MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 6.3: O Banco de Filtros Geral de 1 Estágio e 2 Canais

Seção 6.3.1: Formulação para filtros FIR arbitrários

Tudo o que foi desenvolvido na seção 6.2 pode ser generalizado para uma coleção bastante geral de pares de filtro l_a, l_s (passa-baixas de análise e de síntese) e h_a, h_s (passa-altas de análise e de síntese), desde que determinados cuidados sejam tomados para garantir que *nenhuma informação é perdida no processo* (garantindo com isso que *a reconstrução do sinal original seja perfeita*).

O objetivo será preservar a estrutura geral da transformada, ou seja, a etapa de análise consiste em

1. *Filtrar:* $l_a * x$ *e* $h_a * x$*;*
2. *Subamostrar:* $X_l = D(l_a * x)$ *e* $X_h = D(h_a * x)$*;*
3. *Combinar os resultados:* $X = (X_l, X_h)$*;*

enquanto a etapa de síntese consiste em

1. *Superamostrar: computar* $U(X_l)$ *e* $U(X_h)$*;*
2. *Filtrar:* $v_l = l_s * U(X_l)$ *e* $v_h = h_s * U(X_h)$*;*
3. *Combinar os resultados:* $x = v_l + v_h$*.*

Observação 6.2

O esquema descrito acima é chamado de *banco de filtros em dois canais* porque os sinais são separados em duas componentes, processadas paralelamente por dois filtros com características espectrais diferentes (um passa-baixas e um passa-altas).

Bancos de filtros em M canais funcionam de maneira análoga, porém o sinal de entrada é filtrado paralelamente por M filtros, dando origem a M componentes $X_1, X_2, \ldots, X_M$ que capturariam faixas de frequência distintas. Os sinais filtrados são geralmente subamostrados numa relação de $M : 1$, a fim de eliminar as redundâncias.

A teoria que trata do desenho de bancos de filtros de M canais a fim de garantir reconstrução perfeita é chamada de *codificação sub-banda* (*subband coding*) e foge ao escopo desse curso.

Reconstrução perfeita (definição 6.3.1)

Dado um banco de filtros $\{l_a, h_a, l_s, h_s\}$ que define o par de transformações $x \mapsto X = (X_l, X_h) = (D(l_a * x), D(h_a * x))$ (análise) e $X \mapsto l_s * U(X_l) + h_s * U(X_h)$ (síntese), dizemos que o banco de filtros possui *reconstrução perfeita* se a equação de síntese é a inversa da equação de análise, ou seja, se

$$x = l_s * U(D(l_a * x)) + h_s * U(D(h_a * x))$$

para qualquer sinal x. Um banco de filtros com reconstrução perfeita também é chamado de *biortogonal*.

Ocasionalmente consideraremos também filtros cuja reconstrução ocorre com um certo atraso, como é o caso do banco de Haar com filtros causais. Nesse caso, a condição de reconstrução perfeita equivale a existir algum $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$S^m(x) = l_s * U(D(l_a * x)) + h_s * U(D(h_a * x))$$

para qualquer sinal x, onde S é o operador de atraso definido na seção 6.2 (e S^m é sua aplicação repetida m vezes, ou seja, um atraso de m amostras).

Desenho de bancos de filtros

A equação de reconstrução perfeita não ajuda muito na construção de bancos de filtros em geral, já que equivale a um sistema de infinitas equações (lembre-se que os sinais estão em $L^2(\mathbb{Z})$) e envolve produtos de coeficientes dos filtros de análise e síntese.

Em alguns casos muito particulares, como quando os filtros de análise já são conhecidos, é possível desenvolver essas equações para construir os filtros correspondentes de síntese, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 6.3

Considere que usaremos os filtros de análise de Haar ($(l_a)_0 = (l_a)_1 = \frac{1}{2}$ e $(h_a)_0 = -(h_a)_1 = \frac{1}{2}$, com todos os demais coeficientes nulos), e desejamos encontrar filtros de síntese (supondo desconhecidos) que satisfaçam a equação de reconstrução perfeita sem atraso

$$x = l_s * U(D(l_a * x)) + h_s * U(D(h_a * x)),$$

que pode ser escrita em função de cada amostra do sinal x como

$$x_n = (l_s * U(D(l_a * x)))_n + (h_s * U(D(h_a * x)))_n.$$

Lembrando que $(l_a * x)_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ e $(h_a * x)_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$, e que $U(D(y))_n = \begin{cases} y_n, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$, podemos re-escrever a equação de reconstrução perfeita como

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ par}} (x_k + x_{k-1})(l_s)_{n-k} + (x_k - x_{k-1})(h_s)_{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ par}} x_k \left[(l_s)_{n-k} + (h_s)_{n-k}\right] + x_{k-1} \left[(l_s)_{n-k} - (h_s)_{n-k}\right], \end{aligned}$$

e ela precisa valer para qualquer sinal $x \in L^2(\mathbb{Z})$.

Considere o sinal de entrada $x = \delta$ dado por $x_0 = 1$ e $x_k = 0, \ \forall k \neq 0$. Então a equação anterior

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ par}} x_k \left[(l_s)_{n-k} + (h_s)_{n-k} \right] + x_{k-1} \left[(l_s)_{n-k} - (h_s)_{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{2} x_0 \left[(l_s)_{n-0} + (h_s)_{n-0} \right] \qquad \text{(sobra apenas } k = 0 \text{ na } \textstyle\sum) \end{aligned}$$

se reduz a

$$(l_s)_n + (h_s)_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Considere agora o sinal de entrada $x = S(\delta)$ dado por $x_1 = 1$ e $x_k = 0,\ \forall k \neq 1$. Então a equação anterior

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ par}} x_k \left[(l_s)_{n-k} + (h_s)_{n-k}\right] + x_{k-1} \left[(l_s)_{n-k} - (h_s)_{n-k}\right] \\ &= \frac{1}{2} x_1 \left[(l_s)_{n-2} - (h_s)_{n-2}\right] \qquad \text{(sobra apenas } k = 2 \text{ na } \textstyle\sum) \end{aligned}$$

se reduz a

$$(l_s)_{n-2} - (h_s)_{n-2} = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$(l_s)_n - (h_s)_n = \begin{cases} 2, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

Juntando as duas condições

$$(l_s)_n + (h_s)_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \qquad (l_s)_n - (h_s)_n = \begin{cases} 2, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

podemos concluir para $n = 0$ que $(l_s)_0 = (h_s)_0 = 1$ e para $n = -1$ que $(l_s)_{-1} = -(h_s)_{-1} = 1$, ao passo que para $n \neq 0, -1$ concluímos que $(l_s)_n = (h_s)_n = 0$.

Isso mostra que os filtros $l_s = (\dots, 0, 1, \overbrace{1}^{n=0}, 0, \dots)$ e $h_s = (\dots, 0, -1, \overbrace{1}^{n=0}, 0, \dots)$, que já sabíamos obedecer a condição de reconstrução perfeita, são na realidade **os únicos filtros de síntese** compatíveis com o par de filtros de análise (l_a, h_a) correspondentes ao filtro da média e da diferença.

Exemplo 6.4

Um outro conjunto de filtros biortogonais que estudaremos são os filtros **Le Gall 5/3**:

$$
\begin{aligned}
l_a &= (\dots, 0, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \overbrace{\tfrac{3}{4}}^{n=0}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, 0, \dots) \\
h_a &= (\dots, 0, -\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}, 0, \dots) \\
l_s &= (\dots, 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, 0, \dots) \\
h_s &= (\dots, 0, -\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, 0, \dots)
\end{aligned}
$$

Observe como os coeficientes dos filtros parecem estar relacionados: l_a possui "quase" os mesmos coeficientes que h_s, e o mesmo ocorre com h_a e l_s. Os detalhes da construção desse banco de filtros serão apresentados na seção 6.7.

Seção 6.3.3: Bancos de filtro ortogonais

Existem infinitos bancos de filtro que satisfazem a equação de reconstrução perfeita, por isso é interessante considerar condições que restrinjam as escolhas possíveis para o desenho de filtros. Uma dessas condições é considerar conhecidos os filtros de análise, como fizemos no exemplo 6.3. Outra possibilidade é criar vínculos entre os coeficientes dos filtros de análise e de síntese, como aqueles vistos no banco de filtros Le Gall 5/3, ou nos próprios filtros de Haar, que satisfazem

$$(l_s)_k = 2(l_a)_{-k} \qquad \text{e} \qquad (h_s)_k = 2(h_a)_{-k}.$$

Esse é um tipo de situação muito comum, e geralmente é possível eliminar a constante $C = 2$ na condição acima através de uma mudança de escala adequada. Nesse caso, buscaremos filtros que satisfazem

$$(l_s)_k = (l_a)_{-k} \qquad \text{e} \qquad (h_s)_k = (h_a)_{-k}.$$

Bancos de filtros que satisfazem essa condição são chamados de ortogonais, por razões que ficarão claras na seção 6.5.

Exemplo 6.5

O banco de filtros de Haar, que satisfaz a condição

$$(l_s)_k = 2(l_a)_{-k} \qquad \text{e} \qquad (h_s)_k = 2(h_a)_{-k}.$$

pode facilmente satisfazer a condição de ortonalidade fatorando-se a constante $2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$ e passando um dos termos para o outro lado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(l_s)_k = \sqrt{2}(l_a)_{-k} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(h_s)_k = \sqrt{2}(h_a)_{-k}.$$

Essa fatoração não afeta a condição de reconstrução perfeita porque todas as operações envolvidas são lineares e os fatores novos se cancelam:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} l_s * U(D(\sqrt{2} l_a * x)) + \frac{1}{\sqrt{2}} h_s * U(D(\sqrt{2} h_a * x)).$$

Assim, definindo-se

$$\begin{array}{lclcllllll}
\tilde{l}_a & = \sqrt{2}(l_a) & = & (\dots, 0, & 0, & \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{n=0}, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0, \dots) \\
\tilde{l}_s & = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_s) & = & (\dots, 0, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0, & 0, \dots) \\
\tilde{h}_a & = \sqrt{2}(h_a) & = & (\dots, 0, & 0, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & 0, \dots) \\
\tilde{h}_s & = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_s) & = & (\dots, 0, & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0, & 0, \dots),
\end{array}$$

teremos um banco de filtros com reconstrução perfeita que satisfaz

$$(\tilde{l}_s)_k = (\tilde{l}_a)_{-k} \qquad \text{e} \qquad (\tilde{h}_s)_k = (\tilde{h}_a)_{-k}.$$