総合微分幾何講義メモ

石井大海

2014/12/12 20:12 JST 版

この文書は，大学院で受けた**総合微分幾何**（*synthetic differential geometry*; *SDG*）の講義のノートを個人的に増補しながら電子化したものです．いちおう内容の一貫性については気を付けたつもりですが，多分に誤りを含む可能性があることをお断りしておきます．そうした誤りの責任はすべて筆者によるものです．

また，以下での議論は厳密には全て実際には直観主義的な（排中律の成り立たない）トポスで行われている議論です．それは，以下で展開される解析学は $d^2 = 0 \land d \neq 0$ なる冪零無限小**実数** d の存在を前提としているからで，排中律の下でこのような実数 d が存在したとすると $d = 0 \land d \neq 0$ となり矛盾するからです．ですので，講義中特に注意はありませんでしたが，以下の議論では背理法による証明が用いられていないことに注意してください．

1　冪零無限小による滑らか無限小解析

1.1　冪零無限小解析入門（第一〜二講）

微分を定義する方法には二種類の流儀がある：

1. ε-δ 論法によってまず極限の概念を定義し，極限の概念を使って微分を定義する．
2. $d^2 = 0, d \neq 0$ なる**冪零無限小**を用いて定義する．

前者は普段我々が数学をする際に用いている方法で，これは 19 世紀以後数学の厳密化ということが云われるように成ってから主流になった方法である．対して，17, 18 世紀の数学では後者の冪零無限小を使って定義されていた．以下では，この 17, 18 世紀の方法を用いて解析学および微分幾何を展開していく．

勿論，通常の数学では $d^2 = 0$ なら $d = 0$ になってしまう訳だが，以下では仮に $d^2 = 0 \land d \neq 0$ を満たすような d が潤沢に存在したとして議論を進めていくことになる．つまり，

$$D_n := \left\{ d \in \mathbb{R} \;\middle|\; d^{n+1} = 0 \right\}, D := D_1$$

としたとき，通常の数学なら $D = \{0\}$ となってしまうが，以下では $D \neq \{0\}$ であるとして話をすすめる．また，次のような公理の下で微積分が行われていると考える：

Def. 1 (Kock-Lawvere の公理). 任意の関数 $\varphi : D \to \mathbb{R}$ に対し，次が成立する：

$$\exists! a \in \mathbb{R} \forall d \in D \, \varphi(d) = \varphi(0) + ad$$

この時，一般の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の x での微分は次のように定義される：

Def. 2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする．この時，$\phi(d)=f(x+d)$ により $\phi:D\to\mathbb{R}$ を定めれば，Kock-Lawvere の公理より，$\forall d\in D\, f(x+d)=f(x)+ad$ を満たすような $a\in\mathbb{R}$ が一意に存在する．この a を f の x における微分係数と呼び，$f'(x)$ と書く．

このような立場に立脚すると，様々な微分公式の導出が著しく簡単になる．たとえば，積の微分を通常の極限による定義で導出しようとすると，

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}&=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\&=f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)\\&\xrightarrow{h\to 0} f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\end{aligned}$$

というような式変形をすることになる．このような操作はいちどやり方を見れば出来るようにはなるが，何も知らずにパッとこれをやれと云われるとヒラメキを必要で簡単なことではない．

対して冪零無限小を使った議論では，次のようになる：

$$\begin{aligned}f(x+d)g(x+d)&=\{f(x)+f'(x)d\}\{g(x)+g'(x)d\} &&(\because \text{Kock-Lawvere})\\&=f(x)g(x)+f(x)g'(x)d+f'(x)g(x)d+f'(x)g'(x)\underbrace{d^2}_{=0}\\&=f(x)g(x)+\{f(x)g'(x)+f(x)g'(x)\}d\end{aligned}$$

よって微分の定義から

$$(fg)'(x)=f(x)g'(x)+f(x)g'(x).$$

こちらの証明では，定義通りに展開して $d^2=0$ を適用するだけで簡単に公式が導けてしまう．

続いて合成関数の微分公式を証明してみよう．まずは極限を使った流儀によって，一般に正しいとされがちな[*1]証明を見てみる：

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow{h\to 0} g'(f(x))f'(x)$$

この変形も技巧的である．対して，冪零無限小を使って導出してみよう．

$$g(f(x+d))=g(f(x)+\underline{f'(x)d})$$

ここで一般に $a\in\mathbb{R},d\in D$ なら $(ad)^2=a^2d^2=0$ より $ad\in D$ となるので，$f'(x)d$ で一つの冪零無限小と思えるから，

$$=g(f(x))+g'(f(x))f'(x)d$$

[*1] 面倒臭いから厳密にはやらない．どこが間違っているのか考えてみよう！

よって微分の定義から

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

このような形で，やはりかなりシンプルに証明することが出来る．

1.1.1 Taylor 展開

更に，Taylor 展開の理論も冪零無限小解析では非常に簡単になる．

まず，$D_n := \left\{ d \in \mathbb{R} \,\middle|\, d^{n+1} = 0 \right\}$ とおけば，$d \in D_n, d' \in D_m \Longrightarrow d + d' \in D_{n+m}$ かつ $d_1, \ldots, d_n \in D \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$ となることが示せる．この事と，基本対称式に関する基本的な事実を押さえておけば，次の定理は n についての帰納法ですぐに示せる：

補題 1. $\varphi_n^k(x_1, \ldots, x_n)$ を k 次の n 変数基本対称式とし，$d_i \in D$ とする時，次が成立：

$$\varphi_n^k(d_1, \ldots, d_n) = \frac{(d_1 + \cdots + d_n)^k}{k!}$$

定理 1 (Taylor の定理). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について次が成立する：

$$\begin{aligned}
&f(x + d_1 + \cdots + d_n) \\
&= f(x) + f'(x)\varphi_n^1(d_1, \ldots, d_n) + f''(x)\varphi_n^2(d_1, \ldots, d_n) + \cdots + f^{(n)}(x)\varphi_n^n(d_1, \ldots, d_n) \\
&= f(x) + \frac{d_1 + \cdots + d_n}{1!}f'(x) + \frac{(d_1 + \cdots + d_n)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(d_1 + \cdots + d_n)^n}{n!}f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

これは，無限級数の Taylor 展開に対応する定理になっている．

1.2 一般の無限小解析：一般化 Kock-Lawvere の定理（第三，四講）

ここまで無限小解析を行なうに当って，次の **Kock-Lawvere の公理**を前提としてきた：

公理 (Kock-Lawvere の公理). $\forall f : D \to \mathbb{R}\, \exists! a \in \mathbb{R} \forall d \in D\, [f(d) = f(0) + ad]$

この公理は D という特定の無限小空間についての公理になっている．しかし，今後解析学や微分幾何を展開していくに当って，これを**一般の無限小空間**に一般化していく事を考える．その為には，

- 無限小空間とは何か？
- この等式の主張は何か？

という事を考える必要がある．D 以外の無限小空間の例としては，$D_n := \left\{ d \in \mathbb{R} \;\middle|\; d^{n+1} = 0 \right\}$ などがあるが，これらの特徴を代数的構造から捉えることを以下の目標としよう．

とはいえ，まずは一番基本的な $D = D_1$ の場合から出発する．簡単な考察により，Kock-Lawvere の公理は次の主張と同値である：

公理 (Kock-Lawvere の公理その 2). $f(\varepsilon) = b + a\varepsilon \in \mathbb{R}[X]/(X^2)$ に対し，関数 $(\lambda d \in D.f(d) = b + ad) \in \mathbb{R}^D$ を与える $\mathbb{R}$-加群の準同型は，実際には同型となる（但し $\varepsilon = X + (X^2)$）.

それでは，剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ と D の違いは何だろうか？ここで，$\mathbb{R}$-加群の圏で次の図式を考えよう：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[X] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}[X]/(X^2) \arrow[ur, dotted, red, "\hat{f}"']
\end{tikzcd}$$

図式のような $\hat{f}$ により $\mathbb{R}$-準同型 f が分解出来る必要十分条件は，$f(X)^2 = 0$ となることである．また，f は X の行き先を決めれば決まるので，これを可換代数の記号を使って言い換えれば，

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}[X]/(X^2)\right) = \left\{ d \in \mathbb{R} \;\middle|\; d^2 = 0 \right\} = D$$

となる．即ち，無限小空間 D は $\mathbb{R}$-代数 $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ の $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}$ として実現出来ることがわかる．同様に，一般の D_n についても，

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}[X]/(X^{n+1})\right) = D_n$$

という関係が成立している．よって，$\mathbb{R}[X]/(X^n)$ らに共通の性質を取り出して，その Spec が同型になる，という形で定式化できそうである．そのような代数を **Weil 代数**と呼び，些か天下り的ではあるが，次で定義される：

Def. 3.

- $\mathbb{R}$-加群 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上に二項演算 $m : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ が定義されている時，$(\mathbb{R}, m)$ を**有限次元拡張可換ユニタリ $\mathbb{R}$-代数**（*augmented commutative unitary* $\mathbb{R}$*-algebra of finite dimension*）と呼ぶ：

  (i) m は双線型かつ結合的，可換

  (ii) $(1, 0, \ldots, 0)$ が m の単位元

  この時，射影 $\pi_0 : (a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ は $\mathbb{R}$-加群準同型であり，その核

  $$\ker \pi_0 = J = \{ (0, a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

  を**拡張イデアル** (*the ideal of augmentation*) と呼ぶ.

- W が **Weil 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ W は有限次元 augmented commutative unitary $\mathbb{R}$-algebra であり，その拡張イデアルが冪零

- $f : W_1 \to W_2$ が **Weil 代数の準同型** $\overset{\text{def}}{\iff}$ f は $\mathbb{R}$-代数の準同型であり，$f[J_1] \subseteq J_2$.
- Weil 空間 W について，$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} W$ をその**無限小空間**と呼ぶ.

簡単な計算により, 今までに見た $\mathbb{R}[X]/(X^{n+1})$ が Weil 代数であることは簡単に示せる. 例えば, $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ の場合，$f \in \mathbb{R}[X]/(X^2)$ は $f(\varepsilon) = a + b\varepsilon$ の形に書けるので，これを (a, b) と同一視して演算を入れてやればいい．これら対応する無限小空間が D_n であったので，D_n の形以外の例を考えてみよう．

例えば, $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2, Y^2)$ は Weil 代数であり, 対応する無限小空間は $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]/(X^2, Y^2)) = D \times D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 = y^2 = 0 \right\}$ となる．他にも，Weil 代数 $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ を考えれば，これに対応する無限小空間は $D(2) := \{ (d_1, d_2) \in D \times D \mid d_1 d_2 = 0 \}$ となる．

こうした例からも明らかなように，Weil 代数は $\mathbb{R}$ を有限個の冪零無限小で拡張したような代数を形式化したものになっている．より詳しくは,「通常の」$\mathbb{R}$ の元を表すのが第 0 成分であり，残りは夾雑物のスカラー倍の有限和になっているが，余り「実数」と異なる代数的な性質を持たないようになっている．これが augmented commutative unitary $\mathbb{R}$-algebra であるという要請の意味である．対して，それらの間には何らかの「冪零的」な代数的な関係が入っている，というのが拡張イデアルが冪零であるという Weil 代数の条件に対応しているのである．

以上を踏まえれば，Kock-Lawvere の公理は次のように一般化出来る：

公理 (一般化 Kock-Lawvere の公理)． 任意の *Weil* 代数 W に対し次の対応は *Weil* 代数の同型である：

$$
\begin{array}{ccc}
f : W & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} W} \\
\cup & & \cup \\
a & \longmapsto & \lambda\,(f \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(W))\,.\,f(a)
\end{array}
$$

2　総合微分幾何

2.1　準余極限図式

前節までで無限小空間を体系的に導入出来たので，以下一般化 Kock-Lawvere の公理を前提として総合微分幾何を組み立てていく．総合微分幾何で対象とする空間は，**微小線型空間** (*microlinear space*) と呼ばれる. 微小線型空間の定義は非常に抽象的に与えられるので，まずはそれに必要な圏論的な定義から始める事にする.

Def. 4. 無限小空間の圏の図式 $\mathcal{D}$ が，Weil 代数の圏の極限図式の反変函手 $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(-)$ による像になっている時，$\mathcal{D}$ は**準余極限図式** (*quasi-colimit diagram*) であると云う.

Kock-Lawvere の公理より，$\mathcal{D}$ が準余極限図式であることと，$\mathcal{D}$ の $\mathbb{R}^{(-)} = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{R})$ による像が極限図式であることは同値である．

準余極限図式を用いた議論はよく見られるので，例を一つ見て慣れておこう．

例 1. $m(d_1, d_2) = d_1 d_2$ とおけば，以下の図式は準余極限図式である：

$$D \times D \times D \overset{m \times \mathrm{id}}{\underset{\mathrm{id} \times m}{\rightrightarrows}} D \times D \xrightarrow{\quad m \quad} D$$

一般化 Kock-Lawvere の公理があるので，次の図式が極限図式（特にイコライザ）であることを示せばよい：

$$\mathbb{R}^{D \times D \times D} \overset{\mathbb{R}^{(m \times \mathrm{id})}}{\underset{\mathbb{R}^{(\mathrm{id} \times m)}}{\leftleftarrows}} \mathbb{R}^{D \times D} \xleftarrow{\quad \mathbb{R}^m \quad} \mathbb{R}^D$$

今，我々はイイ感じのトポスで議論をしているので，点を取って議論を進めることが出来る．よって，示すべきことは次の事である：

$$\forall f : D \times D \to \mathbb{R} \left[\forall (d_1, d_2, d_3) \in D^3, f(d_1 d_2, d_3) = f(d_1, d_2 d_3) \Longrightarrow \exists ! g : D \to \mathbb{R}, f(d_1, d_2) = g(d_1 d_2) \right]$$

実際，これが示せれば上の図式がイコライザであることが言える．$\mathbb{R}^{m \times \mathrm{id}} \circ h = \mathbb{R}^{id \times m} \circ h$ となるような $h : Z \to \mathbb{R}^{D \times D}$ があったとき，$\mathbb{R}^m \circ \varphi = h$ となるような射 $\varphi : Z \to \mathbb{R}^D$ が一意に存在することを示せばよい．まず，前提を各点ごとに考えれば $\forall z \in Z, (\mathbb{R}^{m \times \mathrm{id}})(h(z)) = (\mathbb{R}^{id \times m})(h(z))$ ということであり，従って $\forall z \in Z \forall (d_1, d_2, d_3) \in D^3, h(z)(d_1 d_2, d_3) = h(z)(d_1, d_2 d_3)$ である．よって上の条件から $h(z) = g \circ m$ となるような $g : D \to \mathbb{R}$ が一意に存在する．よって，各 $z \in Z$ に対し $g \in \mathbb{R}^D$ を割り当てる対応を φ とすれば，これが $Z \to \mathbb{R}^D$ の一意な射となることがわかる．こうした議論は準余極限図式である証明で頻出なので，以下では断りなくこの論法を用いる．

では，上の条件を示そう．一般化 Kock-Lawvere の公理から，任意の $f : D \times D \to \mathbb{R}$ は $f(d_1, d_2) = a_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_{12} d_1 d_2$ という形で書けているとして良い．この時，$f \circ (m \times \mathrm{id}) = f \circ (\mathrm{id} \times m)$ とすれば，$f(d_1 d_2, d_3) = a_0 + a_1 d_1 d_2 + a_2 d_3 + a_{12} d_1 d_2 d_3$ かつ $f(d_1, d_2 d_3) = a_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 d_3 + a_{12} d_1 d_2 d_3$ であるので，辺々見比べれば $a_1 = a_2 = 0$ でなくてはらならない．また，この条件を満たすなら確実に $f \circ (m \times \mathrm{id}) = f \circ (\mathrm{id} \times m)$ となる．よって，以下 $f(d_1, d_2) = a + b d_1 d_2$ という形に書けているとしてよい．あとは，この条件の下で $f(d_1, d_2) = g(d_1 d_2)$ となるような $g : D \to \mathbb{R}$ が一意に存在する事が示せればよい．しかし，Kock-Lawvere よりすべての $g : D \to \mathbb{R}$ は $g(d) = c + g'(0) d$ の形に一意に表せたことを思い出せば，これは明らかである．

以下の議論では，ある無限小空間の図式が準余極限図式であることを用いて，様々な演算や概念を定義していく．逆に云えば，そうした操作を許すような対象こそ，我々が以下で扱う「図形」である：

Def. 5 (微小線型空間). M が**微小線型空間** (*microlinear space*)$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の準余極限図式 $\mathcal{D}$ について，その $M^{(-)}$ による像が極限図式となる．

2.2 微小線型空間の接空間

以下，M を微小線型空間とし，$x \in M$ を M の点とした時，その接空間 T_xM を考えたい．以下での目標は，接空間が $\mathbb{R}$-加群の構造を持つことを示すことである．

そのためには，先ず接空間を定義する必要があるが，これはごく自然に定義される：

Def. 6. 微小線型空間 M の点 $x \in M$ における**接空間** T_xM を次で定める：

$$T_xM := \{\, t : D \to M \mid t(0) = x \,\}$$

直感的には，時刻 0 で x を通るような「無限小の流れ」全体をその接空間と置いている．

これに $\mathbb{R}$-加群の構造を入れるには，スカラー倍と加法を定義する必要がある．スカラー倍については，次のように非常に素直に定義出来る：

$$(\alpha t)(d) := t(\alpha d) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in T_xM)$$

微小線型空間の定義が本質的に効いてくるのは，加法を定義する際である．まず，各点ごとに考えれば，次の図式が準余極限であることは容易に示せる：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & D \arrow[d, "i_2"] \\
D \arrow[r, "i_1"'] & D(2)
\end{tikzcd}$$

ここで，$D(2) := \{\, (d_1, d_2) \in D \times D \mid d_1 d_2 = 0 \,\}, i_1(d) = (d, 0), i_2(d) = (0, d), 0(*) = 0$ である．

すると，M の微小線型性から次の図式が極限図式となる：

$$\begin{tikzcd}
M & M^D \arrow[l, "M^0"'] \\
M^D \arrow[u, "M^0"] & M^{D(2)} \arrow[l, "M^{i_1}"] \arrow[u, "M^{i_2}"']
\end{tikzcd}$$

この時，$t_1, t_2 \in T_xM$ を取れば，接空間の定義から $t_1(0) = t_2(0) = x$ であるので，$M^0(t_1) = M^0(t_2)$．よって普遍性から $\ell_{(t_1,t_2)} \circ i_1 = t_1, \ell_{(t_1,t_2)} \circ i_2 = t_2$ を満たすような $\ell_{(t_1,t_2)} : D(2) \to M$ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & t_2(0) \arrow[d, phantom, "\cup"] & & t_2 \arrow[ll, mapsto] \arrow[dl, phantom, "\ni"] \\
t_1(0) \arrow[r, phantom, "\in"] & M & M^D \arrow[l] & \\
& M^D \arrow[u] & M^{D(2)} \arrow[l, "M^{i_1}"'] \arrow[u, "M^{i_2}"] & \\
t_1 \arrow[uuu, mapsto] \arrow[ur, phantom, "\in"] & & & \ell_{(t_1,t_2)} \arrow[lll, dotted, mapsto] \arrow[uuu, dotted, mapsto] \arrow[ul, phantom, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

そこで，この $\ell_{(t_1,t_2)}$ を使って，以下のように T_xM の加法を定義する：

$$
\begin{cases}
(t_1+t_2)(d) & := \ell_{(t_1,t_2)}(d,d) \\
0(d) & := x \\
(-t)(d) & := t(-d)
\end{cases}
$$

定理 2. 上で定義した加法・スカラー倍により，T_xM には $\mathbb{R}$-加群の構造が入る.

Proof. 証明すべきことは以下の八つである（$t, t_i \in T_xM, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$）：

(1) $(t_1+t_2)+t_3 = t_1+(t_2+t_3)$
(2) $t_1+t_2 = t_2+t_1$
(3) $t+0 = 0+t = t$
(4) $t+(-t) = (-t)+t = 0$
(5) $(\alpha+\beta)\cdot t = \alpha\cdot t+\beta\cdot t$
(6) $\alpha\cdot(t_1+t_2) = \alpha\cdot t_1+\alpha\cdot t_2$
(7) $(\alpha\beta)\cdot t = \alpha\cdot(\beta\cdot t)$
(8) $1\cdot t = t$

このうちで定義から直ちに従うのは (8), (7) である．以下，普遍性を用いた証明の部分をこう何とかする.

(6)：スカラー倍と加法の定義から，$(\alpha(t_1+t_2))(d) = \ell_{(t_1,t_2)}(\alpha d)$ である.

そこで, $\varphi(d_1,d_2) = \ell_{(t_1,t_2)}(\alpha d_1, \alpha d_2)$ により $\varphi : D(2) \to M$ を定める. この時, $\ell_{(t_1,t_2)}(d,0) = t_1(d), \forall d \in D$ に気をつければ,

$$
\begin{aligned}
\varphi(d,0) &= \ell_{(t_1,t_2)}(\alpha d, 0) = t_1(\alpha d) = (\alpha t_1)(d) \\
\varphi(0,d) &= (\alpha t_2)(d)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \varphi\circ i_1 = \alpha t_1 \qquad \varphi\circ i_2 = \alpha t_2
$$

最後の等式は $\ell_{(\alpha t_1, \alpha t_2)}$ の満たす等式そのものなので，普遍写像性より $\ell_{(\alpha t_1,\alpha t_2)} = \varphi$ となる．よって,

$$
\begin{aligned}
(\alpha(t_1+t_2))(d) &= \ell_{(t_1,t_2)}(\alpha d, \alpha d) = \varphi(d,d) \\
&= \ell_{(\alpha t_1,\alpha t_2)}(d,d) \\
&= (\alpha t_1+\alpha t_2)(d)
\end{aligned}
$$

よって示せた.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
D \arrow[dr, "i_1"'] & D \arrow[d, "i_2"] & D \arrow[dl, "i_3"] \\
 & D(3) &
\end{tikzcd}
$$

同様の論法により，(2), ..., (5) も示せる．残る (1) も同様だが，少しひらめきが必要なので方針だけ述べる．まず，左の図式は準余極限図式である．ここで，$D(3) := \left\{ (d_1, d_2, d_3) \in D^3 \;\middle|\; d_i d_j = 0 \right\}, i_1(d) = (d, 0, 0), i_2(d) = (0, d, 0), i_3(d) = (0, 0, d)$ である．微小線型性により $M^{(-)}$ 取って考えれば，$t_1(0) = t_2(0) = t_3(0) = x$ を満たすような t_1, t_2, t_3 に対し，上と類似の性質を持った $\ell_{(t_1,t_2,t_3)}$ が一意に存在するということになる．あとは今までと同じような議論を繰り返せばよい． ∎

2.3 接空間からベクトル場へ

前節では接空間 T_xM を導入したが，ここで微小線型空間 M を固定し，対応 $T_{(-)}M : x \mapsto T_xM$ を考えれば，$T_{(-)}M : M \to M^D$ である．更に，$t \in M^D$ に対し時刻 0 での値（基点）を返す自然な射影 $\pi : M^D \to D; t \mapsto t(0)$ を考えれば，$\pi \circ T_{(-)}M = \mathrm{id}_M$ が成立している．この性質だけを取り出して定式化したものが，M 上の**ベクトル場**である．以下では，三つの視点からベクトル場を定義する．まずは，接空間をそのまま定式化したものが次である：

Def. 7 (ベクトル場の定義その 1). $X : M \to M^D$ が**ベクトル場**である $\overset{\text{def}}{\iff} \pi \circ X = \mathrm{id}_M$
即ち，id_M の断面（section）になっているような X のことである．

集合の指数法則から，$(M^D)^M \cong M^{D\times M}$ であることに気をつければ，次のように言い換えることが出来る：

Def. 8 (ベクトル場の定義その 2). $X : D \times M \to M$ が**ベクトル場である** $\overset{\text{def}}{\iff} X(0, x) = x\ (\forall x \in M)$

この定義は，ベクトル場を各点における**無限小の流れ**として捉える見方になっている．$X(d, x)$ は微小時間 d が経過した時の x の行き先に対応していると考えられる．
最後にもう一度指数法則を使えば $M^{D\times M} \cong (M^M)^D$ であるので，次の定義を得る：

Def. 9 (ベクトル場の定義その 3). $X : D \to M^M$ が**ベクトル場** $\overset{\text{def}}{\iff} X(0) = \mathrm{id}_M$
この時 $X_d := X(d)$ と書く．

この第三の見方は，各微小時刻ごとに変化する変換であると見做せる．古い本ではベクトル場のことを「無限小変換」と呼ぶことがあるらしいが，その背後にあるのはこうした見方である．
ところで，簡単な圏論の計算により，M が微小線型空間なら，冪空間 M^D も微小線型空間となる．すると，

X は D から微小線型空間 M^D への関数であり，その時刻 0 における値が id_M となるようなもの，ということができる．これは，正に接空間 $T_{(-)}(M^D)$ の定義に他ならない．即ち，第三の立場におけるベクトル場の定義は，**X が M^M の id_M における接ベクトルである**という条件と同値なことがわかる．

さて，X によってある点から d_1 だけ動き，更に d_2 だけ動いたとしよう．この時線型性のような条件が成り立たないだろうか？つまり，$X(d_1, X(d_2, x)) = X(d_1 + d_2, x)$ は成り立つだろうか？実は，$d_1, d_2 \in D$ が一般の時は成り立つとは限らないが，$(d_1, d_2) \in D(2)$（即ち $d_1, d_2 \in D$ かつ $d_1 d_2 = 0$）の時は成り立つ．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ D \arrow[r] & D(2) \end{tikzcd}$$

これを示すため，まず左図が準余極限図式であることに注意する（但し D から $D(2)$ への二つ射はそれぞれ $d \mapsto (d, 0), (0, d)$ である）．そこで，$\varphi : D(2) \to M$ を $X(d_1, d_2) = X(d_1 + d_2, x)$ とおく．すると，ベクトル場の定義より $X(0, X(d, x)) = X(d, x) = X(d + 0, x) = \varphi(d, 0)$ かつ $X(d, X(0, x)) = X(d, x) = X(0 + d, x)$ となるので，普遍性から $X(d_1, X(d_2, x)) = \varphi(d_1, d_2) = X(d_1 + d_2, x)$ となることがわかった．

すると，特に $(d, -d) \in D(2)$ であることに気をつければ，$X(d, X(-d, x)) = x = X(-d, X(d, x))$ となる．これをベクトル場を無限小変換 $X : D \to M^M$ と捉える第三の立場から見れば，次が成り立っているということである：

$$\begin{cases} X_{-d} \circ X_d = \mathrm{id}_M \\ X_d \circ X_{-d} = \mathrm{id}_M \end{cases}$$

よって，以上の考察から，各 X_d は**常に全単射であり，その逆変換は X_{-d} で与えられる**ことがわかる．そこで，$\mathrm{Aut}(M) := \{\, f : M \to M \mid f : \text{全単射} \,\}$ と置けば，X がベクトル場であることの定義は，「$X : D \to \mathrm{Aut}(M)$ であって，$X_0 = \mathrm{id}_M$ となるもの」と，値域を M^M から $\mathrm{Aut}(M)$ に縮められることがわかる．

これまでの議論を踏まえた上で，以下では基本的にベクトル場を無限小変換として扱う第三の立場に立脚して議論を進めていく．

2.4 ベクトル場の成す Lie 環

さて，第三の立場の下では，ベクトル場とは M^M の「点」id_M における接空間 $T_{\mathrm{id}_M} M^M$ の元であると見做すことが出来るのであった．以下，$L := T_{\mathrm{id}_M} M^M$ と表す．

ところで，第 2.2 節で，接空間には $\mathbb{R}$-加群の構造が入り，特に接空間の間に加法が定義されることを見た．よって，全く同じ定義によってベクトル場の間に加法が定義できる：

$$(X + Y)_d := \ell_{(X,Y)}(d, d) \quad \text{where } \ell_{(X,Y)} : D(2) \to M^M \text{ with } \ell_{(X,Y)}(d, 0) = X_d, \ell_{(X,Y)}(0, d) = Y_d.$$

ところで，X, Y の値域 M^M は関数空間であり，合成演算が定義されている．そこで，$(d_1, d_2) \in D(2)$ に対し，$Y_{d_2} \circ X_{d_1}$ を割り当てる対応を考えてみると，これにより $(d, 0)$ は $Y_0 \circ X_d = X_d$ へ，$(0, d)$ は Y_d へと移ることがわかる．

よく考えれば，これは上の $\ell_{(X,Y)}$ の普遍性そのものである．よって，$\ell_{(X,Y)}(d_1, d_2) = Y_{d_2} \circ X_{d_1}$ となることがわかった．すると，先程の加法の定義に代入してやれば，$(X + Y)_d = \ell_{(X,Y)}(d, d) = Y_d \circ X_d = X_d \circ Y_d$ となるので，なんとベクトル場の加法は各微小時刻ごとに変換を合成したものに等しいということがわかってしまった．

以下では，更に L 上の Lie 括弧が定義でき，従って Lie 代数の構造が入ることを見よう．

まず，$\tau : D \times D \to M^M$ を $\tau(d_1, d_2) = Y_{-d_2} \circ X_{-d_1} \circ Y_{d_2} \circ X_{d_1}$ により定める．すると，$\tau(d, 0) = Y_0 \circ X_{-d_1} \circ Y_0 \circ X_d = \mathrm{id}_M \circ X_{-d} \circ \mathrm{id}_M \circ X_d = X_d \circ X_{-d} = \mathrm{id}_M$ となり，同様に $\tau(0, d) = \mathrm{id}_M$ である．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, shift left=2, "i_1"] \arrow[r, "i_2" description] \arrow[r, shift right=2, "0"'] & D \times D \arrow[r, "m"] & D
\end{tikzcd}
$$

図1　ここで $m(d_1, d_2) = d_1 d_2$, $i_1(d) = (d, 0), i_2(d) = (0, d)$

ここで，左の図式は準余極限図式である．先程の考察から $\tau \circ i_1 = \tau \circ i_2 = \tau \circ 0$ だった．すると，M^M が微小線型空間であることから，次の図式は極限図式となるので，$\tau = Z \circ m$ を満たす Z が唯一存在する：

$$
\begin{tikzcd}
(M^M)^D & (M^M)^{D \times D} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] & (M^M)^D \arrow[l] \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & \tau & \exists ! Z \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

即ち $\tau(d_1, d_2) = Z_{d_1 d_2}$ を満たす $Z : D \to M^M$ がただ一つだけ存在する．よって，この Z により，

$$[X, Y] := Z$$

としてベクトル場の間の **Lie 括弧**を定める．以下，これにより L に実際に Lie 代数の構造が入ることを確かめよう．接空間が $\mathbb{R}$-加群となることは既に見たので，あとは $[-, -] : L \times L \to L$ が次を満たすことを確かめればよい：

(a) **双線型性**. $[\alpha X + \beta X', Y] = \alpha[X, Y] + \beta[X', Y]$, $[X, \alpha Y + \beta Y'] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Y']$.
(b) **反対称性**. $[X, Y] = -[Y, X]$.
(c) **Jacobi 恒等式**. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

まず反対称律を示す．$[X, Y] + [Y, X] = 0$ を示せばよいが，これは各点毎に見て，先程の $\circ$ と加法の関係に気をつければ $[X, Y]_d \circ [Y, X]_d = \mathrm{id}_M$ を示せばよいということである．更に，$[X, Y]$ の普遍性から，$d_1, d_2 \in D$ に対し $[X, Y]_{d_1 d_2} \circ [Y, X]_{d_1 d_2} = \mathrm{id}_M$ が示せれば良い．しかるに，

$$
\begin{aligned}
[X, Y]_{d_1 d_2} \circ [Y, X]_{d_1 d_2} &= [X, Y]_{d_1 d_2} \circ [Y, X]_{d_2 d_1} \\
&= (\underline{Y_{-d_2}} \circ X_{-d_1} \circ \underline{\underline{Y_{d_2}}} \circ \underline{X_{d_1}) \circ (X_{-d_1}} \circ \underline{\underline{Y_{-d_2}}} \circ X_{d_1} \circ \underline{Y_{d_2}}) \\
&= \mathrm{id}_M .
\end{aligned}
$$

次に双線型性を示そう．反対称性があるので，特に第一引数についての線型性が示せれば良い．スカラー倍が外に出ることは，定義から簡単に示せる：

$$
\begin{aligned}
[\alpha X, Y]_{d_1 d_2} &= Y_{-d_2} \circ (\alpha X)_{-d_1} \circ Y_{d_2} \circ (\alpha X)_{d_1} \\
&= Y_{-d_2} \circ X_{-\alpha d_1} \circ Y_{d_2} \circ X_{\alpha d_1} \\
&= [X, Y]_{\alpha d_1 d_2} = (\alpha [X, Y])_{d_1 d_2}
\end{aligned}
$$

あとは和が分解出来ることを示せばよい．実は，接空間の性質のお陰で，スカラー倍が外れることが示せれば自動的に加法も分解出来ることがわかる．以下では，このことを純粋に代数的ではなく，やや「解析的」な方法で示す．

まず必要な定義を見る：

> **Def. 10.** $\mathbb{R}$-加群 E が **Euclid**（*Euclidean*）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall f : D \to E \ \exists ! a \in E \ \forall d \in D \ [f(d) = f(0) + ad]$

即ち，Euclid $\mathbb{R}$-加群とは，Kock-Lawvere の公理が成り立つような $\mathbb{R}$-加群のことである．成分ごとに考えれば，次の命題は明らかである：

命題 1.
- $\mathbb{R}$ は Euclid $\mathbb{R}$-加群
- $\mathbb{E}$：Euclid $\mathbb{R}$-加群，X：集合 $\Longrightarrow \mathbb{E}^X$：Euclid $\mathbb{R}$-加群

以下，$\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$-加群，$\mathbb{E}$ を Euclid $\mathbb{R}$-加群，$f : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ とする．

実関数の時を一般化して，f の「微分」を考えてみよう．$\mathbf{x}, \text{Ↄ} \in \mathbb{F}$ を固定して，$D \ni d \mapsto f(\mathbf{x} + d\text{Ↄ}) \in \mathbb{E}$ という対応を考えると，$\mathbb{E}$ が Euclid であることから，$f(\mathbf{x} + d\text{Ↄ}) = f(\mathbf{x}) + d$ を満たす $\in \mathbb{E}$ がただ一つ存在する．そこで，この を $f'(\mathbf{x})(\text{Ↄ})$ と書くことにしよう．

Kock-Lawvere の公理を使って検算をすれば，各 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}$ に対し $f'(\mathbf{x})$ が（第二引数について）$\mathbb{F}$ から $\mathbb{E}$ への線型写像となることがわかる．

わざわざ微分の構造が入っているような $\mathbb{R}$-代数を考えるのは，次の命題を示すためである：

Def. 11. $f : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ が**斉次**（*homogeneous*）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{F}\, [f(\alpha \mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})]$

補題 2. f が斉次なら，$f'(\mathbf{x})$ の値は $\mathbf{x}$ に依らない．

命題 2. f が斉次なら，$f = f'(0)$ であり，特に線型である．

最後の命題が示せれば，あとは $L = T_{\mathrm{id}_M} M^M$ が Euclid であることを示せば，$X \mapsto [X, Y]$ が斉次であることはもう示したので，Lie 括弧の双線型性の証明が完了することになる．

まず，補題 2 から命題 2 を示すのは簡単である：

命題 *2* の証明.

$$\begin{aligned} df'(\mathbf{x})(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{x}d) - f(\mathbf{x}) && (\because \text{微分の定義}) \\ &= (1 + d) f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) && (\because \text{斉次性}) \\ &= df(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

よって，$f'(\curvearrowleft) = f'(0)$ に気を付ければ，$f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}) = f'(0)(\mathbf{x})\ \forall x \in \mathbb{F}$．よって $f = f'(0)$ であり，先程の注意から $f'(0)$ は線型なので，f も線型となる． ∎

では補題 2 を示そう．

補題 2 の証明. Euclid $\mathbb{R}$-加群の定義から，$d \in D, \mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbb{F}$ に対し，$f(\mathbf{a}+d\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + df'(\mathbf{a})(\mathbf{u})$ であった．そこで，$\mathbf{a} \longleftarrow \lambda\mathbf{a}, d \longleftarrow \lambda d$ と置けば，

$$f(\lambda\mathbf{a}+\lambda d\mathbf{u}) - f(\lambda\mathbf{a}) = \lambda df'(\lambda\mathbf{a})(\mathbf{u}).$$

他方，f が斉次であることから，

$$f(\lambda\mathbf{a}+\lambda d\mathbf{u}) - f(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\{f(\mathbf{a}+d\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})\} = \lambda f'(\mathbf{a})(\mathbf{u}).$$

この二つを纏めれば，$\lambda df'(\lambda\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \lambda f'(\mathbf{a})(\mathbf{u})$ である．この両辺を λ について微分すれば，

$$f'(\lambda\mathbf{a})(\mathbf{u}) + \lambda d\frac{\partial}{\partial\lambda}f'(\lambda\mathbf{a})(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{u}).$$

ここで $\lambda = 0$ とおけば，$f'(0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{a})(\mathbf{u})$ となる．よって示せた． ∎

よって，あとは次の定理を示せれば，双線型性の証明が終わる：

定理 3. M：微小線型空間，$x \in M$ のとき，T_xM は *Euclidean* $\mathbb{R}$-加群である．

Proof. 示すべきことは，$\forall\varphi : D \to T_xM\ \exists! t \in T_xM\ \forall d \in D\ \varphi(d) = \varphi(0) + dt$ である．

そこで $f : D \to T_xM$ を固定し，$\tau : D \times D \to M$ を

$$\tau(d_1, d_2) = (\underbrace{\varphi(d_1) - \varphi(0)}_{\substack{\cap \\ T_xM}})(d_2)$$

により定める．この時，$\tau(d, 0) = (\varphi(d_1) - \varphi(0))(0) = x$ かつ $\tau(0, d) = (\varphi(0) - \varphi(0))(d_0) = x$ となるので，図 1 が準余極限図式であったことから，$\tau(d_1, d_2) = t(d_1d_2)$ となるような $t \in T_xM$ が一意に存在する．τ の定義を展開すれば，

$$(\varphi(d_1) - \varphi(0))(d_2) = t(d_1d_2) = (d_1t)(d_2)\ (\forall d_1, d_2 \in D)$$

ということであり，括弧内を見比べれば，

$$\varphi(d_1) = \varphi(0) + d_1t$$

となる．よって示された． ∎

最後に Jacobi 恒等式を証明する．

Def. 12. $\varphi : M \to M$ 全単射，X：M 上のベクトル場に対し，φ_*X を次で定める：

$$\begin{array}{rccc} \varphi_*X : & D & \longrightarrow & M^M \\ & \cup\!\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\!\cup \\ & d & \longmapsto & \varphi \circ X_d \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

今，ベクトル場の空間は Euclidean だったので，ベクトル場 X, Y を固定した時，

$$D \ni d \mapsto (X_{-d})_* Y - Y \in T_{\mathrm{id}_M} M^M$$

という対応を考えれば，

$$\forall d \in D \; (X_{-d})_* Y - Y = dZ$$

を満たすような $Z \in T_x M$ が一意に存在する．そこでこの Z を $L_X Y$ と書き，X の Y **方向の Lie 微分**と呼ぶことにする．この時，次が成立する：

定理 4. $[X, Y] = L_X Y$

Proof. $d, d' \in D$ とするとき，

$$\begin{aligned} ((X_{-d}) * Y - Y)_{d'} &= X_{-d} \circ Y_{d'} \circ X_d - Y'_d \\ &= Y_{-d'} \circ X_{-d} \circ Y_{d'} \circ X_d \\ &= [X, Y]_{dd'} = (d[X, Y])_{d'} \end{aligned}$$

よって，$L_X Y$ の一意性から $[X, Y] = L_X Y$ となる． ∎

これが示せたので，あとは次の定理を示すことが出来れば，Jacobi 恒等式の証明が終わる：

定理 5. $L_X[Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$

Proof. 以下 $d \in D$ とする．定義より次が成立することに注意する：

$$(X_{-d})_*[Y, Z] = [(X_{-d})_* Y, (X_{-d})_* Z]$$

これを用いれば，

$$\begin{aligned} (X_{-d})_*[Y, Z] - [Y, Z] &= [(X_{-d})_* Y, (X_{-d})_* Z] - [Y, Z] \\ &= [dL_X Y + Y, dL_X Z + Z] - [Y, Z] \\ &= d([L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]) \end{aligned}$$

ただし，最後の変形は $[-,-]$ の双線型性を使って展開すれば出る．以上より，一意性から $L_X[Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$ となる． ∎

3 積分

次節で取り扱う微分形式についての議論では $\mathbb{R}$ 上の関数の積分が所与のとして扱われている．講義では積分への言及がなかったので，ここでは Lavendhomme [1] を参考に総合微分幾何における積分の取り扱いについて二三，補足することにする．

3.1 $\mathbb{R}$ の擬順序

定積分（や区間）を定義するために，$\mathbb{R}$ には何かしらの順序が入っていなくてはいけない．総合微分幾何では，$\mathbb{R}$ には以下のような**擬順序**が入っていることを要請する：

公理（擬順序公理）.

1. $\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ は擬順序である．即ち，$\leq$ は反射的かつ推移的である．
2. $\leq$ は環の構造と両立する．即ち $\leq$ は次の三つの条件を満たす：
   (a) **加法性**. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,[x \leq y \longrightarrow x + z \leq y + z]$
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\,[0 \leq x, 0 \leq y \longrightarrow 0 \leq xy]$
   (c) $0 \leq 1$ かつ $1 \not\leq 0$
3. $\forall d \in D\,(0 \leq d \wedge d \leq 0)$

最後の公理があるので，$\leq$ に反対称律を仮定すると $D = \{\,0\,\}$ となってしまう．$\leq$ を順序ではなく**擬**順序としているのはそのためである．

T.B.W.

4 微分形式

参考文献

[1] René Lavendhomme. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*. Vol. 13. Kluwer Texts in the Mathematical Science. P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. ISBN: 0-7923-3941-X.