MAC0317/5920 - Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Segunda lista de exercícios

1 Produtos internos e normas

Exercício 1.24 (1.25e2). Existem infinitos outros produtos internos em $\mathbb{R}^n$ além do produto interno canônico, e eles também podem ser muito úteis. Considere $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ e suponha que $d_k > 0$ para todo $1 \leq k \leq n$.

(a) Sejam $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_d = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Escreva a expressão da norma associada em função das componentes v_k e w_k.

- Simetria

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_d = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \sum_{k=1}^{n} d_k w_k v_k = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_d$$

- Distributividade

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_d &= \sum_{k=1}^{n} d_k (u_k + v_k) w_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + d_k w_k v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k u_k w_k + \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_d + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_d
\end{aligned}$$

- Homogeneidade

$$\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_d = \sum_{k=1}^{n} d_k (\lambda v_k) w_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} d_k v_k w_k = \lambda \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_d$$

- Positividade

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_d = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k v_k = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k^2$$

como $d_k > 0$ e $v_k^2 \geq 0$, para todo $1 \leq k \leq n$ logo temos que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_d \geq 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_d = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

- Norma induzida por $\langle , \rangle_d$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_v \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k v_k^2}$$

(b) Seja $\mathbf{d} = (1, 5) \in \mathbb{R}^2$ e seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ com $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{v}_1 = (5, -2)$. Mostre que S não é ortogonal em relação ao produto interno canônico, mas é ortogonal com respeito ao produto $\langle , \rangle_d$.

Temos que se θ é o ângulo entre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 2 \times 5 + 1 \times (-2) = 8 = \|\mathbf{v}_1\| \, \|\mathbf{v}_2\| \cos(\theta)$$

portanto $\cos(\theta) \neq 0$ e assim $\mathbf{v}_1$ não é ortogonal a $\mathbf{v}_2$.

para $\langle , \rangle_d$, temos que:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_d = 1 \times 2 \times 5 + 5 \times 1 \times (-2) = 0$$

como $\|\mathbf{v}_1\|$ e $\|\mathbf{v}_2\|$ são diferentes de 0 (pois $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ não são o vetor nulo), temos que $\cos(\theta) = 0$ e portanto $\mathbf{v}_1$ é ortogonal a $\mathbf{v}_2$.

(c) Encontre o comprimento de cada vetor em S com respeito à norma gerada pelo produto interno $\langle , \rangle_d$, e compare-os com os comprimentos em relação à norma usual (Euclideana).

$$\|\mathbf{v}_1\|_d = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_d} = \sqrt{1 \times 2^2 + 5 \times 1^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{v}_2\|_d = \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle_d} = \sqrt{1 \times 5^2 + 5 \times (-2)^2} = \sqrt{45}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

(d) Escreva o vetor $\mathbf{w} = (-2, 5)$ como combinação linear dos elementos de S. Verifique que a combinação que você obteve realmente descreve $\mathbf{w}$.

$$a_1 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 \times (-2) \times 2 + 5 \times 5 \times 1 = 21$$
$$a_2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \times (-2) \times 5 + 5 \times 5 \times (-2) = -60$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{a_k}{\|\mathbf{v}_k\|_d^2} \mathbf{v}_k = \frac{21}{9}(2,1) + \frac{-60}{45}(5,-2) = (\frac{14}{3} + \frac{-20}{3}, \frac{7}{3} + \frac{8}{3}) = (-2,5) = \mathbf{w}$$

Exercício 1.29 (1.31e2). Suponha que S é uma base ortogonal mas não ortonormal para $\mathbb{R}^n$ composta pelos vetores $\mathbf{v}_k$, para $1 \leq k \leq n$. Mostre que a identidade de Parseval se torna

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|\mathbf{v}_k\|^2$$

onde $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{v}_k$. *Dica:* Olhe a dedução da Equação 1.36.

Temos que se $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{v}_k$., então;

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle a_i \mathbf{v}_i, a_j \mathbf{v}_j \rangle & \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \text{ para } i \neq j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle a_i \mathbf{v}_i, a_i \mathbf{v}_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \|\mathbf{v}_i\|
\end{aligned}$$

Exercício 1.31 (1.33e2). Mostre a ortogonalidade das formas básicas de onda $\mathcal{E}_{k,l} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definidas pela equação

$$(\mathcal{E}_{k,l})_{i,j} = e^{i2\pi\left(k\frac{i}{m} + l\frac{j}{n}\right)},$$

usando o produto interno canônico (Exemplo 1.14), ou seja, mostre que

$$(\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q}) = 0$$

sempre que $k \neq p$ ou $l \neq q$. Mostre também que

$$\|\mathcal{E}_{k,l}\|^2 = (\mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{k,l}) = mn$$

para qualquer k, l. Pode ser útil olhar o Exemplo 1.20.

Temos que se $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{i,j}} b_{i,j}$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q} \rangle &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \overline{e^{2\pi i(kr/m + ls/n)}} e^{2\pi i(pr/m+qs/n)} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{n-1} e^{-2\pi i(kr/m+ls/n)} e^{2\pi i(pr/m+qs/n)} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{n-1} e^{-2\pi ikr/m} e^{-2\pi ils/n} e^{2\pi ipr/m} e^{2\pi iqs/n} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{n-1} e^{2\pi i(p-k)r/m} e^{2\pi i(l-q)s/n)} \\
&= \sum_{r=0}^{m-1} e^{2\pi i(p-k)r/m} \sum_{s=1}^{n-1} e^{2\pi i(l-q)s/n} \\
&= \frac{1-\left(e^{2\pi i(p-k)/m}\right)^m}{1-e^{2\pi i(p-k)/m}} \times \frac{1-\left(e^{2\pi i(l-q)/n}\right)^n)}{1-\left(e^{2\pi i(l-q)/n}\right)} \\
&= \frac{1-e^{2\pi i(p-k)}}{1-e^{2\pi i(p-k)/m}} \times \frac{1-e^{2\pi i(l-q)}}{1-e^{2\pi i(l-q)/n}}
\end{aligned}
$$

como $e^{2\pi i(p-k)} = 1$ para $p \neq k$ e $e^{2\pi i(q-l)} = 1$ para $q \neq l$, temos que $\langle \mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q} \rangle = 0$ para $p \neq k$ ou $q \neq l$.

Para $p = k$ e $q = l$ temos que:

$$
\langle \mathcal{E}_{k,l}, \mathcal{E}_{p,q} \rangle = \sum_{r=0}^{m-1} e^{2\pi i(p-k)r/m} \sum_{s=1}^{n-1} e^{2\pi i(l-q)s/n} = \sum_{r=0}^{m-1} e^0 \times \sum_{s=1}^{n-1} e^0 = mn
$$

2 Cálculo da DFT

Exercício 2.2/3(2.3/4e2). Usando as expressões

$$
X_k = (x, E_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad \text{(DFT)}
$$

e

$$
x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k \qquad \text{(IDFT)}
$$

calcule a DFT do vetor $y = (1, 2, 0, -1)$ e a IDFT do vetor $W = (3, 1+i, 1, 1-i)$. Você pode usar o computador para confirmar as respostas, mas deve indicar as passagens das contas.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{3} y_n e^{-2\pi i 0n/4} \\ \sum_{n=0}^{3} y_n e^{-2\pi i 1n/4} \\ \sum_{n=0}^{3} y_n e^{-2\pi i 2n/4} \\ \sum_{n=0}^{3} y_n e^{-2\pi i 3n/4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \times e^0 + 2 \times e^0 + 0 \times e^0 + (-1) \times e^0 \\ 1 \times e^0 + 2 \times e^{-2\pi i 1/4} + 0 \times e^{-2\pi i 2/4} + (-1) \times e^{-2\pi i 3/4} \\ 1 \times e^0 + 2 \times e^{-2\pi i 4/4} + 0 \times e^{-2\pi i 4/4} + (-1) \times e^{-2\pi i 6/4} \\ 1 \times e^0 + 2 \times e^{-2\pi i 3/4} + 0 \times e^{-2\pi i 6/4} + (-1) \times e^{-2\pi i 9/4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1+2+0-1 \\ 1+2e^{-2\pi i 1/4} + 0 - e^{-2\pi i 3/4} \\ 1+2e^{-2\pi i 4/4} + 0 - e^{-2\pi i 6/4} \\ 1+2e^{-2\pi i 3/4} + 0 + -e^{-2\pi i 9/4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2(-i)-i \\ 1+2(-1)-(-1) \\ 1+2i-(-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-3i \\ 0 \\ 1+3i \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{E}_k$$
$$= \frac{1}{4}[3(1,1,1,1) + (1+i)(1,i,-1,-i) + 1(1,-1,1,-1) + (1-i)(1,-i,-1,i)]$$
$$= \frac{1}{4}[(3,3,3,3) + (1+i,-1+i,-1-i,1-i) + (1,-1,1,-1) + (1-i,-1-i,-1+i,1+i)$$
$$= \frac{1}{4}[(3+1+i+1+1-i, 3-1+i-1-1-i, 3-1-i+1-1+i, 3+1-i-1+1+i)$$
$$= \frac{1}{4}[(6,0,2,4) = (1.5,0,0.5,1)$$

Exercício 2.4(2.6e2). Seja $\{\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{N-1}\} \subset \mathbb{C}^N$ a base canônica em $\mathbb{C}^N$, onde o vetor $\mathbf{e}_j$ possui 1 na j-ésima posição e 0 nas demais (as posições são indexadas em $0 \leq j \leq N-1$). Calcule a DFT de $\mathbf{e}_j$, e também a magnitude (valor absoluto) de cada coeficiente da DFT. Qual é a relação entre DFT($\mathbf{e}_j$) e as formas básicas de onda E_k?

$$\mathrm{DFT}(e_j) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} (e_j)_n e^{-2\pi i 0n/N} \\ \sum_{n=0}^{N-1} (e_j)_n e^{-2\pi i 1n/N} \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{N-1} (e_j)_n e^{-2\pi i (N-1)n/N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i 0j/N} \\ e^{-2\pi i 1j/N} \\ \vdots \\ e^{-2\pi i (N-1)j/N} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{E}_j}$$

logo a $\mathrm{DFT}(e_j) = \overline{\mathbf{E}_j}$.
A magnitude de cada componente de $\overline{\mathbf{E}_j}$ é dada por:

$$|\overline{(\mathbf{E}_j)_k}| = \sqrt{\overline{(\mathbf{E}_j)_k}(\mathbf{E}_j)_k} = \sqrt{e^{-2\pi ikj/N}e^{2\pi ikj/N}} = \sqrt{e^0} = 1$$