金融商品設計與評價
選擇權 III

壹、 (續)選擇權

五、選擇權價值間的關係

套利機會指的是在同一個時間點，在不同的場所同樣的標的物(物品)，卻有不同的價格，有價差的存在，便存在套利機會，比如便利商店跟電商。在選擇權方面可以透過選擇權之評價理論取尋找套利機會。

（一）選擇權評價理論

假設市場完美、存在無風險利率、標的物在選擇權期間不產生現金流、為歐式選擇權。

（二）Put-Call Parity：C-S = P-Ke^{-rT}

只要能評估出買權或賣權的其一價格，另一者便可推得。

（三）Put、Call 與 K 間的關係

	Call	Put
一階	C''(K)>-1	P''(K)<1
二階	-1<C''(K)<0	P''(K)<0
Graph	Convex	Convex

六、選擇權之評價方法

隨機變數為一個時點，而隨機過程為一個時段，對數常態分配為隨機變數，幾何布朗運動為隨機過程，後者的假設較前者強大。

（一） BS

1. Index Option：q $\neq$ 0 (幾何布朗)

2. Currency Option：q = r^f(假設幾何布朗)

3. Futures Option：q = r(幾何布朗)

4. Greek Letters

七、Exotic Option

（一）二元

現金或零報酬買權 (Cash-or-nothing Call)

$$CNCall_T = \begin{cases} \underbrace{K}_{\text{報酬}}, & \text{if } S_T > \underbrace{X}_{\text{判斷條件}} \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$\begin{aligned} CNCall_0 &= e^{-rT}\hat{E}_0[K \times I_{\{S_T>K\}}] \\ &= e^{-rT} K \times Prob(S_T>K) \\ &= e^{-rT} \times K \times N(d_2) \end{aligned}$$

現金或零報酬賣權 (Cash-or-nothing Put)

$$CNPut_T = \begin{cases} K, & \text{if } S_T < X \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$\begin{aligned} CNPut_0 &= e^{-rT}\hat{E}_0[K \times I_{\{S_T<X\}}] \\ &= e^{-rT} \times K \times N(-d_2) \end{aligned}$$

資產或零報酬買權 (Asset-or-nothing Call)

$$\begin{aligned} ANCall &= e^{-rT}\hat{E}_0[S_T \times I_{\{S_T>X\}}] \\ &= S_0 \times e^{-qT} \times N(d_1) \end{aligned}$$

資產或零報酬賣權 (Asset-or-nothing Put)

$$\begin{aligned} ANPut_0 &= e^{-rT}\hat{E}_0[S_0 \times I_{\{S_T<X\}}] \\ &= S_0 \times e^{-qT} \times N(-d_1) \end{aligned}$$

（二） 路徑相依

① 障礙 (Barrier Option)

- knock-in 進
- knock-out 失效

- up
- down

- Call
- Put

- 連續
- 離散

② 亞式 平均價格

- 用平均的標的資產價格 S_{ave} 取代到期日的標的資產價格. —(a.)
- 用一段時間內的 S_{ave} 作為執行價，取代原先履約價 X —(b.)

(a.) $c = \max(S_{ave} - X, 0)$ e.g. 台指 Option 以到期日收盤前 30 min 的平均價取代收盤價

→ 怕操控

(b) $C = \max(S_T - S_{ave}, 0)$

③ 回顧 (Lookback Option)

(a) 固定履約價格

$C = \max(S_{max} - X, 0)$

$P = \max(X - S_{min}, 0)$

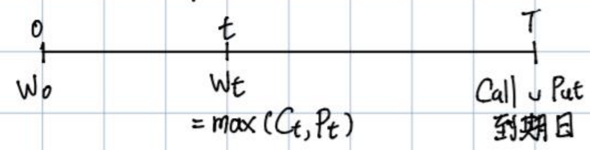
(b) 浮動

$C = \max(S_T - S_{min}, 0)$

$P = \max(S_{max} - S_T, 0)$

（三） Chooser

選擇者 (Chooser Option)



$$W_t = \max(C_t, P_t)$$

$$= \max\left[c(X, T-t),\ c(X, T-t) - S_t e^{-q(T-t)} + Xe^{-r(T-t)}\right]$$

$$= c(X, T-t) + e^{-q(T-t)} \times \max\left[Xe^{-(r-q)(T-t)} - S_t,\ 0\right]$$

t点到期 Put.

$$= c(X, T-t) + e^{-q(T-t)} \times p\left(Xe^{-(r-q)(T-t)},\ 0\right)$$

$$W_0 = c(X, T) + e^{-q(T-t)} \times p\left(Xe^{-(r-q)(T-t)},\ t\right)$$

$$= S_0 e^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) + Xe^{-rT} N(-d_2') - S_0 e^{-qT} N(-d_1')$$

$$d_1' = \frac{\ln \frac{S_0}{X} + (r-q)T + \frac{\sigma^2}{2} t}{\sigma\sqrt{t}}$$

問題:

1. P"(K) 會 > -1 嗎 ? 跟 C 情況相同？
2. 實際跑出來的 implied volatility 為右偏曲線有甚麼含意?