

代数幾何ゼミ

石井大海

早稲田大学基幹理工学部
数学科四年

2014 年 1 月 22 日

変数の冪による部分空間を使った求解 I

Exercise 4-9

$V_i = \text{span} \{ [x_i]^j \mid 0 \leq j \} \subseteq A$ とし, $B_i = \{ [1], \dots, [x_i^{m_i-1}] \}$ が V_i の基底であるとする.

- ① 乗算行列 m_{x_i} のこの基底に関する制限 $m_{x_i} \upharpoonright V_i$ の上の基底に関する表現行列は何か? $I \cap k[x_i]$ の生成元を求める際と同様に求められることを示せ.
- ② $m_{x_i}|V_i$ の固有多項式およびその根は何か?

- ① 上のように連続した冪の形で基底 B_i が取れることも示さなくてはならないが, これは証明の結果として明らかになる.
 $[x_i] \cdot [x_i^d] = a_{0d} + a_{1d}[x_i] + \dots + a_{m_i-1,d}[x_i^{m_i-1}]$ とおく. すると m_{x_i} の基底 B_i に関する表現行列は, $\tilde{m}_{x_i} = (a_{j,k})_{0 \leq j,k < m_i}$ となる. 今 $[1], \dots, [x_i^{m_i-1}]$ は一次独立なので,

$$[x_i] \cdot [x_i^d] = 1 \cdot [x_i^{d+1}] \quad (0 \leq d < m_i - 1)$$

変数の冪による部分空間を使った求解 II

よって, $a_{jd} = \delta_{j,d+1}$ ($0 \leq d < m_i - 1$) である. また, $I \cap k[x_i]$ の生成元を求めるアルゴリズムの性質より,

$$h_i(x_i) = x_i^{m_i} - (c_{m_i-1}x_i^{m_i-1} + \cdots + c_1x_i + c_0)$$

があつて $I \cap k[x_i] = \langle h_i(x_i) \rangle$ となる. 特に $h_i([x_i]) = 0$ より $[x_i]^{m_i} = c_{m_i-1}[x_i]^{m_i-1} + \cdots + c_1[x_i] + c_0$ である. 以上より,

$$a_{jk} = \begin{cases} \delta_{j,k+1} & (0 \leq k < m_i - 1) \\ c_j & (k = m_i - 1) \end{cases}$$



変数の冪による部分空間を使った求解 III

- ② 上の行列を具体的に書き下してみると，以下のようなになる：

$$\begin{bmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & & & c_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_{m_i-1} \end{bmatrix}$$

これは多項式 $h_i(x_i) = x_i^{m_i} - \sum_{j=0}^{m_i-1} c_j x_i^j$ の同伴行列である．
よって \tilde{m}_{x_i} の最小多項式は $h_i(m_i)$ となる． \tilde{m}_{x_i} の固有多項式を χ_i とおけば，Cayley-Hamilton の定理から $h_i \mid \chi_i$ であり，その根は一致する．特に， $\deg \chi_i = \deg h_i = m_i$ なので，結局 \tilde{m}_{x_i} の固有多項式は単元倍の差を除いて $I \cap k[x_i]$ の生成元と一致する．この時，前回までの議論から χ_i の根は $V(I)$ の点の第 i 座標の値と一致する．
この議論を逆に辿れば， $[x_i]$ の生成する部分 k -代数の基底として連続する冪を取ってこれることが判る．

変数の冪による部分空間を使った求解 IV

Exercise 4-10

上の演習問題の結果と系 4.6 を演習 4 の方程式に適用せよ.

m_{x_i} の固有値は $V(I)$ の第 i 座標の値全体と一致し, その最小多項式は $I \cap k[x_i]$ のモニックな生成元 $q(x_i)$ と一致するのであった. 上の結果から $q(x)$ は $m_{x_i}|V_i$ の固有多項式でもある. よって, 一般により複雑で高次の行列である m_{x_i} の固有値を求める代わりに, $q(x)$ の同伴行列の固有値を求める事が出来るだろう. この結果については, 次の問題の後で比較検討する.

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 I

Exercise 4-16 (Shape lemma)

$I = \sqrt{I}$ をゼロ次元イデアルとし, $V(I)$ の第 n 座標がみな相異なるとする. x_n が最後に来るような lex 順序に関する被約 Gröbner 基底を G とする.

- ① $|V(I)| = m$ の時, 剰余類 $1, [x_n], \dots, [x_n^{m-1}]$ が互いに一次独立となり, 従って A の基底となることを示せ.
- ② ある $h_i \in k[x_n], \deg h_i < m$ ($1 \leq i \leq n$) があって, G は $g_1 = x_1 - h_1(x_n), \dots, g_{n-1} = x_{n-1} - h_{n-1}(x_n), g_n = x_n^m - h_n(x_n)$ から成ることを示せ.
- ③ 第 n 座標が与えられたとき, $V(I)$ の全ての点を求める方法を与えよ.

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 II

- ① $V(I) = \{p_1, \dots, p_m\}$ とし, p_i の第 n 座標を $p_i^{(n)}$ と書くことにする. 仮定より $p_i^{(n)}$ は相異なる.
 $c_0 + c_1[x_n] + \dots + c_{m-1}[x_n^{m-1}] = 0$ としよう. このとき

$$c_0 + c_1 x_n + \dots + c_{m-1} x_n^{m-1} \in I \cap k[x_n]$$

である. $p_i \in V(I)$ より $g(p_i) = g(p_i^{(n)}) = 0$ ($1 \leq i \leq m$) である. よって, g は少なくとも m 個の異なる零点を持つ. ここで $g \neq 0$ とすると, g は高々 $m-1$ 次なので m 個の因子を持つことに反する. よって $g = 0$ であり, $c_i = 0$. よって $1, \dots, [x_n^{m-1}]$ は一次独立である. 特に, $\dim A = m$ より A の基底となる. ■

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 III

- ② 前項より A の基底として $[1], \dots, [x_n^{m-1}]$ が取れるので,

$$[x_i] = a_{0i} + a_{1i}[x_n] + \cdots + a_{m-1,i}[x_n^{m-1}] \quad (1 \leq i < n)$$

$$[x_n^m] = a_{0n} + a_{1n}[x_n] + \cdots + a_{m-1,n}[x_n^{m-1}]$$

を満たす a_{ij} が一意に存在する. そこで,

$h_i(x_n) = a_{0i} + a_{1i}x_n + \cdots + a_{m-1,i}x_n^{m-1}$ とおけば, これが題意を満たすことを示す. 特に被約 Gröbner 基底の一意性より, $G' = \{g_1, \dots, g_n\}$ が lex に関する I の被約 Gröbner 基底であることを示せば十分である.

- ① G' が $\langle G' \rangle$ の Gröbner 基底であること. 今, $i < j$ なら $\text{LT}(g_i)$ と $\text{LT}(g_j)$ は互いに素である. よって各 $S(g_i, g_j)$ は G' を法としてゼロに簡約されることがわかる. よって G' は $\langle G' \rangle$ の Gröbner 基底である.

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 IV

- ② $G' = I$. $G \subseteq I'$ は上での定め方より明らかなので, 逆向きの包含関係を示す. $f \in I$ を取る. これを g_1, \dots, g_n により割り算する:

$$f = p_1 g_1 + \cdots + p_n g_n + r$$

この時, 割り算アルゴリズムの性質から $r = f - \sum p_i g_i$ は g_1, \dots, g_n のいずれの先頭項でも割れない. 特に $\text{LT}(g_i) = x_i$ ($i < n$) より, r は x_1, \dots, x_{n-1} を含まないので, $r \in I \cap k[x_n]$ となる. 今, 系 6 および演習問題 2.2 より, g_n は $I \cap k[x_n]$ のモニックな生成元であるから, $g_n \mid r$ となる. 割り算アルゴリズムの性質から $r = 0$ または $\deg r < \deg f$ となるが, $\deg r < \deg f$ とすると g_n が $I \cap k[x_n]$ の生成元であることに反する. よって $r = 0$ である. 以上より $\bar{f}^{G'} = 0$ となるので, $f \in \langle G' \rangle$ となる.

以上より, G' が I の lex に関する Gröbner 基底であることが判った. 特に, 各 g_i の形から G' は明らかに被約である. よって示された.

第 n 座標の値が異なる場合の求解法 V

- ③ x_n での相異なる値が与えられているとする. FGLM アルゴリズムなどにより I の lex に関する被約 Gröbner 基底 G を求めれば, 上の議論からこの元は x_1, \dots, x_{n-1} を x_n で表したものになっている. よって G の各元に x_n の値を代入すれば, 各点での値が求まる.

比較 I

	平均誤差	最大誤差	最小誤差	速度
m_{x_i} の固有値	8.4525e-15	3.9088e-14	6.6613e-16	21.62(ms)
左固有ベクトル	7.1401e-14	6.7264e-13	6.3541e-15	296.00(ms)
同伴行列の固有値	3.1256e-12	2.2570e-11	4.0309e-15	105.36(ms)
変数の冪基底 (+第 n 座標判定)	1.4177e-6	1.3166e-5	3.9459e-10	208.04(ms)

- 誤差（元のイデアルに代入した値）に関して
 - m_{x_i} の固有値を直に計算する方法と左固有ベクトル法は大体近い（左固有ベクトルは乱択なので少しずつ変動がある）
 - 同伴行列はそれほど良くはないが、一応使い物にはなりそう

比較 II

- 速度に関して
 - 乗算回数が一番多い筈の固有値法が一番速い
 - 左固有ベクトル法と同伴行列法は三倍ほど差がある
 - いずれも消去イデアルの生成元を計算している。プロフィールを取った所、 $I \cap k[x_i]$ の生成元を求める所で時間を喰っている。
 - 現時点では $[1], \dots, [x_i^n]$ が一次従属になるまで繰り返し LU 分解を行って方程式を解こうとしている
 - 前の時点での計算結果を捨てているので効率が悪い
 - LU 分解は n^3 オーダーなので、累積で n^4 オーダーくらいになってしまう
 - 線型方程式の解き方を工夫しないと、折角固有値計算の回数を減らしても効率がかなり悪くなる。
- その他
 - 左固有ベクトル法を実装する上で気付いたこと
 - いきなり係数の大きな多項式を生成すると誤差が大きく蓄積する
 - 最初は絶対値が 5 以下くらいから初めて、失敗する度に段々係数を大きくする