# 数学における形式性とは何か？
# 〜数学史と数理論理学の立場から〜

早稲田大学基幹理工学部数学科四年 *
石井大海

2013 年 6 月 12 日

## 1　はじめに

数学は形式性や厳密性を主んじる学問である，と良く云われる．しかし，この「形式性」というのが，具体的にどういう事を指すのか，と云ったことは余り一般には知られていない．本稿の目的は，この数学の「形式性」について，余り数学に慣れ親しんでいない人々に向けて，非形式的な概説を与えることである．

本稿が書かれることになった切っ掛けは，文学部の友人の S 君の「文学において数学の形式性を採り入れようという一派がいるのだが，そもそも数学における形式性とはどういうものなのか教えてはくれないか」という依頼である．したがって，この記事は大学に入ってから数学に余り触れていないような人にあてて，雰囲気だけでも誤解がないように解説することを企図して書かれている．そのため，数学的には一部厳密性を犠牲にする部分もある．とはいえ，形式体系などというものに触れるのに厳密性を全く抜きにしては換骨奪胎も甚しいので，敢えて厳密な記述を心掛けた部分もある．

対象読者を鑑み，本稿では以下のような方針で執筆されている（予定である）：

- まず軽く数学史を概説することで，数学における「形式性」が出現する必然性と，その変遷がわかりやすいように配慮した．
- 現代の数学において「形式性」の用いられ方を，主に数理論理学の立場から解説した．

本来であれば，数学史に関しては，ギリシアから長らく受け継がれてきた数と量の概念の区別についても言及しておくべきだろう．しかし，本稿の主眼はあくまで「形式」にあるので，そうした観点からの解説は殆んど省略し，「形式」の発展史の説明上必要になる部分で少し言及するのみに留めた．他にも，時間や分量の都合上言及や解説を割愛した概念もある．

勿論，これは曲がりなりにも学術的なレクチュアを企図したものであるので，何か間違いなどがあれば是非是非指摘して頂けると幸いである．

## 2　数学の歴史 〜形式の誕生〜

「はじめに」で述べたように，まずは数学の発達の歴史を通して，形式というものの役割を明らかにしていきたい．ここで扱う「数学」というのは，西洋（欧米）の数学である．文明あれば必ず数学あり．色々な文明ごとに数学の発達の仕方や，「数」というものの捉え方は異なる．例えば，東洋の数学が負数の概念をかなり早い段階で扱っていたのに対して，西洋では負数が「数」としての地位を確立するまでには長い時間を要した（詳細は足立 [1] を参照）．ここで西洋の数学に主に焦点を当てるのは，現在の主流となっている数学は主に西洋で発展し培われてきたものだからである．

そもそも数学における「形式」とは何か？それはあり体に云って**記号**のことである．数学の歴史は記号化の歴史であり，言葉を変えれば**代数化**の歴史で

* 執筆当時

ある．そして，数学の近代化はこの代数化と同義である．代数というのは，簡単に云えば文字式のようなもののことだ．よって，数学における《形式＝記号＝代数》の役割を知るには，数学が如何に発展していったのかを知ることが近道なのである．また，一口に「形式」といっても，その意味するところは時代によって変わってくる．従って，数学における「形式」と異分野の関わりを論じるには，それが一体いつの時代の「形式」であるのか，ということに注意を払うべきであろう．そういった観点からも，まずは数学史を通して「形式」の変遷を把握しておくことは重要となる筈である．

### 2.1 古代ギリシアの数学

西洋の数学のルーツは，古代ギリシアに遡る．古代ギリシアの数学には，**分析**（又は**解析**）と**総合**という二つの方法論があった．分析というのは，問題が解けたと仮定して，必要な前提を逆算していく，という**発見的**な方法である．対する総合という手法は，しっかりとした公理を置いて，そこから厳密な議論によって定理を**証明**していくという手法である．数学の著しい特徴の一つに，その**厳密性**がしばしば挙げられるが，これはギリシアの数学のうち総合の方法のみが後の世に伝えられ，分析の手法を伝える書物は長らく逸失していたことによる．

古代ギリシアにおいて，数学とは**幾何学**であった．ギリシアの三大問題というのを聞いたことがあるかもしれない：

**角の三等分の作図**　与えられた角を三等分する直線を作図出来るか？

**円積問題**　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図出来るか？

**立方体倍積問題**　与えられた立方体の三倍の体積を持つ立方体を作図出来るか？

これらはみなコンパスと定木[*1]では作図出来ないことが知られている．どうも出来ないらしい，ということは古代ギリシアの人々も気付いていて，ではどういう道具があれば出来るか？ということを考えていたようだ[*2]．これらの問題は，明らかにどれも幾何に関連した問題であることがわかるだろう．

さて，先程数学の厳密性はギリシアに由来するということを書いた．その一つの金字塔が，ユークリッドの『**原論**（ストイケイア；Elements）』であり，これが長らく西洋の数学の聖典として君臨していた．そのスタイルは，まず議論の大前提となる**公理**や許容される操作である**公準**，議論に用いる用語の**定義**を定めて，これらから厳密な推論によって定理や計算を導きだすというものであった．その一部を引用してみよう（文面は坂口 [14] による）．

**定義**　1. 点とは部分を持たないものである．
2. 線とは幅のない長さである．
3. 線の端は点である．
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である．
5. 面とは長さと幅のみを持つものである．

**公準**　次のことが要請されているとせよ．
1. 任意の点から任意の点に直線を引くこと．
2. 有限直線を連続一直線に延長すること．
3. 任意の点と距離（半径）をもって円を描くこと．
4. すべての直角は等しいこと．
5. 一直線が二直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この二直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること．

**公理**　1. 同じものに等しいものはまた互いに等しい．
2. 等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい．
3. 互いに重なり合うものは等しい．
4. 等々……

これらの前提から出発して，それまでに既に示し

[*1] 長さの目盛が付いていない，純粋に直線を引く目的の道具を定**木**と書いて，通常の定規と区別する．

[*2] この「定木とコンパスで」という条件を見落として，「三等分する装置を作ったぞ！数学の歴史を塗り替えた！」と騒ぎ立てたり特許を申請したりする人がいるらしい．誠に残念である．

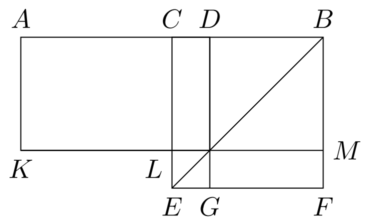
た命題だけを使って新たな命題を証明していく……というのが，『原論』を貫いているスタイルである．具体的な証明を孫引きにしてもよいが，非常に面倒なので省略する．中学でやった初等幾何の証明を更に幾重にも折り重ねて，誤魔化しを極力避けたものが全 13 巻に亘って展開されていると思ってくれればよい．また，『原論』における議論では，我々が証明で用いるような**文字式**は一切出て来ず，すべてはことばで説明されている．この**公理**的な手法は，19 世紀末から 20 世紀にかけて，数学が再び厳密性を取り戻す時期に再び顔を覗かせることになる．しかし，詳細は後述するが，復活した後の「公理」は，古代ギリシアの「公理」とは似て非なるものである．

先程も述べたように，ギリシアの数学ではこうした厳密な証明以外にも，分析と呼ばれる発見的な手法が用いられていた．答えに当たりを付けるのに分析による説明が行われて，一先ずもとまったらそれが正しいことをきちんと証明する，というのがギリシアの数学だったのだ．この分析の手法に関しては，本稿の主題と外れるので詳細は省略する．

さて，ギリシアにおける数学は幾何学である，という話だた．そのため，数学の扱う量は全て長さや面積といった**幾何量**であり，数とはその量の比のことであった．ギリシアにおける**算術**はもっぱら幾何量の**比**を扱う学問である．数が全て幾何量である，ということは，つまり，**面積と長さを足すような事は出来ない**ということを意味する．だから，昔の人々は $x^2 + x - 3 = 0$ のような方程式は，そもそも考えることすら出来なかった．面積 $x^2$ と長さ $x$ のようなものは足せる筈がないし，そもそも負数の概念がないので $-3$ というようなものも考えられない[*3]．この制約は，中世ヨーロッパまでしつこく付き纏うことになる．

しかし，それでも二次方程式に相当するものを考えていた形跡はある．以下は，『原論』第二巻の命題五である：

> ある線分が，等しい部分と等しくない部分に分けられたとすると，等しくない部分の全体によって囲まれた長方形と二つの区分点の間の線分上の正方形との和は，もとの線分の半分の上の正方形と等しい．




これを巧みに移動して「平方完成」して，方程式を解く（実際にデモンストレーションする）．現代的には次に相当する操作をしている：

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

しかし，文字式はないし，量は全て幾何量なので，上のような証明になるのである．

古代ギリシア時代に記号は全く出て来なかったのか？というとそういう訳ではない．アレクサンドリアのディオファントスが部分的に文字式を導入し，負冪も含めた指数法則などに言及したりもしていた．こうした下地は後で言及するアラビアで代数学が栄える下地となる．

**ギリシア時代のまとめ**

- ギリシア時代の数学の二つの方法
  - **総合**　『原論』に代表される公理から出発して厳密に**証明**を行う手法
  - **分析**　総合と並んでギリシアの数学を支える手法だったが，逸失．**発見的**な議論により，答えに当りを付ける方法．
  - $\longrightarrow$　総合のみが残ったので，後の数学は厳密な証明に重きが置かれるように．
- ギリシアにおける数学：幾何学
  - 数学の扱う量は長さ，面積などの幾何量．長さと面積を足したりは出来ない．
  - 数は幾何量の比として現れる．
  - 文字式はなく，方程式は幾何の問題として表され，幾何的な操作により解かれた．

[*3] 更に云えば，ギリシアの時代には文字式などというものは存在しないので，このように書くことすら出来ない

## 2.2 アラビアの数学

時代が下ると，他のギリシアの多くの思想や文化と同じく，数学もアラビアに継承される．ここアラビアで，代数学の発展の礎が築かれることになる．アラビアに受け継がれ，独自の発展を遂げた数学は，後にルネサンスの時期にこれまた他の思想や文化と同時にヨーロッパへと逆輸入されることになる．

記号代数を本格的な研究分野に仕立て上げたのは，**アル=フワーリズミー**であるとされる．アル=フワーリズミーは二次方程式を五つの型に分類した：

$$ax^2 = bx \quad ax^2 = b \quad ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 + c = bx \quad ax^2 = bx + c$$

「え？ $ax^2 + bx + c = 0$ だけで十分じゃないの？」という声が聞こえてきそうだ．しかし，先程から繰り返しているように，**量は幾何量**なのである．したがって，負の数やゼロといった数はないので，このようにゼロやマイナスが出て来ないように形を分類してやる必要があるのだ．また，ここでは文字式を用いて書いているが，実際には，**これらは全て言葉で表現**されている．例えば，$x^2 + 21 = 10x$ を例を見てみよう（以下の例は全て坂口 [14] に拠る）．

> 根の数を半分にすると 5，自乗して 25，そこから 21 を引いて 4．その根を取ると 2，根の数の半分の 5 からそれを取ると，3 が残る．それが求める元手の根である．つまり元手は 9．

これを記号で書くと，次のようになる：

$$\begin{aligned} x^2 + 21 &= 10x \\ x^2 - 10x + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 - 25 + 21 &= 0 \\ (x-5)^2 &= 4 = (-2)^2 \\ \therefore x &= -2 + 5 = 3 \end{aligned}$$

代数を知っている我々からすると，なるほどしっかり式変形が出来ているし正しそうだ，というような気がする．しかし，この時代においては，文字式の証明というのはまだしっかりした証明とは認められておらず，アル=フワーリズミーは先程のユークリッド『原論』のように幾何的に「証明」をつけることで正当化している（時間があればこの方法も紹介する）．この時点では，まだ幾何学のほうが代数学よりも厳密な証明法であると認識されているのだ．

このように，一度代数的な手法が確立されれば，もう幾何的な意味に立ち戻っていちいち変形をする必要はなくなってしまう．いうなれば，**意味**を離れて，純粋に**機械的**な方法で答えを求めることが出来るようになるのだ．

これが百年ほど時代が下ると，次第に代数的な方法と幾何学的な証明法が同等のものであると認識されるようになってくる．もっとも，まだ言葉を用いた説明しか行われていなかったので，より深い進化はヨーロッパでの発展を待たなくてはならない．

**アラビア数学のまとめ**

- ギリシアの数学はアラビアのイスラム文化圏に引き継がれた．
- アル=フワーリズミーが（言葉による）代数の知識を体系付け，後の代数化の基礎を整えた．
  - 記号による代数はまだ主流ではない．
- 厳密な証明には依然として幾何学が用いられていたが，代数的な手法も次第に（アラビア）数学の主流になりつつあった．
- 代数的な手法は，幾何的な意味を考えずに機械的に答えを求めることが出来る．

## 2.3 中世〜ルネサンスの数学

アラビアで代数学が発展している一方，ヨーロッパにおいては，数学は未だユークリッドの『原論』で止まっている状態であった．その状況が変わり始めたのがルネサンス期である．この変化を主導したのは，大学の数学者ではなく，アラビアからギリシアの数学や代数学を輸入しはじめた商人や在野の数学者達である．

ヨーロッパで記号代数が花開くのに必要な先鞭を付けたのが，三次方程式の解の公式で有名な**カルダノ**と，解と係数の関係を発見したことで有名な**ヴィエト**である．いずれも 16 世紀の数学者である．

カルダノの時代，まだ負数や虚数は正当な数と認

められていなかったし，文字式を用いた手法も取られていなかった．例えば，三次方程式 $x^3 = ax + b$ の解を与えるカルダノの公式は，現代的には

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

と書かれる．しかし，カルダノは文字式を使わなかったため，著書で同じことを文章を用いて記しており，実にページの半分を費してこの公式を記述している，らしい [11]．また，ここでは便宜的に文字を用いて記述しているが，カルダノが扱った方程式は具体的な数値，それも正の数のみを係数とする方程式であった．したがって，先のアル=フワーリズミーのように，項がどこにあるかで異なる方程式と見做されるので，それぞれについていちいち解法を解説している．

また，上の公式の証明ではある三次式の因数分解の公式

$$(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^2 - v^2$$

が本質的な役割を果すのだが，カルダノはこれが成立するという「証明」を，立方体の部分を切り貼りしたりして，幾何的に示している．この時点では，まだユークリッドやアル=フワーリズミーの時代の証明=幾何という世界観を引き摺っていたのである．

この状況を打開したのが，同じく 16 世紀の数学者**フランソワ・ヴィエト**である．高校の時だったかに，二次方程式の解と係数の関係を習うと思うが (忘れてしまったという場合は構わないので読み飛ばしてよい)，それを発見したのがヴィエトである．ヴィエトは，『解析技法序論』において，方程式に任意係数を導入した．特に，未知数は母音（A, E, I, O, V, Y）で表し，定数は子音で表す，という約束をした．このお陰で議論をより記号的に，機械的に行うことができるようになった．西洋数学に**記号が爆誕した瞬間**である．もっとも，ヴィエトは未だギリシアの呪縛から逃れられていない部分もあり，例えば解は全て正の実数に限っていたし，方程式に表れる量は全て**幾何量**として見ていた．したがって，方程式の各項の次数は全て揃えて書かれていた．こんな具合に：

$$x^3 + 3B^2x = 2C^3$$

$x^3$ は体積なので，後の項は全部体積になるように係数を工夫して書かれているということだ．

こうしてヴィエトが先鞭を付けた記号代数を発展させたのが**ルネ・デカルト**と**ピエール・ド・フェルマー**である．デカルトは「線分の代数」を導入し，それまで幾何的な意味に依存していた代数を，その桎梏から解き放った．与えられた二つの線分に対して，それらの間の加減乗除と平方根を作図する方法を与えることで，ヴィエトが課していたような幾何量としての制限を外すことに成功したのである．これにより，**幾何学の代数化**がはじまった．これがどういうことかといえば，図形を一定の方程式に従う点のあつまりと見做すということだ．例えば，円の方程式が $x^2 + y^2 = 1$ で与えられるとか，放物線が $y = ax^2 + b$ で与えられる，といった具合である．この発想に最初に至ったのはフェルマーであり，上で挙げた円や放物線を二次曲線として統一的に記述することに成功した．これらはギリシア時代には円錐を切った断面として現れる**円錐曲線**として取り扱われていたが，フェルマーはその理論を代数的に書き直したのである．それまでは，幾何的な種々の操作によって証明されたりしていた図形的性質を，方程式の性質として扱うことが出来るようになったのである．

#### 2.3.1 中世〜ルネサンスの数学のまとめ

- ヴィエトが記号代数の先鞭を付けた．
  - 記号が爆誕したお陰で，議論が簡単になった．
  - 記号的操作により，幾何的な意味を忘れて作業が出来るようになった．
- デカルトによって，代数が幾何量の呪縛から解放された．
- デカルトやフェルマーは，幾何の代数化を進めた．

### 2.4 19 世紀，抽象代数の成立

このように，記号の誕生によって数学は爆発的に発展することとなった．この爆発的な発展の陰に

は，厳密性が疎かになる，という弊害もあった．記号は意味を考えずに操作が出来てしまうため，時折誤った議論に陥ってしまうのである．例えば，次のような「$1=0$ の証明」を考えることが出来る．便宜上 $x=1$ とおいて，次のように式変形をする：

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
x^2 &= x \qquad \text{(両辺に } x \text{ を掛ける)} \\
x^2 - x &= 0 \qquad \text{(} x \text{ を左辺に移項)} \\
x(x-1) &= 0 \qquad \text{(左辺を因数分解)} \\
x &= 0 \qquad \text{(両辺を } x-1 \text{ で割る)}
\end{aligned}
$$

さて，最初に $x=0$ とおいて，結論 $x=1$ を得た．この $x$ は同じものなので，したがって $0=1$ を得る……はて？どこで間違えたのだろう？

実は，一番最後「両辺を $x-1$ で割る」というところで間違いを犯しているのだ．$x=1$ なのだから，$x-1=0$ であり，小学校で口を酸っぱくして云われるように「0 で割ってはいけない」．そうした「意味」を無視して計算した為に，$1=0$ という間違った結論に到達してしまったのである．

しかし，この「意味」というのは，よくよく考えると厄介である．負数の演算の「意味」とは何か？無理数の演算とは？虚数とは？徒らに意味ばかり強調していたのでは，再び幾何量の束縛に逆戻りしてしまうことにもなりかねない．

18 世紀頃には，負数や複素数といった概念も数学の議論の中で頻繁に用いられていた．しかし，その「意味」は不明瞭なままで，「マイナスにマイナスを掛けると正になる」といった計算法則は知られて用いられていたが，その正当化はされていなかった．『原論』以後の厳密性はおきざりにされていたのである．

こうした問題に真正面から取り組み，大きな成果を残したのが，19 世紀の数学者**ジョージ・ピーコック**である．彼はまず，正の数における代数を「算術代数」，それ以外の一般の代数計算を「記号代数」と呼んで区別するところから始めた．ピーコックはまず，正の数に関する「算術代数」の計算法則は確かな信用のおけるものとして認める．その上で，「算術代数で成り立つ法則は，そのまま記号代数でも成り立つべきである」という**形式普遍の原理**に基づいて，算術代数の法則を一般の記号代数にまで拡張して，負数の演算法則を導き出すのである．例えば，$(-b)(-d)=db$ に対するピーコックの「証明」は次のようにして成される：

> $a>b, c>d$ であれば，$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ は常に成立するので，これは算術代数の計算法則である．そこで，この大小関係を無視して，$a=c=0$ と置けば，
>
> $$(-b)(-d)=(0-b)(0-d)=bd$$
>
> となる．

ピーコックは，更に一般の実数といったものから離れて，純粋に文字式を用いた**記号代数**における計算の意味とは何か？という問に対し，ピーコックは次のように答える．

> 記号代数では，計算法則がその意味を決める……．法則は勝手に仮定されたものだと思ってよい．実際，それらは記号やその結合態の科学に勝手に課され，矛盾さえしなければ，他のいかなる体系にも適用出来るものである[*4]．

つまり，記号代数における計算は予め取り決めておいた**計算法則**にのみ束縛されるものであり，それこそが意味である，ということになる．また，負数演算の正当化において，その計算法則は「正の数の演算法則と両立する」という前提から定められたが，計算の対象をそうした「数」から離れさせれば，異質な計算法則を持たせても（矛盾しないのならば）構わない，というのがピーコックの考えであった．例えば，上で示した「$1=0$ の証明」は，整数や実数の範囲で考えれば確かに間違った証明ではあるが，「ゼロによる割り算を許すような代数系においては，$1=0$ が成り立つ」という証明に読み替えることが出来る．

この思想は，当時においては時代のかなり先をいったものであった．ピーコックの影響を受けたイ

[*4] 訳文はクライナー [11] P.18 より

ギリスの数学者達は，この思想に後押しされて，必ずしも普通の意味での数とは関係がないような新たな「代数」を作っていった．例えば，数学者・論理学者として有名な**ジョージ・ブール**は，一般的な論理法則を表す代数として**ブール代数**というものを定義したりもしている．

このように，「予め定めた計算法則を認めてその下で成立性質を研究する」という方法論を**抽象代数**と云う．上のピーコックの思想は，この抽象代数の考え方を先取りしたものである．抽象代数は，19 世紀末ごろから盛んに研究され，数学の一つの主流を占めるに至った．

「抽象代数」と云うのは方法論の総称であり，具体的にどのような計算法則を認めるかによって様々な分野が出来上がる．そうした計算法則の集まりのこと[*5]を**代数系**といい，代数系を規定するものとして最初に選んだ計算法則のことをその代数系の**公理（系）**と云う．代数系の例として群の公理を見てみよう．

**Def. 2.1 (群).** 次の法則が成り立つとき，集合 $G$ とその上の演算 $\cdot$ が**群**を成すという．

**結合律**　任意の $a, b, c \in G$ に対して，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ が成立する．

**単位律**　ある特別な「数」 $e \in G$ があって，どんな $x \in G$ に対しても $x \cdot e = e \cdot x = x$ が成立する．この $e$ を単位元と呼ぶ．

**逆元の存在**　任意の $x \in G$ に対し，$x^{-1} \in G$ という「数」が定まって，$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ が成り立つ．この $x^{-1}$ を $x$ の逆元と呼ぶ．

簡単に用語と記号の説明をしよう．「集合」というのは，ここでは何か適当に議論の対象となるものを集めてきたものだと思えばよい．集合 $G$ に対して，$x \in G$ は「$x$ は $G$ に入っている」ということを意味している．上の公理系は，$G$ と呼ばれるものに含まれるものだけを議論対象にすると宣言していて，それらの満たすべき計算法則はシカジカカヨウのものであると述べているのだ[*6]．

この法則を満たすものは何でも「群」になる．たとえば，整数の全体は足し算 $+$ について群を成す．他にも，行列式がゼロでないような行列も積に関して群を成す．特に，自然数の足し算については**交換律** $x + y = y + x$ が成り立ち，このような交換律が成り立つ群は特別に可換群とか，アーベル群であるといったふうに呼ばれる．

さて，ここでは『原論』と同じく「公理」という言葉が用いられているが，これらの意味合いは若干異なるものである．『原論』における公理は，幾何学的な空間を規定するような，「絶対的な法則」的な意味合いを持つ．それに対して，代数系の公理は「こうした法則を満たすものを議論の対象とする」というような宣言である．

群の公理を満たすものは，何であれ群と呼ばれるのであった．このような方法を取ると何が嬉しいのだろうか？それは，代数系のもつ「一般性」である．数学においては，上で挙げた群の構造を持つものは至るところで出て来る．そのそれぞれに対していちいち同じような性質を証明していたのでは日が暮れてしまう．その点，一度「群の性質」として証明して仕舞えば，群の公理を満たすような体系の全てについて一挙に使える性質が得られる．また，その代数系何で出来ているのかを忘れて，それが満たす計算法則だけを考えることで，議論の本質的な部分が明瞭になるという威力もある．例えば「自然数」や「有理数」「行列」といったような個々の「特殊例」を離れて，より普遍的な性質を考えることが可能になるのである．

こうした抽象代数の威力が数学以外のところで発揮された例としては，ムルンギン族の婚姻体系の解明という例がある．アボリジニーのムルンギン族の婚姻体系は複雑な規則に支配されている，という

[*5] 正確にはその計算法則を満たすようなもののこと

[*6] ここで定義に「集合」などと云う言葉が現れているが，初期の抽象代数の勃興期においてはまだ集合という概念はない．そうしたものは用いずに集まりとかそういう言葉を用いて定義されていたことに注意しよう．

ことを文化人類学者のレヴィ=ストロースが知り合いだった数学者のアンドレ・ヴェイユに話したところ，ヴェイユがその婚姻関係に群構造が入っていることを見抜いて綺麗に整理してしまった，という逸話である．これは，正に「抽象代数」という考え方の射程の広さを表していると云えるだろう．

このように，議論の対象とするものの満たす公理を定めて，そこから議論を進めるという方法論を**公理的な手法**とか，**公理主義**[*7]と呼ぶ．こうした公理的な手法は代数に留まらず現代の数学の至るところで用いられている．例えば，現代の幾何学は，**位相空間**や**多様体**と呼ばれるものの公理系を定めて，その公理を満たすものはすべて幾何的と見做して議論を進めることが出来る．また，その研究の上でも，群論をはじめとした抽象代数が絶大な威力を発揮する（というか，実は群論が栄える大きな原動力となったものの一つが幾何学なのである）．こうした現代数学における公理的手法と形式性については，次章においていくらか詳しく見る．

こうした公理的方法論を，ユークリッド『原論』の方法論を逆用する形で本格的に数学に導入し，発展させたのが 19〜20 世紀を代表する偉大な数学者である**ダフィット・ヒルベルト**であり，その手法を先鋭化し数学の形式化を推進したのが第二次大戦後の数学者集団**ニコラ・ブルバキ**である．続く節では，ヒルベルト登場前夜における数学のいっそうの厳密化の流れを紹介し，本章最後の節でヒルベルトによる数学の基礎付け計画と，ゲーデルによる最終的な決着までを概説する．

### 2.5 コーシー，ワイエルシュトラス——数学の厳密化と算術化の時代

前節まで，主に代数学の発展という観点から歴史の流れを概観してきた．文字式の導入に始まる形式性は，代数以外にも**無限小解析**という新たな分野を数学に齎すことになった．無限小解析とは，「無限に小さな量」を縦横無尽に使って微分積分を展開し，函数や曲線の性質を調べる分野である．大体高校で習うような微分積分と同程度のものであると思ってよい．

例えば，18〜19 世紀の数学者は「無限に小さな量」$\varepsilon$ を用いて，微分を $f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ などと定義した．「$x$ をほんの少しだけ動かしたときの $y$ の変化率」という訳である．これを用いれば $f(x) = x^2$ の微分は，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} \\ &= \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} \\ &= 2x + \varepsilon \\ &\approx 2x \end{aligned}$$

のように計算出来る．ここで出て来る $\varepsilon$ はゼロではないが無視することが出来る，というなんともモヤモヤとする数であるかのように扱われている．ゼロではない，というのはもし $\varepsilon = 0$ ならそもそも割ることなど出来ないからである．ゼロではないから割れるけども，無限に小さいから無視できる——これは殆んど屁理屈に属するのではないか[*8]？

こうした「無限小」を用いた計算を支えている根拠は，物理学的・幾何的な直観であり，無限小を用いて計算した結果が実際の観測結果などとよく符合するという経験的な事実であった．しかし，数学の研究や教育をする上で，そういった外的な「直観」に頼った説明をしなくてはいけないというのは非常に都合が悪く，厳密性にも欠ける．この現状を打破し，確固たる基盤に載せようという運動が 19 世紀の初頭に起きる．これは，抽象代数の勃興期と重なり，こうした数学の厳密化・記号的操作の正当化は時代の要請であったのである．

まず，無限小解析の厳密化で大きな一歩を踏み出したのが**コーシー**である．コーシーはまず無限小量

[*7] これは日本独自の訳語であり，”Axiomatism” などという専門用語は存在しない [6].

[*8] 以下余談：現代においては，超準解析や冪零無限小解析といった，無限小量を「数」として扱うための手法が幾つか開発されている．これらは数理論理学の手法を応用しており，形式系や論理に関する研究が深められた今日だから可能になった定式化である（数理論理学自体があまり流行っていないので，これらの手法は未だ主流になるには至っていない）．また，代数幾何においては上で述べた代数系そのものが幾何的対象とした扱われるが，その際に冪零元は或る種の無限小のような振る舞いをする．

を定数と考えるのを止め，変量と考える視点を導入した．つまり，こんにちの高校数学でやるように，無限小量の出て来る式の値を，その無限小量を限りなくゼロに近づけたときの極限として定義したのである．その為に，コーシーは極限の「定義」も与えている．これも，今日の高校数学で習うものとほぼ同じである．

> $x$ がある定数 $a$ に限りなく近付くとき，$f(x)$ の値も限りなく $b$ に近付くなら，つまり $f(x)$ と $b$ との差をいくらでも小さく出来るとき，$\lim_{x\to a} f(x) = b$ と書く．

このように云いかえることで，それまでの物理的な直観や経験的事実に頼っていた根拠付けから離れて，数学の中だけで無限小量を使った議論を正当化出来るようになったのである．

しかし，ここでも「限りなく近付ける」とか，「差をいくらでも小さくできる」という辺りに曖昧性が残っている．これを更に厳密化し，解析学を論理と実数の性質に完全に還元することに成功したのが，**ワイエルシュトラス**である．ワイエルシュトラスは，$\varepsilon - \delta$ 論法と呼ばれる方法を導入して，上のコーシーの定義を厳密化した．

> どんな正の実数 $\varepsilon > 0$ に対しても，次の性質を満たすような正の実数 $\delta > 0$ を取ることが出来る：どんな実数 $x$ に対しても，$0 < |x - a| < \delta$ なら $|f(x) - b| < \epsilon$ が成立する．

これは，上のコーシーの「定義」をそのまま厳密化したものになっているが，論理と実数だけでしっかりと書かれているので，条件を機械的にチェックすることが出来る．こうして，あやふやなものであった解析学は，純粋な論理と実数の問題に帰着することが出来，数学の中だけで厳密に取り扱うことが出来るようになったのである．実数や自然数などの数の計算の体系を「算術」と呼ぶので，これは「解析学の**算術化**」とも呼ばれる．

ワイエルシュトラスが解析学を実数論に還元した際，「**実数の連続性**」という性質を使った．．ものすごく直感的にいえば，「実数は切れ目なくビッシリと詰まっている」というような性質のことであるこれは実数ならば当然成り立つと思われる性質だが，ではどうして成立するのだろう？と考えると簡単ではない．そこでワイエルシュトラスは，**有理数の集合を使って実数を定義する**ことで，実数が連続性を持つことを証明したのである．このように，実数をより基本的な概念に還元することを**実数の発生学**と呼ぶ．

有理数の集合を用いて実数を定義しようとしたのは，ワイエルシュトラスのみではない．今日の集合論の創始者と呼ばれる**ゲオルク・カントール**と**リヒャルト・デデキント**もそうした試みを行った人々の中の一人（ふたり？）である．特にデデキントは，実数を有理数を用いて構成し，更に有理数を整数に還元し，整数を自然数に還元する，ということまで行っている．自然数は最も基本的な数であるので，かくて数学の全分野が算術化されたということになる．

しかし，デデキントはそれに留まらず，カントールとデデキントが中心となって建設を進めていた集合論を用いて，自然数を定義している．デデキントは無限集合の存在を哲学的な理由から認めていたので，その無限集合を用いて自然数を構成してみせたのである．

### 2.6　カントールとデデキント——集合論の誕生

ここで，集合論について簡単に紹介を行っておこう．

集合論の創設者と目されるのは，先述したようにカントールとデデキントである．カントールは解析学の研究をするうちに，デデキントは代数的整数論の研究をするうちに無限集合の概念に辿り着き，それらを数学的対象として初めて陽に扱った．デデキントは集合論を用いて数学を記述する方向に研究をすすめ，カントールは集合論それ自身を研究し深める方向に研究を深めていった．

集合論の扱う「集合」というのは，ありていに云って「物の集まり」のことである．特に「無限個のものの集まり」を考えるときに，集合論はその真価を発揮する．無論それ以前にも，有限個の物のあつまりを考えることはあったし，陰に無限の物を考

えることはよくあった．しかし，集合論がそれまでと違ったのは，**「無限」を数える**ことを企図したことにある．

無限を数えるとはどういうことか？その為に，物を数えるとはどういうことかを考えてみよう．普段物を数えるとき，我々は指をさしながら「一つ，二つ，三つ，……」と数を（心の中で）唱えながら数えている．確かにそうだ．しかし，例えば 10036 個のものを数えようとか，2223339393 個のものを数えようと思うと，この方法は上手くいくだろうか？まあ，原理上上手くはいくが，絶対途中で数え違いをするだろう．ではどうればいいだろうか？

同じようなジレンマに立たされた歴史上の人物・豊臣秀吉に学んでみよう．ある日，秀吉は信長に「山の木の本数を数えて参れ」と命じられたが，一々数えていてはもう何がなんだかよくわからない．そこで，秀吉は千本くらいの縄を用意させて，一つの木に対してちょうど一本ずつ，漏れのないように縄を巻いて行った．もう全部の木に巻き終えたぞ，というところで彼は残った縄の本数を数えて，最初の千本から引いて山の木の本数を弾き出したのである．

秀吉が行ったのは，**一本の木と一本の縄を対応させる**ということである．より詳しくいえば，

1. 一本の木に対してちょうど一本だけ縄を巻くようにして，
2. どの木も巻き漏らさないように注意して巻いていった．

のである．これこそ，物を数えるということの本質だ．この観点に立てば，たしかに最初の「ひとつ，ふたつ，みっつ，……」と数えていくという方法も，同じように自然数と物を一つ一つ対応させていっていることになる．ただ秀吉はそれだと数え落としや重複がありそうでこわかったから，縄をつかってわかりやすくやった，ということである．

この考え方を使えば，「無限を数える」ことが出来るようになる．つまり，二つの集合の要素の数が等しいというのは，「一つの要素に対してちょうど一つの要素を漏れなく割り当てることが出来る」ということになる．こういう対応のことを，数学の用語で「一方の集合から他方の集合への全単射が存在する」と云う風に云う．

このアイデアを用いて，カントールはあらゆる集合の「数」を数えていった．カントールは，自然数も整数も有理数も，実はすべて同じ数だけ存在するということを示した．例えば，整数と自然数が同じ数だけ存在する，というのは，次のような対応を考えればわかりやすい．

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array}$$

じゃあ，全部の数は同じだけしか存在しないんじゃないか？いや，そんなことはない．カントールは，対角線論法と呼ばれる有名な議論により，実数は自然数よりも真に沢山存在することを示した る[*9]．その概略はこうである．

まず，これも驚くべきことではあるのだが，実数全体と $0 < x < 1$ の範囲の実数は同じ数だけあるということが云える．この事実を使おう．もし，$0 < x < 1$ の範囲の実数が自然数とおなじ数だけ存在したとすると，一番目の実数，二番目の実数，三番目の実数，……と並べていくことが出来る筈だ．そこで，すべての実数を次のように一列に並べて，無限小数展開しよう：

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots \\ a_1 &= 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_2 &= 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ &\vdots \\ a_n &= 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \end{aligned}$$

つまり，$n$ 番目の実数の小数点以下 $k$ 桁目の数字を $a_{nk}$ と書くことにするのだ．ここで，次のようにして実数 $b = 0.b_0b_1b_2\dots$ を定める：

$$b_n = \begin{cases} 4 & (a_{nn} = 5) \\ 5 & (a_{nn} \neq 5) \end{cases}$$

[*9] 初出時は異なる論法で証明されていた

つまり，$n$ 番目の実数の $n$ 桁目が 5 ならば 4 を，5 以外の数字であれば 5 を，$b$ の $n$ 桁目の数字として採用するのだ．ここで 5 とか 4 とかを使っているのは別に何でもよくて，ようは $b$ の数字は $a_n$ とは必ず $n$ 桁目で異なっているように作っている，というところがポイントである．

さて，このようにして作った，$b$ も $0 < b < 1$ を満たす実数だから，上の「実数一覧」のどこかに入っている筈である．そこで $\ell$ 番目に出て来るとする：$b = a_\ell$．このとき，$b$ の $\ell$ 桁目の数字は何だろうか？ $b_\ell = a_{\ell\ell} = 5$ だとすると，$b$ の作り方から $b$ の $\ell$ 桁目は 4 でなくてはならない．これは矛盾である．よって，$a_{\ell\ell} \neq 5$．すると，$a_\ell$ の $\ell$ 桁目が 5 でないので，再び $b$ の作り方から $b_\ell = 5$ となる．よってこちらも矛盾．

$\ell$ 桁目は 5 か 5 でないかのどちらかの筈だ．しかし矛盾が出てしまった．それは，「実数は一つ，二つ，三つ……と並べられる」としたからである．よって，実数は自然数より沢山あることがわかる．

こんな具合にして，カントールは「無限」について色々なことを調べていった．カントールがこうした結果を出しはじめた頃の数学界ではまだ無限をタブー視する傾向が強く，しばしば強い反発にあってきた．カントールの師匠であるクロネッカーもそんな反対派の一人であり，カントールは一時のきなみ論文の掲載拒否にあったり，良い職にありつけなかったりという憂き目にあっている．こうした状況でカントールは「数学の本質はその自由性にある」という名言を残している．

閑話休題．当初はそのような大きな反発にあったカントールの集合論であったが，デデキントが集合論を用いて自然数論を展開して数学を集合論の中で行えることをデモンストレーションしてみせたり，代数学を集合論を使って書き換えて大きな成果を上げたりしたため，集合論は次第に数学の手法の中心へと上り詰めていったのである．

### 2.7 フレーゲ，ペアノ，ラッセル——自然数の発生

デデキントは，自然数論を集合論へと還元した．デデキントは，集合を論理の一部であると見ていたため，彼は数学を論理学に還元したと主張し，自らを**論理主義者**と呼んだ[*10]．

数学を論理に還元しようとした論理主義者はデデキントだけではない。

T.B.W.

### 2.8 ラッセル，ヒルベルト，ブラウワー，そしてゲーデル——数学基礎論の誕生と死

T.B.W.

### 2.9 現代数学における形式性——ブルバキの活躍

T.B.W.

## 3 数理論理学入門：formal system にかんする informal な導入

本章では，前章で言及した「数学基礎論」をルーツとする数理論理学における「形式系」の概念を通じて，形式というものの別の側面・意義を伝えることを試みる．

### 3.1 ヒルベルトの体系 HK

ちょっとしたパズルのような例から始めよう．

### 3.2 完全性定理：形式と意味を繋ぐもの

T.B.W.

### 3.3 不完全性定理については解説しません

Not to be written

## 4 おわりに

## 5 おわりのおわりに

## 参考文献


[1] 足立恒雄．数とは何か そしてまた何であったか．共立出版, 2011. *.

[2] 新井敏康．数学基礎論．岩波書店, 2011. *.

[3] Steve Awodey. *Category Theory*, Vol. 52 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 2010.

[4] 江田勝哉．数理論理学 ——使い方と考え方：超準解析の入口まで．内田老鶴圃, 2010. *.

[5] Torkel Franzén. ゲーデルの定理 利用と誤用の不完全ガイド．みすず書房, 2011. 田中一之


*10 しかし，集合は論理からはみ出た，数学のものだとするほうが自然であり，現在デデキントを論理主義の文脈に置く人間は少ない．

訳（原題：Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Use and Abuse）.

[6] Kurt Gödel. ゲーデル 不完全性定理. 岩波文庫, 2006. 林晋／八杉満利子 訳・解説, *.

[7] Douglas R. Hofstadter. ゲーデル，エッシャー，バッハ あるいは不思議の環. 白揚社, 1985. 野崎昭弘, はやし・はじめ, 柳瀬尚紀 訳 (原書: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid).

[8] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 1 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[9] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 2 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[10] Ioan James. 数学者列伝 オイラーからフォン・ノイマンまで, 第 3 巻. シュプリンガー・ジャパン, 2005. 蟹江 幸博 訳（原書：Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann).

[11] Israel Kleiner. 抽象代数の歴史. 日本評論社, 2011. 斎藤正彦 訳, (原書： A History of Abstract Algebra).

[12] 古森雄一, 小野寛晰. 現代数理論理学序説. 日本評論社, 2010.

[13] Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications, 2011.

[14] 坂口勝彦. 平成 25 年度早稲田大学基幹理工学部数学科「数学史」講義資料. *.

[15] 殊能将之. 美濃牛. 講談社ノベルス, 2000.

[16] 竹内外史. 層・圏・トポス 現代的集合像を求めて. 日本評論社, 1978.

[17] 竹内外史. 新装版 集合とはなにか. 講談社ブルーバックス, 2001.

[18] 田中一之, 坪井明人, 野本和幸. ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）2 完全性定理とモデル理論, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 第 2 巻. 東京大学出版会, 2011. *.

[19] 戸田山和久. 論理学をつくる. 名古屋大学出版会, 2000.

[20] 坪井明人. モデルの理論. 河合出版, 1997.

[21] 八杉満利子, 林晋. 論理パズルとパズルの論理, アウト・オブ・コース, 第 7 巻. 遊星社, 1998.

上記の一覧中，$*$ の付いている文献は今回特に参考にした文献である[*11].

数学の歴史を，数概念の発達という観点から捉えるには足立 [1] がよくまとまっている．ただ，数学的な素養がないと本文中の議論は追えないだろう．個別の数学者の観点から数学の歴史を概観したければ，ジェイムズ [10] がよい．

現代の数理論理学を学びたい場合，証明論寄りならば古森・小野 [12] や戸田山 [19]，モデル理論よりならば田中・坪井・野本 [18] や江田 [4] をお勧めする．後者に関しては，数理論理学の話題に留まらず，第三章では分析哲学の話題を取り扱っている．また，集合論や計算論なども含めて数理論理学をより広く学びたい場合は，新井 [2] がよいだろう．

[*11] たくさん参考文献が出てきますが，全部ちゃんと読んでるなんて思わないでください [15].