

数学における形式性とは何か？

～数学史と数理論理学の立場から～

早稲田大学基幹理工学部数学科四年 *

石井大海

2013 年 6 月 20 日

1 はじめに

数学は形式性や厳密性を主にする学問である、と良く云われる。しかし、この「形式性」というのが、具体的にどういう事を指すのか、と云ったことは余り一般には知られていない。本稿の目的は、この数学の「形式性」について、余り数学に慣れ親しんでいない人々に向けて、非形式的な概説を与えることである。

本稿が書かれることになった切っ掛けは、文学部の友人の S 君の「文学において数学の形式性を採り入れようという一派がいるのだが、そもそも数学における形式性とはどういうものなのか教えてはくれないか」という依頼である。したがって、この記事は大学に入ってから数学に余り触れていないような人にあてて、雰囲気だけでも誤解がないように解説することを企図して書かれている。そのため、数学的には一部厳密性を犠牲にする部分もある。とはいえ、形式体系などというものに触れるのに厳密性を全く抜きにしては換骨奪胎も甚しいので、敢えて厳密な記述を心掛けた部分もある。

対象読者を鑑み、本稿では以下のような方針で執筆されている（予定である）：

- まず軽く数学史を概説することで、数学における「形式性」が出現する必然性と、その変遷がわかりやすいように配慮した。
- 現代の数学において「形式性」の用いられ方を、

主に数理論理学の立場から解説した。

本来であれば、数学史に関しては、ギリシアから長らく受け継がれてきた数と量の概念の区別についても言及しておくべきだろう。しかし、本稿の主眼はあくまで「形式」にあるので、そうした観点からの解説は殆んど省略し、「形式」の発展史の説明上必要になる部分で少し言及するのみに留めた。他にも、時間や分量の都合上言及や解説を割愛した概念もある。

勿論、これは曲がりなりにも学術的なレクチュアを企図したものであるので、何か間違いなどがあれば是非是非指摘して頂けると幸いである。

2 数学の歴史 ～形式の誕生～

「はじめに」で述べたように、まずは数学の発達史の歴史を通して、形式というものの役割を明らかにしていきたい。ここで扱う「数学」というのは、西洋（欧米）の数学である。文明あれば必ず数学あり。色々な文明ごとに数学の発達の仕方や、「数」というものの捉え方は異なる。例えば、東洋の数学が負数の概念をかなり早い段階で扱っていたのに対して、西洋では負数が「数」としての地位を確立するまでには長い時間を要した（詳細は足立 [2] を参照）。ここで西洋の数学に主に焦点を当てるのは、現在の主流となっている数学は主に西洋で発展し培われてきたものだからである。

そもそも数学における「形式」とは何か？それはあり体に云って**記号**のことである。数学の歴史は記号化の歴史であり、言葉を変えれば**代数化**の歴史で

* 執筆当時

ある。そして、数学の近代化はこの代数化と同義である。代数というのは、簡単に言えば文字式のようなもののことだ。よって、数学における《形式＝記号＝代数》の役割を知るには、数学が如何に発展していったのかを知ることが近道なのである。また、一口に「形式」といっても、その意味するところは時代によって変わってくる。従って、数学における「形式」と異分野の関わりを論じるには、それが一体いつの時代の「形式」であるのか、ということに注意を払うべきであろう。そういった観点からも、まずは数学史を通して「形式」の変遷を把握しておくことは重要となる筈である。

2.1 古代ギリシアの数学

西洋の数学のルーツは、古代ギリシアに遡る。古代ギリシアの数学には、**分析**（又は**解析**）と**総合**という二つの方法論があった。分析というのは、問題が解けたと仮定して、必要な前提を逆算していく、という**発見的**な方法である。対する総合という手法は、しっかりとした公理を置いて、そこから厳密な議論によって定理を**証明**していくという手法である。数学の著しい特徴の一つに、その**厳密性**がしばしば挙げられるが、これはギリシアの数学のうち総合の方法のみが後の世に伝えられ、分析の手法を伝える書物は長らく逸失していたことによる。

古代ギリシアにおいて、数学とは**幾何学**であった。ギリシアの三大問題というのを聞いたことがあるかもしれない：

角の三等分の作図 与えられた角を三等分する直線を作図出来るか？

円積問題 与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図出来るか？

立方体倍積問題 与えられた立方体の三倍の体積を持つ立方体を作図出来るか？

これらはみなコンパスと定木^{*1}では作図出来ないことが知られている。どうも出来ないらしい、ということは古代ギリシアの人々も気付いていた、では

どういう道具があれば出来るか？ということを考えていたようだ^{*2}。これらの問題は、明らかにどれも幾何に関連した問題であることがわかるだろう。

さて、先程数学の厳密性はギリシアに由来するということを書いた。その一つの金字塔が、ユークリッドの『**原論**（ストイケイア；Elements）』であり、これが長らく西洋の数学の聖典として君臨していた。そのスタイルは、まず議論の大前提となる**公理**や許容される操作である**公準**、議論に用いる用語の**定義**を定めて、これらから厳密な推論によって定理や計算を導き出すというものであった。その一部を引用してみよう（文面は坂口 [19] による）。

定義 1. 点とは部分を持たないものである。

2. 線とは幅のない長さである。

3. 線の端は点である。

4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。

5. 面とは長さや幅のみを持つものである。

公準 次のことが要請されているとせよ。

1. 任意の点から任意の点に直線を引くこと。

2. 有限直線を連続一直線に延長すること。

3. 任意の点と距離（半径）をもって円を描くこと。

4. すべての直角は等しいこと。

5. 一直線が二直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば、この二直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

公理 1. 同じものに等しいものはまた互いに等しい。

2. 等しいものに等しいものが加えられれば、全体は等しい。

3. 互いに重なり合うものは等しい。

4. 等々……

これらの前提から出発して、それまでに既に示し

^{*1} 長さの目盛が付いていない、純粋に直線を引く目的の道具を**定木**と書いて、通常の定規と区別する。

^{*2} この「定木とコンパスで」という条件を見落として、「三等分する装置を作ったぞ！数学の歴史を塗り替えた！」と騒ぎ立てたり特許を申請したりする人がいるらしい。誠に残念である。

た命題だけを使って新たな命題を証明していく……というのが、『原論』を貫いているスタイルである。具体的な証明を孫引きにしてもよいが、非常に面倒なので省略する。中学でやった初等幾何の証明を更に幾重にも折り重ねて、誤魔化しを極力避けたものが全 13 巻に亘って展開されていると思ってくれればよい。また、『原論』における議論では、我々が証明で用いるような**文字式**は一切出て来ず、すべてはことばで説明されている。この**公理的**な手法は、19 世紀末から 20 世紀にかけて、数学が再び厳密性を取り戻す時期に再び顔を覗かせることになる。しかし、詳細は後述するが、復活した後の「公理」は、古代ギリシアの「公理」とは似て非なるものである。

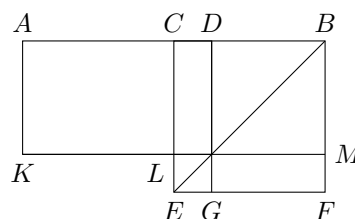
先程も述べたように、ギリシアの数学ではこうした厳密な証明以外にも、分析と呼ばれる発見的な手法が用いられていた。答えに当たりを付けるのに分析による説明が行われて、一先ずもとまったらそれが正しいことをきちんと証明する、というのがギリシアの数学だったのだ。この分析の手法に関しては、本稿の主題と外れるので詳細は省略する。

さて、ギリシアにおける数学は幾何学である、という話だった。そのため、数学の扱う量は全て長さや面積といった**幾何量**であり、数とはその量の比のことであった。ギリシアにおける**算術**はもっぱら幾何量の**比**を扱う学問である。数が全て幾何量である、ということは、つまり、**面積と長さを足すような事は出来ない**ということを意味する。だから、昔の人々は $x^2 + x - 3 = 0$ のような方程式は、そもそも考えることすら出来なかった。面積 x^2 と長さ x のようなものは足せる筈がないし、そもそも負数の概念がないので -3 というようなものも考えられない*3。この制約は、中世ヨーロッパまでしつこく付き纏うことになる。

しかし、それでも二次方程式に相当するものを考えていた形跡はある。以下は、『原論』第二巻の命題五である：

ある線分が、等しい部分と等しくない部分に

分けられたとすると、等しくない部分の全体によって囲まれた長方形と二つの区分点の間の線分上の正方形との和は、もとの線分の半分の上の正方形と等しい。



これを巧みに移動して「平方完成」して、方程式を解く（実際にデモンストレーションする）。現代的には次に相当する操作をしている：

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

しかし、文字式はないし、量は全て幾何量なので、上のような証明になるのである。

古代ギリシア時代に記号は全く出て来なかったのか？というところという訳ではない。アレクサンドリアのディオファントスが部分的に文字式を導入し、負幂も含めた指数法則などに言及したりもしていた。こうした下地は後で言及するアラビアで代数学が栄える下地となる。

ギリシア時代のまとめ

- ギリシア時代の数学の二つの方法

総合 『原論』に代表される公理から出発して厳密に**証明**を行う手法

分析 総合と並んでギリシアの数学を支える手法だったが、逸失。**発見的**な議論により、答えに当りを付ける方法。

→ 総合のみが残ったので、後の数学は厳密な証明に重きが置かれるように。

- ギリシアにおける数学：幾何学

- － 数学の扱う量は長さ、面積などの幾何量。長さや面積を足したりは出来ない。
- － 数は幾何量の比として現れる。
- － 文字式はなく、方程式は幾何の問題として表され、幾何的な操作により解かれた。

*3 更に言えば、ギリシアの時代には文字式などというものは存在しないので、このように書くことすら出来ない

2.2 アラビアの数学

時代が下ると、他のギリシアの多くの思想や文化と同じく、数学もアラビアに継承される。ここアラビアで、代数学の発展の礎が築かれることになる。アラビアに受け継がれ、独自の発展を遂げた数学は、後にルネサンスの時期にこれまた他の思想や文化と同時にヨーロッパへと逆輸入されることになる。

記号代数を本格的な研究分野に仕立て上げたのは、**アル＝フワーリズミー**であるとされる。アル＝フワーリズミーは二次方程式を五つの型に分類した：

$$\begin{aligned} ax^2 &= bx & ax^2 &= b & ax^2 + bx &= c \\ ax^2 + c &= bx & ax^2 &= bx + c \end{aligned}$$

「え？ $ax^2 + bx + c = 0$ だけで十分じゃないの？」という声が聞こえてきそう。しかし、先程から繰り返しているように、**量は幾何量**なのである。したがって、負の数やゼロといった数はないので、このようにゼロやマイナスが出て来ないように形を分類してやる必要があるのだ。また、ここでは文字式を用いて書いているが、実際には、**これらは全て言葉で表現**されている。例えば、 $x^2 + 21 = 10x$ を例を見てみよう（以下の例は全て坂口 [19] に拠る）。

根の数を半分にすると 5、自乗して 25、そこから 21 を引いて 4。その根を取ると 2、根の数の半分の 5 からそれを取ると、3 が残る。それが求める元手の根である。つまり元手は 9。

これを記号で書くと、次のようになる：

$$\begin{aligned} x^2 + 21 &= 10x \\ x^2 - 10x + 21 &= 0 \\ (x - 5)^2 - 25 + 21 &= 0 \\ (x - 5)^2 &= 4 = (-2)^2 \\ \therefore x &= -2 + 5 = 3 \end{aligned}$$

代数を知っている我々からすると、なるほどしっかり式変形が出来ているし正しそう。というような気がする。しかし、この時代においては、文字式の証明というのはまだしっかりした証明とは認めら

れておらず、アル＝フワーリズミーは先程のユークリッド『原論』のように幾何的に「証明」をつけることで正当化している（時間があればこの方法も紹介する）。この時点では、まだ幾何学のほうが代数学よりも厳密な証明法であると認識されているのだ。

このように、一度代数的な手法が確立されれば、もう幾何的な意味に立ち戻っていちいち変形をする必要はなくなってしまう。いうなれば、**意味**を離れて、純粋に**機械的**な方法で答えを求めることが出来るようになるのだ。

これが百年ほど時代が下ると、次第に代数的な方法と幾何学的な証明法が同等のものであると認識されるようになってくる。もつとも、まだ言葉を用いた説明しか行われていなかったもので、より深い進化はヨーロッパでの発展を待たなくてはならない。

アラビア数学のまとめ

- ギリシアの数学はアラビアのイスラム文化圏に引き継がれた。
- アル＝フワーリズミーが（言葉による）代数の知識を体系付け、後の代数化の基礎を整えた。
 - － 記号による代数はまだ主流ではない。
- 厳密な証明には依然として幾何学が用いられていたが、代数的な手法も次第に（アラビア）数学の主流になりつつあった。
- 代数的な手法は、幾何的な意味を考えずに機械的に答えを求めることが出来る。

2.3 中世～ルネサンスの数学

アラビアで代数学が発展している一方、ヨーロッパにおいては、数学は未だユークリッドの『原論』で止まっている状態であった。その状況が変わり始めたのがルネサンス期である。この変化を主導したのは、大学の数学者ではなく、アラビアからギリシアの数学や代数学を輸入しはじめた商人や在野の数学者達である。

ヨーロッパで記号代数が花開くのに必要な先鞭を付けたのが、三次方程式の解の公式で有名な**カルダノ**と、解と係数の関係を発見したことで有名な**ヴィエト**である。いずれも 16 世紀の数学者である。

カルダノの時代、まだ負数や虚数は正当な数と認

められていなかったし、文字式を用いた手法も取られていなかった。例えば、三次方程式 $x^3 = ax + b$ の解を与えるカルダノの公式は、現代的には

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

と書かれる。しかし、カルダノは文字式を使わなかったため、著書で同じことを文章を用いて記しており、実にページの半分以上を費してこの公式を記述している、らしい [14]。また、ここでは便宜的に文字を用いて記述しているが、カルダノが扱った方程式は具体的な数値、それも正の数のみを係数とする方程式であった。したがって、先のアル＝フワーリズミーのように、項がどこにあるかで異なる方程式と見做されるので、それぞれについていちいち解法を解説している。

また、上の公式の証明ではある三次式の因数分解の公式

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^2 - v^2$$

が本質的な役割を果たすのだが、カルダノはこれが成立するという「証明」を、立方体の部分を切り貼りしたりして、幾何的に示している。この時点では、まだユークリッドやアル＝フワーリズミーの時代の証明＝幾何という世界観を引き摺っていたのである。

この状況を打開したのが、同じく 16 世紀の数学者フランソワ・ヴィエトである。高校の時だったかに、二次方程式の解と係数の関係を習うと思うが（忘れてしまったという場合は構わないので読み飛ばしてよい）、それを発見したのがヴィエトである。ヴィエトは、『解析技法序論』において、方程式に任意係数を導入した。特に、未知数は母音 (A, E, I, O, V, Y) で表し、定数は子音で表す、という約束をした。このお陰で議論をより記号的に、機械的に行うことが出来るようになった。西洋数学に**記号が爆誕した瞬間**である。もっとも、ヴィエトは未だギリシアの呪縛から逃れられていない部分もあり、例えば解は全て正の実数に限っていたし、方程式に表れる量は全て**幾何量**として見ていた。したがって、方程式の各項の次数は全て揃えて書かれていた。こ

んな具合に：

$$x^3 + 3B^2x = 2C^3$$

x^3 は体積なので、後の項は全部体積になるように係数を工夫して書かれているということだ。

こうしてヴィエトが先鞭を付けた記号代数を発展させたのが**ルネ・デカルト**と**ピエール・ド・フェルマー**である。デカルトは「線分の代数」を導入し、それまで幾何的な意味に依存していた代数を、その桎梏から解き放った。与えられた二つの線分に対して、それらの間の加減乗除と平方根を作図する方法を与えることで、ヴィエトが課していたような幾何量としての制限を外すことに成功したのである。これにより、**幾何学の代数化**がはじまった。これがどういうことかといえば、図形を一定の方程式に従う点のあつまりと見做すということだ。例えば、円の方程式が $x^2 + y^2 = 1$ で与えられるとか、放物線が $y = ax^2 + b$ で与えられる、といった具合である。この発想に最初に至ったのはフェルマーであり、上で挙げた円や放物線を二次曲線として統一的に記述することに成功した。これらはギリシア時代には円錐を切った断面として現れる**円錐曲線**として取り扱われていたが、フェルマーはその理論を代数的に書き直したのである。それまでは、幾何的な種々の操作によって証明されたりしていた図形的性質を、方程式の性質として扱うことが出来るようになったのである。

2.3.1 中世～ルネサンスの数学のまとめ

- ヴィエトが記号代数の先鞭を付けた。
 - － 記号が爆誕したお陰で、議論が簡単になった。
 - － 記号的操作により、幾何的な意味を忘れて作業が出来るようになった。
- デカルトによって、代数が幾何量の呪縛から解放された。
- デカルトやフェルマーは、幾何の代数化を進めた。

2.4 19 世紀、抽象代数の成立

このように、記号の誕生によって数学は爆発的に発展することとなった。この爆発的な発展の陰に

は、厳密性が疎かになる、という弊害もあった。記号は意味を考えずに操作が出来てしまうため、時折誤った議論に陥ってしまうのである。例えば、次のような「 $1 = 0$ の証明」を考えることが出来る。便宜上 $x = 1$ とおいて、次のように式変形をする：

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x^2 &= x && (\text{両辺に } x \text{ を掛ける}) \\ x^2 - x &= 0 && (x \text{ を左辺に移項}) \\ x(x-1) &= 0 && (\text{左辺を因数分解}) \\ x &= 0 && (\text{両辺を } x-1 \text{ で割る}) \end{aligned}$$

さて、最初に $x = 0$ とおいて、結論 $x = 1$ を得た。この x は同じものなので、したがって $0 = 1$ を得る……はて？どこで間違えたのだろうか？

実は、一番最後「両辺を $x-1$ で割る」というところで間違いを犯しているのだ。 $x = 1$ ののだから、 $x-1 = 0$ であり、小学校で口を酸っぱくして云われるように「0 で割ってはいけない」。そうした「意味」を無視して計算した為に、 $1 = 0$ という間違った結論に到達してしまったのである。

しかし、この「意味」というのは、よくよく考えると厄介である。負数の演算の「意味」とは何か？無理数の演算とは？虚数とは？徒らに意味ばかり強調していたのでは、再び幾何量の束縛に逆戻りしてしまうことにもなりかねない。

18 世紀頃には、負数や複素数といった概念も数学の議論の中で頻繁に用いられていた。しかし、その「意味」は不明瞭なままで、「マイナスにマイナスを掛けると正になる」といった計算法則は知られて用いられていたが、その正当化はされていなかった。『原論』以後の厳密性はおきざりにされていたのである。

こうした問題に真正面から取り組み、大きな成果を残したのが、19 世紀の数学者ジョージ・ピーコックである。彼はまず、正の数における代数を「算術代数」、それ以外の一般の代数計算を「記号代数」と呼んで区別するところから始めた。ピーコックはまず、正の数に関する「算術代数」の計算法則は確かな信用のおけるものとして認める。その上で、「算術代数で成り立つ法則は、そのまま記号代数でも成

り立つべきである」という**形式普遍の原理**に基づいて、算術代数の法則を一般の記号代数にまで拡張して、負数の演算法則を導き出すのである。例えば、 $(-b)(-d) = db$ に対するピーコックの「証明」は次のようにして成される：

$$\begin{aligned} a > b, c > d \text{ であれば, } (a-b)(c-d) &= \\ ac - ad - bc + bd \text{ は常に成立するので, これは} & \\ \text{算術代数の計算法則である. そこで, この大小} & \\ \text{関係は無視して, } a = c = 0 \text{ と置けば,} & \end{aligned}$$

$$(-b)(-d) = (0-b)(0-d) = bd$$

となる。

ピーコックは、更に一般の実数といったものから離れて、純粋に文字式を用いた**記号代数**における計算の意味とは何か？という問に対し、ピーコックは次のように答える。

記号代数では、計算法則がその意味を決める……法則は勝手に仮定されたものだと思ってよい。実際、それらは記号やその結合態の科学に勝手に課され、矛盾さえしなければ、他のいかなる体系にも適用出来るものである^{*4}。

つまり、記号代数における計算は予め取り決めておいた**計算法則**にのみ束縛されるものであり、それこそが意味である、ということになる。また、負数演算の正当化において、その計算法則は「正の数の演算法則と両立する」という前提から定められたが、計算の対象をそうした「数」から離れさせれば、異質な計算法則を持たせても（矛盾しないのなら）構わない、というのがピーコックの考えであった。例えば、上で示した「 $1 = 0$ の証明」は、整数や実数の範囲で考えれば確かに間違った証明ではあるが、「ゼロによる割り算を許すような代数系においては、 $1 = 0$ が成り立つ」という証明に読み替えることが出来る。

この思想は、当時においては時代のかなり先をいったものであった。ピーコックの影響を受けたイ

^{*4} 訳文はクライナー [14] P.18 より

ギリスの数学者達は、この思想に後押しされて、必ずしも普通の意味での数とは関係がないような新たな「代数」を作っていた。例えば、数学者・論理学者として有名な**ジョージ・ブール**は、一般的な論理法則を表す代数として**ブール代数**というものを定義したりもしている。

このように、「予め定めた計算法則を認めてその下で成立性質を研究する」という方法論を**抽象代数**と云う。上のピーコックの思想は、この抽象代数の考え方を先取りしたものである。抽象代数は、19世紀末ごろから盛んに研究され、数学の一つの主流を占めるに至った。

「抽象代数」と云うのは方法論の総称であり、具体的にどのような計算法則を認めるかによって様々な分野が出来上がる。そうした計算法則の集まりのこと^{*5}を**代数系**といい、代数系を規定するものとして最初に選んだ計算法則のことをその代数系の**公理(系)**と云う。代数系の例として群の公理を見てみよう。

Def. 2.1 (群). 次の法則が成り立つとき、集合 G とその上の演算 \cdot が**群**を成すという。

結合律 任意の $a, b, c \in G$ に対して、 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ が成立する。

単位律 ある特別な「数」 $e \in G$ があって、どんな $x \in G$ に対しても $x \cdot e = e \cdot x = x$ が成立する。この e を単位元と呼ぶ。

逆元の存在 任意の $x \in G$ に対し、 $x^{-1} \in G$ という「数」が定まって、 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ が成り立つ。この x^{-1} を x の逆元と呼ぶ。

簡単に用語と記号の説明をしよう。「集合」というのは、ここでは何か適当に議論の対象となるものを集めてきたものだと思えばよい。集合 G に対して、 $x \in G$ は「 x は G に入っている」ということを意味している。上の公理系は、 G と呼ばれるもの

^{*5} 正確にはその計算法則を満たすようなもののこと

に含まれるものだけを議論対象にすると宣言していて、それらの満たすべき計算法則はシカジカカヨウのものであると述べているのだ^{*6}。

この法則を満たすものは何でも「群」になる。たとえば、整数の全体は足し算 $+$ について群を成す。他にも、行列式がゼロでないような行列も積に関して群を成す。特に、自然数の足し算については**交換律** $x + y = y + x$ が成り立ち、このような交換律が成り立つ群は特別に可換群とか、アーベル群であるといったふうに呼ばれる。

さて、ここでは『原論』と同じく「公理」という言葉が用いられているが、これらの意味合いは若干異なるものである。『原論』における公理は、幾何学的な空間を規定するような、「絶対的な法則」的な意味合いを持つ。それに対して、代数系の公理は「こうした法則を満たすものを議論の対象とする」というような宣言である。

群の公理を満たすものは、何であれ群と呼ばれるのであった。このような方法を取ると何が嬉しいのだろうか？それは、代数系のもつ「一般性」である。数学においては、上で挙げた群の構造を持つものは至るところで出て来る。そのそれぞれに対していちいち同じような性質を証明していたのでは日が暮れてしまう。その点、一度「群の性質」として証明して仕舞えば、群の公理を満たすような体系の全てについて一挙に使える性質が得られる。また、その代数系何で出来ているのかを忘れて、それが満たす計算法則だけを考えることで、議論の本質的な部分が明瞭になるという威力もある。例えば「自然数」や「有理数」「行列」といったような個々の「特殊例」を離れて、より普遍的な性質を考えることが可能になるのである。

こうした抽象代数の威力が数学以外のところで発揮された例としては、ムルンギン族の婚姻体系の解明という例がある。アボリジニーのムルンギン族の婚姻体系は複雑な規則に支配されている、という

^{*6} ここで定義に「集合」などと云う言葉が現れているが、初期の抽象代数の勃興期においてはまだ集合という概念はない。そうしたものは用いずに集まりとかそういう言葉を用いて定義されていたことに注意しよう。

ことを文化人類学者のレヴィ＝ストロースが知り合いだった数学者のアンドレ・ヴェイユに話したところ、ヴェイユがその婚姻関係に群構造が入っていることを見抜いて綺麗に整理してしまった、という逸話である。これは、正に「抽象代数」という考え方の射程の広さを表していると云えるだろう。

このように、議論の対象とするものの満たす公理を定めて、そこから議論を進めるという方法論を**公理的な手法**とか、**公理主義**^{*7}と呼ぶ。こうした公理的な手法は代数に留まらず現代の数学の至るところで用いられている。例えば、現代の幾何学は、**位相空間**や**多様体**と呼ばれるものの公理系を定めて、その公理を満たすものはすべて幾何的と見做して議論を進めることが出来る。また、その研究の上でも、群論をはじめとした抽象代数が絶大な威力を発揮する（というか、実は群論が栄える大きな原動力となったものの一つが幾何学なのである）。こうした現代数学における公理的手法と形式性については、次章においていくらか詳しく見る。

こうした公理的方法論を、ユークリッド『原論』の方法論を逆用する形で本格的に数学に導入し、発展させたのが19～20世紀を代表する偉大な数学者である**ダフィット・ヒルベルト**であり、その手法を先鋭化し数学の形式化を推進したのが第二次大戦後の数学者集団**ニコラ・ブルバキ**である。続く節では、ヒルベルト登場前夜における数学のいっそうの厳密化の流れを紹介し、本章最後の節でヒルベルトによる数学の基礎付け計画と、ゲーデルによる最終的な決着までを概説する。

2.5 コーシー、ワイエルシュトラス——数学の厳密化と算術化の時代

前節まで、主に代数学の発展という観点から歴史の流れを概観してきた。文字式の導入に始まる形式性は、代数以外にも**無限小解析**という新たな分野を数学に齎すことになった。無限小解析とは、「無限に小さな量」を縦横無尽に使って微分積分を展開し、函数や曲線の性質を調べる分野である。大体高

校で習うような微分積分と同程度のものであると思ってよい。

例えば、18～19世紀の数学者は「無限に小さな量」 ε を用いて、微分を $f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ などと定義した。「 x をほんの少しだけ動かしたときの y の変化率」という訳である。これを用いれば $f(x) = x^2$ の微分は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} \\ &= \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} \\ &= 2x + \varepsilon \\ &\approx 2x \end{aligned}$$

のように計算出来る。ここで出て来る ε はゼロではないが無視することが出来る、というなんともモヤモヤとする数であるかのように扱われている。ゼロではない、というのはもし $\varepsilon = 0$ ならそもそも割ることなど出来ないからである。ゼロではないから割れるけども、無限に小さいから無視できる——これは殆んど屁理屈に属するのではないか^{*8}？

こうした「無限小」を用いた計算を支えている根拠は、物理学的・幾何的な直観であり、無限小を用いて計算した結果が実際の観測結果などによく符合するという経験的な事実であった。しかし、数学の研究や教育をする上で、そういった外的な「直観」に頼った説明をしなくてはいけないというのは非常に都合が悪く、厳密性にも欠ける。この現状を打破し、確固たる基盤に載せようという運動が19世紀の初頭に起きる。これは、抽象代数の勃興期と重なり、こうした数学の厳密化・記号的操作の正当化は時代の要請であったのである。

まず、無限小解析の厳密化で大きな一步を踏み出したのが**コーシー**である。コーシーはまず無限小量

^{*7} これは日本独自の訳語であり、「Axiomatism」などという専門用語は存在しない [9].

^{*8} 以下余談：現代においては、超準解析や冪零無限小解析といった、無限小量を「数」として扱うための手法が幾つか開発されている。これらは数理論理学の手法を応用しており、形式系や論理に関する研究が深められた今日だから可能になった定式化である（数理論理学自体があまり流行っていないので、これらの手法は未だ主流には至っていない）。また、代数幾何においては上で述べた代数系そのものが幾何の対象とした扱われるが、その際に冪零元は或る種の無限小のような振る舞いをする。

を定数と考えるのを止め、変量と考える視点を導入した。つまり、こんにちの高校数学でやるように、無限小量の出て来る式の値を、その無限小量を限りなくゼロに近づけたときの極限として定義したのである。その為に、コーシーは極限の「定義」も与えている。これも、今日の高校数学で習うものとはほぼ同じである。

x がある定数 a に限りなく近付くとき、 $f(x)$ の値も限りなく b に近付くなら、つまり $f(x)$ と b との差をいくらでも小さく出来るとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ と書く。

このように云いかえることで、それまでの物理的な直観や経験的事実に頼っていた根拠付けから離れて、数学の中だけで無限小量を使った議論を正当化出来るようになったのである。

しかし、ここでも「限りなく近付ける」とか、「差をいくらでも小さくできる」という辺りに曖昧性が残っている。これを更に厳密化し、解析学を論理と実数の性質に完全に還元することに成功したのが、**ワイエルシュトラス**である。ワイエルシュトラスは、 ε - δ 論法と呼ばれる方法を導入して、上のコーシーの定義を厳密化した。

どんな正の実数 $\varepsilon > 0$ に対しても、次の性質を満たすような正の実数 $\delta > 0$ を取ることが出来る：どんな実数 x に対しても、 $0 < |x - a| < \delta$ なら $|f(x) - b| < \varepsilon$ が成立する。

これは、上のコーシーの「定義」をそのまま厳密化したものになっているが、論理と実数だけでしっかりと書かれているので、条件を機械的にチェックすることが出来る。コーシー自身も、証明の中で上のような不等式を用いた証明を行っている部分もあったが、連続性の「定義」として採用したのはワイエルシュトラスがはじめてである。こうして、あやふやなものであった解析学は、純粋な論理と実数の問題に帰着することが出来、数学の中だけで厳密に取り扱うことが出来るようになったのである。実数や自然数などの数の計算の体系を「算術」と呼ぶので、これは「解析学の**算術化**」とも呼ばれる。

ワイエルシュトラスが解析学を実数論に還元した際、「**実数の連続性**」という性質を使った。ものすごく直感的に言えば、「実数は切れ目なくピッシリと詰まっている」というような性質のことである。これは実数ならば当然成り立つと思われる性質だが、ではどうして成立するのだろうか？と考えると簡単ではない。そこでワイエルシュトラスは、**有理数の集合を使って実数を定義**することで、実数が連続性を持つことを証明したのである。このように、実数をより基本的な概念に還元することを**実数の発生学**と呼ぶ。

有理数の集合を用いて実数を定義しようとしたのは、ワイエルシュトラスのみではない。今日の集合論の創始者と呼ばれる**ゲオルク・カントール**と**リヒャルト・デデキント**もそうした試みを行った人々の中の一人（ふたり？）である。特にデデキントは、実数を有理数を用いて構成し、更に有理数を整数に還元し、整数を自然数に還元する、ということまで行っている。自然数は最も基本的な数であるので、かくて数学の全分野が算術化されたということになる。

しかし、デデキントはそれに留まらず、カントールとデデキントが中心となって建設を進めていた集合論を用いて、自然数を定義している。デデキントは無限集合の存在を哲学的な理由から認めていたので、その無限集合を用いて自然数を構成してみせたのである。

2.6 カントールとデデキント——集合論の誕生

ここで、集合論について簡単に紹介を行っておこう。

集合論の創設者と目されるのは、先述したようにカントールとデデキントである。カントールは解析学の研究をするうちに、デデキントは代数的整数論の研究をするうちに無限集合の概念に辿り着き、それらを数学的対象として初めて陽に扱った。デデキントは集合論を用いて数学を記述する方向に研究をすすめ、カントールは集合論それ自身を対象として研究を深めていった。

集合論の扱う「集合」というのは、ありていに云って「物の集まり」のことである。物の集まりを

記述するには、その中身を $\{1, 2, 3\}, \{\text{私, あなた}\}$ のように直接記述する **外延的**な方法と、 $\{x \mid x \text{ は偶数}\}, \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$ のようにどういう性質のものを集めたのかを記述する **内包的**な方法がある。また、集合 a が A に属する時 $a \in A$ と書き、 a は A の **元**であるとか **要素**であるとか云う。集合とは物を集め合わせたものなのだから、二つの集合 A, B が等しい ($A = B$) というのは、その構成要素が一致するという事として定義出来る。例えば、 $\{n \mid n \text{ は } 5 \text{ 以下の負でない偶数}\}$ という集合と、 $\{n \mid n(n-2)(n-4) = 0\}$ という集合は、それぞれ異なる条件により定義されているように見えるが、その元を書き下せば共に $\{0, 2, 4\}$ となるので、同じ集合になる、という具合である。これを集合の **外延性**といい、集合が外延的であるという約束のことを **外延性公理**と云う。

集合論の勃興以前にも、有限個の物のあつまりを考えることはあったし、陰に無限の物を考えることはよくあった。集合論の特徴は、より積極的に「無限個のものの集まり」の性質や構造を考えようとすることである。特に、集合論がそれまでの数学と違ったのは、**「無限」を数える**ことを企図したことにある。

無限を数えるとはどういうことか？その為に、物を数えるとはどういうことかを考えてみよう。普段物を数えるとき、我々は指をさしながら「一つ、二つ、三つ、……」と数を（心の中で）唱えながら数えている。確かにそうだ。しかし、例えば 10036 個のものを数えようとか、2223339393 個のものを数えようと思うと、この方法は上手くいくだろうか？まあ、原理上上手くはいくが、絶対途中で数え違いをするだろう。ではどうすればいいだろうか？

同じようなジレンマに立たされた歴史上の人物・豊臣秀吉に学んでみよう。ある日、秀吉は信長に「山の本数の本数を数えて参れ」と命じられたが、一々数えていてはもう何がなんだかよくわからない。そこで、秀吉は千本くらいの縄を用意させて、一つの本に対してちょうど一本ずつ、漏れのないように縄を巻いて行つた。もう全部の本に巻き終えたぞ、というところで彼は残った縄の本数を数えて、最初

の千本から引いて山の本数を弾き出したのである。

秀吉が行ったのは、**一本の木と一本の縄を対応させる**ということである。より詳しくいえば、

1. 一本の木に対してちょうど一本だけ縄を巻くようにして、
2. どの木も巻き漏らさないように注意して巻いていった。

のである。これこそ、物を数えるということの本質だ。この観点に立てば、たしかに最初の「ひとつ、ふたつ、みつつ、……」と数えていくという方法も、同じように自然数と物を一つ一つ対応させていっていることになる。ただ秀吉はそれだと数え落としや重複がありそうでこわかったから、縄をつかってわかりやすくやった、ということである。

この考え方を使えば、「無限を数える」ことが出来るようになる。つまり、二つの集合の要素の数が等しいというのは、「一つの要素に対してちょうど一つの要素を漏れなく割り当てることが出来る」ということになる。こういう対応のことを、数学の用語で「一方の集合から他方の集合への全単射が存在する」と云う風に云う。

このアイデアを用いて、カントールはあらゆる集合の「数」を数えていった。カントールは、自然数も整数も有理数も、実はすべて同じ数だけ存在するというを示した。例えば、整数と自然数が同じ数だけ存在する、というのは、次のような対応を考えればわかりやすい。

0	1	2	3	4	...
↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	-1	2	-2	...

じゃあ、全部の数は同じだけしか存在しないんじゃないか？いや、そんなことはない。カントールは、対角線論法と呼ばれる有名な議論により、実数は自然数よりも真に沢山存在することを示したる^{*9}。その概略はこうである。

まず、これも驚くべきことではあるのだが、実

^{*9} 初出時は異なる論法で証明されていた

数全体と $0 < x < 1$ の範囲の実数は同じ数だけあるということが云える。この事実を使おう。もし、 $0 < x < 1$ の範囲の実数が自然数とおなじ数だけ存在したとすると、一番目の実数、二番目の実数、三番目の実数、……と並べていくことが出来る筈だ。そこで、すべての実数を次のように一列に並べて、無限小数展開しよう：

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots \\ a_1 &= 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_2 &= 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ &\vdots \\ a_n &= 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \end{aligned}$$

つまり、 n 番目の実数の小数点以下 k 桁目の数字を a_{nk} と書くことにするのだ。ここで、次のようにして実数 $b = 0.b_0b_1b_2\dots$ を定める：

$$b_n = \begin{cases} 4 & (a_{nn} = 5) \\ 5 & (a_{nn} \neq 5) \end{cases}$$

つまり、 n 番目の実数の n 桁目が 5 ならば 4 を、5 以外の数字であれば 5 を、 b の n 桁目の数字として採用するのだ。ここで 5 とか 4 とかを使っているのは別に何でもよくて、ようは b の数字は a_n とは必ず n 桁目で異なっているように作っている、というところがポイントである。

さて、このようにして作った、 b も $0 < b < 1$ を満たす実数だから、上の「実数一覧」のどこかに入っている筈である。そこで ℓ 番目に出て来るとする： $b = a_\ell$ 。このとき、 b の ℓ 桁目の数字は何だろうか？ $b_\ell = a_{\ell\ell} = 5$ だとすると、 b の作り方から b の ℓ 桁目は 4 でなくてはならない。これは矛盾である。よって、 $a_{\ell\ell} \neq 5$ 。すると、 a_ℓ の ℓ 桁目が 5 でないので、再び b の作り方から $b_\ell = 5$ となる。よってこちらも矛盾。

ℓ 桁目は 5 か 5 でないかのどちらかの筈だ。しかし矛盾が出てしまった。それは、「実数は一つ、二つ、三つ……と並べられる」としたからである。よって、実数は自然数より沢山あることがわかる。

また、無限の世界では**順序数**と**基数**が本質的に異なるものとして現れてくる。順序数というのは「一番目、二番目、三番目、……」と数えていった番号を表す数で、基数というのは「5 個のバナナ」「300 人のバツハ」のように物が幾つあるのかという個数を表す数のことだ。有限の範囲内では、つまり自然数の範囲内では序数の概念と基数の概念は一致する。だから我々が物の数を数えるときには、一つ一つ指差しながら「一つ、二つ、三つ、……」と順番に列挙していく。しかし、数を無限にまで拡張すると、この統一が崩れる。これを説明してみよう。 $0, 1, 2, 3, \dots$ と数えていって、全ての自然数を数え終わったとする。この数え方に対応する番号の振り方を ω と書くことにする。おなじように、今度は偶数だけ $0, 2, 4, \dots$ と数えていってみる。これも数え方だけ見ると、自然数の数え方と同じなので ω だ。同様に、奇数だけ $1, 3, 5, \dots$ と数えていく方法も ω と同じだ。それでは、まず偶数を全部数え上げてから奇数を数え上げるような数え方はどうだろうか？ この数え方は「 ω 数えてからまた ω 数える」という数え方になるので、 $\omega + \omega = \omega 2$ と書かれることになる。これは、 ω とは明らかに違う数え上げ方だ。なぜなら、 ω の数え上げが終わっても、まだその後に ω 個残っているからである。しかし、どちらも同じ「自然数」を数え上げる方法には変わらない。こんな具合に、同じ個数の物を数えるのにも、数え方は幾つかの通りが有り得るのだ。

カントールは、こんな具合に分離してしまった順序数と基数の概念を統一すべく、ある予想を打ち立てた。それが**整列可能定理**である。それは、「どんな集合も、適当な順序数と同じようにしてその元を数え上げることが出来る」という予想だった。カントールはこのことを証明できなかったので、予想として世に問うたのである。

こんな具合にして、カントールは「無限」について色々なことを調べていった。カントールがこうした結果を出しはじめた頃の数学界ではまだ無限をタブー視する傾向が強く、しばしば強い反発にあってきた。カントールの師匠であるクロネッカーもそんな反対派の一人であり、カントールは一時のきな

み論文の掲載拒否にあったり、良い職にありつかなかったりという憂き目にあっている。こうした状況でカントールは「数学の本質はその自由性にある」という名言を残している。

閑話休題。当初はそのような大きな反発にあったカントールの集合論であったが、デデキントが集合論を用いて自然数論を展開して数学を集合論の中で行えることをデモンストレーションしてみせたり、代数学を集合論を使って書き換えて大きな成果を上げたりしたため、集合論は次第に数学の手法の中心へと上り詰めていったのである。

2.7 フレーゲ、ペアノ——自然数の発生

デデキントは、自然数論を集合論へと還元した。デデキントは、集合を論理の一部であると見ていたため、彼は数学を論理学に還元したと主張し、自らを**論理主義者**と呼んだ^{*10}。

自然数の発生学について考えた人間はデデキントのみではない。その主要な人物として**ジョゼッペ・ペアノ**と**ゴットローブ・フレーゲ**を挙げることが出来る。これら三人の自然数に対する再度は三者三様に異なっている。それらの細かな比較・解説は足立 [3, 2] に譲るとして、ここでは簡単な概説を行うことにする。また、フレーゲ、ラッセルらに始まる数理論理学の方法論については、次の章で簡単にその概要を紹介する。

フレーゲは、著書『概念記法』によって、こんにち**述語論理**と呼ばれている論理体系を定式化し、『算術の基本法則』でそれを用いて論理法則だけから自然数を発生させて見せた。フレーゲ以前にも、ブールやパースなど論理学に数学を応用しようとした人間は居た。しかし、フレーゲが企図したのは、論理学を厳密化し、そのことによって数学を発生させることであった。フレーゲは、アリストテレス以来の論理学では主語と述語として扱われていた概念を、**項**と**命題関数**という概念で置き換えることにより、その厳密性と適用範囲を増加させた。「 A が B を C する」のような関係性から、「 a が P という性

質を持つ」という風に変化させたのである。こうすることで、性質の成り立つ範囲に言及する**量化**の概念もあわせて明確化し、より複雑な主張を論理的な命題として書くことが出来るようになった。こうした述語論理（フレーゲの言葉を借りれば概念記法）の道具立てと、命題関数の**外延**という概念を導入し、そこから自然数を立ち上げてみせたのである。「外延」というのは、前の節で説明した集合の内容的な定義とほぼ同じもので、 $P(x)$ という命題関数（＝性質）があったときに、 $P(x)$ を満たすものの全ての集まりに対応するような存在者である^{*11}。この外延を取る操作と、「入出力が一致する関数の外延は等しい」という公理と論理だけを用いてフレーゲは自然数を発生させることに成功した。数学の全ては自然数を元にして構成できるのだったから、つまり論理から数学を生じせしめたのである。

最後の「入出力が一致する関数の外延は等しい」と云う公理は、関数を命題関数に制限すれば、単に集合の外延性公理のことである。また、「任意の関数の外延を取れる」という公理も、命題関数について考えれば「好きな性質を満たす物を集めて集合を作れる」ということになる。この公理は「**内包公理**」と云う。前述の外延性公理とこの内包公理を持つ集合論のことを**素朴集合論**と云うが、命題関数に限って考えればフレーゲの体系は素朴集合論の公理を述べたものと了解できるため、フレーゲを「素朴集合論を定式化した初めての人物である」と云うこともしばしばある。ちなみに、フレーゲ以前にカントールらが研究していた「集合論」は公理化されたものではなく、「物を集め合わせる」という素朴な概念を前提としたものであった。したがって、フレーゲは集合論を公理化した一番最初の人間ということにもなる^{*12}。デデキントによる、集合論に基づいた自

^{*10} しかし、集合は論理からはみ出た、数学のものだとするほうが自然であり、現在デデキントを論理主義の文脈に置く人間は少ない。

^{*11} 厳密には、「外延」を取る操作は命題関数に限らず任意の関数に対して定義されていた。ここで集合に対応すると云っているのは、特に真理値を値に持つ「命題関数」の外延が、デデキント-カントールの集合概念と一致するということである。

^{*12} 公理化される以前の集合論を指して素朴集合論と呼ぶことも世間では多いが、厳密にはフレーゲの体系のように形式化されたものを指すものである。

自然数の発生学とフレーゲによる自然数の発生学を隔てる一つの大きな差異は、この集合論が公理化されているかどうかというのが一つである。デデキントは思考物も実在も全てひっくるめて集めてきたような、素朴な集合論に立脚して自然数を発生させたため、議論は論理学に還元されたとはいいがたい。また、フレーゲも指摘しているように、デデキントは自身を論理主義者であると称しながらも、自然数論を論理法則を用いて正当化するような事は何も行っていなかった。対してフレーゲは、論理学をしっかりと定式化し、その前提や推論規則を明らかにした上で、それを用いて自然数を発生させられることを示したのである。

ペアノは、デデキントともフレーゲとも異なったアプローチで自然数論を展開した。ペアノは、自然数が満たすべき性質を抜き出し、自然数の**公理系**として定式化したのである。ペアノはイタリアの数学者であり、数多くの数学記号や論理記号を発明し、数学の形式化や記号論理の発展に貢献した人物である^{*13}。現代的な論理や集合の記号は、ペアノが発明した記号法を受け継ぐものになっている。フレーゲも記号論理のための記法を発明してはいるが、それは平面的な図のような形をしており、非常に難解であったため殆んど広まらなかった。ペアノはフレーゲに対して「私の記号法で本を書き直してはどうか」という手紙を送っている程だ。

さて、ペアノの自然数論である。ペアノが行ったのは、自然数の性質から、残りの全ての性質が従うようないくつかの性質を抽出することだった。これは今日**ペアノの公理系**と呼ばれるものである。それを現代的に述べ直すと、次のような形になる^{*14}。

1. 0 は自然数である。
2. 自然数 n に対し、後者と呼ばれる自然数 n' が

存在する。

3. $n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$
4. 0 はどの数の後者でもない。
5. 0 がある性質 S を満たし、もし n が S を満たすならば n' も満たすとき、全ての自然数は性質 S を満たす。

五番目の条件は**数学的帰納法の原理**と呼ばれるものである。ペアノはこの五条件を満たすものを自然数と呼ぼう、と提案した。デデキントやフレーゲは、自然数を「構成」してみせ、それからその自然数が満たす性質としてこの五つを紹介していたが、ペアノは二人とは違う立場である。特に、ペアノは自然数の概念は論理には還元することは出来ないとの立場を取り、自然数を論理や集合を使って「定義」するのではなく、その自然数概念を規定する公理を与えることを目標としたのである。したがって、ここでの「公理」の意味合いは、「群の公理」よりも『原論』の公理に近いものを持っている。ペアノが与えようとしたのは、自然数の性質がすべてそこから従い、なおかつそれらの公理を満たすような物は、記号の違いを除いて本質的に一つしかない、というような公理系であった。そして、デデキントが自然数を発生させてみせたときに、上の五条件を満たすようなものは本質的に一つしかないことは既に証明されていたのである^{*15}。

^{*15} ここで一つ注意が必要である。この「本質的に一つしかない」ということは、集合論の中で上の公理系を解釈したときに成立することである。実際、デデキントの場合では、五番目の条件は「性質 S を満たす」ではなく「集合 S の元である」「全ての自然数は S に含まれる」という形で記述されていた。しかし、ペアノは上の公理系を集合論を用いて解釈することを企図していたのではなく、単に自然数そのものの満たす性質として上の五つを抽出したのであった。このことは一見違いがないように見えるが、実は本質的に大きな差がある。実は、上の形のペアノの公理系を満たす体系で本質的に異なるものが存在することが知られている。それは、ペアノによる数学的帰納法の原理が、「自然数の性質」に関するものとして述べられていることによる。「自然数の性質」というのは曖昧な表現ではあるが、それは有限の文字列で書ける性質なので、高々自然数と同じくらいの数しかない。対して、自然数の部分集合は実は実数と同じ数だけある。この差が、構造の一意性に影響するのである。個々の自然数についての性質だけで述べられる命題を「一階の命題」といい、デデ

^{*13} ペアノは後年、無活用ラテン語を世界共通言語として広める運動も行っていて、円城塔の小説 [7] でネタにされている。

^{*14} ペアノのオリジナルな公理系では自然数は 1 からであった。しかし、こんにちの数学においては、理論的な整合性や簡単のため 0 を自然数に含める場合が多いので、ここでも 0 から自然数を始めている。

このようにして、解析は実数に、実数は有理数に、有理数は自然数に還元され、自然数も論理や集合に還元された。こうして、数学は磐石な、揺ぎなき論理的基盤を手に入れたかのように思われた。実際、19 世紀末に開かれた国際数学会議の席上で、ポアンカレは「数学は算術化されてしまった。数学の絶対的な厳密化が実現したと断言出来る^{*16}」と高らかに宣言している。

しかし、そうは問屋が卸さなかった。数学の基礎は、多かれ少なかれ集合論に還元されていた。しかし、その集合論に矛盾が見付かってしまったのである。こうして、数学は新たな 20 世紀の幕開けと共に、俗に「**数学の危機**」と呼ばれる時代に突入することになる。

2.8 ラッセル、ヒルベルト、ブラウワー、そしてゲーデル——数学基礎論の誕生と死

先の節で、フレイゲによる数学の論理への還元を紹介した。しかし、フレイゲの方法は生前は余り広く知られておらず、評価もされていなかった。

イギリスの**パートランド・ラッセル**も、数学を論理に還元する方法を模索していた。ラッセルは数学以外にも哲学や社会問題まで広く重きを成した二十世紀を代表する知の巨人であり、1950 年にはノーベル文学賞を受賞している。ラッセルは、1903 年に発表した『プリンシプルズ・オブ・マセマティクス』で、上で述べたようなフレイゲと類似の方法をより徹底的に用いて、本当に論理から数学を発生させることが可能であることを実証してみせたのである。執筆当時、ラッセルはフレイゲの著作を知らなかったが、『プリンシプルズ』を書き上げたのと同時期くらいに、ペアノからフレイゲの存在を知らされ深く感銘を受けている。しかし、ラッセルはそれと同時に、自分の『プリンシプルズ』やフレイゲ

の『算術の基本法則』の体系から本質的な矛盾が出ることも発見してしまっていた。いわゆる**ラッセルのパラドックス**の発見である。ラッセルはこのパラドックスを『プリンシプルズ』に記すと共に、『基本法則』の第二巻『算術の基礎』をちょうど書き上げたころであったフレイゲに手紙を送り報告している。フレイゲは大変なショックを受け、しばらく数学の基礎付け問題から遠ざかるきっかけとなってしまった。

ここで、このラッセルのパラドックスについて説明しておこう。問題とはるのは、「好きな条件を満たす物を集めて集合を作れる」という**内包公理**である。ラッセルは次のような集合を考えた：

$$a = \{x \mid x \notin x\}$$

つまり、「自分自身を元として持たないような集合」の全体を考えたのだ。何だか頭がいたくなるようだが、これを用いると次のように矛盾が出る。まず、 $a \in a$ か $a \notin a$ のどちらかが成立するはずだ。 $a \in a$ としてみる。すると、 a は「自分自身を元にした持たないような集合」の全体だったのだから、 a もこの性質も満たし $a \notin a$ を得る。これは $a \in a$ に反する。次に、 $a \notin a$ としてみる。すると、 a は自分自身を元に持たない集合であるので、 a の定義から a の元になる： $a \in a$ 。これは $a \notin a$ に矛盾。いずれにせよ矛盾が出てしまう。これはパラドックスだ！

これをもうちょっとわかりやすく、「市長市のパラドックス」という喩え話で説明してみよう。世の中には、自分の治める市に住んでいる市長と、住んでいない市長がいる。そこで、新しく「市長市」という市を制定して、そこに「自分の治める市に住んでいない市長」を全員住ませよう、という法案が国会で可決・成立した。何でかと訊かれると困るのだが、まあ、国会というのはよくわからない法律を作るための機関であることだし、何かに託けて新しい市を作ることで経済効果を狙ったのかもしれない。とにかく、そういう市長市を作ることになった。政治家というのは特権階級であるので、一般市民と顔を合わせることを嫌う。そのため、「自

キントの帰納法のような部分集合に言及する命題を「二階の命題」と云う。二階の帰納法を込めれば、自然数の体系は一意に決まるが、一階だけでは決まらないのである。では、二階のものを採用すればいいのではないか、という気がしてくるが、二階の論理はあまり嬉しくない性質を持っていて扱いづらいため、現代においてペアノの公理系と云った場合は、専ら一階のものを指すことが多い。

^{*16} 足立 [2] より

分の治める市に住まない市長」以外の何人も市長市への居住を禁ずる、という法律も制定された。これは日本国憲法が保証するところの居住・移転・職業選択の自由に反するような気もするのだが、まあ誰も進んで市長市などというミョウチクリンな市に住みたいとは思わなかったから特に違憲申立の裁判が行われることもなく、ナアナアで可決された。さて、市長市は市なのだから、当然市長を決めなくてはならない。というわけで、第一回市長市市長選が実施され、めでたく初代市長が選出された。余談だが、複数の都市の首長を務めることなんて出来るんだろうか？よくわからないが、まあその辺もナアナアで運用されたのだということにする。

さて、この市長市市長だが、何処に住むべきだろうか？市長市は法律で「治める市に住まない市長だけが住む市」と定められているのであった。なので、市長市に住むのだとすると、その市長は自分の治める市長市に住んでいるので、この条件に反してしまう。よって市長市市長は市長市に住めない。では、市長市に住まない、ということになるが、すると自分の治める市に住んでいないことになるので、市長市設置法第一条から市長市に住まなくてははいけない。かくして、市長市市長は市長市に住むことも、住まないことも出来なくなってしまった——。

このラッセルのパラドックスは、非常に純化されたパラドックスである。ラッセルのパラドックス以前にも、集合論にはパラドックスが発見されていた。例えば、集合論の創始者たるカントール本人にしてから、「集合全体の集合を考えると矛盾する」というパラドックスを発見している。しかし、こうしたパラドックスは集合論の複雑な概念を多用した末のパラドックスであったため、集合論の瑣末な部分に関連するパラドックスであって、普通の数学には関係ないと思われていた部分があった。しかし、ラッセルのパラドックスは殆んど論理だけから矛盾が出ていように見えるので、当時の数学の人々は大慌てしたのである。

その中に、当時を代表する数学者であった**ダフィット・ヒルベルト**も含まれていた。彼は、カントール-デデキントが創始した集合論を縦横無尽に応用

して、当時の数学を端から端まで書き換えてしまうような革命的な仕事をしている指導的な数学者であった。ヒルベルトやデデキントに触発され、エミー・ネーターらなどの他の数学者も集合論や無限を用いた超越的な方法で大きな成果を挙げており、その根幹を成す集合論に非常に単純で深刻な矛盾が見付かってしまったのは大変なことだったのである。

ここで、ヒルベルトらが取った手法について簡単に説明をしておこう。それは先程も言及したように、集合を縦横無尽に用いた無限的な手法なのだが、その大きな特徴として、構成性を放棄したことが挙げられる。どういうことか。ヒルベルト以前の数学において、何かの存在を証明するということは、それを具体的に構成・計算する方法を与えることと同値であった。しかし、数学が取り扱う問題が複雑化するにつれて、仮にそうした計算手順が与えられていたとしても、そうした計算を実際に人の手で実行することは殆んど不可能に近いようになってきていた。そこで、ヒルベルトは、「実行出来ない計算に拘っているせいで証明が進まないのであれば、計算法なんてうっちゃって取り敢えず存在だけ示せばよいのだ」という大きな発想の転換をしたのである。これが「非構成的」「超越的」と呼ばれる手法である。計算法を示さずに存在だけ示すというのはどういうことか？つまり、「存在しないとすると矛盾するから、存在するのだ」と云う論法である。ある、ある、とはいうが目にはさやかに見えない、という状態であり、こうした証明は当時の数学界からは当初大きな反発を受けた。しかし、ヒルベルトのこの手法は、そうした批判を補って余りあるくらいに生産的であった。そのため、次第に数学の手法として受け容れられるようになり、欠くことのできない方法になったのである。無論、ヒルベルトとして計算を無視したのではなく、数学の理論の発展とは「まず存在だけを示し、次に実際に計算する手法を与え、最終的には実際に計算する」という三段階に渡るものだと捉えていた。

そのような次第で、ヒルベルトの方法論が数学の中で大きな部分を占め、超越的な方法に対する反発

もやっと抑えこまれて来た時期にこうしたパラドックスが発見されることは、全く好ましいことではなかったのである。

T.B.W.

2.9 現代数学における形式性——ブルバキの活躍と圏論の成立

T.B.W.

3 数理論理学入門：formal system にかんする informal な導入

この章では、ガラッと趣向を変えて、前章で言及した「数学基礎論」をルーツとする数理論理学における「形式系」の概念を通じて、形式というものの別の側面・意義を伝えてみようと思います。informal な導入なので、口調もなんか急にくだけた感じになります。

3.1 SK パズルで遊ぼう

形式体系はどういうものか？ということに慣れて貰うために、ここではまず簡単な **SK パズル** というもので遊んでみよう。

パズルというからには何らかの目的がある。SK パズルのゴールは次のとおり：

既存の文字列を変形して行って、目的の文字列を目指せ！

……よくわからないだろうから、これから具体的にパズルの**ルール**を説明していくことにする。

まず、パズルと云うからにはなにか定まった盤面の形というのがある。たとえば、数独なら 9×9 マスの升目だし、詰将棋なら将棋盤とその上での駒の動きがそのパズルの形を定めている。たとえば数独の盤面に \heartsuit とか \int とか書いてあっても何を解けばいいのか困るし、この局面から詰みに持っていけるかしらんと訊かれておもむろに盤面に碁石を置いたり、ポーンを置いたりしたら怒られる。それと同じで、SK パズルもどういう文字列を相手にして、どういう規則で変形していくのか、っていう決まりを定める必要がある。

という訳で、まず手始めに CL-項というものを定義する。

Def. 3.1 (CL-項). 次の形の文字列を **CL-項** と云う。

1. S, K は CL-項.
2. 変数 x_0, x_1, x_2, \dots は CL-項.
3. M, N が CL-項のとき、そいつらを並べて括弧で括った (MN) も CL-項.
4. 以上 (1) ~ (3) で出来る物だけが CL-項.

「数独では数字の $1 \sim 9$ を使います」とか「将棋の駒は王将、玉将、飛車、角行、歩、……」といったような約束にあたる。四番目の「以上だけで出来るものが CL-項」っていうのは、「数独に \heartsuit とか書きちゃだめよ」とか「将棋だつてんだから碁石を置くな!!!」という意味。この約束があるお陰で、「どうも詰めないなあ」と思って解答を見たらチェスの駒を使ったりとかそういったふざけた状態を除外出来るってわけ。数学では、こういう「最小の構成要素から繰り返して行って、その組み合わせで何かを定義する」という定義の仕方がよく出て来て、**帰納的な定義**と呼ばれる。CL-項の例、CL-項でない例を見てみよう。

例 3.1. 以下のものは CL-項になっている：

- S や x_0
- (SK) や $((S(Kx_0))(x_1K))$

以下は CL-項ではない：

- $(S(\heartsuit))$ (「 \heartsuit 」なんて記号はないぞ！)
- (Su) (変数は x_0, x_1, \dots の形の物だけ)
- $S(KI)K$ (括弧がついてないのでどう読めばいいのかわからない)

ところで、一々括弧を書かないといけないのは面倒だし、一々添字をつかって x_0, x_1 とか書いてい

るのでは見辛い、というのが人情だ。そこで、「括弧が省略されている場合は左側から順につけられているものとする」「 x, y, z, u, v, \dots 」なども変数だと思おう」という約束をすることにする。つまり、最初の括弧の約束については、

$$S(KI)K = ((S(KI))K)$$

と読もうということ。変数についても、適当に番号をつけて x_0, x_1, x_2, \dots と読みかえていえると思えばいい。ただ、大事なことは、これはあくまでも**頭の中で読み替えている**ってこと。議論を進めていく上では、あくまでも CL-項は上で約束した (1) ~ (3) の形だけ。ただ、そうでない形で書いたときに、それに变形していく方法を、原稿を書いている僕と読んでいる君との間で決めよう、っていうこと。小中学校の国語テストで略字を使ったらバツされるようなのと同じようなこと。でも人に見せたり書いたりするのに一々ゴツい漢字を書いてられないから、簡単に略記する方法を作ろうよ、っていうことだと思えばいい。

で、次。どういう盤面を使うの？っていうことを約束しよう：

Def. 3.2 (SK パズルの式). M, N を CL-項とすると、次の形の文字列を**式**と呼ぶ。

$$M \triangleright N \quad M = N$$

この式が SK パズルの盤面だ。本当なら、CL-項の定義をしたときと同じように「この形だけが式である」と約束をしなければいけないのだけど、面倒くさいから以下省略する。これから出て来る帰納的定義とかには、暗黙の内に「これだけ」っていう条件が付いていると思ってちょーだい。

さてさて、盤面までの約束を決めたので、遂にルールを決めよう。数独の場合は「今文字が入っていないところに数字を入れる」、詰将棋なら「この局面から駒を動かして巧いこと詰め」というのが大筋のルールで、数字の入れ方や駒の動かし方に「縦

横と小さな 3×3 の中に同じ数字が入らない」とか「駒は将棋のルールに準拠して動かしてね」とか、細かい規則が定められている。SK でそれに当るものを、ちょっと思うところあって「**推論規則**」と呼ぶことにする。また、盤面がどう進んでいったのかわかりやすいように、手数の前後の盤面を、一本線で隔てて上下に並べて書くことにしよう。あと、どの規則を使ったかわかりやすいように、横に名前も控えておくことにする。

Def. 3.3 (SK の推論規則). SK パズルの推論規則は以下のもののみ。(M, N, R は CL-項とする)

$$\begin{array}{c} \frac{N \triangleright R}{MN \triangleright MR} (\mu) \quad \frac{M \triangleright N}{MR \triangleright NR} (\nu) \\ \frac{M \triangleright N \quad N \triangleright R}{M \triangleright R} (\tau) \\ \frac{M \triangleright N}{M = N} (\kappa) \quad \frac{M = N}{N = M} (\sigma) \\ \frac{M = N \quad N = R}{M = R} (\tau =) \end{array}$$

上から下が出る、とか、上を变形して下が出る、上から下が導かれる、という風に読む。ここで SK パズルの著しい特徴がでている。それは、「**二つの盤面が合流して新しい盤面を作る**」ということ。こういうゲームってあまり見ない気がするけど、考えることは出来るので、まあそういうものなんだな、と思ってくださいな。

さて、駒も決めたし、盤面も、盤面を進めるルールも決めた。あとはゲームをするだけだけど……じゃあ、どういう盤面から始めればいいのか？ 普通のパズルでの**初期配置**に当るものとして、SK パズルには **公理** というものがある。

Def. 3.4 (SK パズルの公理). 任意の CL-項 M, N, R に対し、次の形の式を **SK パズルの公理**とする：

- (K) $KMN \triangleright M$
 (S) $SMNR \triangleright MR(NR)$
 (ρ) $M \triangleright M$

つまり、SK パズルは、上に挙げた公理を初期配置として好きなだけ使って、目的の盤面を導くパズルということになる。ここで注意したいのは、上に挙げた (K), (S), (ρ) がそのまま公理である、**という訳ではない**ことだ。だって、CL-項の定義に M, N, R なんていう文字は出て来なかったしね。上に挙げた (K), (S), (ρ) の M, N, R に、**具体的な CL-項を代入したもの全てが SK の公理**なのだ。このように、上の (K) ~ (ρ) のような公理の型を定めているものを、**公理型**という。そのまんまだ。だから、SK パズルの公理というのは無限個あって、例えば、 $Kx_0x_1 \triangleright x_0$ とか、 $S(x_0S)x_1K \triangleright x_0SK(x_1K)$ といったものが SK パズルの本当の公理なのだ。でも、一々区別するの面倒だし、区別しなくても特に面倒なことはあまりないので、(K) ~ (ρ) のことも公理と呼んじょうことがよくある。

さて、以上を踏まえて、SK パズルの例を見てみよう！

問 3.1. $S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)$ を導け。

やるべきことは、「上の公理から出発して、 $S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)$ に到達するような手順を見付ける」ことだ。どうするか。**結論から逆算して、推論規則を逆から辿る**という方法を取る。まずは結論を書いてみる：

$$S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)$$

ここで、どの規則が使えるのかなあ〜、と考える。結論が \triangleright で結ばれる形になっているので、 $=$ が下段にくるような (κ), (σ), ($\tau =$) といった規則は使えなさそう。すると、 μ, ν, τ のどれかを使うんだ

ろう。まず、先頭が一致していないので、(μ) は無理そう。(ν) はどうか？末尾の u_1u_2 が一致して一見見えそうに見える。でも、略されてる括弧を全部書いてみると、

$$((S(Ku_0))u_1)u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)$$

となって、括弧の付き方が違うから、これも適用出来ない。となると、残った (τ) を使うより外になさそう。

$$\frac{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright (?) \quad (?) \triangleright u_0(u_1u_2)}{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)} (\tau)$$

次に (?) に何が入りそうか考えてみよう。なるべく公理に帰着したいなあ、ということで左側の式をグッと睨んでみる。公理と見比べてみると、おや、これは (S) に何か代入した形に出来そう！という気がしてくる。そこで、 $(?) \equiv Ku_0u_2(u_1u_2) \equiv A$ とおくと、

$$(S) \quad \frac{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright Ku_0u_2(u_1u_2) \quad Ku_0u_2(u_1u_2) \triangleright u_0(u_1u_2)}{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)} (\tau)$$

左側は公理に戻れた。じゃあ、今度は右側を考えよう。

$$Ku_0u_2(u_1u_2) \triangleright u_0(u_1u_2)$$

よくみると、今度は右側に同じ項 (u_1u_2) が掛かっているのがわかる。そこで (ν) を使おう。

$$\frac{Ku_0u_2 \triangleright u_0}{Ku_0u_2(u_1u_2) \triangleright u_0(u_1u_2)} (\nu)$$

今度は……アッ！一番上の式が公理型 (K) の代入例になった！

$$(K) \quad \Pi : \frac{Ku_0u_2 \triangleright u_0}{Ku_0u_2(u_1u_2) \triangleright u_0(u_1u_2)} (\nu)$$

これをさっきの証明図に組合せれば答が出る。でも、ちょっと横に長くなりすぎるのでこれに Π って名前を付けて場所を省略して書くことにしよう：

$$\frac{\text{(S)} \quad \frac{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright Ku_0u_2(u_1u_2)}{S(Ku_0)u_1u_2 \triangleright u_0(u_1u_2)} \quad \Pi}{\text{(}\tau\text{)}}$$

これが求める答えだ。やったね！

3.2 ヒルベルトの体系 HK

T.B.W.

3.3 完全性定理：形式と意味を繋ぐもの

T.B.W.

3.4 不完全性定理については解説しません

Not to be written

4 おわりに

5 おわりのおわりに

参考文献

- [1] Amir D. Aczel. ブルバキとグロタンディーク. 日経 BP, 2007. 水谷 淳・訳 (原題: The Artist and the Mathematician: The Story of Nicolas Bourbaki, the Genius Mathematician Who Never Exists) .
- [2] 足立恒雄. 数とは何か そしてまた何であったか. 共立出版, 2011. *.
- [3] 足立恒雄. フレーゲ・デデキント・ペアノを読む ——現代における自然数論の成立. 日本評論社, 2013.
- [4] 新井敏康. 数学基礎論. 岩波書店, 2011. *.
- [5] Steve Awodey. *Category Theory*, Vol. 52 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 2010.
- [6] 江田勝哉. 数理論理学 ——使い方と考え方: 超準解析の入口まで. 内田老鶴圃, 2010. *.
- [7] 円城塔. 道化師の蝶. 講談社, 2012.
- [8] Torkel Franzén. ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド. みすず書房, 2011. 田中一之訳 (原題: Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Use and Abuse) .
- [9] Kurt Gödel. ゲーデル 不完全性定理. 岩波文庫, 2006. 林晋／八杉満利子 訳・解説, *.
- [10] Douglas R. Hofstadter. ゲーデル, エッシャー, バッハ あるいは不思議の環. 白揚社,

1985. 野崎昭弘, はやし・はじめ, 柳瀬尚紀 訳 (原書: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid).

- [11] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 1 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳 (原書: Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).
- [12] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 2 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳 (原書: Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).
- [13] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 3 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳 (原書: Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).
- [14] Israel Kleiner. 抽象代数の歴史. 日本評論社, 2011. 斎藤正彦 訳, (原書: A History of Abstract Algebra).
- [15] 古森雄一, 小野寛晰. 現代数理論理学序説. 日本評論社, 2010.
- [16] Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications, 2011.
- [17] Saunders Mac Lane. 数学——その形式と機能. 森北出版, 1992. 彌永昌吉 監修, 赤尾和男・岡本周一 共訳 (原題: Mathematics, Form and Function) .
- [18] 中根美知代. ε - δ 論法とその形成. 共立出版, 2010.
- [19] 坂口勝彦. 平成 25 年度早稲田大学基幹理工学部数学科「数学史」講義資料. *.
- [20] 佐々木力. 数学史. 岩波書店, 2010.
- [21] Raymond Smullyan. ものまね鳥をまねる. 森北出版, 1998. 阿部剛久／黒澤俊雄／福島修身／山口裕・訳 (原著: To Mock a Mockingbird) .
- [22] 殊能将之. 美濃牛. 講談社ノベルス, 2000.
- [23] 竹内外史. 層・圏・トポス 現代的集合像を求めて. 日本評論社, 1978.

- [24] 竹内外史. 新装版 集合とはなにか. 講談社ブルーバックス, 2001.
- [25] 田中一之, 坪井明人, 野本和幸. ゲーデルと 20 世紀の論理学 (ロジック) 2 完全性定理とモデル理論, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 第 2 巻. 東京大学出版会, 2011. *.
- [26] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 2000.
- [27] 坪井明人. モデルの理論. 河合出版, 1997.
- [28] 八杉満利子, 林晋. 論理パズルとパズルの論理, アウト・オブ・コース, 第 7 巻. 遊星社, 1998.

上記の一覧中, * の付いている文献は今回特に参考にした文献である^{*17}.

数学の歴史を, 数概念の発達という観点から捉えるには足立 [2] がよくまとまっている. ただ, 数学的な素養がないと本文中の議論は追えないだろう. 個別の数学者の観点から数学の歴史を概観したければ, ジェイムズ [13] がよい.

現代の数理論理学を学びたい場合, 証明論寄りならば古森・小野 [15] や戸田山 [26], モデル理論よりならば田中・坪井・野本 [25] や江田 [6] をお勧めする. 後者に関しては, 数理論理学の話題に留まらず, 第三章では分析哲学の話題を取り扱っている. また, 集合論や計算論なども含めて数理論理学をより広く学びたい場合は, 新井 [4] がよいだろう.

^{*17} たくさん参考文献が出てきますが, 全部ちゃんと読めるなんて思わないでください [22].