一维运动问题的
一般分析

方程在 $E-V<0$ 的区域**和**

$E-V>0$ 的区域解的特征是完全不同的

$E-V>0$ 的区域称为"经典允许区"

$E-V<0$ 的区 域称为"经典禁戒区"

一维定态Schrödinger方程是

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-U(x)\right]\psi(x)=0.$$

→ 易见 $E-U>0$ 时 解为三角函数

它的解有如下的规律：

(1) Wronskian定理：

若 $\psi_{1,2}(x)$ 都是一维定态Schrodinger方程（能量相同）的解，

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_1' & \psi_2'\end{vmatrix}\equiv\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2=c\quad,\ \text{常数}$$

$0=\psi_1\psi_2''-\psi_2\psi_1''$

$=(\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2)'$

其中 $\psi'\equiv\dfrac{d\psi}{dx}$

当 $c=0$ 时

$\Rightarrow \dfrac{\psi_1'}{\psi_1}=\dfrac{\psi_2'}{\psi_2} \Rightarrow \ln\psi_1-\ln\psi_2$ 为常数

$\Rightarrow \psi_1=\tilde{c}\,\psi_2$. 线性相关代表同一个态

（2）共轭定理：

若 $$\psi(x)$$

是定态Schrödinger方程的解，则

$$\psi^*(x)$$

也是该方程的解（且能量相同）

（3）反射定理：

设势能函数 $$U(x)$$

是关于原点对称的，即它满足

$$U(x)=U(-x)$$

那么若 $\psi(x)$

是Schrodinger方程的解，则

$\psi(-x)$ 也是该方程的解（且能量相同）。

一维定态的分类：束缚态与非束缚态

定义：如果 $\psi(x)\xrightarrow{|x|\to\infty}0$

从而粒子在无穷远处出现的几率为零，那么这样的量子状态就称为束缚态，否则

$$x \to +\infty, \quad 或 \quad x \to -\infty, \quad 或 \quad x \to \pm\infty$$

$$\psi(x) \neq 0$$

称为**非束缚态**，或称**散射态**

粒子处于束缚态还是非束缚态的判据：

假设 $U(x)$ 在 $x \to \pm\infty$ 时有确定的极限，那么当

$$E < U(+\infty, -\infty)$$

时粒子处于束缚态，而在

$$E > U(+\infty) \quad E > U(-\infty)$$ 或二者兼有

时粒子处于非束缚态

束缚态和非束缚态有重要的物理区别

一维束缚态的一般性质

定义：如果对一个给定的能量E，只有一个线性独立的波函数存在，则称该能级是**非简并**的，否则称它是**简并**的，其线性独立的波函数的个数称为它的简并度

不简并定理：**一维束缚态必是非简并态**

证明：　假设

$$\psi_1(x) \quad \psi_2(x)$$

是一维定态Schrödinger方程在同一能量下的任意两个解，并且都是束缚态，那么首先根据**Wronskian定理**，

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} = c$$

c与x无关，因此可以在X轴的任意一点上计算它的值。

再根据束缚态的定义，

$$\psi(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$$

可以在 $|x|\to\infty$ 处计算Δ,

$$\Delta = c = 0$$

所以 $\psi_1(x)$ $\psi_2(x)$ 是线性相关的，即

$$\psi_1(x) = A\psi_2(x) \qquad \text{（A是常数）}$$

而这就表示

$$\psi_1(x) \quad \psi_2(x)$$

代表相同的量子状态，所以它是非简并态

注意:这个定理的两个前提“**一维**”和“**束缚态**”是缺一不可的

波函数是复函数，可以写成下面的形式：

$$\psi(x)=\rho(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$$ $= \rho(x)\cos\theta(x) + i\rho(x)\sin\theta(x)$

$\rho(x)$ 称为波函数的模

$\theta(x)$ 称为波函数的相位

首先有 $\rho\cos\theta(x)$ 与 $\rho\sin\theta(x)$ 均为……

推论1：一维束缚态波函数的相位必是常数

而由非简并

$\Rightarrow$ $\cos\theta(x)$ 与 $\sin\theta(x)$ 线性相关

$\Rightarrow$ $\theta(x)$ 为常数

定义：如果波函数

$$\psi(x)$$

满足 $$\psi(-x)=\pm\psi(x),$$

则称 $$\psi(x)$$

有正的（当号成立时）或负的（当号成立时）宇称

偶函数 奇函数 parity

宇称是量子态的重要性质（如果量子态有确定的宇称的话），它具有“纯量子力学”的特征，在经典力学中没有对应物(尽管在经典物理中也可以讨论系统对反射的对称性，但是在经典物理中没有波函数的概念，更没有波函数的相位)

李政道和杨振宁发现在弱相互作用中宇称不守恒（1956）

推论2（宇称定理）：如果 $U(-x)=U(x)$

由线性性 $\psi(x)=A\psi(-x)=A^2\psi(x) \Rightarrow A=\pm 1$

则一维束缚态波函数必有确定的宇称

如何证明？

束缚态（不只是一维束缚态）还有一个更重要的特征：

它的能级是不连续地（离散地）变化的，即仅仅当取某些离散的数值时，定态Schrödinger方程才有符合单值、有限、连续条件的解。这就是通常意义的“**量子化**”