MAC0317/5920 - Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Primeira lista de exercícios

1 Espaços vetoriais

Exercício 1.11 (1.12e2). Verifique que o conjunto $L^2(\mathbb{N})$ do Exemplo 1.5 com as respectivas operações é um espaço vetorial. Explique também por que $L^2(\mathbb{N})$ é um sub-espaço de $L^\infty(\mathbb{N})$. *Dica: use a desigualdade* $(x-y)^2 \geq 0$ *para provar que* $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2, \ \forall x, y$.

Solução: para mostrar que $L^2(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial mostraremos as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\mathbb{N}) \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in L^2(\mathbb{N})$

   Note que como $(x-y)^2 \geq 0$:

   $(x+y)^2 \leq (x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$

   e portanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k)^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2u_k^2 + 2v_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} 2u_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} 2v_k^2 < \infty$$

2. $\forall \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{N})$ e $a \in L^2(\mathbb{N}) \implies a\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{N})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (au_k)^2 = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 < \infty$$

   pois $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{N})$.

3. Para todo escalar $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^2(\mathbb{N})$ são satisfeitas as propriedades:

   a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_0, u_1, \dots) + (v_0, v_1, \dots) \\ &= (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots) \\ &= (v_0, v_1, \dots) + (u_0, u_1, \dots) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= [(u_0,u_1,\dots)+(v_0,v_1,\dots)]+(w_0,w_1,\dots)\\
&= (u_0+v_0,u_1+v_1,\dots)+(w_0,w_1,\dots)\\
&= (u_0+v_0+w_0,u_1+v_1+w_1,\dots)\\
&= (u_0,u_1,\dots)+(v_0+w_0,v_1+w_1,\dots)\\
&= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})
\end{aligned}$$

c) Existe o vetor $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Seja $\mathbf{0}=(0,0,\dots)$ temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(0)^2 = 0 < \infty$$

logo $\mathbf{0} \in L^2(\mathbb{N})$, e

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{0} &= (u_0,u_1,\dots)+(0,0,\dots)\\
&= (u_0+0,u_1+0,\dots)\\
&= (u_0,u_1,\dots)=\mathbf{u}\\
&= (0+u_0,0+u_1)\\
&= (0,0,\dots)+(u_0,u_1,\dots)=\mathbf{0}+\mathbf{u}
\end{aligned}$$

d) $\forall\mathbf{u}\in L^2(\mathbb{N})\ \exists\mathbf{w}\in L^2(\mathbb{N})$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$

Seja $\mathbf{u}$ um elemento qualquer de $L^2(\mathbb{N})$ $\mathbf{w_u}=(-u_0,-u_1,\dots)$ temos que $\sum_{k=0}^{\infty}(-u_k)^2=\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2<\infty$, pois $\mathbf{u}\in L^2(\mathbb{N})$, e

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{w_u} &= (u_0,u_1,\dots)+(-u_0,-u_1,\dots)\\
&= (u_0-u_0,u_1-u_1,\dots)\\
&= (0,0,\dots)=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

e) $(ab)\mathbf{u}=a(b\mathbf{u})$

$$\begin{aligned}
[ab]\mathbf{u} &= [ab](u_0,u_1,\dots)\\
&= ([ab]u_0,[ab]u_1,\dots)\\
&= (a[bu_0],a[bu_1],\dots)\\
&= a([bu_0],[bu_1],\dots)\\
&= a[b\mathbf{u}]
\end{aligned}$$

f) $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}
[a+b]\mathbf{u} &= [a+b](u_0, u_1, \dots) \\
&= ([a+b]u_0, [a+b]u_1, \dots)] \\
&= (au_0 + bu_0, au_1 + bu_1, \dots) \\
&= (au_0, au_1, \dots) + (bu_0, bu_1, \dots) \\
&= a\mathbf{u} + b\mathbf{u}
\end{aligned}$$

g) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= a[(u_0, u_1, \dots) + (v_0, v_1, \dots)] \\
&= a[(u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots)] \\
&= (a[u_0 + v_0], a[u_1 + v_1], \dots) \\
&= (au_0 + av_0, au_1 + av_1], \dots) \\
&= (au_0, au_1, \dots) + (av_0, av_1, \dots) \\
&= a\mathbf{u} + a\mathbf{v}
\end{aligned}$$

h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$1\mathbf{u} = (1.u_0, 1u_1, \dots) = (u_0, u_1, \dots) = \mathbf{u}$$

Para mostrar que $L^2(\mathbb{N})$ é sub-espaço vetorial de $L^\infty(\mathbb{N})$, como já demonstramos que $L^2(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial, basta mostrarmos que para todo $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{N}) \implies \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{N})$. Faremos isso demonstrando a contra-positiva: $\mathbf{u} \notin L^\infty(\mathbb{N}) \implies \mathbf{u} \notin L^2(\mathbb{N})$

Seja $\mathbf{u} \notin L^\infty(\mathbb{N})$ logo para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_{k_0}| > M$. Assim:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 = \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} |u_k|^2 + |u_{k_0}|^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |u_k|^2 \right) > |u_{k_0}|^2 > |u_{k_0}| > M$$

para todo $M \in \mathbb{R}$, e portanto $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 \not< \infty$, logo $\mathbf{u} \notin L^2(\mathbb{N})$

Exercício 1.12 (1.13e2). o objetivo deste exercício é provar as afirmações na Proposição 1.4.1 para um espaço vetorial abstrato.

(a) Mostre que o vetor $\mathbf{0}$ é único. Para fazê-lo, suponha que existam dois vetores $\mathbf{0}_a$ e $\mathbf{0}_b$, os quais realizam a função do vetor nulo. Mostre que $\mathbf{0}_a = \mathbf{0}_b$. *Dica: considere $\mathbf{0}_a + \mathbf{0}_b$.*

Solução: Sejam $\mathbf{0}_a$ e $\mathbf{0}_b$ dois vetores nulos para adição, temos que:

$$\mathbf{0}_a + \mathbf{0}_b = \mathbf{0}_a \qquad \text{pois } \mathbf{0}_b \text{ é elemento nulo} \qquad (1)$$

$$\mathbf{0}_b + \mathbf{0}_a = \mathbf{0}_b \qquad \text{pois } \mathbf{0}_a \text{ é elemento nulo} \qquad (2)$$

logo, de (1) e (2) temos que:

$$\mathbf{0}_a = \mathbf{0}_a + \mathbf{0}_b = \mathbf{0}_b \implies \mathbf{0}_a = \mathbf{0}_b$$

(b) Abaixo está uma demostração de $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em todo espaço vetorial. Nesta demonstração $-\mathbf{u}$ representa o inverso aditivo de $\mathbf{u}$, logo $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Quais das propriedades listadas na Proposição 1.4.1 justificam cada passo?

Solução:

$$
\begin{array}{rll}
(1+0)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + 0\mathbf{u} & & \text{(f) } (a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} \\
1\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{u} & & \text{(h) } 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \\
\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{u} & & \text{(h) } 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \\
\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) + 0\mathbf{u} & & \text{(d) } \forall \mathbf{v} \exists \mathbf{w} | \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ (a)} \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\
 & & \text{e (b) } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\mathbf{u} & & \text{(c) } \exists \mathbf{0} | \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \\
\mathbf{0} = 0\mathbf{u}. & &
\end{array}
$$

(c) Mostre que se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$ (Isto mostra que o inverso aditivo de $\mathbf{u}$ é $(-1)\mathbf{u}$). **Solução:**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0 &\implies (u_0, u_1, \dots) + (v_0, v_1, \dots) = (0, 0, \dots) \\
&\implies (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots) = (0, 0, \dots) \\
&\implies (v_0, v_1, \dots) = (-u_0, -u_1, \dots) \\
&\implies (v_0, v_1, \dots) = ((-1).u_0, (-1).u_1, \dots) \\
&\implies (v_0, v_1, \dots) = (-1)(u_0, u_1, \dots) \\
&\implies \mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

2 Formas de ondas básicas analógicas e discretas

Exercício 1.17 (1.18e2). Mostre que é possível fatorar a forma de onda bidimensional básica $\mathcal{E}_{m,n,k,l}$ como:

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T,$$

onde $\mathbf{E}_{m,k}$ e $\mathbf{E}_{n,l}$ são as formas de onda unidimensionais discretas básicas definidas na Equação 1.22, como vetores coluna (lembre-se que o sobrescrito T denota a operação de transposição de vetores e matrizes).

Solução Temos que se se $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^m$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^n$ então $A = \mathbf{B}\mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $A(i,j) = \mathbf{B}(i).\mathbf{C}(j)$ onde $A(i,j)$ é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de A.

Assim temos que:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T](a,b) &= \mathbf{E}_{m,k}(a).\mathbf{E}_{n,l}^T(b) \\
&= e^{2\pi i k a/m}.e^{2\pi i l b/n} \\
&= e^{2\pi i k a/m + 2\pi i l b/n} \\
&= e^{2\pi i (ka/m + lb/n)} \\
&= \mathcal{E}_{m,n,k,l}(a,b)
\end{aligned}
$$

e portanto $\mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \mathcal{E}_{m,n,k,l}$.

Exercício 1.18 (1.19e2). Considere a forma de onda exponencial

$$f(x, y) = e^{2\pi i(px+qy)}$$

como descrita na Seção 1.5.2 (p e q não precisam ser inteiros). A Figura 1.7 nesta seção indica que a forma de onda tem uma "direção" e um "comprimento de onda" naturais. O objetivo deste problema é compreender em que sentido isso é verdade, e em quanto esses valores dependem de p e q.

Defina $\mathbf{v} = (p, q)$, assim $\mathbf{v}$ é um vetor bidimensional. Considere a reta L que passa por um ponto arbitrário $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ na direção de um vetor unitário $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ (logo, $\|\mathbf{u}\| = 1$). A reta L pode ser parametrizada em função de $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{u}$ como

$$x(t) = x_0 + tu_1, \quad y(t) = y_0 + tu_2$$

(a) mostre que a função $g(t) = f(x(t), y(t))$, com $x(t)$ e $y(t)$ como acima (ou seja, f avaliada sobre a reta L) é dada por

$$g(t) = Ae^{2\pi i\|\mathbf{v}\|cos(\theta)t}$$

onde A é um número complexo que não depende de t, e θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. *Dica: Use a Equação 1.30.*

Solução: Note que $(x(t), y(t)) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$, assim:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x(t), y(t)) \\ &= e^{2\pi i(px(t)+qy(t))} \\ &= e^{2\pi i\langle(p,q),(x(t),y(t))\rangle} \\ &= e^{2\pi i\langle\mathbf{v},\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}\rangle} \\ &= e^{2\pi i(\langle\mathbf{v},\mathbf{x}_0\rangle+\langle\mathbf{v},t\mathbf{u}\rangle)} \\ &= e^{2\pi i\langle\mathbf{v},\mathbf{x}_0\rangle}.e^{2\pi i\langle\mathbf{v},t\mathbf{u}\rangle} && \text{, seja } A = e^{2\pi i\langle\mathbf{v},\mathbf{x}_0\rangle} \\ &= Ae^{2\pi i\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle t} \\ &= Ae^{2\pi i\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|cos(\theta)t} \\ &= Ae^{2\pi i\|\mathbf{v}\|cos(\theta)t} \end{aligned}$$

(b) Mostre que se L é ortogonal a $\mathbf{v}$ então a função g (e também f) se mantém constante em L.

Solução: Temos que se L é ortogonal a $\mathbf{v}$ então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e portanto $\theta = \pi/2$. Assim

$$g(t) = Ae^{2\pi i\|\mathbf{v}\|cos(\theta)t} = Ae^{2\pi i\|\mathbf{v}\|cos(\pi/2)t} = Ae^0 = A$$

(c) Encontre a frequência (oscilações por unidade de distância percorrida) de g como uma função de t, em termos de p, q e θ.

Solução: Temos que a frequência angular de de $g(t)$ é dada por $2\pi \|\mathbf{v}\| \, cos(\theta)$ e assim:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{2\pi \|\mathbf{v}\| \, cos(\theta)}{2\pi} \\ &= \|\mathbf{v}\| \, cos(\theta) \\ &= \sqrt{p^2+q^2} cos(\theta) \end{aligned}$$

(d) Encontre o valor de θ que maximiza a frequência em que $g(t)$ oscila. Este θ dita a direção em que que deve-se mover, relativo a $\mathbf{v}$, para que f oscile o mais rápido possível. Como este valor de θ se compara com o valor de θ na questão (b)? Qual é a maior frequência de oscilação em termos de p e q?

Solução: Os valores de θ que maximizam a frequência em que g oscila são os valores em que $cos(\theta)$ atinge seu máximo, ou seja, são os valores da forma $2\pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$ e portanto a $f_{\max} = \sqrt{p^2+q^2} = \|\mathbf{v}\|$. Note que os valores de θ que maximizam a frequência de g são os que fazem $\mathbf{u}$ (e consequentemente L) paralelos $\mathbf{v}$.

(e) Encontre a distância "pico-a-pico", ou o comprimento de onda, da forma de onda $f(x, y)$, em termos de p e q.

Solução: Temos que o comprimento de onda de $f(x, y)$ corresponde a um período da forma de onda $g(t)$ como definido no item (d). Assim:

$$\lambda = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

3 *aliasing*

Exercício 1.20 (1.21e2). Para uma forma de onda unidimensional pura de N amostras, mostre a relação de *aliasing*

$$\mathbf{E}_{N-k} = \overline{\mathbf{E}_k}$$

Solução: temos que para $0 \leq m \leq N-1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{N-k}(m) &= e^{2\pi i(N-k)m/N} \\ &= e^{2\pi i N m/N} . e^{2\pi i(-k)m/N} \\ &= e^{2\pi i m} . e^{2\pi i(-k)m/N} \\ &= 1 . e^{-2\pi i k m/N} \\ &= \overline{\mathbf{E}}_k(m) \end{aligned}$$

e portanto $\mathbf{E}_{N-k} = \overline{\mathbf{E}_k}$

Exercício 1.21 (1.22e2). Encontre todas as relações de *aliasing* que você conseguir (incluindo *aliasing* conjugados) para $\mathcal{E}_{m,n,k,l}$. Isto pode ser feito diretamente ou utilizando a equação 1.26 e as relações de *aliasing* para $\mathbf{E}_{N,k}$.

Solução

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \mathbf{E}_{m,k-m}\mathbf{E}_{n,l}^T = \mathcal{E}_{m,n,k-m,l}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l-n}^T = \mathcal{E}_{m,n,k,l-n}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \mathbf{E}_{m,k-m}\mathbf{E}_{n,l-n}^T = \mathcal{E}_{m,n,k-m,l-n}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l}^T = \overline{\mathbf{E}_{m,m-k}\mathbf{E}_{n,n-l}^T} = \overline{\mathcal{E}}_{m,n,m-k,n-l}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k-m}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l}^T = \overline{\mathbf{E}_{m,-k}\mathbf{E}_{n,n-l}^T} = \overline{\mathcal{E}}_{m,n,-k,n-l}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l-n}^T = \overline{\mathbf{E}_{m,m-k}\mathbf{E}_{n,-l}^T} = \overline{\mathcal{E}}_{m,n,m-k,-l}$$

$$\mathcal{E}_{m,n,k,l} = \mathbf{E}_{m,k}\mathbf{E}_{n,l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l}^T = \overline{\mathbf{E}}_{m,m-k-m}\overline{\mathbf{E}}_{n,n-l-n}^T = \overline{\mathbf{E}_{m,-k}\mathbf{E}_{n,-l}^T} = \overline{\mathcal{E}}_{m,n,-k,-l}$$