MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Capítulo 2: A Transformada Discreta de Fourier

Seção 2.1: Visão geral do capítulo 2

Nesse capítulo veremos a Transformada Discreta de Fourier (abreviada como DFT=*Discrete Fourier Transform*) e sua inversa IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*). A origem dessa transformada está nas equações de mudança da base canônica para a base das exponenciais E_k: dado $x \in \mathbb{C}^N$ podemos escrever

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k \qquad (IDFT)$$

onde

$$X_k = (x, E_k),\ k = 0, \dots, N-1 \qquad (DFT).$$

Note que cada $x \in \mathbb{C}^N$ dá origem a um $X = DFT(x) \in \mathbb{C}^N$ através da equação (DFT) e correspondentemente qualquer $X \in \mathbb{C}^N$ dá origem a um $x = IDFT(X) \in \mathbb{C}^N$ através da equação (IDFT). Essas duas representações, consideradas **equivalentes** no sentido de poderem ser obtidas uma a partir da outra, estão associadas a duas perspectivas associadas às expressões **Domínio do tempo** e **Domínio da frequência**.

Seção 2.2: Domínios do tempo/espaço e da frequência (espectro)

A representação mais usual do sinal, que é a forma de onda no caso de um sinal unidimensional, é entendida como uma perspectiva **temporal** do sinal, no sentido que cada amostra x_n de um sinal $x = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ está associada a um instante específico $t = t_0 + n\Delta_t$, onde t_0 é o instante inicial e $\Delta_t = \frac{1}{R}$ é o intervalo de amostragem (R aqui é a taxa de amostragem).

Em contrapartida, o sinal $X = DFT(x)$ corresponde a uma coleção de valores X_k que participam da combinação linear $x = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k$, onde cada X_k é um *escalar* associado à forma básica de onda E_k, que como vimos é uma exponencial complexa de frequência k (voltas completas no ciclo no intervalo $0 \leq n < N$). Assim, cada componente do sinal X está associado a uma componente **frequencial** na decomposição do sinal x em formas básicas de onda exponenciais. Analogamente à decomposição que um prisma faz da luz branca em feixes de cores diferentes, o sinal X é frequentemente denominado **espectro** de x.

Os termos **domínio do tempo** e **domínio da frequência** designam portanto a interpretação associada aos *índices* do sinal: x é indexado por n que representa o *tempo discretizado em amostras*, e X é indexado por k que representa a *frequência discretizada em quantidade de voltas completas no intervalo* $[0, N)$.

No caso bidimensional, a representação mais usual é aquela das imagens, onde cada amostra $a_{i,j}$ de um sinal $A \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$ está associada a uma posição **espacial** $(x, y) = (x_0 + i\Delta_x, y_0 + j\Delta_y)$, onde (x_0, y_0) é a coordenada do canto da imagem associado ao sistema de referência espacial, e Δ_x, Δ_y são os intervalos de amostragem. Dizemos que A está representada no *domínio do espaço* (embora o livro possa por vezes abusar da linguagem e usar a expressão *domínio do tempo* como sinônimo de *domínio original do sinal*).

Como veremos na seção 2.7, a DFT de uma imagem $A \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$ produz outra imagem $\hat{A} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$, cujos coeficientes $\hat{A}_{k,l}$ estão associados à forma básica de onda exponencial bidimensional $\mathcal{E}_{k,l}$, associada às frequências k e l (k voltas completas no ciclo em relação ao índice das linhas no intervalo $0 \leq i < M$ e l voltas completas no ciclo em relação ao índice das colunas no intervalo $0 \leq j < N$). Diremos então que $\hat{A}$ está representada no *domínio da frequência*.

A motivação para passar sinais de um domínio para o outro se refere à facilidade com que certas operações são realizadas em cada domínio:

- manipulações que envolvam diretamente os valores de amplitude x_n, como aplicar ajustes de volume, obter medidas de energia $\|x\|$ ou estimar localizações temporais de inícios de eventos são geralmente muito mais fáceis de implementar no domínio original do sinal;

- manipulações como remoção de ruído, estimação de frequências ou classificação de sinais frequentemente são mais fáceis de modelar e implementar no domínio da frequência, como veremos em exemplos ao longo do livro.