MAC0317/5920 - Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Quinta lista de exercícios

1 Convolução bidimensional e máscaras

Exercício 4.17.(4.17e2) Prove o Teorema da Convolução no caso bidimensional (Teo. 4.4 (2ed), 4.4.1 (1ed)):

Se $x, h, y \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$ e $y = x * h$, então

$$Y_{k,l} = X_{k,l}H_{k,l}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, M-1, \quad \forall l = 0, 1, \ldots, N-1,$$

onde $X, H, Y \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$ são as DFT's de x, h e y respectivamente.

Dica: Imite a prova do caso unidimensional, Teorema 4.2 (2ed) ou 4.3.1 (1ed).

$$\begin{aligned}
Y_{k,l} &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} y_{m,n}e^{-2\pi i(mk/M+nl/N)} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} (x*h)_{m,n}e^{-2\pi i(mk/M+nl/N)} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} x_{r,s}h_{m-r,n-s}\right) e^{-2\pi i(mk/M+nl/N)} \\
&= \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_{r,s}h_{m-r,n-s}e^{-2\pi i(mk/M+nl/N)},\ p = m-r,\ q = n-s \\
&= \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=-r}^{M-1-r}\sum_{q=-s}^{N-1-s} x_{r,s}h_{p,q}e^{-2\pi i((p+r)k/M+(q+s)l/N)} \\
&= \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{p=-r}^{M-1-r}\sum_{q=-s}^{N-1-s} x_{r,s}h_{p,q}e^{-2\pi i(rk/M+sl/N)}e^{-2\pi i(pk/M+ql/N)} \\
&= \left(\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} x_{r,s}e^{-2\pi i(rk/M+sl/N)}\right)\left(\sum_{p=-r}^{M-1-r}\sum_{q=-s}^{N-1-s} h_{p,q}e^{-2\pi i(pk/M+ql/N)}\right) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1} x_{r,s}e^{-2\pi i(rk/M+sl/N)}\right)\left(\sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1} h_{p,q}e^{-2\pi i(pk/M+ql/N)}\right) \\
&= X_{k,l}H_{k,l}
\end{aligned}$$

2 O espaço $L^2(\mathbb{Z})$

Exercício 4.28(4.29e2). Seja $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, e seja $\tilde{x} \in L^2(\mathbb{Z})$ sua extensão bi-infinita com zeros, definida como $\tilde{x}_n = x_n,\ n = 0, \ldots, N-1$, e $\tilde{x}_n = 0$ caso contrário.

(a) Mostre que os coeficientes X_k da DFT de x podem ser computados a partir de $\tilde{X}(f)$, a DTFT de $\tilde{x}$.

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_n e^{-2\pi fn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi fn}$$

seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $-\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$, temos que,

$$\tilde{X}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} xe^{-2\pi kn/N} = X_k$$

Note que que X_k é definido para todo $k \in \mathbb{Z}$ através das relações de *aliasing*.

(b) Mostre que $\tilde{X}(f)$ pode ser escrita em função dos coeficientes X_k como

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi n(k/N-f)}.$$

Dica: Use a IDFT para expressar x_n em função de X_k.

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_n e^{-2\pi f n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi f n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i k n/N}\right) e^{-2\pi f n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i n(k/N-f)}$$

(c) Mostre que se $f \neq n/N$ com n inteiro então

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1-e^{i2\pi(k-fN)}}{1-e^{i2\pi(k/N-f)}}\right) X_k.$$

Dica: Use a parte (b) e a identidade $1+z+z^2+\cdots+z^{N-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$ se $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(f) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i n(k/N-f)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n(k/N-f)}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i(k/N-f)}\right)^n\right), \text{ se } f \neq k/N, \text{ então } e^{2\pi i(k/N-f)} \neq 1 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \left(\frac{1-e^{i2\pi(k-fN)}}{1-e^{i2\pi(k/N-f)}}\right)
\end{aligned}$$

3 Transformada z e convolução

Exercício 4.32(4.33e2). Seja $\mathbf{x} = (-1, 2, 0, 4)$ e $\mathbf{y} = (1, 1, 2, -1)$ vetores em $\mathbb{C}^4$. Nós também consideraremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ elementos de $L^2(\mathbb{Z})$, através da extensão com zeros.

(a) Calcule as transformadas-z $X(z)$ e $Y(z)$, e o produto $X(z)Y(z)$.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n} = -1 + 2z^{-1} + 4z^{-3} \\
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n z^{-n} = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + -z^{-3} \\
X(z)Y(z) &= (-1 + 2z^{-1} + 4z^{-3})(1 + z^{-1} + 2z^{-2} + -z^{-3}) \\
&= -1 + (2-1)z^{-1} + (-2+2)z^{-2} + (4+4+1)z^{-3} + (-2+4)z^{-4} + 8z^{-5} + (-4)z^{-6} \\
&= -1 + z^{-1} + 9z^{-3} + 2z^{-4} + 8z^{-5} - 4z^{-6}
\end{aligned}$$

(b) Use o resultado do item (a) para escrever a convolução linear de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $L^2(\mathbb{Z})$. temos que se $w = x * y$ então $W(z) = X(z)Y(z)$ e portanto basta calcularmos a transformada-z inversa para $W(z)$

$$x * y = (\ldots, -1, 1, 0, 9, 2, 8, -4, 0, \ldots)$$

(c) Use o resultado do item (a) para escrever a convolução circular de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^4$ usando o Teorema 4.5.3 (1ed) ou 4.7 (2ed). Se $w = x * y$ (convolução circular de x e y) então $W(z) = X(z)Y(x)\ \mathrm{mod} z^{-4}$ assim:

$$\begin{aligned}
W(z) &= -1 + z^{-1} + 9z^{-3} + 2z^{-4} + 8z^{-5} - 4z^{-6}\ \mathrm{mod} z^{-4} \\
&= (-1+2) + (1+8)z^{-1} + (-4)z^{-2} + 9z^{-3} \\
&= 1 + 9z^{-1} - 4z^{-2} + 9z^{-3}
\end{aligned}$$

e assim $x * y = (1, 9, -4, 9)$.

(d) Use o resultado do item (b) para escrever a convolução circular de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^4$ usando a Equação (4.29).

temos que: $\tilde{w} = (\dots, -1, 1, 0, 9, 2, 8, -4, 0, \dots)$

assim:

$$\begin{aligned} w_0 &= \tilde{w}_0 + \tilde{w}_4 = -1 + 2 = 1 \\ w_1 &= \tilde{w}_1 + \tilde{w}_5 = 1 + 8 = 9 \\ w_2 &= \tilde{w}_2 + \tilde{w}_6 = 0 + -4 = -4 \\ w_3 &= \tilde{w}_3 + \tilde{w}_7 = 9 + 0 = 9 \end{aligned}$$

e portanto $x * y = (1, 9, -4, 9)$.

4 Janelamento e localização

Exercício 5.3. Demonstre a proposição 5.2.1 (1ed) ou 5.1 (2ed):

Sejam $x, w \in \mathbb{C}^N$ com DFTs X e W, e considere $y = w \circ x$ com DFT Y. Então

$$Y = \frac{1}{N} X * W$$

onde '$*$' representa a convolução circular em $\mathbb{C}^N$.

$$\begin{aligned} IDFT\left(\frac{1}{N} W * X\right)_n &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} (W * X)_k e^{2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum r = 0^{N-1} X_r W_{k-r}\right) e^{2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_r W_{k-r} e^{2\pi kn/N},\ s = k - r \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=-r}^{N-1-r} X_r W_s e^{2\pi(r+s)n/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{2\pi rn/N} \sum_{s=-r}^{N-1-r} W_s e^{2\pi sn/N} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{2\pi rn/N} \sum_{s=0}^{N-1} W_s e^{2\pi sn/N} \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{2\pi rn/N}\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} W_s e^{2\pi sn/N}\right) \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{2\pi rn/N}\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} W_s e^{2\pi sn/N}\right) \\ &= IDFT(X)_n IDFT(W)_n \\ &= x_n w_n = y_n = IDFT(Y)_n \end{aligned}$$

Exercício 5.6 (5.7e2). No exemplo 5.6 nós consideramos um sinal que contém uma componente de frequência que varia no tempo $\text{sen}(2\pi\omega(t)t)$ com $\omega(t) = 150 + 50\cos(2\pi t)$. Assim poderíamos esperar que a frequência "local" no instante t_0 fosse simplesmente $\omega(t_0)$, e assim no Exemplo 5.6 esperaríamos que a frequência mais baixa fosse 100 Hz e a mais alta 200. Hz. Entretanto, a Figura 5.8 indica que este não é bem o caso – podemos encontrar frequências locais no espectrograma próximas a 30 Hz para $t = 0.32s$ e chegando a 400 Hz próximo de $t = 0.75s$.

Para compreender isto, considere o sinal $f(t) = \text{sen}(\omega(t)t)$ no intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$. Suponha que $\omega(t)$ é diferenciável.

a. Justifique a aproximação:

$$\omega(t)t \approx \omega(t_0)t_0 + (\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)(t - t_0)$$

Dica: considere a aproximação da função $f(t) = \omega(t)t$ *pelo método da secante nos pontos* t_0 *e* $t_0 + \Delta\ t$. *Dados* a *e* b, *esse método aproxima uma função* $f(t)$ *em* $x \in [a, b]$ *como* $f(t) = f(a) + \frac{t-a}{b-a}(f(b) - f(a))$. *Veja um exemplo gráfico do método da secante neste link.*

para $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta_t$, se Δt é pequeno.

Seja $g(t) = \omega(t)t$, logo pelo método da secante temos para os pontos t_0 e $t_0 + \Delta t$

$$\begin{aligned}
g(t) &\approx g(t_0) + \frac{t - t_0}{t_0 + \Delta t - t_0}(g(t_0 + \Delta t) - f(t_0)) \\
&\approx g(t_0) + \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t}(t - t_0), \text{ fazendo } \Delta t \to 0 \\
&\approx g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0), \text{ e assim} \\
&\approx \omega(t_0)t_0 + (\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)(t - t_0)
\end{aligned}$$

b. Mostre que, usando a aproximação do item (a) para t suficientemente próximo de t_0, temos:

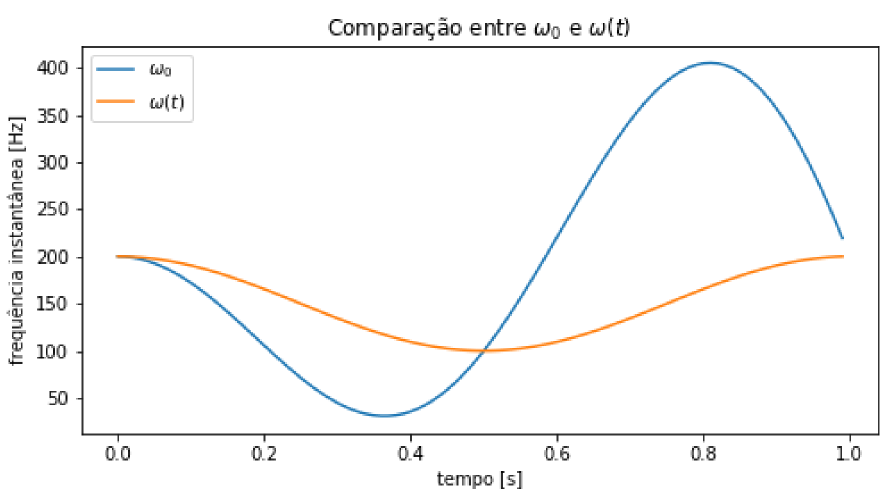
$$f(t) \approx \text{sen}(c + \omega_0 t),$$

onde $\omega_0 = \omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0$ e c é uma constante. Portanto, ω_0 é a frequência "local" de f próximo de $t = t_0$.

Do item anterior temos:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \text{sen}(g(t)) \\
&\approx \text{sen}(\omega(t_0)t_0 + (\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)(t - t_0)) \\
&\approx \text{sen}(\omega(t_0)t_0 + (\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)t - (\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)t_0) \\
&\approx \text{sen}((\omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0)t - \omega'(t_0)t_0^2), \text{ fazendo } \omega_0 = \omega(t_0) + \omega'(t_0)t_0 \\
&\approx \text{sen}(\omega_0 t - \omega'(t_0)t_0^2), \text{ tomando } c = -\omega'(t_0)t_0^2 \\
&\approx \text{sen}(c + \omega_0 t)
\end{aligned}$$

c. Use o item (b) para explicar as frequências mínima e máxima vistas no espectrograma da Figura 5.8. Em particular, esboce ω_0 em função de t_0 para $0 \leq t_0 \leq 1$.



Podemos perceber pelo gráfico que utilizando a aproximação pelo método da secante, a frequência instantânea aproximada varia na faixa citada no enunciado.

Exercício 5.7 (5.8e2). Considere a seguinte transformada de Fourier janelada definida a seguir. Dado um sinal $x \in \mathbb{C}^N$ e um inteiro $M > 0$ que satisfaz $N = ML$ com $L > 0$ inteiro, computamos a transformada $X \in \mathbb{C}^N$

da seguinte maneira: para cada inteiro $k = 0, 1, \ldots, L-1$, representando um índice de janela, consideramos o recorte

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_{kM} \\ x_{kM+1} \\ \vdots \\ x_{kM+M-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^M.$$

Seja $\tilde{X}_k = DFT(\tilde{x}_k)$ (em $\mathbb{C}^M$) e defina a transformada do vetor completo $x \in \mathbb{C}^N$ como

$$X = \begin{bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_{L-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^N.$$

a. Qual é a representação matricial T da transformação $X = Tx$ definida acima, e qual sua relação com a matriz F_M da DFT M-dimensional? Mostre que $x \mapsto X$ é inversível, e explique como computar a inversa.

Temos que T será uma matriz com L^2 blocos de tamanho $M \times M$, onde on blocos da diagonal serão a matriz F_m e os demais blocos são matrizes nulas e tamanho $M \times M$. Assim todo cada elemento de $\tilde{X}_k$ levará em consideração somente os elementos x_n com $kM \leq n < M(k+1)$

Temos que se T é uma matriz diagonal de blocos, sua inversa é dada pela matriz de blocos diagonais composta pelas matrizes inversas de F, assim:

$$\begin{aligned}
T^{-1} &= \begin{bmatrix} F_M & 0_M & \ldots & 0_M & 0_M \\ 0_M & F_M & \ldots & 0_M & 0_M \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_M & 0_M & \ldots & F_M & 0_M \\ 0_M & 0_M & \ldots & 0_M & F_M \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} F_M^{-1} & 0_M & \ldots & 0_M & 0_M \\ 0_M & F_M^{-1} & \ldots & 0_M & 0_M \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_M & 0_M & \ldots & F_M^{-1} & 0_M \\ 0_M & 0_M & \ldots & 0_M & F_M^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{M}F_M^* & 0_M & \ldots & 0_M & 0_M \\ 0_M & \frac{1}{M}F_M^* & \ldots & 0_M & 0_M \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_M & 0_M & \ldots & \frac{1}{M}F_M^* & 0_M \\ 0_M & 0_M & \ldots & 0_M & \frac{1}{M}F_M^* \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{M}T^*
\end{aligned}$$

b. Mostre que cada componente $X_k,\ 0 \leq k \leq N-1$ pode ser computada através de um produto interno

$$X_k = (x, v_k)$$

para algum vetor $v_k \in \mathbb{C}^N$. Mostre que o conjunto dos vetores $\{v_k \mid 0 \leq k \leq N-1\}$ é ortogonal.

$$X_k = X_{k,0} = (Tx)_{0,k} = \sum_{n=0}^{N-1} T_{k,n} x_{n,0} = \langle t_k, x \rangle$$

, onde t_k é a k-ésima linha da matriz T.

Temos do Exercício anterior que $T^{-1} = \frac{1}{M}T^*$, assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M}T^*T = \frac{1}{M}TT^* = I &\implies \frac{1}{M}(TT^*)_{i,j} = I_{i,j} \\
&\implies \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} T_{i,n}T^*_{n,j} = I_{i,j} \\
&\implies \frac{1}{M}\langle T_i, T_j \rangle = I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, caso } i = j \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}
\end{aligned}$$

c. Suponha que cada segmento passe por um janelamento definido por um vetor $w \in \mathbb{C}^M$, ou seja, que

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} w_0 x_{kM} \\ w_1 x_{kM+1} \\ \vdots \\ w_{M-1} x_{kM+M-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^M.$$

Que condições sobre w são necessárias para que a transformação $x \mapsto X$ ainda seja inversível? Os vetores v_k do item (b) ainda seriam ortogonais quando readequados a essa nova transformada?

Sejam

$$W_M = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{M-1} \end{bmatrix} \text{ e } W = \begin{bmatrix} W_M & 0_M & \dots & 0_M & 0_M \\ 0_M & W_M & \dots & 0_M & 0_M \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0_M & 0_M & \dots & W_M & 0_M \\ 0_M & 0_M & \dots & 0_M & W_M \end{bmatrix}$$

Temos que $x \mapsto X$ é dada por:

$$X = FWx$$

Assim para que exista $(FW)^{-1}$, basta que exista W^{-1} que é a matriz composta por blocos na diagonal de W_M^{-1}, e portanto basta que que que todo $w_m \neq 0$.