MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 2.5: Propriedades da DFT

Seção 2.5.1: Formulação matricial e linearidade

Vamos mostrar que DFT(x) pode ser expressa como um produto matriz-vetor da forma $DFT(x) = Fx$. Para isso considere um exemplo em $\mathbb{C}^4$. Temos

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e

$$X_k = (x, E_k) = \sum_{n=0}^{3} x_n e^{-i2\pi kn/N} = E_k^* x,$$

onde E_k^* é a transposta conjugada do vetor E_k:

$$E_k^* = \begin{bmatrix} \overline{(E_k)_0} & \overline{(E_k)_1} & \overline{(E_k)_2} & \overline{(E_k)_3} \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$X_0 = [\overline{1} \quad \overline{1} \quad \overline{1} \quad \overline{1}]\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad X_1 = [\overline{1} \quad \overline{i} \quad \overline{-1} \quad \overline{-i}]\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = [\overline{1} \quad \overline{-1} \quad \overline{1} \quad \overline{-1}]\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad X_3 = [\overline{1} \quad \overline{-i} \quad \overline{-1} \quad \overline{i}]\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

tem as linhas indexadas por k (a frequência associada ao coeficiente X_k) e as colunas indexadas por n (o índice da amostra que multiplicará o x_n), e assim a entrada associada à posição (k, n) será

$$F_{k,n} = (E_k^*)_n = \overline{(E_k)_n} = e^{-i2\pi kn/N}.$$

Teorema 2.5.1

Seja $x \in \mathbb{C}^N$ e $X = DFT(x)$. Então $X = Fx$ onde $F \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tal que $F_{k,n} = e^{-i2\pi kn/N}$.

Denotando por $z = e^{-i2\pi/N}$, temos $F_{k,n} = e^{-i2\pi kn/N} = z^{kn}$, e a matriz F será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{N-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & \cdots & z^{2(N-1)} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & \cdots & z^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & z^{3(N-1)} & \cdots & z^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Note que F é simétrica (pois $F_{n,k} = z^{nk} = z^{kn} = F_{k,n}$), além de várias outras propriedades que iremos explorar.

Para ver que a IDFT também pode ser expressa matricialmente, considere outra vez o exemplo em $\mathbb{C}^4$, onde $x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k$. Então

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{N}\left(X_0 \begin{bmatrix} (E_0)_0 \\ (E_0)_1 \\ (E_0)_2 \\ (E_0)_3 \end{bmatrix} + X_1 \begin{bmatrix} (E_1)_0 \\ (E_1)_1 \\ (E_1)_2 \\ (E_1)_3 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} (E_2)_0 \\ (E_2)_1 \\ (E_2)_2 \\ (E_2)_3 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} (E_3)_0 \\ (E_3)_1 \\ (E_3)_2 \\ (E_3)_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} (E_0)_0 & (E_1)_0 & (E_2)_0 & (E_3)_0 \\ (E_0)_1 & (E_1)_1 & (E_2)_1 & (E_3)_1 \\ (E_0)_2 & (E_1)_2 & (E_2)_2 & (E_3)_2 \\ (E_0)_3 & (E_1)_3 & (E_2)_3 & (E_3)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

ou seja, $x = \tilde{F}X$ onde $\tilde{F}_{n,k} = \frac{1}{n}(E_k)_n = \frac{1}{n}e^{i2\pi kn/N} = \frac{1}{n}z^{-kn} = \frac{1}{n}\overline{F_{k,n}}$.

Observe a troca dos índices: as linhas de $\tilde{F}$ são indexadas por n (índice temporal) e as colunas de $\tilde{F}$ são indexadas por k (índice espectral).

Teorema 2.5.2

Seja $x \in \mathbb{C}^N$ e $X = DFT(x)$. Então

$$X = Fx$$
$$x = \tilde{F}X$$

onde, denotando por $z = e^{-i2\pi/N}$,

$$F_{k,n} = e^{-i2\pi kn/N} = z^{kn}$$
$$\tilde{F}_{n,k} = \frac{1}{N}e^{i2\pi kn/N} = \frac{1}{N}z^{nk}.$$

Além disso,

$$\tilde{F} = F^{-1} = \frac{1}{N}F^*$$

onde $*$ denota a matriz Hermitiana de F, que é a matriz transposta e conjugada.

Teorema 2.5.3

A $DFT : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^N$ é uma operação linear, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^N$ e $a, b \in \mathbb{C}$, vale

$$DFT(ax + by) = aDFT(x) + bDFT(y).$$

Analogamente, a IDFT também é uma operação linear.

Prova: Usando a representação matricial,

$$DFT(ax + by) = F(ax + by) = aFx + bFy = aDFT(x) + bDFT(y),$$

onde a segunda igualdade segue da distributividade do produto de matrizes.

Seção 2.5.2: Simetrias para sinais reais

Proposição 2.5.1

Um sinal $x \in \mathbb{C}^N$ possui todas as suas componentes **reais** se, e somente se, sua DFT X satisfaz

$$X_{-k} = \overline{X_k}, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

ou equivalentemente,

$$\Re(X_{-k}) = \Re(X_k) \qquad \text{e} \qquad \Im(X_{-k}) = -\Im(X_k).$$

Prova ($\Longrightarrow$ ou "somente se"): Suponha inicialmente que todas as componentes de x são reais, ou seja, que $\overline{x_n} = x_n$. Então

$$\begin{aligned} X_{-k} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi(-k)n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x_n}\overline{e^{-i2\pi kn/N}} \\ &= \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi kn/N}} \\ &= \overline{X_k}. \end{aligned}$$

Prova ($\Longleftarrow$ ou "se"): Por outro lado, supondo que $X_{-k} = \overline{X_k},\ \forall k$, temos

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{X_{-k}}\,\overline{e^{i2\pi(-k)n/N}} \\
&= \overline{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{-k} e^{i2\pi(-k)n/N}} \\
&= \overline{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{-(N-1)} X_l e^{i2\pi ln/N}} \quad (l=-k) \\
&= \overline{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_l e^{i2\pi ln/N}} \\
&= \overline{x_n},
\end{aligned}$$

onde a penúltima passagem usa a periodicidade de X_l e $e^{i2\pi ln/N}$, pois qualquer soma de N elementos consecutivos de expressões periódicas com período N tem sempre o mesmo resultado:

Observação 2.4

Da proposição 2.5.1, se x é real então $X_{-k} = \overline{X_k}$. Além disso, como X_k é periódico com período N, segue que $X_{-k} = X_{N-k}$. Logo

$$X_{N-k} = \overline{X_k}.$$

Em particular, usando $k = \frac{N}{2} + l$, temos que

$$X_{\frac{N}{2}-l} = \overline{X_{\frac{N}{2}+l}},$$

o que explica a simetria conjugada dos espectros de sinais reais em relação à frequência de Nyquist $\left(\frac{N}{2}\right)$:

$$\Re\left(X_{\frac{N}{2}-l}\right) = \Re\left(X_{\frac{N}{2}+l}\right),$$
$$\Im\left(X_{\frac{N}{2}-l}\right) = -\Im\left(X_{\frac{N}{2}+l}\right).$$