数学における形式性とは何か？
〜数学史と数理論理学の立場から〜

早稲田大学基幹理工学部数学科四年 *
石井大海

2013 年 6 月 10 日

1　はじめに

数学は形式性や厳密性を主んじる学問である，と良く云われる．しかし，この「形式性」というのが，具体的にどういう事を指すのか，と云ったことは余り一般には知られていない．本稿の目的は，この数学の「形式性」について，余り数学に慣れ親しんでいない人々に向けて，非形式的な概説を与えることである．

本稿の書かれることとなったそもそもの発端は，文学部の友人の S 君の「文学において数学の形式性を採り入れようという一派がいるのだが，そもそも数学における形式性とはどういうものなのか教えてはくれないか」という依頼である．したがって，この記事は大学に入ってから数学に余り触れていないような人にあてて，雰囲気だけでも誤解がないように解説することを企図して書かれている．そのため，数学的には一部厳密性を犠牲にする部分もある．とはいえ，形式体系などというものに触れるのに厳密性を全く抜きにしては換骨奪胎も甚しいので，敢えて厳密な記述を心掛けた部分もある．

対象読者を鑑み，本稿では以下のような方針で執筆されている（予定である）：

- まず軽く数学史を概説することで，数学における「形式性」が出現する必然性と，その変遷がわかりやすいように配慮した．
- 現代の数学において「形式性」の用いられ方を，主に数理論理学の立場から解説した．

勿論，これは曲がりなりにも学術的なレクチュアを企図したものであるので，何か間違いなどがあれば是非是非指摘して頂けると幸いである．

2　数学の歴史 〜形式の誕生〜

「はじめに」で述べたように，まずは数学の発達の歴史を通して，形式というものの役割を明らかにしていきたい．ここで扱う「数学」というのは，西洋（欧米）の数学である．文明あれば必ず数学あり．色々な文明ごとに数学の発達の仕方や，「数」というものの捉え方は異なる．例えば，東洋の数学が負数の概念をかなり早い段階で扱っていたのに対して，西洋では負数が「数」としての地位を確立するまでには長い時間を要した（詳細は足立 [1] を参照）．ここで西洋の数学に主に焦点を当てるのは，現在の主流となっている数学は主に西洋で発展し培われてきたものだからである．

そもそも数学における「形式」とは何か？それはあり体に云って**記号**のことである．数学の歴史は記号化の歴史であり，言葉を変えれば**代数化**の歴史である．そして，数学の近代化はこの代数化にと同義である．代数というのは，簡単に云えば文字式のようなもののことだ．よって，数学における《形式＝記号＝代数》の役割を知るには，数学が如何に発展していったのかを知ることが近道なのである．

2.1　古代ギリシアの数学

西洋の数学のルーツは，古代ギリシアに遡る．古代ギリシアにおける数学には，**分析**（又は**解析**）と

* 執筆当時

総合という二つの方法論があった．分析というのは，問題が解けたと仮定して，必要な前提を逆算していく，という**発見的**な方法である．対する総合という手法は，しっかりとした公理を置いて，そこから厳密な議論によって定理を**証明**していくという手法である．数学の著しい特徴の一つに，その**厳密性**がしばしば挙げられるが，これはギリシアの数学のうち総合の方法が後の世に伝えられ，分析の手法を伝える書物が長らく逸失していたことによる．

古代ギリシアにおいて，数学とは**幾何学**であった．ギリシアの三大問題というのを聞いたことがあるかもしれない：

角の三等分の作図　与えられた角を三等分する直線を作図出来るか？

円積問題　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図出来るか？

立方体倍積問題　与えられた立方体の三倍の体積を持つ立方体を作図出来るか？

これらはみなコンパスと定木[*1]では作図出来ないことが知られている．どうも出来ないらしい，ということは古代ギリシアの人々も気付いていて，ではどういう道具があれば出来るか？ということを考えていたようだ[*2]．これらの問題は，明らかにどれも幾何に関連した問題であることがわかるだろう．

さて，先程数学の厳密性はギリシアに由来するということを書いた．その一つの金字塔が，ユークリッドの『**原論**（ストイケイア；Elements）』であり，これが長らく西洋の数学の聖典として君臨していた．そのスタイルは，まず議論の大前提となる**公理**や許容される操作である**公準**，議論に用いる用語の**定義**を定めて，これらから厳密な推論によって定理や計算を導きだすというものであった．その一部を引用してみよう（文面は坂口 [14] による）．

定義
1. 点とは部分を持たないものである．
2. 線とは幅のない長さである．
3. 線の端は点である．
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である．
5. 面とは長さと幅のみを持つものである．

公準　次のことが要請されているとせよ．
1. 任意の点から任意の点に直線を引くこと．
2. 有限直線を連続一直線に延長すること．
3. 任意の点と距離（半径）をもって円を描くこと．
4. すべての直角は等しいこと．
5. 一直線が二直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この二直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること．

公理
1. 同じものに等しいものはまた互いに等しい．
2. 等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい．
3. 互いに重なり合うものは等しい．
4. 等々……

これらの前提から出発して，それまでに既に示した命題だけを使って新たな命題を証明していく……というのが，『原論』を貫いているスタイルである．具体的な証明を孫引きにしてもよいが，非常に面倒なので省略する．中学でやった初等幾何の証明を更に幾重にも折り重ねて，誤魔化しを極力避けたものが全 13 巻に亘って展開されていると思ってくれればよい．また，『原論』における議論では，我々が証明で用いるような**文字式**は一切出て来ず，すべてはことばで説明されている．この**公理**的な手法は，19 世紀末から 20 世紀にかけて，数学が再び厳密性を取り戻す時期に再び顔を覗かせることになる．しかし，詳細は後述するが，復活した後の「公理」は，古代ギリシアの「公理」とは似て非なるものである．

先程も述べたように，ギリシアの数学ではこうした厳密な証明以外にも，分析と呼ばれる発見的な手法が用いられていた．答えに当たりを付けるのに分

[*1] 長さの目盛が付いていない，純粋に直線を引く目的の道具を定**木**と書いて，通常の定規と区別する．

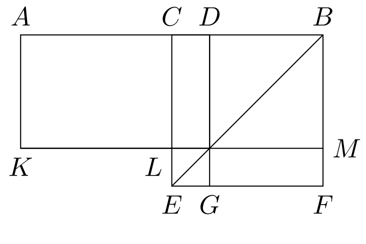
[*2] この「定木とコンパスで」という条件を見落として，「三等分する装置を作ったぞ！数学の歴史を塗り替えた！」と騒ぎ立てたり特許を申請したりする人がいるらしい．誠に残念である．

析による説明が行われて，一先ずもとまったらそれが正しいことをきちんと証明する，というのがギリシアの数学だったのだ．この分析の手法に関しては，本稿の主題と外れるので詳細は省略する．

さて，ギリシアにおける数学は幾何学である，という話だた．そのため，数学の扱う量は全て長さや面積といった**幾何量**であり，数とはその量の比のことであった．ギリシアにおける**算術**はもっぱら幾何量の**比**を扱う学問である．数が全て幾何量である，ということは，つまり，**面積と長さを足すような事は出来ない**ということを意味する．だから，昔の人々は $x^2 + x - 3 = 0$ のような方程式は，そもそも考えることすら出来なかった．面積 x^2 と長さ x のようなものは足せる筈がないし，そもそも負数の概念がないので -3 というようなものも考えられない[*3]．この制約は，中世ヨーロッパまでしつこく付き纏うことになる．

しかし，それでも二次方程式に相当するものを考えていた形跡はある．以下は，『原論』第二巻の命題五である：

> ある線分が，等しい部分と等しくない部分に分けられたとすると，等しくない部分の全体によって囲まれた長方形と二つの区分点の間の線分上の正方形との和は，もとの線分の半分の上の正方形と等しい．



これを巧みに移動して「平方完成」して，方程式を解く（実際にデモンストレーションする）．現代的には次に相当する操作をしている：

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

しかし，文字式はないし，量は全て幾何量なので，上のような証明になるのである．

古代ギリシア時代に記号は全く出て来なかったのか？というとそういう訳ではない．アレクサンドリアのディオファントスが部分的に文字式を導入し，負冪も含めた指数法則などに言及したりもしていた．こうした下地は後で言及するアラビアで代数学が栄える下地となる．

ギリシア時代のまとめ

- ギリシア時代の数学の二つの方法
  - **総合** 『原論』に代表される公理から出発して厳密に**証明**を行う手法
  - **分析** 総合と並んでギリシアの数学を支える手法だったが，逸失．**発見的**な議論により，答えに当りを付ける方法．
  - $\longrightarrow$ 総合のみが残ったので，後の数学は厳密な証明に重きが置かれるように．
- ギリシアにおける数学：幾何学
  - 数学の扱う量は長さ，面積などの幾何量．長さと面積を足したりは出来ない．
  - 数は幾何量の比として現れる．
  - 文字式はなく，方程式は幾何の問題として表され，幾何的な操作により解かれた．

2.2 アラビアの数学

時代が下ると，他のギリシアの多くの思想や文化と同じく，数学もアラビアに継承される．ここアラビアで，代数学の発展の礎が築かれることになる．アラビアに受け継がれ，独自の発展を遂げた数学は，後にルネサンスの時期にこれまた他の思想や文化と同時にヨーロッパへと逆輸入されることになる．

記号代数を本格的な研究分野に仕立て上げたのは，**アル=フワーリズミー**であるとされる．アル=フワーリズミーは二次方程式を五つの型に分類した：

$$ax^2 = bx \quad ax^2 = b \quad ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 + c = bx \quad ax^2 = bx + c$$

「え？ $ax^2 + bx + c = 0$ だけで十分じゃないの？」という声が聞こえてきそうだ．しかし，先程から繰

[*3] 更に云えば，ギリシアの時代には文字式などというものは存在しないので，このように書くことすら出来ない

り返しているように，**量は幾何量**なのである．したがって，負の数やゼロといった数はないので，このようにゼロやマイナスが出て来ないように形を分類してやる必要があるのだ．また，ここでは文字式を用いて書いているが，実際には，**これらは全て言葉で表現**されている．例えば，$x^2+21=10x$ を例を見てみよう（以下の例は全て坂口 [14] に拠る）．

> 根の数を半分にすると 5，自乗して 25，そこから 21 を引いて 4．その根を取ると 2，根の数の半分の 5 からそれを取ると，3 が残る．それが求める元手の根である．つまり元手は 9．

これを記号で書くと，次のようになる：

$$
\begin{aligned}
x^2+21&=10x\\
x^2-10x+21&=0\\
(x-5)^2-25+21&=0\\
(x-5)^2&=4=(-2)^2\\
\therefore x&=-2+5=3
\end{aligned}
$$

代数を知っている我々からすると，なるほどしっかり式変形が出来ているし正しそうだ，というような気がする．しかし，この時代においては，文字式の証明というのはまだしっかりした証明とは認められておらず，アル=フワーリズミーは先程のユークリッド『原論』のように幾何的に「証明」をつけることで正当化している（時間があればこの方法も紹介する）．この時点では，まだ幾何学のほうが代数学よりも厳密な証明法であると認識されているのだ．

このように，一度代数的な手法が確立されれば，もう幾何的な意味に立ち戻っていちいち変形をする必要はなくなってしまう．いうなれば，**意味**を離れて，純粋に**機械的**な方法で答えを求めることが出来るようになるのだ．

これが百年ほど時代が下ると，次第に代数的な方法と幾何学的な証明法が同等のものであると認識されるようになってくる．もっとも，まだ言葉を用いた説明しか行われていなかったので，より深い進化はヨーロッパでの発展を待たなくてはならない．

アラビア数学のまとめ

- ギリシアの数学はアラビアのイスラム文化圏に引き継がれた．
- アル=フワーリズミーが（言葉による）代数の知識を体系付け，後の代数化の基礎を整えた．
  - 記号による代数はまだ主流ではない．
- 厳密な証明には依然として幾何学が用いられていたが，代数的な手法も次第に（アラビア）数学の主流になりつつあった．
- 代数的な手法は，幾何的な意味を考えずに機械的に答えを求めることが出来る．

2.3 中世〜ルネサンスの数学

アラビアで代数学が発展している一方，ヨーロッパにおいては，数学は未だユークリッドの『原論』で止まっている状態であった．それが商業が発達して，ルネサンス期に，まずは大学ではなく商人や在野の数学者達の間でアラビアの代数学が輸入されることになる．

ヨーロッパで記号代数が花開くのに必要な先鞭を付けたのが，三次方程式の解の公式で有名な**カルダノ**と，解と係数の関係を発見したことで有名な**ヴィエト**である．

16 世紀，カルダノの時には，まだ負数や虚数は正当な数と認められていなかったし，文字式を用いた手法も取られていなかった．例えば，三次方程式 $x^3=ax+b$ の解を与えるカルダノの公式は，現代的には

$$
x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}
$$

と書かれるが，文字式が使えないので，カルダノは著書『アルス・マグナ』でこのことを記すのに文章を用いており，ページの半分を費してこの公式を記述している，らしい [11]．また，ここでは便宜的に文字を用いて記述しているが，カルダノが扱った方程式は具体的な数値，それも正の数のみを係数とする方程式であった．したがって，先のアル=フワーリズミーのように，項がどこにあるかで異なる方程式と見做されるので，それぞれについていちいち解

法を解説している．

いささか脱線するようだが，実は数学に虚数が導入切っ掛けになったのはこの三次方程式である．ヨーロッパの人々は三次方程式を解こうとすると，どう足掻いても，ただでさえ不確かな負数のそれも平方根のような「無意味」な存在が出て来てしまうことに気付いた．実は，こんにちにおいては三次方程式の解を求める過程では本質的に虚数が現れるということが知られている．そこで，数学者ボンベリは，虚数を一つの実体と認めて，その間の適切な計算法則を記述して計算を正当化することに成功した．しかし，「負数」ですら胡散臭いと思われている時代であり，その結果がしっかりと評価されるのは 2 世紀も後のことになる．

閑話休題．カルダーノの時代には，方程式は数値係数であり，説明は言葉でなされるのであった．この状況を打開したのが，同じく 16 世紀の数学者**フランソワ・ヴィエト**である．高校の時だったかに，二次方程式の解と係数の関係を習うと思うが（忘れてしまったという場合は構わないので読み飛ばしてよい），それを発見したのがヴィエトである．ヴィエトは，『解析技法序論』において，方程式に任意係数を導入した．特に，未知数は母音（A, E, I, O, V, Y）で表し，定数は子音で表す，という約束をした．このお陰で議論をより記号的に，機械的に行うことができるようになった．西洋数学に**記号が爆誕した瞬間**である．もっとも，ヴィエトは未だギリシアの呪縛から逃れられていない部分もあり，例えば解は全て正の実数に限っていたし，方程式に表れる量は全て**幾何量**として見ていた．したがって，方程式の各項の次数は全て揃えて書かれていた．こんな具合に：

$$x^3 + 3B^2x = 2C^3$$

x^3 は体積なので，後の項は全部体積になるように係数を工夫して書かれているということだ．

こうしてヴィエトが先鞭を付けた記号代数を発展させたのが**ルネ・デカルト**と**ピエール・ド・フェルマー**である．デカルトは「線分の代数」を導入し，それまで幾何的な意味に依存していた代数を，その桎梏から解き放った．与えられた二つの線分に対して，それらの間の加減乗除と平方根を作図する方法を与えることで，ヴィエトが課していたような幾何量としての制限を外すことに成功したのである．これにより，**幾何学の代数化**がはじまった．これがどういうことかといえば，図形を一定の方程式に従う点のあつまりと見做すということだ．例えば，円の方程式が $x^2 + y^2 = 1$ で与えられるとか，放物線が $y = ax^2 + b$ で与えられる，といった具合である．この発想に最初に至ったのはフェルマーであり，上で挙げた円や放物線を二次曲線として統一的に記述することに成功した．これらはギリシア時代には円錐を切った断面として現れる**円錐曲線**として取り扱われていたが，フェルマーはその理論を代数的に書き直したのである．

2.3.1 中世〜ルネサンスの数学のまとめ

- ヴィエトが記号代数の先鞭を付けた．
  - 記号が爆誕したお陰で，議論が簡単になった．
  - 記号的操作により，幾何的な意味を忘れて作業が出来るようになった．
- デカルトによって，代数が幾何量の呪縛から解放された．
- デカルトやフェルマーは，幾何の代数化を進めた．

2.4 微分積分の誕生――華々しい記号の乱舞

2.5 カントールとデデキント――現代数学の誕生

2.6 ラッセル，ヒルベルト，ブラウワー，そしてゲーデル――数学基礎論の誕生と死

3 現代数学における形式性

3.1 群論とか

3.2 集合論もあるよ

3.3 数理論理学入門への入門：formal system にかんする informal な導入

3.4 完全性定理：形式と意味を繋ぐもの

3.5 不完全性定理については解説しません

4 おわりに

5 おわりのおわりに

参考文献

[1] 足立恒雄. 数とは何か そしてまた何であったか. 共立出版, 2011. *.

[2] 新井敏康. 数学基礎論. 岩波書店, 2011. *.

[3] Steve Awodey. *Category Theory*, Vol. 52 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 2010.

[4] 江田勝哉. 数理論理学 ――使い方と考え方：超準解析の入口まで. 内田老鶴圃, 2010. *.

[5] Torkel Franzén. ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド. みすず書房, 2011. 田中一之 訳（原題：Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Use and Abuse）.

[6] Kurt Gödel. ゲーデル 不完全性定理. 岩波文庫, 2006. 林晋／八杉満利子 訳・解説, *.

[7] Douglas R. Hofstadter. ゲーデル，エッシャー，バッハ あるいは不思議の環. 白揚社, 1985. 野崎昭弘, はやし・はじめ, 柳瀬尚紀 訳 (原書: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid).

[8] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 1 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[9] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 2 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[10] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 3 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[11] Israel Kleiner. 抽象代数の歴史. 日本評論社, 2011. 斎藤正彦 訳, (原書： A History of Abstract Algebra).

[12] 古森雄一, 小野寛晰. 現代数理論理学序説. 日本評論社, 2010.

[13] Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications, 2011.

[14] 坂口勝彦. 平成 25 年度早稲田大学基幹理工学部数学科「数学史」講義資料. *.

[15] 殊能将之. 美濃牛. 講談社ノベルス, 2000.

[16] 竹内外史. 層・圏・トポス 現代的集合像を求めて. 日本評論社, 1978.

[17] 竹内外史. 新装版 集合とはなにか. 講談社ブルーバックス, 2001.

[18] 田中一之, 坪井明人, 野本和幸. ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）2 完全性定理とモデル理論, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 第 2 巻. 東京大学出版会, 2011. *.

[19] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 2000.

[20] 坪井明人. モデルの理論. 河合出版, 1997.

上記の一覧中，$*$ の付いている文献は今回特に参考にした文献である[*4].

数学の歴史を，数概念の発達という観点から捉えるには足立 [1] がよくまとまっている．ただ，数学的な素養がないと本文中の議論は追えないだろう．個別の数学者の観点から数学の歴史を概観したけれ

[*4] たくさん参考文献が出てきますが，全部ちゃんと読んでるなんて思わないでください [15].

ば，ジェイムズ [10] がよい．

現代の数理論理学を学びたい場合，証明論寄りならば古森・小野 [12] や戸田山 [19]，モデル理論よりならば田中・坪井・野本 [18] や江田 [4] をお勧めする．後者に関しては，数理論理学の話題に留まらず，第三章では分析哲学の話題を取り扱っている．また，集合論や計算論なども含めて数理論理学をより広く学びたい場合は，新井 [2] がよいだろう．