Bellman–Ford

Взвешенный кратчайший путь

Граф	**Веса**	**Алгоритм**	**Сложность O(·)**
Любой	Unweighted	BFS	$\|V\| + \|E\|$
DAG	Any	DAG Relaxation	$\|V\| + \|E\|$
Любой	Any	Bellman-Ford	$\|V\| \cdot \|E\|$
Любой	Non-negative	Dijkstra	$\|V\| \log \|V\| + \|E\|$

Взвешенные графы. Negative-weight cycle

$\delta(s, t) = -\infty$ если есть путь из s в t, который содержит цикл с отрицательной суммой

Взвешенные графы. Дерево кратчайших путей

Если известны $\delta(s, v)$ для всех вершин $v \in V$, то можно построить дерево кратчайших путей за $O(|V| + |E|)$

Взвешенные графы. Negative-weight cycle

Разминка:

Дан неориентированный граф G, определите, содержит ли G цикл с отрицательной суммой.

Взвешенные графы. Negative-weight cycle

$$O(|E|)$$

Взвешенные графы. Single-Source Shortest Paths

Дан алгоритм SSSP “A”, сложностью $O(|V|(|V| + |E|)$.

Как использовать его для решения SSSP за время O(|V ||E|)?

Взвешенные графы. Single-Source Shortest Paths

Задача

Разработать алгоритм SSSP “A”, сложностью $O(|V|(|V| + |E|)$:

- Вычислить $\delta(s, v)$ для всех $v \in V$

    ($-\infty$, если путь содержит цикл с отрицательной суммой)

- Вернуть цикл с отрицательной суммой, если он встречается

Взвешенные графы. Простой кратчайший путь

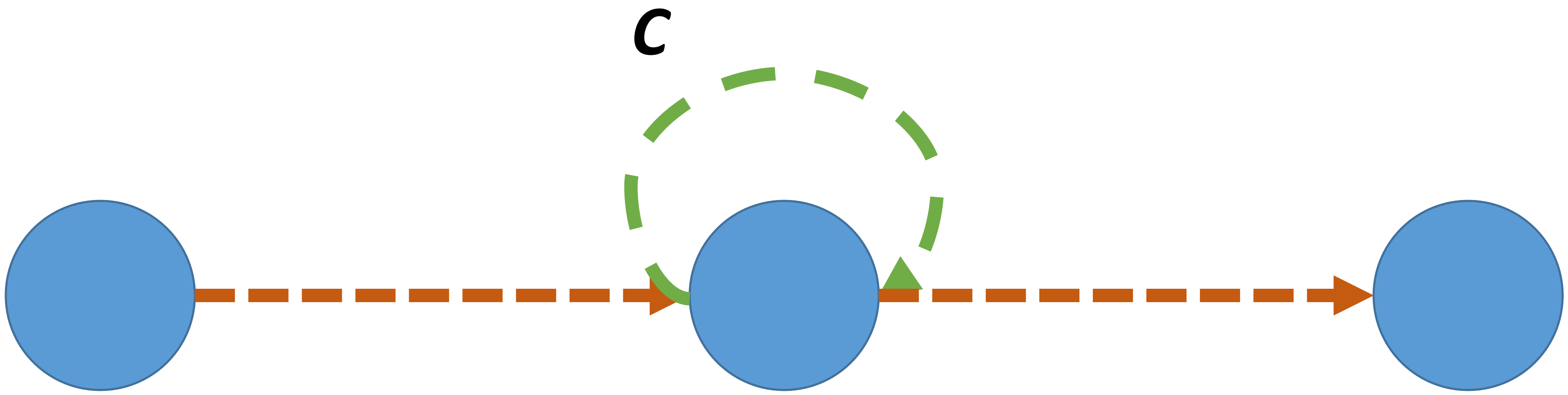
Если граф содержит циклы и отрицательные веса, он может содержать циклы с отрицательной суммой.

Если граф не содержит циклов с отрицательной суммой, кратчайшие пути – простые!

Взвешенные графы. Простой кратчайший путь

Утверждение 1: Если $\delta(s, v)$ конечно, то существует кратчайший путь к v, который является простым.

Взвешенные графы. Простой кратчайший путь



$c : \sum w > 0$

Взвешенные графы. k-Edge Distance

$\delta_k(s, v)$: мин. вес любого пути из s в v, в котором $\leq k$ ребер.

Взвешенные графы. k-Edge Distance

Вычислим $\delta_{|V|-1}(s, v)$ и $\delta_{|V|}(s, v)$ для всех $v \in V$

Взвешенные графы. k-Edge Distance

Утверждение 2: Если $\delta(s,v) \neq -\infty, \delta(s,v) = \delta_{|V|-1}(s,v)$ так как простой путь или простой, или не существует.

Взвешенные графы. k-Edge Distance

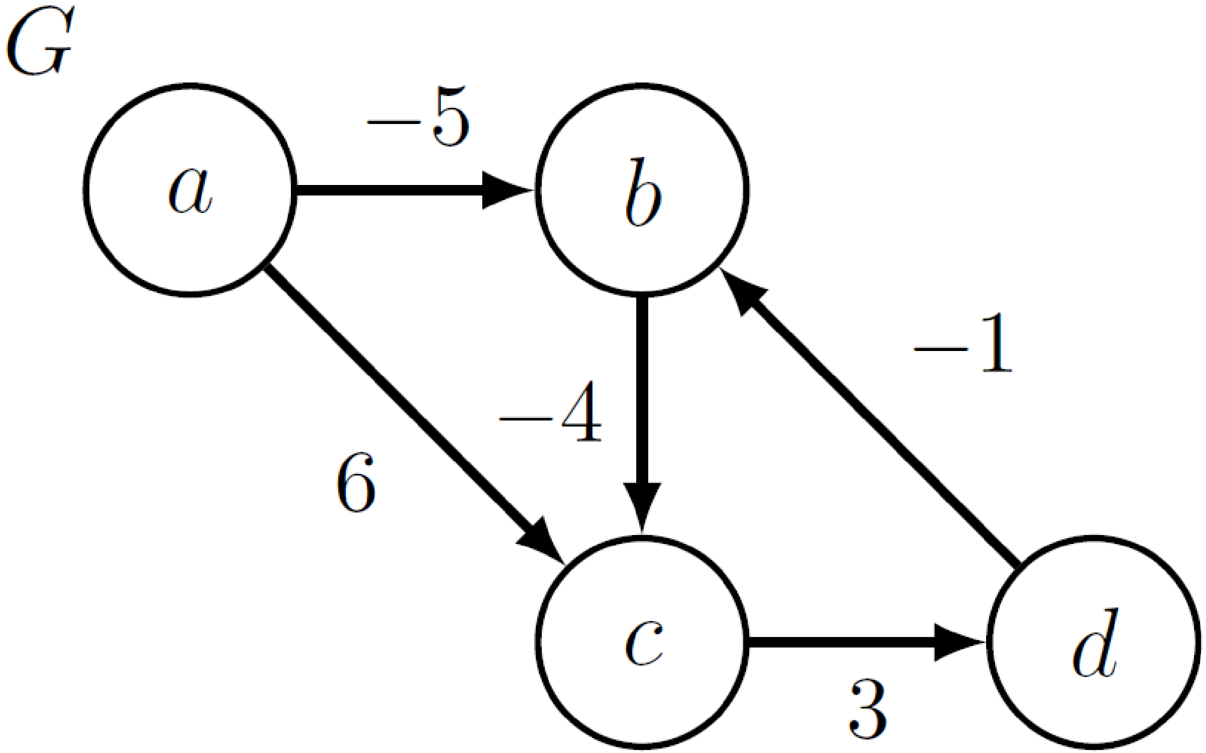
Утверждение 3: Если $\delta_{|V|}(s, v) < \delta_{|V|-1}(s, v)$, то существует кратчайший не простой путь до v и $\delta(s, v) = -\infty$.

v – «свидетель» цикла с отрицательной суммой

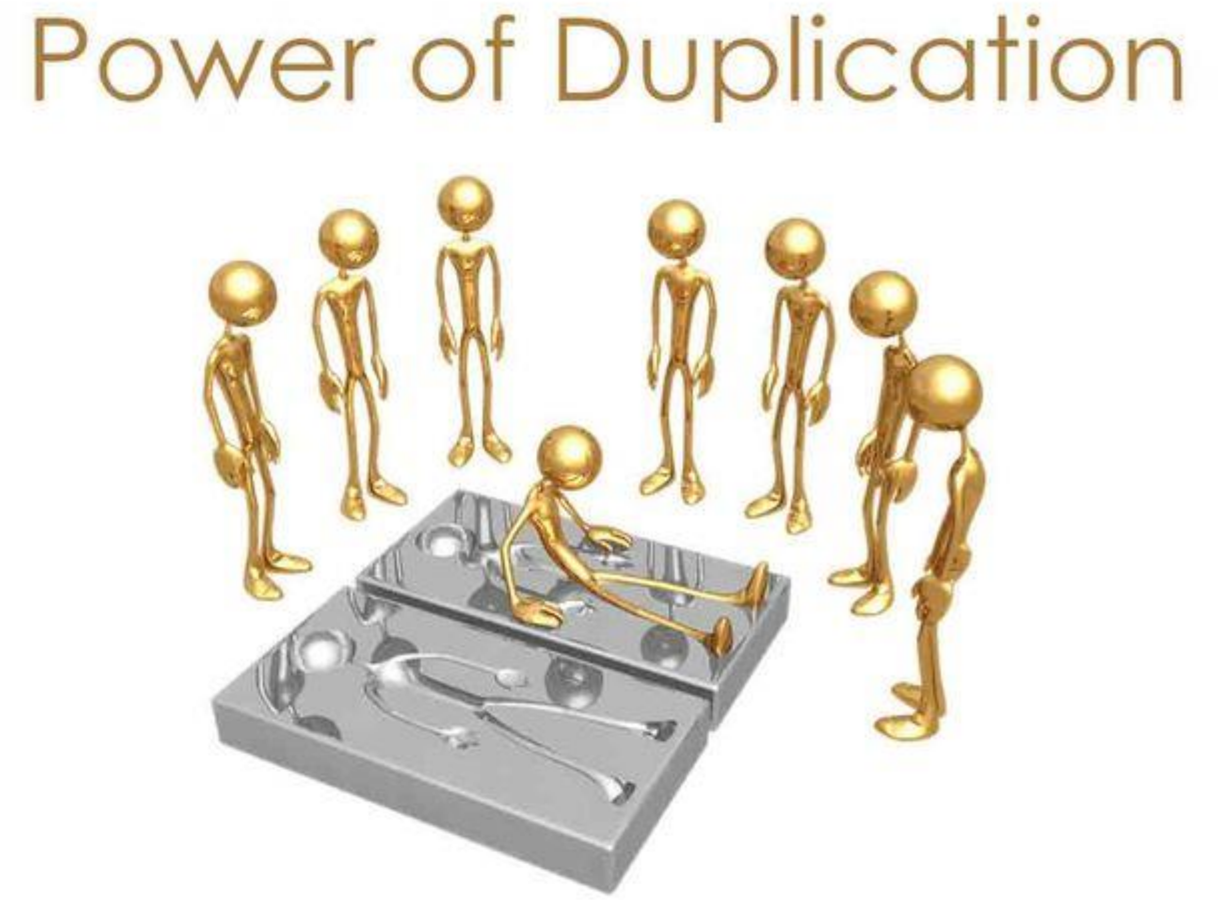
Взвешенные графы. k-Edge Distance

Утверждение 4: Если $\delta(s, v) = -\infty$, то существует путь от «свидетеля» до v.

Bellman–Ford



Bellman–Ford

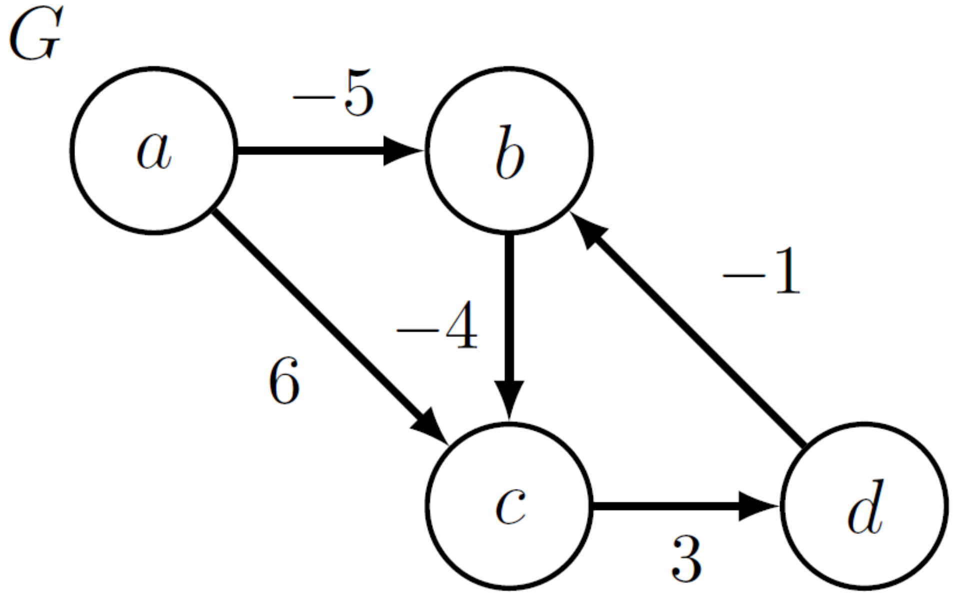


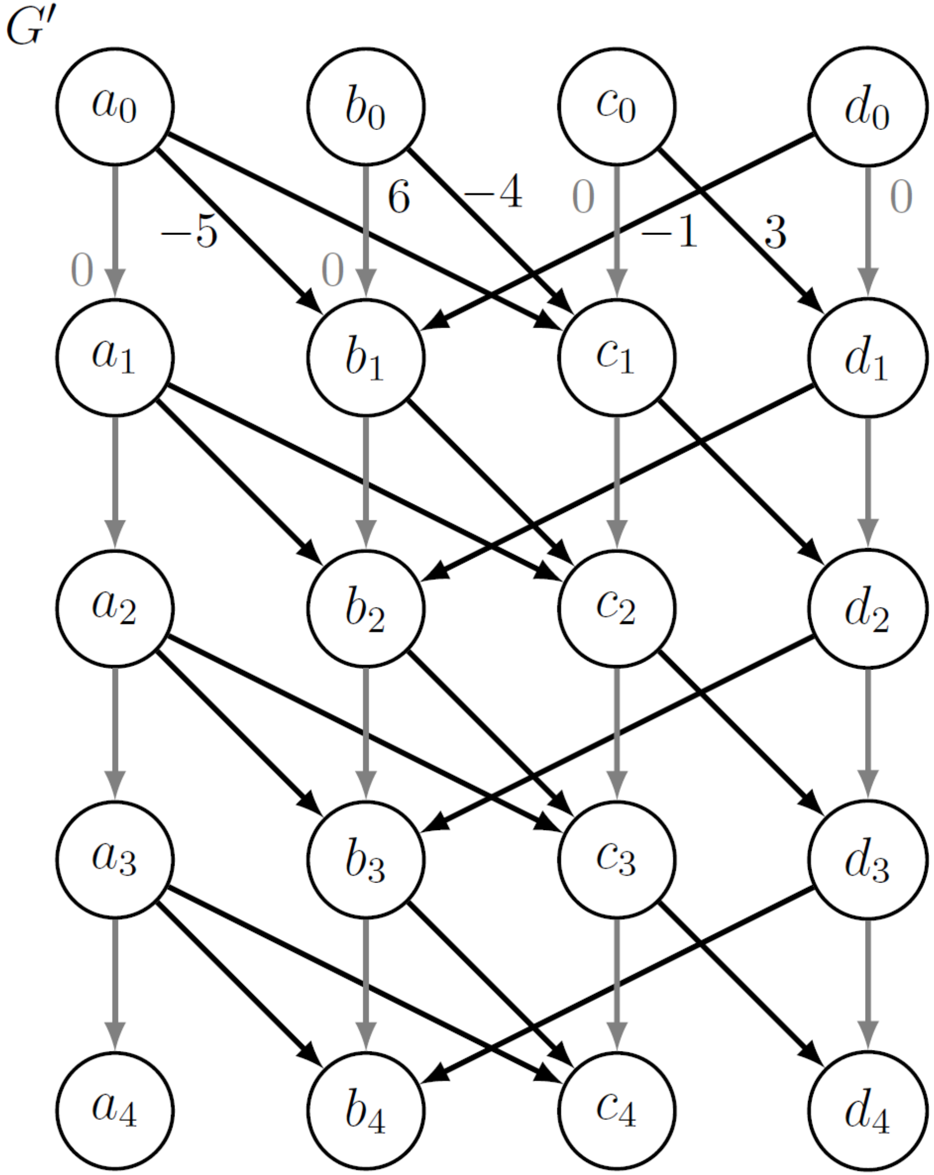
Идея!

Использовать дубликаты графа

"Duplication is Essential for Success"

Bellman–Ford





DAG Relaxation

Построить новый DAG $G' = (V', E')$ из $G = (V, E)$

$G`$: $|V|(|V| + 1)$ вершин v_k для всех $v \in V$ и $k \in \{0, \dots, |V|\}$

$G`$: $|V|(|V| + |E|)$ ребер

DAG Relaxation на $G`$ из $s_0$ для поиска $\delta(s_0, v_k), v_k \in V`$

Set $d(s, v) = \delta(s_0, v_{|V|-1})$

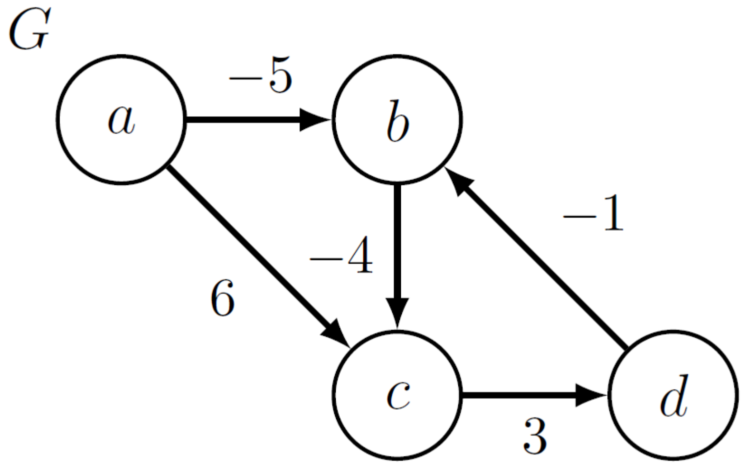
Для «свидетелей» $u \in V$ где $\delta(s_0, u_{|V|}) < \delta(s_0, u_{|V-1|})$:

Для каждой вершины v достижимой из u в G:

Set $d(s, v) = -\infty$

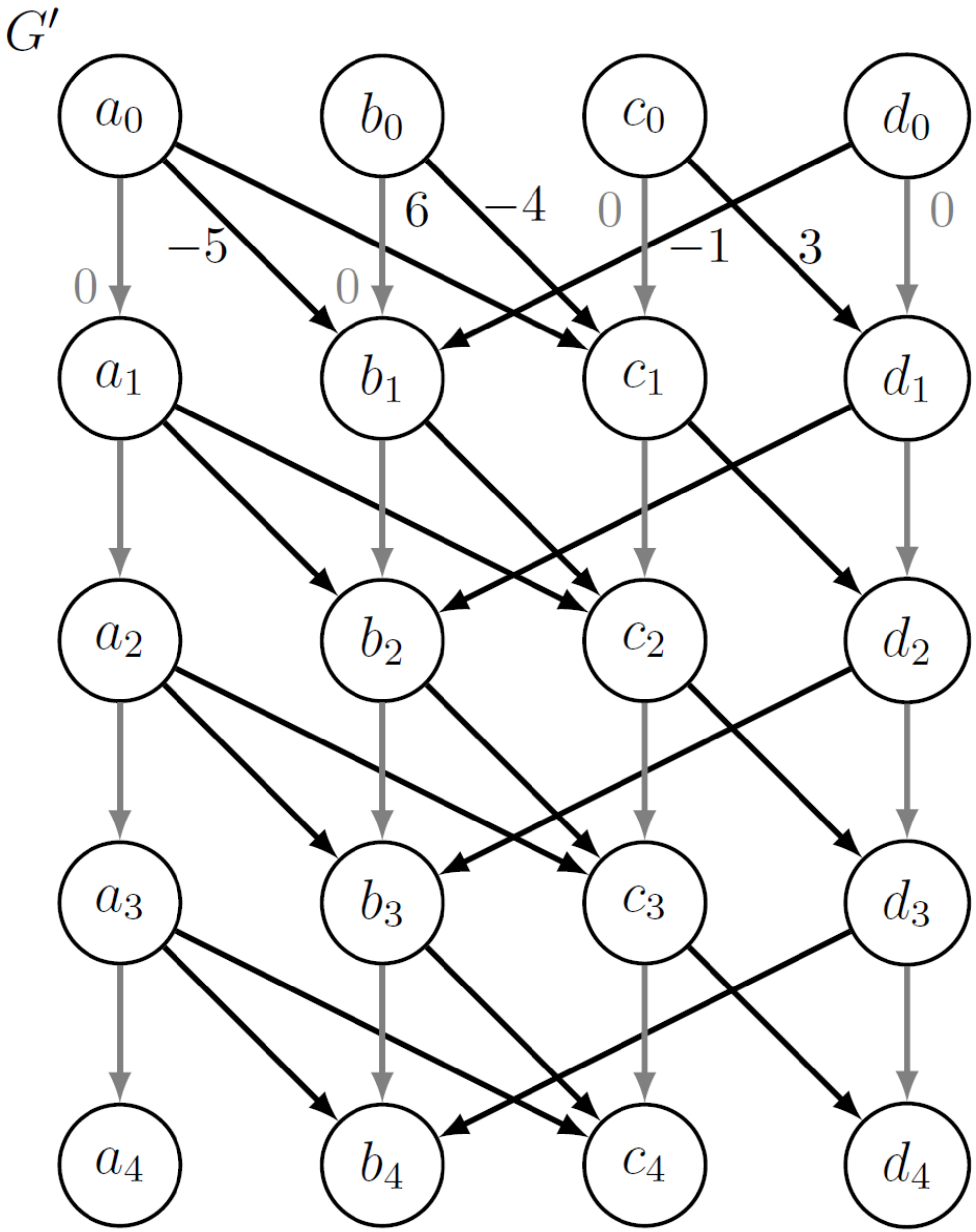
“Линейное время”

$$O(|V|(|V| + |E|))$$



$\delta(a_0, v_k)$

$k \setminus v$	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞
1	0	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{6}$	∞
2	0	-5	$\mathbf{-9}$	$\mathbf{9}$
3	0	-5	-9	$\mathbf{-6}$
4	0	$\mathbf{-7}$	-9	-6
$\delta(a, v)$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$



Bellman–Ford. Negative-weight cycle