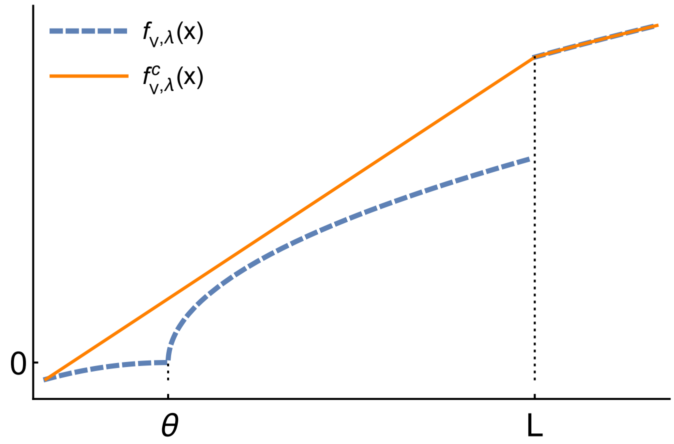

图 2.8　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y) = \begin{cases} I_1(y) + \theta & 0 < y < U'(L-\theta); \\ L & U'(L-\theta) \leqslant y < k_{v,\lambda}; \\ 0 & k_{v,\lambda} \leqslant y. \end{cases} \tag{2-71}$$

(b) 若 $k_{v,\lambda} < U'(L-\theta)$，则存在唯一 $z_9 > L$ 满足

$$U'(z_9-\theta) = \frac{U(z_9-\theta)+\lambda+vD(\theta)}{z_9-0} = \frac{f_v(z_9)+\lambda-f_v(0)}{z_9-0}. \tag{2-72}$$

此时示意图如图 2.9

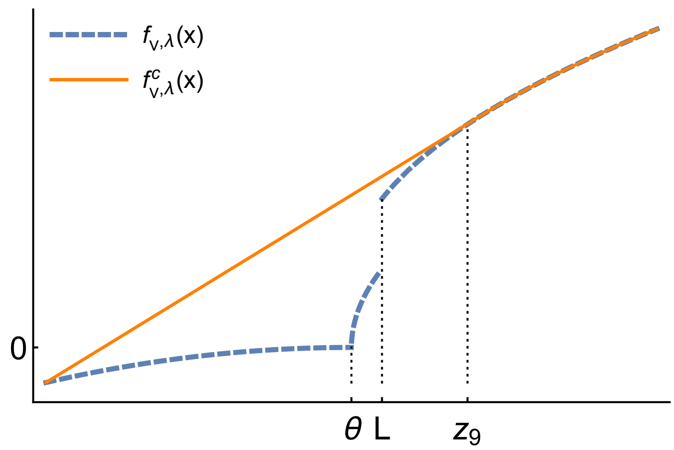

图 2.9　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y)=\begin{cases}I_1(y)+\theta & 0<y<U'(z_9-\theta);\\ 0 & U'(z_9-\theta)\leqslant y.\end{cases} \tag{2-73}$$

(c) 若 $k_{\nu,\lambda}\geqslant U'(z_8-\theta)$，则存在唯一 $z_{10}\in(\theta,z_8]$ 满足

$$U'(z_{10}-\theta)=\frac{U(z_{10}-\theta)+\nu D(\theta)}{z_{10}-0}=\frac{f_\nu(z_{10})-f_\nu(0)}{z_{10}-0}. \tag{2-74}$$

此时示意图如图 2.10

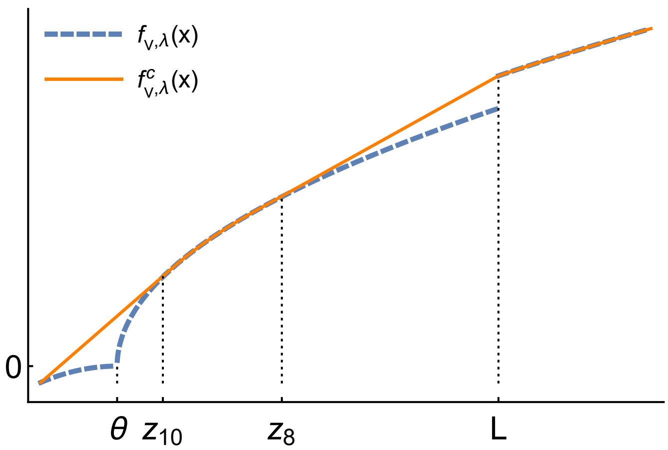

图 2.10　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y)=\begin{cases}I_1(y)+\theta & 0<y<U'(L-\theta);\\ L & U'(L-\theta)\leqslant y<U'(z_8-\theta);\\ I_1(y)+\theta & U'(z_8-\theta)\leqslant y<U'(z_{10}-\theta);\\ 0 & U'(z_{10}-\theta)\leqslant y.\end{cases} \tag{2-75}$$

2. 若 $k_{\nu,\lambda}\leqslant \nu D'(\theta)$，此时存在唯一 $z_{11}\in[0,\theta)$ 满足

$$\nu D'(\theta-z_{11})=\frac{U(L-\theta)+\lambda+\nu D(\theta-z_{11})}{L-z_{11}}. \tag{2-76}$$

此时考虑 $U'(z_8-\theta),U'(L-\theta),\nu D'(\theta-z_{11})$ 三者的关系：

(a) 若 $U'(z_8-\theta)>\nu D'(\theta-z_{11})\geqslant U'(L-\theta)$，此时示意图如图 2.11

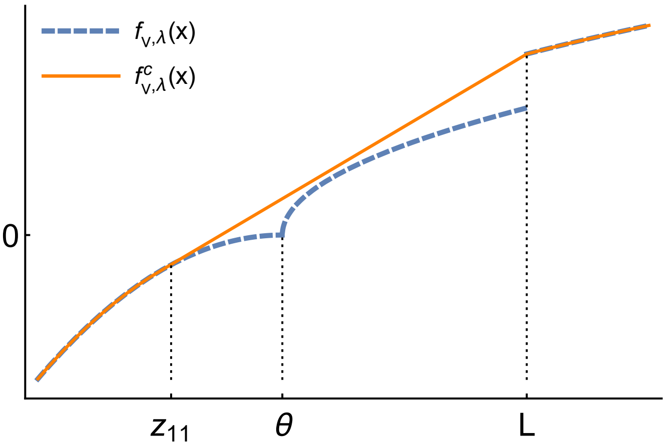

图 2.11　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{\nu,\lambda}(y)=\begin{cases} I_1(y)+\theta & 0<y<U'(L-\theta); \\ L & U'(L-\theta)\leqslant y<\nu D'(\theta-z_{11}); \\ \theta-I_2(\frac{y}{\nu}) & \nu D'(\theta-z_{11})\leqslant y<\nu D'(\theta); \\ 0 & \nu D'(\theta)\leqslant y. \end{cases} \tag{2-77}$$

(b) 若 $U'(z_8-\theta)<\nu D'(\theta-z_{11})$，此时必有 $z_2<z_8$，此时示意图如图 2.12

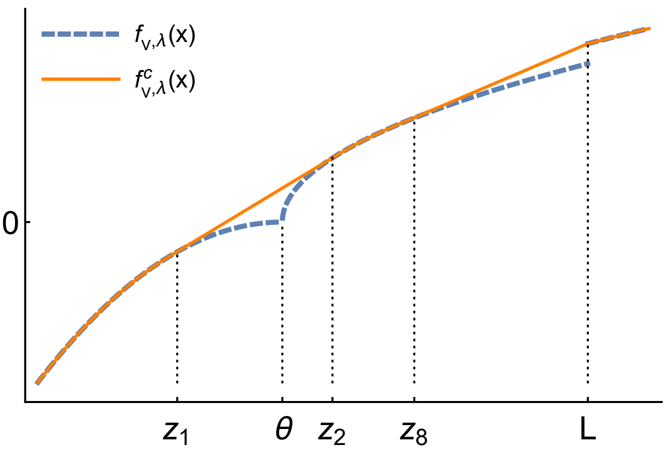

图 2.12　函数 $f_{\nu,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y)=\begin{cases} I_1(y)+\theta & 0<y<U'(L-\theta); \\ L & U'(L-\theta)\leqslant y<U'(z_8-\theta); \\ I_1(y)+\theta & U'(z_8-\theta)\leqslant y<U'(z_2-\theta); \\ \theta-I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta-z_1)\leqslant y<vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta)\leqslant y. \end{cases} \tag{2-78}$$

(c) 若 $U'(L-\theta)>vD'(\theta-z_{11})$，则此时存在唯一 $z_{12}<\theta<L<z_{13}$ 满足

$$vD'(\theta-z_{12})=U'(z_{13}-\theta)=\frac{U(z_{13}-\theta)+\lambda+vD(\theta-z_{12})}{(z_{13}-\theta)+(\theta-z_{12})}. \tag{2-79}$$

若 $z_{12}\leqslant 0$ 则此时化归为图 2.9以及解 (2-73) 的情形；若 $0<z_{12}<L$，此时示意图如图 2.13

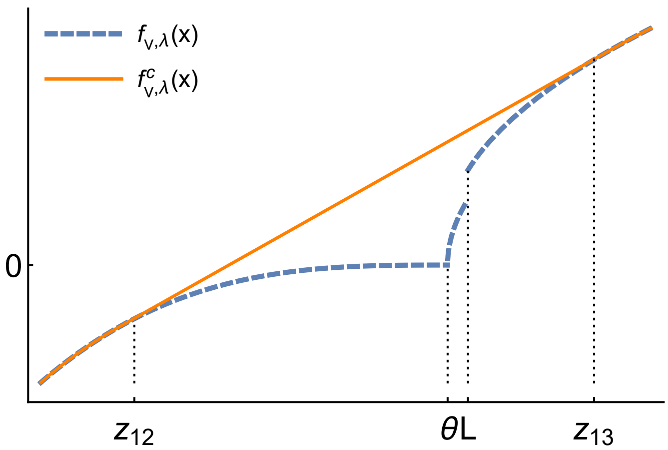

图 2.13　函数 $f_{v,\lambda}(x)$ 与其凹包函数示意图

此时有解为

$$x^*_{v,\lambda}(y)=\begin{cases} I_1(y)+\theta & 0<y<U'(z_{13}-\theta); \\ \theta-I_2(\frac{y}{v}) & vD'(\theta-z_{12})\leqslant y<vD'(\theta); \\ 0 & vD'(\theta)\leqslant y. \end{cases} \tag{2-80}$$

惩罚函数是凹函数时

此时优化问题 (2-45) 的目标函数为“S 型”效用函数，此时非随机的问题求解参见文章 [10]。

综上，我们求出非随机问题的解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$ 之后，发现它首先关于 y 是非增的，并且它关于变量 y 是几乎处处连续的。

2.3.8 最优乘子的存在性

与最优参数的证明 (2.3.4) 类似，我们定义函数

$$R_{\nu,\lambda}(\beta) := \mathbb{E}[H(T)Z_{\nu,\lambda,\beta}] \equiv \mathbb{E}[H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta H(T))] \tag{2-81}$$

首先由解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$ 关于 y 是非增的，并且有 $\lim_{y\searrow 0} x^*_{\nu,\lambda}(y) = \infty, \lim_{y\to\infty} x^*_{\nu,\lambda}(y) = 0$，于是有

$$R_{\nu,\lambda}(\beta) = \mathbb{E}[H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta H(T))] \leqslant \mathbb{E}\left\{H(T)\left[I_1(\beta H(T)) + \theta\right]\right\} < \infty \tag{2-82}$$

其中 $\mathbb{E}[H(T)I_1(\beta H(T))] < \infty$ 的证明需要用到假设 (H4) 报酬函数 U 是 Arrow-Pratt 相对风险规避型的并且满足渐进弹性条件。具体证明参见文章[8] 的推论 5.1。于是，由单调收敛定理知，$\lim_{\beta\to\infty} R_{\nu,\lambda}(\beta) = 0, \lim_{\beta\searrow 0} R_{\nu,\lambda}(\beta) = \infty$。

$R_{\nu,\lambda}(\beta)$ 关于 β 的连续性证明利用到有界收敛定理：$\forall\beta > 0$，设 $0 < \beta_n \to \beta$，则对任意给定的 $\epsilon > 0$，存在 N 充分大，使任意 $n > N$ 均有

$$0 \leqslant H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta H(T)) \leqslant H(T)\left[I_1((\beta-\epsilon)H(T)) + \theta\right] \tag{2-83}$$

又上界 $H(T)\left[I_1((\beta-\epsilon)H(T)) + \theta\right]$ 是可积的，于是由有界收敛定理知

$$\lim_{\beta_n\to\beta} R_{\nu,\lambda}(\beta_n) = \lim_{\beta_n\to\beta} \mathbb{E}[H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta_n H(T))] = \mathbb{E}\left[\lim_{\beta_n\to\beta} H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta_n H(T))\right] \tag{2-84}$$

由解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$ 关于变量 y 是几乎处处连续的，于是有

$$\mathbb{E}\left[\lim_{\beta_n\to\beta} H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta_n H(T))\right] = \mathbb{E}[H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta H(T))] = R_{\nu,\lambda}(\beta) \tag{2-85}$$

于是由式 (2-84) 和式 (2-85) 可得 $\lim_{\beta_n\to\beta} R_{\nu,\lambda}(\beta_n) = R_{\nu,\lambda}(\beta)$，也即得到 $R_{\nu,\lambda}(\beta)$ 关于 β 的连续性。

由 $R_{\nu,\lambda}(\beta)$ 关于 β 是连续的，且 $\lim_{\beta\to\infty} R_{\nu,\lambda}(\beta) = 0, \lim_{\beta\searrow 0} R_{\nu,\lambda}(\beta) = \infty$，于是易见存在 β^* 使 $\mathbb{E}[H(T)Z_{\nu,\lambda,\beta^*}] = R_{\nu,\lambda}(\beta^*) = \tilde{x}_0$。

综上，按照上述分析知该问题得解。

第 3 章　数值模拟分析

根据第2章分析，我们应按照以下思路求解原优化问题 (2-10)：

第一步：首先求解非随机的问题 (2-52) 得最优解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$。

第二步：对于非随机的问题 (2-52) 最优解 $x^*_{\nu,\lambda}(y)$，寻找乘子 β^* 使得 $\mathbb{E}[H(T)x^*_{\nu,\lambda}(\beta^* H(T))] = \tilde{x}_0$，此时 $Z_{\nu,\lambda} = Z_{\nu,\lambda,\beta^*} = x^*_{\nu,\lambda}(\beta^* H(T))$ 即为优化问题 (2-46) 的最优解;。

第三步：对优化问题 (2-46) 的最优解 $Z_{\nu,\lambda}$，取 λ^* 使解 Z_{ν,λ^*} 满足 (2-47) 和 (2-48)。即得线性化之后的优化问题 (2-45) 最优解 Z_{ν,λ^*}。

第四步：对优化问题 (2-45) 的最优解 $Z_\nu = Z_{\nu,\lambda^*}$，取 ν^* 使问题 (2-45) 的最优目标值为 0，此时对应的最优解 $Z^* = Z_{\nu^*}$ 即为问题 (2-18) 的最优解。

第五步：利用命题2.1中的公式 (2-25) 和公式 (2-27) 给出问题 (2-10) 的最优投资策略 $\pi^*(t)$。

3.1　数值分析

我们将对优化问题 (2-10) 中的参数选取一些具体的取值，按照上述求解步骤求出数值解并对其进行分析。

惩罚函数是凹函数时，优化问题 (2-45) 的目标函数为“S 型”效用函数，此时问题的数值求解分析同样参见文章 [10]。

以下考虑惩罚函数 D 是凸函数的情形，根据前文中的分析和假设，我们取报酬函数 U 和惩罚函数 D 均为幂函数：

$$U(x) := x^{\gamma_1}, \forall x \geqslant 0, \text{其中}\gamma_1 \in (0,1) \tag{3-1}$$

$$D(x) := Ax^{\gamma_2}, \forall x \geqslant 0, \text{其中}\gamma_2 > 1, A > 0 \tag{3-2}$$

此时有

$$I_1(y) = (U')^{-1}(y) = (\frac{y}{\gamma_1})^{\frac{1}{\gamma_1 - 1}} \tag{3-3}$$

$$I_2(y) = (D')^{-1}(y) = (\frac{y}{A\gamma_2})^{\frac{1}{\gamma_2 - 1}} \tag{3-4}$$

插图索引

表格索引

公式索引

参考文献

[1] Sharpe W F. Mutual fund performance[J]. The Journal of Business, 1966, 39(2):119-138.

[2] Keating C, Shadwick W F. A universal performance measure[J]. Journal of Performance Measurement, 2002, 6(3):59-84.

[3] Lin H, Saunders D, Weng C. Portfolio optimization with performance ratios[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2019, 22(5).

[4] Basak S. A general equilibrium model of portfolio insurance[J]. Review of Financial Studies, 1995, 8(4):1059-1090.

[5] Zhang A, Ewald C O. Optimal investment for a pension fund under inflation risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2010, 71:353-369.

[6] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991: 36.

[7] Jin H, Zhou X Y. Behavioral portfolio selection in continuous time[J]. Mathematical Finance, 2008, 18(3):385-426.

[8] Jin H, Zhou X Y, Xu Z Q. A convex stochastic optimization problem arising from portfolio selection[J]. Mathematical Finance, 2008, 18(1):171-183.

[9] Lin H, Saunders D, Weng C. Optimal investment strategies for participating contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017, 73:137-155.

[10] Dong Y, Zheng H. Optimal investment with s-shaped utility and trading and value at risk constraints: An application to defined contribution pension plan[J]. European Journal of Operational Research, 2020, 281:341-356.

[11] Bian B, Miao S, Zheng H. Smooth value functions for a class of nonsmooth utility maximization problems[J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2011, 2:727-747.

致　谢

衷心感谢导师 xxx 教授和物理系 xxx 副教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

在 xxxxx 进行九个月的合作研究期间，承蒙 xxx 教授热心指导与帮助，不胜感激。感谢 xx 实验室主任 xx 教授，以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持！本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

感谢 LaTeX 和 ThuThesis，帮我节省了不少时间。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：____________ 日　期：____________

附录 A　外文资料的调研阅读报告或书面翻译

Optimal investment with S-shaped utility and trading and Value at Risk constraints: An application to defined contribution pension plan 等文章的调研阅读报告

A.1 The investment problem for a DC pension fund

This part is mainly related to Yinghui Dong and Harry Zheng's article[10].

A.1.1 The financial market and the wealth process

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ be a filtered complete probability space with the filtration $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t | 0 \leqslant t \leqslant T\}$ being the natural filtration generated by an n -dimensional standard Brownian motion $W(t) = \left(W_1(t), \cdots, W_n(t)\right)^\top$, where $W_1(t), \cdots, W_n(t)$ are independent and satisfying the usual conditions. The pension fund starts at time 0 and the retirement time is T. Let the financial market consist of $n+1$ traded securities: one riskless savings account $S_0(t)$ and n risky assets $S_i(t), i = 1, \cdots, n$ The riskless savings account evolves as

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt \quad dS(t) = \text{diag}(S(t))(\mu dt + \sigma dW(t)) \tag{A-1}$$

where r is a riskless interest rate, $S(t) = \left(S_1(t), \cdots, S_n(t)\right)^\top$, $\text{diag}(S(t))$ is an $n \times n$ matrix with diagonal elements $S_i(t)$ and all other elements $0, \mu = \left(\mu_1, \cdots, \mu_n\right)^\top$ is a constant vector representing the stock growth rate with $\mu_i > r, i = 1, \cdots, n$, and $\sigma = \left(\sigma_{ij}\right)$ is an $n \times n$ nonsingular constant matrix representing the volatility and correlation information of $S(t)$. Let $c(t) > 0$ denote the aggregated amount of money contributed at time t of a cohort of fund participants. Then we have the equation

$$dX^\pi(t) = \left(rX^\pi(t) + \pi^\top(t)\sigma\xi\right)dt + \pi^\top(t)\sigma dW(t) + c(t)dt, t \geqslant 0 \tag{A-2}$$

with initial condition $X^\pi(0) = x_0$, where $\pi(t) = \left(\pi_1(t), \cdots, \ \pi_n(t)\right)^\top$ and $\pi_i(t)$ is the amount of wealth invested in the i th risky asset for $i = 1, \cdots, n, \xi = \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$ is the market price of risk vector and $\mathbf{1}$ is a vector with all components 1.

A.1.2 Statement of the optimization problem and its transformation

For an S-shaped utility function that satisfies certain given conditions

$$U(x)=\begin{cases}-\infty, & x<0\\ -U_2(\theta-x), & 0\leqslant x<\theta\\ U_1(x-\theta), & x\geqslant\theta\end{cases}\tag{A-3}$$

where U_1, U_2 are two strictly increasing, strictly concave, continuously differentiable, real-valued functions defined on $[0,\infty)$ satisfying the asymptotic elasticity condition.

Consider the following VaR constraint optimization problem

$$\begin{cases}\max_{\pi\in A}\mathbb{E}\left[U\left(X^{\pi}(T)\right)\right]\\ \text{s.t. } X^{\pi}(t)\text{ satisfies }(A-2)\\ \mathbb{P}\left(X^{\pi}(T)>L\right)>1-\varepsilon\end{cases}\tag{A-4}$$

where $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1, L$ is given constant numbers.

For the above-mentioned extreme value problem, the Lagrange multiplier method can be used to convert it into an unconstrained extreme value problem. That is, consider

$$\tilde{U}_{\lambda}(x)=U(x)+\lambda 1_{\{x\geqslant L\}}\tag{A-5}$$

Where $\lambda\geqslant 0$ is the Lagrange multiplier to be determined. It can be proven that for the following problems without VaR constraints

$$\begin{cases}\max_{\pi\in A}\mathbb{E}\left[\tilde{U}_{\lambda}\left(X^{\pi}(T)\right)\right]\\ \text{s.t. } X^{\pi}(t)\text{ satisfies }(A-2)\end{cases}\tag{A-6}$$

If a non-negative multiplier $\lambda^*\geqslant 0$ makes $X^{\pi^{*},\lambda^{*}}$ the optimal solution for the problem (A-6) under the corresponding optimal control π^*, $X^{\pi^{*},\lambda^{*}}$ is also the optimal solution for the problem (A-4).

For the problem (A-6), the objective function is not continuous or strictly concave. We consider using the method of concave duality to solve. First notice that a simple transformation of the wealth process is possible, that is, taking

$$\tilde{X}^{\pi}(t)=X^{\pi}(t)+C(t)\tag{A-7}$$

where $C(t)=\int_t^T c(s)e^{-r(s-t)}ds$ is the discounted value of the total contribution of the pension at the time of t to the time of T at the time of t.

Then the original equation is equivalent to

$$\begin{cases} d\tilde{X}^{\pi}(t) = \left(r\tilde{X}^{\pi}(t) + \pi^{\top}(t)\sigma\xi\right) dt + \pi^{\top}(t)\sigma dW(t) \\ \tilde{X}^{\pi}(0) = \tilde{x}_0 \geqslant 0 \end{cases} \tag{A-8}$$

where $\tilde{x}_0 = x_0 + C(0) = x_0 + \int_0^T c(s)e^{-rs}ds$ and $\tilde{X}^{\pi}(T) = X^{\pi}(T), \tilde{X}^{\pi}(t) \geqslant 0 \forall t \in [0, T]$. Then the problem (A-6) is equivalent to

$$\begin{cases} \max_{\pi\in A} \mathbb{E}\left[\tilde{U}_{\lambda}\left(\tilde{X}^{\pi}(T)\right)\right] \\ \text{s.t. } \tilde{X}^{\pi}(t) \text{ satisfies } (A-8) \end{cases} \tag{A-9}$$

It can be proved that the optimal solution function of this problem is equal to the optimal solution function of the concave problem.

$$u_{\lambda}(t, \tilde{x}) = \max_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\tilde{U}_{\lambda}\left(\tilde{X}^{\pi}(T)\right) | \tilde{X}^{\pi}(t) = \tilde{x}\right] \tag{A-10}$$

$$u_{\lambda}^{c}(t, \tilde{x}) = \max_{\pi\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\tilde{U}_{\lambda}^{c}\left(\tilde{X}^{\pi}(T)\right) | \tilde{X}^{\pi}(t) = \tilde{x}\right] \tag{A-11}$$

Then we have $u_{\lambda}(t, \tilde{x}) = u_{\lambda}^{c}(t, \tilde{x})$, where $\tilde{U}_{\lambda}^{c}(t)$ represents the concave hull function of $\tilde{U}_{\lambda}(t)$.

A.1.3 Solving the optimization problem

We have already transformed a non-concave and non-continuous optimization problem into a continuous concave function optimization problem (A-11). For the optimization of the continuous concave function mentioned above, since the dual function of the objective function is a concave function, we can consider the dual method:

Consider the dual control set as $\mathcal{A}_0$. Define the dual process for $\nu \in \mathcal{A}_0$:

$$dY^{\nu}(t) = Y^{\nu}(t)\left(-rdt - \left(\sigma^{-1}\nu(t) + \xi\right)^{\top} dW(t)\right), Y^{\nu}(0) = y_0 \tag{A-12}$$

Considering the dual minimum problem and dual objective function are

$$\min_{\nu\in\mathcal{A}_0} \mathbb{E}\left[V_{\lambda}^{c}\left(Y^{\nu}(T)\right)\right] \tag{A-13}$$

$$v_{\lambda}(t, y) = \min_{\nu\in\mathcal{A}_0} \mathbb{E}\left[V_{\lambda}^{c}\left(Y^{\nu}(T)\right) | Y^{\nu}(t) = y\right] \tag{A-14}$$

Where $V_\lambda(y) = \sup_{x\geqslant 0}\left\{\tilde{U}_\lambda(x) - xy\right\}, y > 0$ is the dual function of $\tilde{U}_\lambda(t)$, $V_\lambda^c(y) = \sup_{x\geqslant 0}\left\{\tilde{U}_\lambda^c(x) - xy\right\}, y > 0$ is the dual function of $\tilde{U}_\lambda^c(t)$. Then we get $V_\lambda^c(y) = V_\lambda(y)$ and the HJB function of the dual process is

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}(t,y) - ry\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}(t,y) + \frac{1}{2}y^2 \min_{v\in\tilde{K}} \left\|\xi + \sigma^{-1}v\right\|^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2}(t,y) = 0 \\ v_\lambda(T,y) = V_\lambda(y), y > 0, t < T \end{cases} \tag{A-15}$$

Consider v, which minimizes the quadratic convex function $f(v) = \left\|\xi + \sigma^{-1}v\right\|^2$, as $\hat{v}$. If $\hat{\xi} = \xi + \sigma^{-1}\hat{v} \neq 0$, the solution of the problem (A-15) is

$$v_\lambda(t,y) = \mathbb{E}\left[V_\lambda\left(Y^{\hat{v}}(T)\right)|Y^{\hat{v}}(t) = y\right] \tag{A-16}$$

Where $Y^{\hat{v}}(s) = y\frac{H^0(s)}{H^0(t)}, t \leqslant s \leqslant T$ and

$$H^{\hat{v}}(t) = \exp\left(-\left(r + \frac{\|\xi\|^2}{2}\right)t - \xi^\top W(t)\right) \tag{A-17}$$

Combined with[11], the relationship between the solution of the dual problem and the solution of the unconstrained optimization problem (A-9) can be obtained, and then the original unconstrained optimization problem (A-6).

Combined with the previous analysis, we only need to prove that there is a non-negative multiplier $\lambda^* \geqslant 0$ makes X^{π^*,λ^*} is the corresponding optimal control π^* The optimal solution to the problem (A-6).

In fact, according to Theorem (4.1) in [10], if $\hat{v}$ makes the quadratic convex function $f(v) = \left\|\xi + \sigma^{-1}v\right\|^2$ get its minimum $\hat{\xi} = \xi + \sigma^{-1}\hat{v} \neq 0$, $x_0 + C(0) > \mathbb{E}\left[LH^{\hat{v}}(T)1_{\left\{H^{\hat{v}}(T)<H^*\right\}}\right]$. Where H^* satisfies $\mathbb{P}\left(H^{\hat{v}}(T) > H^*\right) = \varepsilon$. Then there is a non-negative multiplier $\lambda^* \geqslant 0$ makes X^{π^*,λ^*} is the corresponding optimal control (A-6).

A.2 Portfolio optimization with performance ratios

This part is mainly related to Hongcan Lin and David Saunders and Chengguo Weng's article[3].

A.2.1 The financial market and the wealth process

Different from the above, here we consider the financial market and wealth process as follows: Assume that an agent, with initial wealth $x_0 > 0$, invests capital in a risk-free bond $\boldsymbol{B}$ and p risky assets with price processes

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ dS_t^{(i)} = S_t^{(i)} \left[\mu^{(i)} dt + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij} dW_t^{(j)}\right], \quad i = 1, \cdots, p \end{cases} \tag{A-18}$$

The meaning of various symbols here is similar to the above. Since the defined contribution is not considered here, we have the portfolio value process, denoted by X_t^π, evolves according to the following stochastic differential equation (SDE):

$$dX_t^\pi = \left[rX_t^\pi + \pi_t^\top(\mu - r\mathbf{1})\right] dt + \pi_t^\top \sigma dW_t, \quad t \geqslant 0 \tag{A-19}$$

A trading strategy $\pi := \left\{\pi_t, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ is called admissible with initial wealth $x_0 > 0$ if it belongs to the following set:

$$\mathcal{A}\left(x_0\right) := \left\{\pi \in \mathcal{S} : \pi_t \in \mathbb{R}^p, X_0^\pi = x_0 \text{ and } X_t^\pi \geqslant 0, \text{ a.s.}, \forall 0 \leqslant t \leqslant T\right\} \tag{A-20}$$

where $\mathcal{S}$ denotes the set of $\mathbb{F}$ -progressively measurable processes π such that $\int_0^T \left\|\pi_t\right\|^2 dt < \infty$ a.s.

Furthermore, we consider the market price of risk defined as

$$\zeta \equiv \left(\zeta_1, \cdots, \zeta_p\right)^\top := \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}) \tag{A-21}$$

and the state-price density process given by

$$\xi_t := \exp\left\{-\left(r + \frac{\|\zeta\|^2}{2}\right) t - \zeta^\top W_t\right\} \tag{A-22}$$

which is equivalent to

$$d\xi_t = \xi_t[-rdt - \zeta^\top dW_t], \quad \xi_0 = 1 \tag{A-23}$$

A.2.2 Statement of the optimization problem and its transformation

We then consider the performance measures of the form

$$R\left(X_T\right) = \frac{\mathbb{E}\left\{U\left[\left(X_T - L\right)_+\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{D\left[\left(L - X_T\right)_+\right]\right\}} \tag{A-24}$$

where $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ and $D : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ are two strictly increasing measurable functions. The numerator $\mathbb{E}\left\{U\left[\left(X_T - L\right)_+\right]\right\}$ measures the benefit from exceeding the benchmark wealth L, while the denominator $\mathbb{E}\left\{D\left[\left(L - X_T\right)_+\right]\right\}$ penalizes shortfalls. For this reason, we refer to U as the reward function and D as the penalty function. Then the optimization problem becomes

$$\begin{cases} \sup_{\pi\in\mathcal{A}(x_0)} \dfrac{\mathbb{E}\left\{U\left[\left(X_T^\pi - L\right)_+\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{D\left[\left(L - X_T^\pi\right)_+\right]\right\}} \\ X_T^\pi \text{ satisfies } (A-19) \end{cases} \tag{A-25}$$

Using the definition of ξ_T and the *Martingale Method*, we can equate the above question as

$$\begin{cases} \sup_{\pi\in\mathcal{A}(x_0)}, & \dfrac{\mathbb{E}\left\{U\left[\left(X_T^\pi - L\right)_+\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{D\left[\left(L - X_T^\pi\right)_+\right]\right\}} \\ \text{subject to,} & \mathbb{E}\left[\xi_T X_T^\pi\right] \leqslant x_0 \end{cases} \tag{A-26}$$

which can be transformed into

$$\begin{cases} \sup_{Z\in\mathcal{M}_+}, & \dfrac{\mathbb{E}\left\{U\left[(Z - L)_+\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{D\left[(L - Z)_+\right]\right\}} \\ \text{subject to,} & \mathbb{E}\left[\xi_T Z\right] \leqslant x_0 \end{cases} \tag{A-27}$$

where $\mathcal{M}_+$ denotes the set of non-negative $\mathcal{F}_T$ -measurable random variables. We denote the feasible set of the above problem by $\mathcal{C}\left(x_0\right)$:

$$\mathcal{C}\left(x_0\right) = \left\{Z \in \mathcal{M}_+ | \mathbb{E}\left[\xi_T Z\right] \leqslant x_0\right\} \tag{A-28}$$

In fact, for each optimal solution of question (A-27), we can construct an optimal trading strategy for the portfolio optimization problem (A-25) by the martingale representation theorem.

To make the problem dolvable, we furthermore assume that the reward function and the penalty function have the following properties.

(H1) U and D are strictly increasing and twice differentiable with $U(0) = 0$ and $D(0) = 0$.

(H2) The reward function U satisfies the Inada condition, i.e.

$$\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0 \tag{A-29}$$

(H3) The reward function U is strictly concave, with $U''(z) < 0$ for all $z \in (0, \infty)$

(H4) $\liminf_{x\to\infty}\left(-\frac{xU''(x)}{U'(x)}\right) > 0$

A.2.3 Solving the optimization problem

since the optimal payoff problem (A-27) involves a non-convex objective function, it is difficult to solve directly. In order to reformulate it into a tractable problem, we set up the following family of linearized problems parameterized by $\lambda \geqslant 0$:

$$v\left(\lambda; x_0\right) = \sup_{Z\in\mathcal{C}(x_0)} \mathbb{E}\left\{U\left[(Z-L)_+\right]\right\} - \lambda\mathbb{E}\left\{D\left[(L-Z)_+\right]\right\} \tag{A-30}$$

The reason we consider the linearized problem (A-30) is because problem (A-30) and problem (A-27) have the following connection:

Assume $x_0 < e^{-rT}L$. For each $\lambda \geqslant 0$, let Z_λ^* be a solution to problem (A-30), and suppose there exists a constant $\lambda^* \geqslant 0$ such that

$$\lambda^* = \frac{\mathbb{E}\left\{U\left[\left(Z_{\lambda^*}^* - L\right)_+\right]\right\}}{\mathbb{E}\left\{D\left[\left(L - Z_{\lambda^*}^*\right)+\right]\right\}} \tag{A-31}$$

Then $Z^* := Z_{\lambda^*}^*$ solves problem (A-27), and λ^* is the optimal value.

So we just need to solve the problem (A-30) and prove the existence of λ^*.

Noticed that the formula (A-31) is equivalent to $v\left(\lambda^*; x_0\right) = 0$. While suppose that $x_0 < e^{-rT}L$ and assumptions (H1)–(H4) hold. We can also prove that:

(a) $0 < v(0; x_0) < \infty$.

(b) v is non-increasing in λ.

(c) $v\left(\lambda; x_0\right)$ is convex in λ for each fixed $x_0 > 0$.

(d) $v\left(\lambda; x_0\right)$ is Lipschitz continuous in λ.

(e) $\lim_{\lambda\to\infty} v\left(\lambda; x_0\right) = -\infty$.

Then it's easy to see the existence of λ^* satisfying (A-27).

We then use the Lagrangian duality method to solve the problem (A-30), that is, to consider the following optimization problems with multipliers β, for each $\lambda \geqslant 0$:

$$\sup_{Z\in\mathcal{M}_+} \mathbb{E}\left\{h_\lambda(Z) - \beta\xi_T Z\right\}, \quad \beta > 0 \tag{A-32}$$

where

$$h_\lambda(x) := U\left[(x-L)_+\right] - \lambda D\left[(L-x)_+\right], \quad x \in \mathbb{R} \tag{A-33}$$

We solve the above problem by resorting to a pointwise optimization procedure and consider the following problem indexed $\lambda \geqslant 0$ and $y > 0$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left\{h_\lambda(x) - yx\right\} \tag{A-34}$$

By the following theorem we can solve the problem (A-30):

(a) Let $x_\lambda^*(y)$ be a Borel measurable function such that $x_\lambda^*(y)$ is an optimal solution to problem (A-34) for each $y > 0$ and $\lambda \geqslant 0$. Then, $Z_{\lambda,\beta}^* := x_\lambda^*\left(\beta\xi_T\right)$ solves problem (A-32).

(b) Assume that, given $\lambda \geqslant 0$, there exists a constant $\beta^* > 0$ such that $Z_{\lambda,\beta}^* \in \mathcal{M}_+$ solves problem (A-32) for $\beta = \beta^*$ and satisfies $\mathbb{E}\left[\xi_T Z_{\lambda,\beta^*}^*\right] = x_0$. Then, $Z_\lambda^* := Z_{\lambda,\beta}^*$. solves problem (A-30).

For the pointwise optimization problem (A-34), we will employ the concavification method. That is, to consider the concavified version of problem (A-34):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left\{h_\lambda^c(x) - yx\right\} \tag{A-35}$$

By [9], we have the following property: given $\lambda \geqslant 0$ and $y > 0$, if $x_\lambda^*(y)$ is a solution to problem (A-35) and $h_\lambda^c\left(x_\lambda^*(y)\right) = h_\lambda\left(x_\lambda^*(y)\right)$, then $x_\lambda^*(y)$ solves problem (A-34).

Finally, we just need to solve the problem (A-35) which is much easier than the primal problem (A-25).

A.3 Numerical solution and sensitivity analysis

Last but not least, we should also give some specific examples and perform numerical solutions and sensitivity analysis on them. In the above examples, the author has selected the corresponding concave functions as power functions and performed numerical solutions and sensitivity analysis on them. This implies that we can choose similar functions for analysis in our future problem solving.

在学期间参加课题的研究成果

个人简历

xxxx 年 xx 月 xx 日出生于 xx 省 xx 县。

xxxx 年 9 月考入 xx 大学 xx 系 xx 专业，xxxx 年 7 月本科毕业并获得 xx 学士学位。

xxxx 年 9 月免试进入 xx 大学 xx 系攻读 xx 学位至今。

综合论文训练记录表

学生姓名		学号		班级	
论文题目					
主要内容以及进度安排	指导教师签字： 考核组组长签字： 年 月 日				
中期考核意见	考核组组长签字： 年 月 日				

指导教师评语	指导教师签字：____________ 年　　月　　日
评阅教师评语	评阅教师签字：____________ 年　　月　　日
答辩小组评语	答辩小组组长签字：____________ 年　　月　　日

总成绩：____________

教学负责人签字：____________

年　　月　　日