MAC0317/5920 - Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Terceira lista de exercícios

1 DFT's 2-D

Exercício 2.13(2.16e2). Calcule (à mão) a DFT bidimensional da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida calcule a transformada inversa do resultado.

Temos que

$$\tilde{a}_{k,l} = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} a_{r,s} e^{-2\pi i (kr/m + ls/n)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{k,l} &= 1e^{-2\pi i (0k/2 + 0l/2)} + (-1)e^{-2\pi i (0k/2 + l/2)} + 2e^{-2\pi i (k/2 + 0l/2)} + 0e^{-2\pi i (k/2 + l/2)} \\ &= 1 - e^{-l\pi i} + 2e^{-k\pi i} \end{aligned}$$

e assim:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-0\pi i} + 2e^{-0\pi i} & 1 - e^{-\pi i} + 2e^{-0\pi i} \\ 1 - e^{-0\pi i} + 2e^{-1\pi i} & 1 - e^{-1\pi i} + 2e^{-1\pi i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a transformada inversa temos:

$$a_{r,s} = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{l-1} \tilde{a}_{k,l} e^{2\pi i (kr/m + ls/n)}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} a_{r,s} &= \frac{2}{4} e^{2\pi i (0r/2 + 0s/2)} + \frac{4}{4} e^{2\pi i (0r/2 + s/2)} + \frac{-2}{4} e^{2\pi i (r/2 + 0r/2)} + \frac{0}{4} e^{-2\pi i (r/2 + s/2)} \\ &= \frac{1}{2} + e^{s\pi i} - \frac{1}{2} e^{r\pi i} \end{aligned}$$

e assim:

e assim:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + e^{0\pi i} - \frac{1}{2}e^{0\pi i} & \frac{1}{2} + e^{\pi i} - \frac{1}{2}e^{0\pi i} \\ \frac{1}{2} + e^{0\pi i} - \frac{1}{2}e^{\pi i} & \frac{1}{2} + e^{\pi i} - \frac{1}{2}e^{\pi i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.14(2.17e2). Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois vetores colunas de dimensão m e n, respectivamente, com DFT's $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Seja $\mathbf{z}$ a matriz produto definida por

$$z_{r,s} = x_r y_s, \text{ com } 0 \leq r \leq m-1 \text{ e } 0 \leq s \leq n-1$$

e seja $\mathbf{Z}$ a DFT bidimensional de $\mathbf{z}$.

(a) mostre que $\mathbf{z}$ é uma matriz $m \times n$ que satisfaz $\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$, onde $\mathbf{y}^T$ denota a transposta de $\mathbf{y}$.

Temos que como $\mathbf{x}$ é uma matriz de dimensão $m \times 1$ e $\mathbf{y}^T$ é uma matriz $1 \times n$ temos que o produto $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ é uma matriz $m \times n$ onde cada elemento $(\mathbf{x}\mathbf{y}^T)_{r,s}$ com $0 \leq r < m$ e $0 \leq s < n$ é dado por:

$$(\mathbf{x}\mathbf{y}^T)_{r,s} = \sum_{k=0}^{0} \mathbf{x}_{r,k}(\mathbf{y}^T)_{k,s} = x_r y_s = z_{r,s}$$

e portanto $\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$

(b) Mostre que $Z_{k,l} = X_k Y_l$ ou equivalentemente $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T$, onde $Z_{k,l}$ denota o elemento da linha k e coluna l de $\mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} X_k Y_l &= \left(\sum_{r=0}^{m-1} x_r e^{-2\pi i k r/m}\right)\left(\sum_{s=0}^{n-1} y_s e^{-2\pi i l s/n}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} x_r y_s e^{-2\pi i k r/m} e^{-2\pi i l s/n} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1} z_{r,s} e^{-2\pi i (kr/m + ls/n)} \\ &= Z_{k,l} \end{aligned}$$

2 Efeitos de Translação

Exercício 2.16(2.19e2). Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ com DFT $\mathbf{X}$. Seja $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ o vetor obtido pelo deslocamento circular de $\mathbf{x}$ em m índices:

$$y_k = x_{(k+m) \bmod N}$$

Mostre que a DFT de $\mathbf{y}$ tem componentes $Y_r = e^{2\pi i r m/N} X_r$ e que $|X_r| = |Y_r|$ para todo r.

$$
\begin{aligned}
Y_r &= \sum_{k=0}^{N-1} y_k e{-2\pi ikr/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m)\bmod N} e^{-2\pi ikr/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m)\bmod N} e^{-2\pi ikr/N} e^{-2\pi ir(m-m)/N} \text{ , pois } e^{-2\pi ir(m-m)/N} = e^0 = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m)\bmod N} e^{-2\pi ikr/N} e^{-2\pi irm/N} e^{-2\pi ir(-m)/N} \\
&= e^{2\pi irm/N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k+m)\bmod N} e^{-2\pi i(k+m)r/N} \text{ , fazendo } l = k+m \bmod N \\
&= e^{2\pi irm/N} \sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-2\pi ilr/N} \\
&= e^{2\pi irm/N} X_r
\end{aligned}
$$

e Temos que:

$$
|Y_r| = |e^{2\pi irm/N} X_r| = |e^{2\pi irm/N}||X_r| = |X_r|
$$

3 Propriedades da DCT

Exercício 3.10(3.12e2). Mostre que a DCT é uma transformada ortogonal, ou seja, que

$$
\|\mathrm{DCT}(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2
$$

utilizando a norma Euclidiana usual para vetores em $\mathbb{C}^N$. Esta é a versão da identidade de Parseval para DCT. *Dica: para qualquer vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^N$, nós temos que $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}^* \boldsymbol{v}$ onde $\boldsymbol{v}^*$ é vetor linha dado por $\boldsymbol{v}^* = \overline{\boldsymbol{v}}^T$.*

Utilizando a forma matricial da DCT temos:

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{DCT}(\mathbf{x})\|^2 &= \|\mathcal{C}_N \mathbf{x}\|^2 \\
&= (\mathcal{C}_N \mathbf{x})^* \mathcal{C}_N \mathbf{x} \\
&= \overline{(\mathcal{C}_N \mathbf{x})}^T \mathcal{C}_N \mathbf{x} \\
&= \overline{x}^T \mathcal{C}_N^T \mathcal{C}_N \mathbf{x} \\
&= \overline{x}^T \mathcal{I}_N \mathbf{x} \\
&= \overline{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2
\end{aligned}
$$

Exercício 3.12(3.14e2). Prove a Equação (3.20)

$$\mathbf{A} = \mathcal{C}_m^T \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n.$$

Use este resultado para encontrar respectiva fórmula explícita para a inversão da DCT bidimensional (análoga à fórmula explícita (3.18) para a DCT bidimensional).

Temos que como $\mathcal{C}_N \mathcal{C}_N^T = \mathcal{C}_N^T \mathcal{C}_N = \mathcal{I}_N$, logo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}} = \mathcal{C}_m \mathbf{A} \mathcal{C}_n^T &\implies \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}_m \mathbf{A} \mathcal{C}_n^T \mathcal{C}_n \\
&\implies \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}_m \mathbf{A} \\
&\implies \mathcal{C}_m^T \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}_m^T \mathcal{C}_m \mathbf{A} \\
&\implies \mathcal{C}_m^T \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n = \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Pela operação matricial temos que

$$\begin{aligned}
a_{r,s} &= \left(\mathcal{C}_m^T \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n\right)_{r,s} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\mathcal{C}_m^T\right)_{r,k} \left(\hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n\right)_{k,s} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\mathcal{C}_m^T\right)_{r,k} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\hat{\mathbf{A}}\right)_{k,l} \left(\mathcal{C}_n\right)_{l,s} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{a}_{k,l} \left(\mathcal{C}_m^T\right)_{r,k} \left(\mathcal{C}_n\right)_{l,s} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{a}_{k,l} \left(\mathcal{C}_m\right)_{k,r} \left(\mathcal{C}_n\right)_{l,s} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{a}_{k,l} \frac{u_k}{\sqrt{m}} \cos\left(\frac{\pi k(2r+1)}{2m}\right) \frac{v_l}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{\pi l(2s+1)}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} u_k v_l \hat{a}_{k,l} \cos\left(\frac{\pi k(2r+1)}{2m}\right) \cos\left(\frac{\pi l(2s+1)}{2n}\right)
\end{aligned}$$

Onde $u_0 = v_0 = 1$ e $u_j = v_j = \sqrt{2}$ para $j > 0$

Exercício 3.14(3.16e2). Suponha que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tem DCT $\mathbf{X}$. Seja $\tilde{\mathbf{x}}$ o vetor com componentes $\tilde{x}_k = x_{N-k-1}$, ou seja

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_{N-1}, x_{N-2}, \ldots, x_1, x_0).$$

(a) Mostre que a DCT $\tilde{\mathbf{X}}$ de $\tilde{\mathbf{x}}$ tem componentes $\tilde{X}_k = (-1)^k X_k$. Seja $c_k = 1/\sqrt{N}$, caso $k = 0$ e $c_k = \sqrt{2/N}$caso contrário;

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_k &= c_k \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m \cos\left(\frac{\pi k(m+1/2)}{N}\right) \\
&= c_k \sum_{m=0}^{N-1} x_{N-1-m} \cos\left(\frac{\pi k(m+1)}{2N}\right) \text{ , fazendo: } l = N-1-m \\
&= c_k \sum_{l=N-1}^{0} x_l \cos\left(\frac{\pi k(N-1-l+1/2)}{N}\right) \\
&= c_k \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cos\left(\frac{\pi k N}{N} + \frac{\pi k(-l-1/2)}{N}\right) \\
&= c_k \sum_{=0}^{N-1} x_l \cos(\pi k) \cos\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) - \operatorname{sen}(\pi k) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) \\
&= c_k \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cos(\pi k) \cos\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) - \operatorname{sen}(\pi k) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) \\
&= c_k \sum_{l=0}^{N-1} x_l (-1)^k \cos\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) \\
&= (-1)^k c_k \sum_{l=0}^{N-1} x_l \cos\left(\frac{\pi k(l+1/2)}{N}\right) \\
&= (-1)^k X_k
\end{aligned}$$

(b) Suponha que "R" denote a operação de inversão que leva $\mathbf{x}$ em $\tilde{\mathbf{x}}$ e "C" denote a compressão por *limiarização* (corte de coeficientes pequenos) da DCT, ou seja, "C" denota a sequência DCT⟶Limiarização⟶IDCT. Explique porque o resultado da parte (a) mostra que $R(C(\mathbf{x})) = C(R(\mathbf{x}))$. Isto é, nossa abordagem de compressão é invariante com respeito a inversão temporal. *Dica: Mostre que $R(C(\boldsymbol{x}))$ e $C(R(\boldsymbol{x}))$ têm a mesma DCT (e como a DCT é inversível, têm que ser o mesmo vetor).* Seja c_M o valor de limiarização utilizado em C

$$\mathrm{DCT}(R(C(x))_k = (-1)^k \mathrm{DCT}(C(x))_k = \begin{cases} (-1)^k X_k & \text{caso } |X_k| > c_M \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mathrm{DCT}(C(R(x))_k = \begin{cases} \tilde{X}_k = (-1)^k X_k & \text{caso } |\tilde{X}_k| = |X_k| > c_M \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

portanto $\mathrm{DCT}(R(C(x)))_k = \mathrm{DCT}(C(R(X)))_k$ para todo $0 \leq k < N$. E assim $R(C(x)) = C(R(x))$.