Алгоритмы и структуры данных

Деев Богдан Юльевич
Почта: deevbogdanyi@yandex.ru
Телеграм: @BogdanDeev

Программа курса. 2 семестр

Обходы графа

Кратчайшие пути во взвешенном графе

Жадные алгоритмы

Динамическое программирование

Остовные деревья

Потоки в сетях

RMQ, LCA, Sparse-table

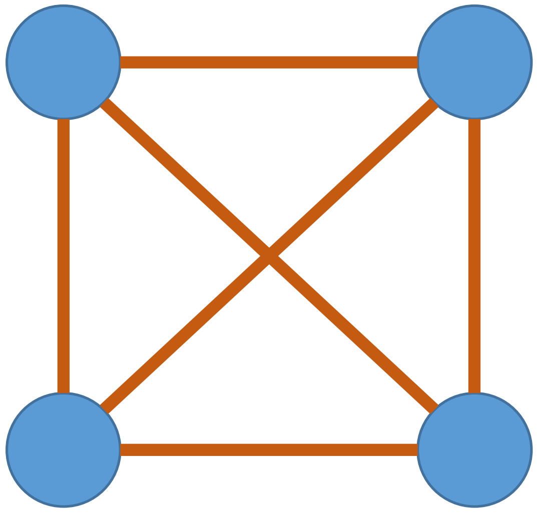
Остовные деревья

~~Остовные деревья~~
Spanning Trees

Spanning → Охватывающий

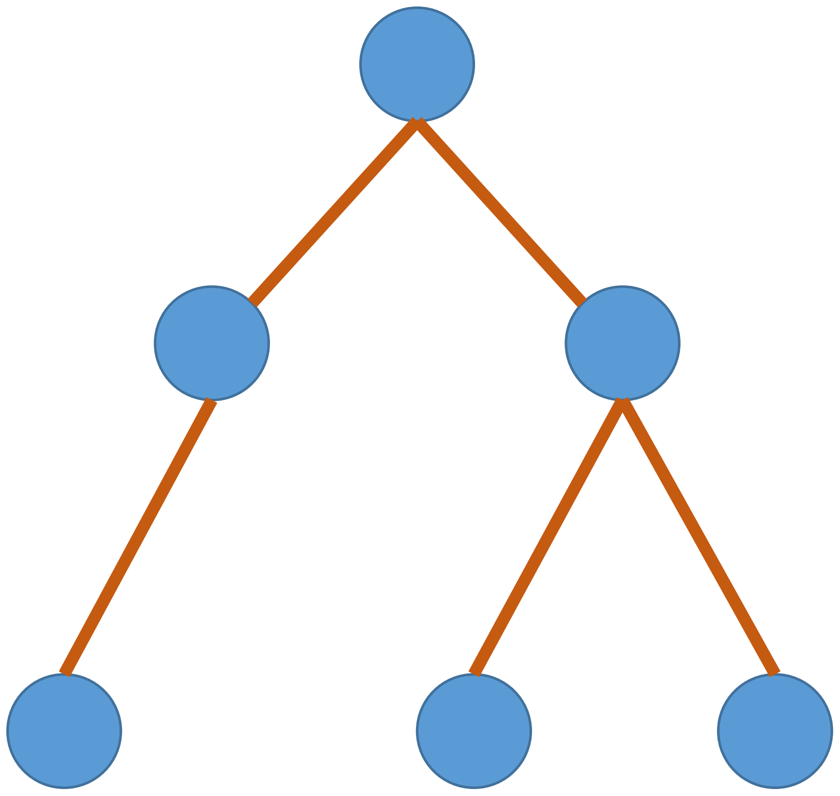
Граф

$$G = (V, E)$$



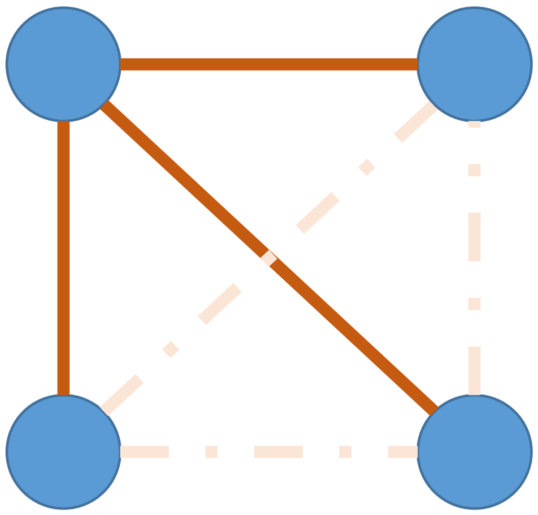
Дерево

$$G = (V, E)$$



Остовное дерево

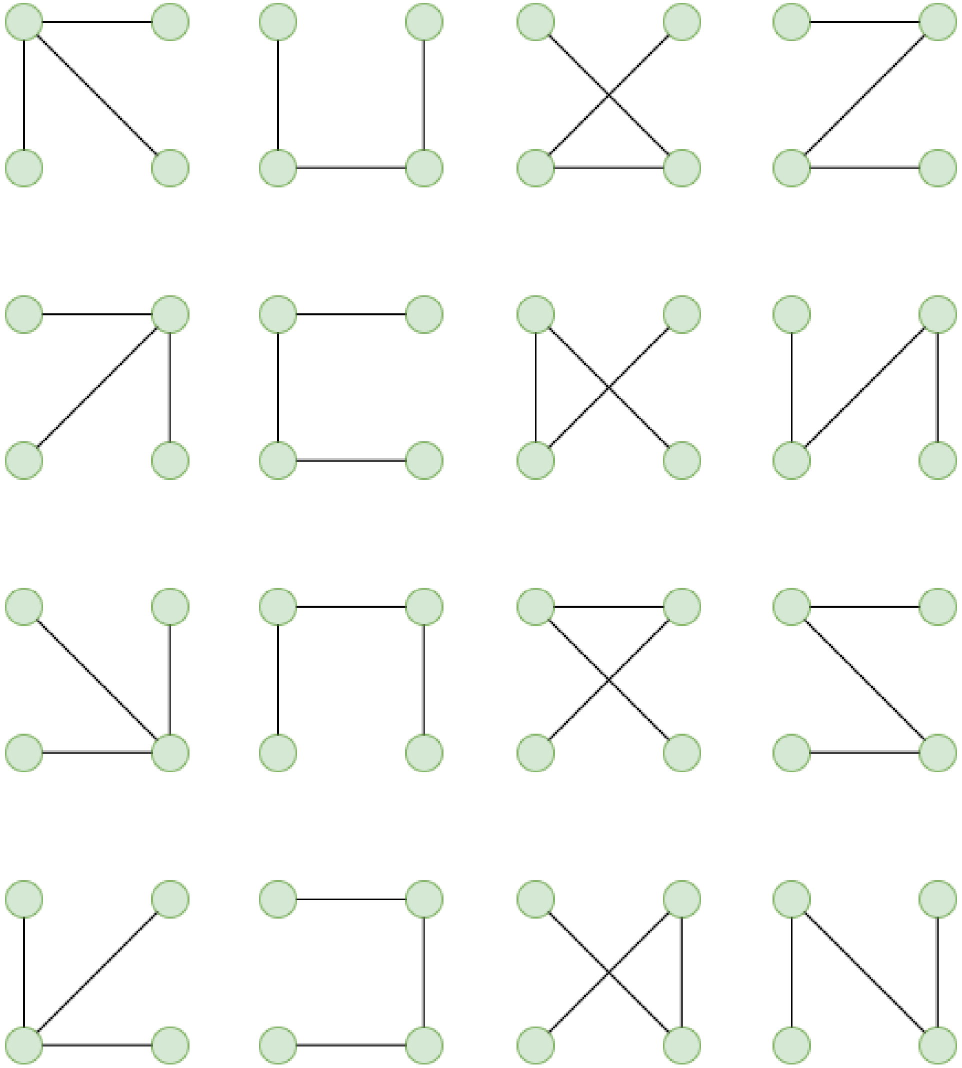
$$G' = (V, E')$$



Остовное дерево

Остовное дерево – ациклический связный подграф данного связного неориентированного графа, в который входят все его вершины.

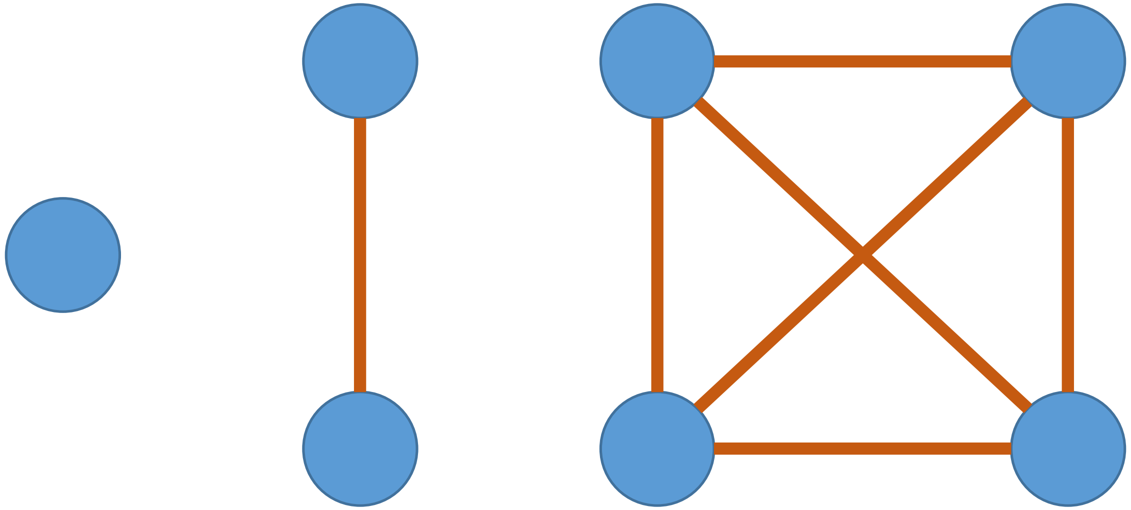
Остовное дерево



Остовное дерево

Разминка: В каком случае по данному графу нельзя составить остовное дерево?

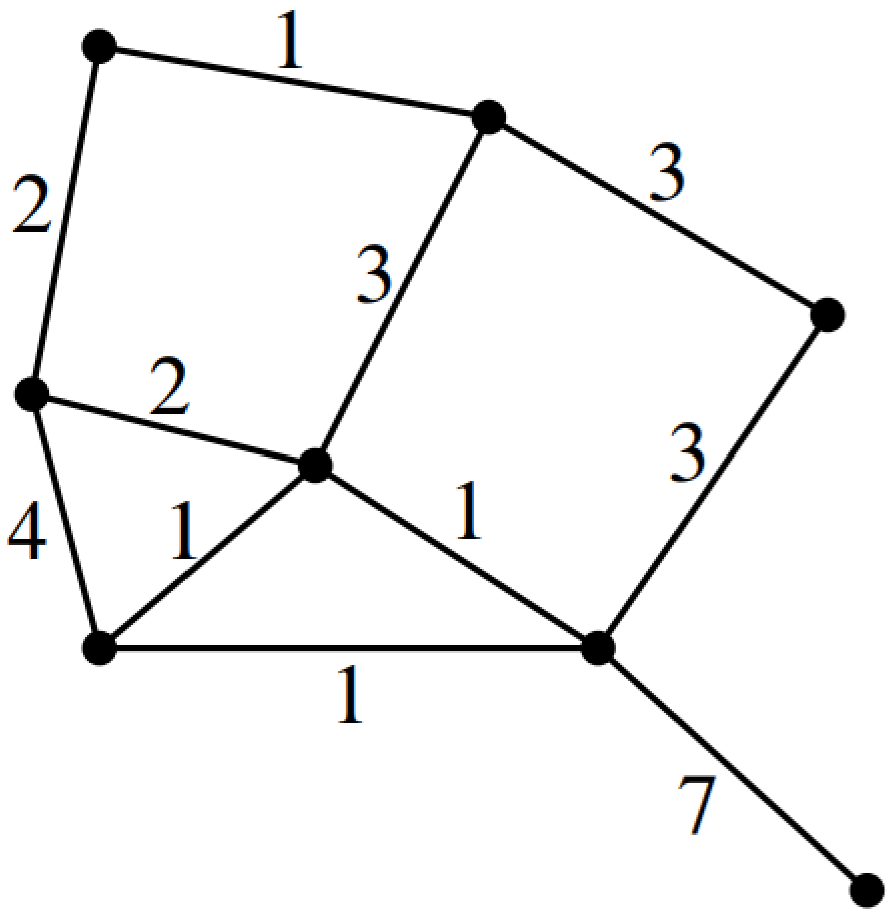
Остовное дерево



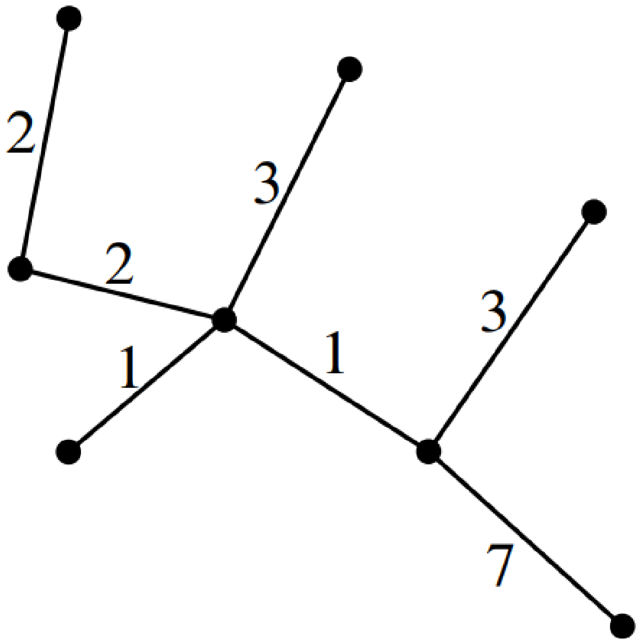
Минимальное остовное дерево

Минимальное остовное дерево (МОД) – ациклический связный подграф данного связного неориентированного графа, в который входят все его вершины с минимальным суммарным весом ребер.

Минимальное остовное дерево

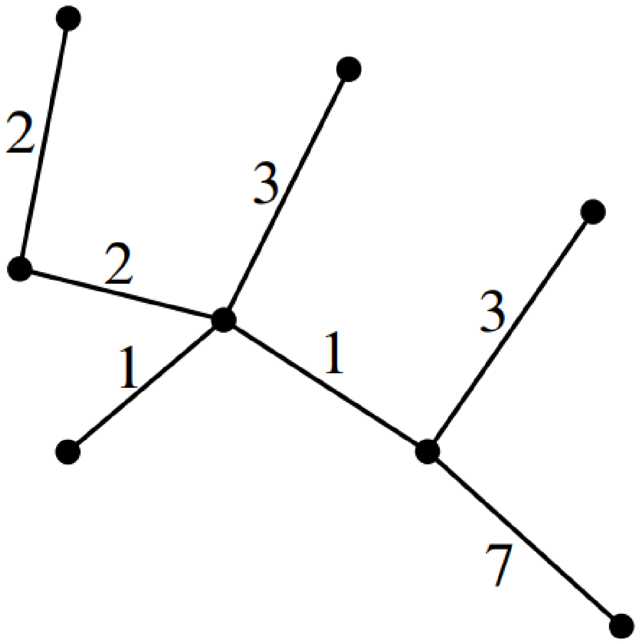


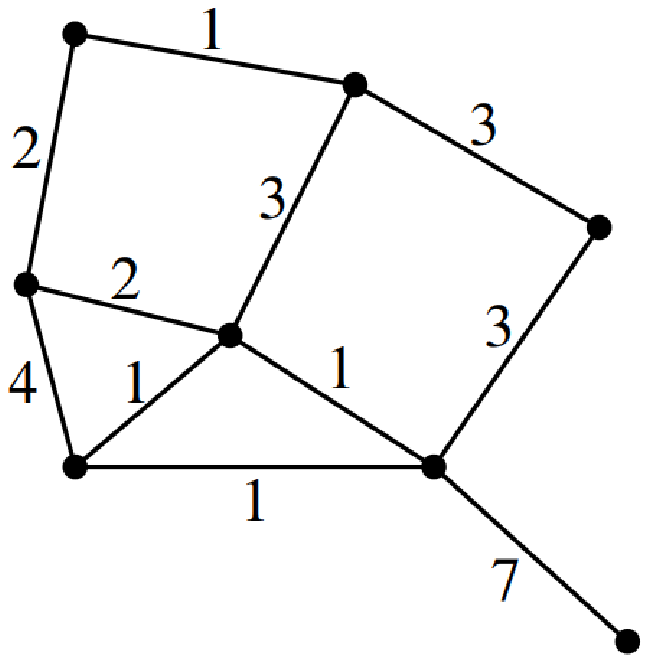
Минимальное остовное дерево

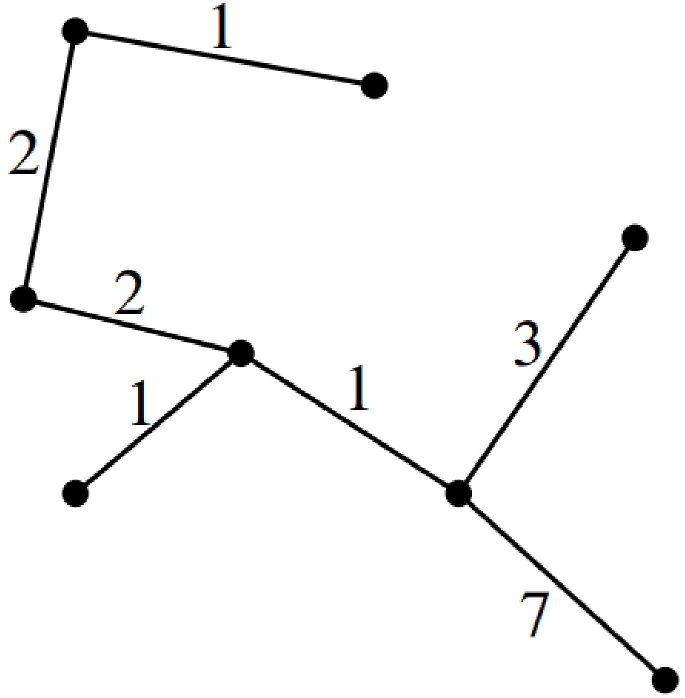


$$\sum W = 19$$

Минимальное остовное дерево







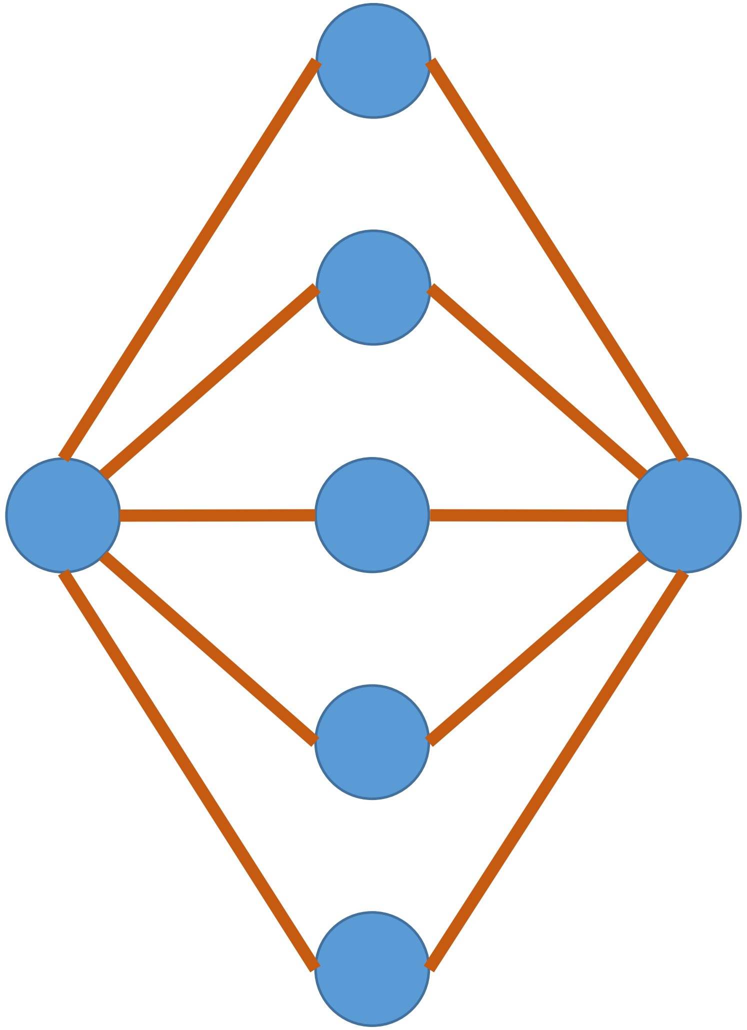
$$\sum W = 19$$

$$\boxed{\sum W = 17 = min}$$

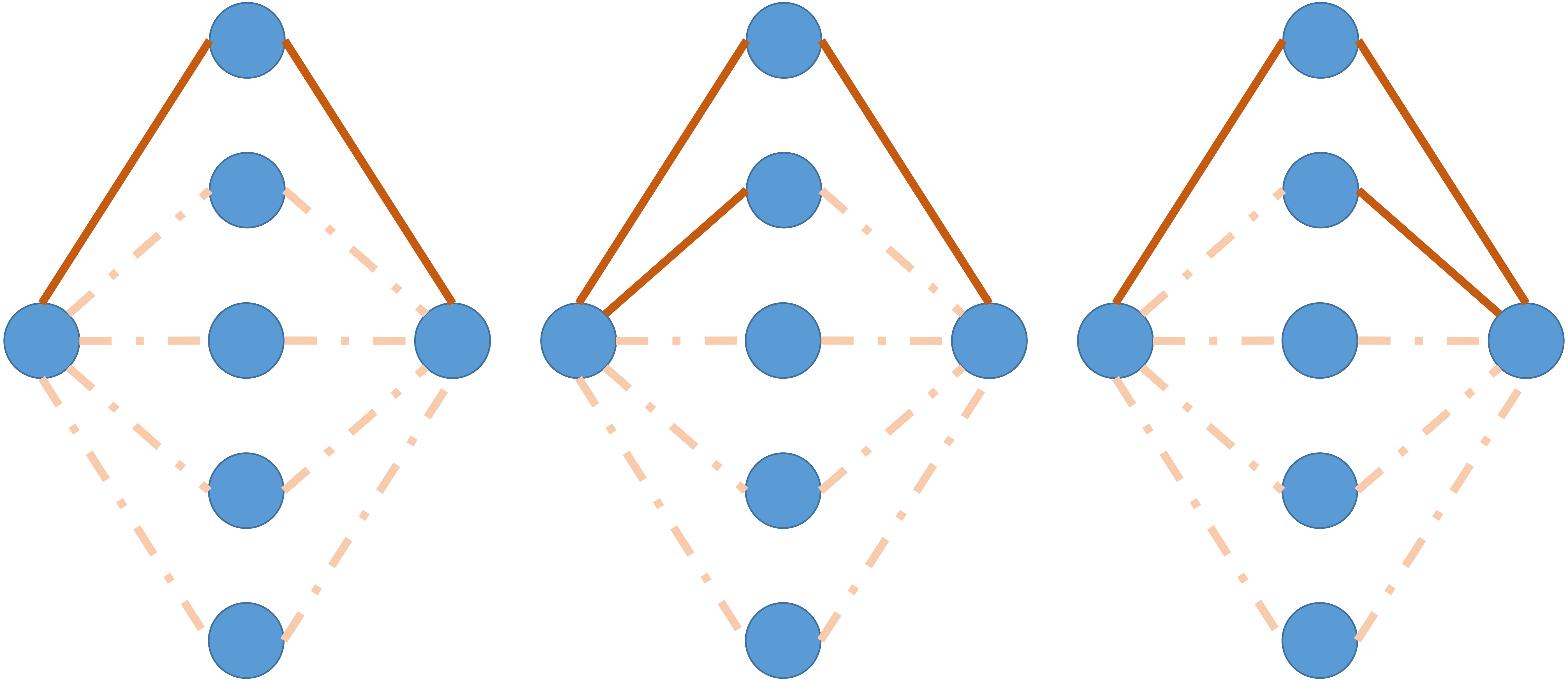
Минимальное остовное дерево

Задача: Как построить минимальное остовное дерево?

Минимальное остовное дерево



Минимальное остовное дерево



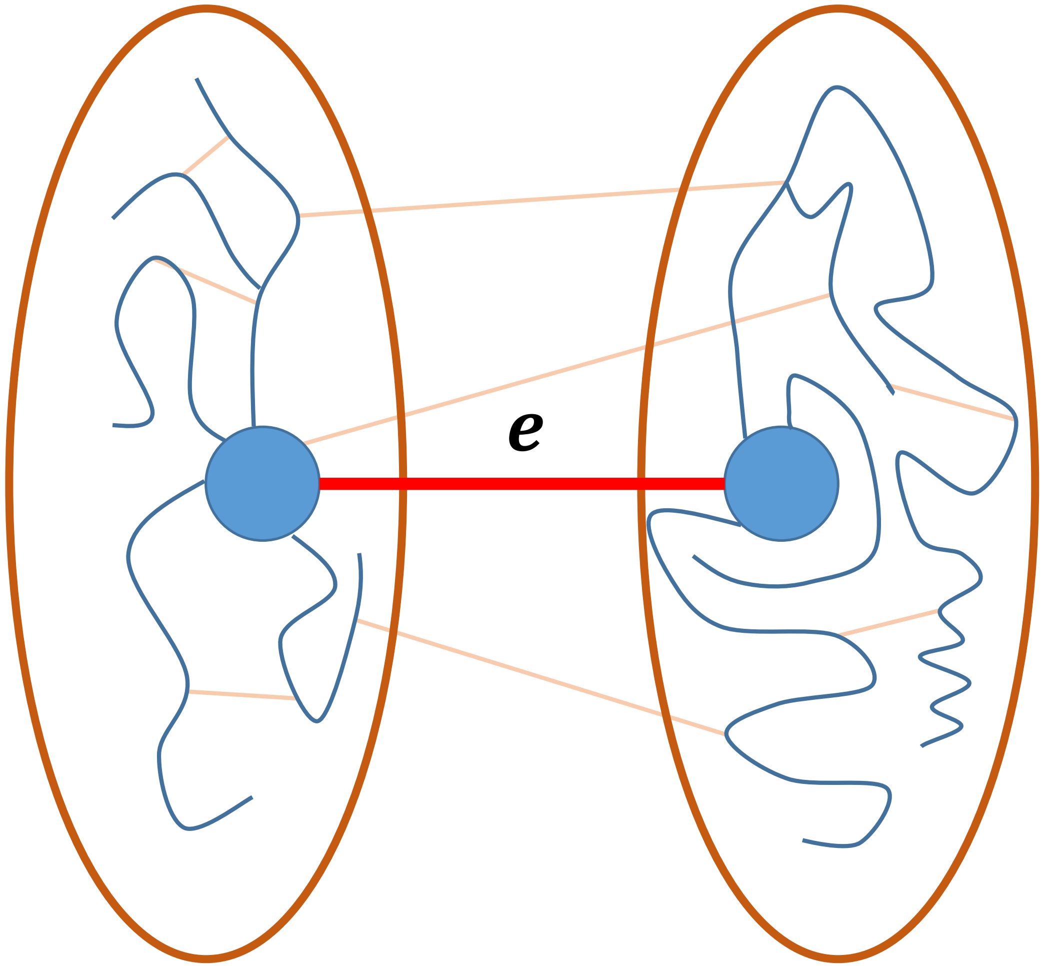
Минимальное остовное дерево

$$O(2^{|V|})$$

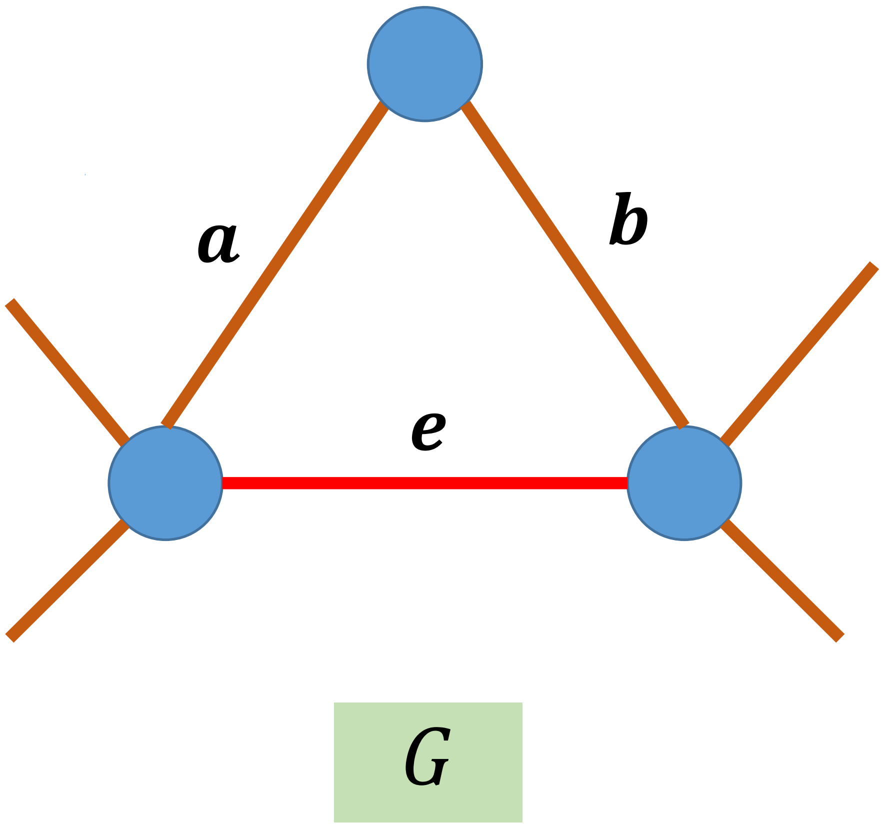
Минимальное остовное дерево

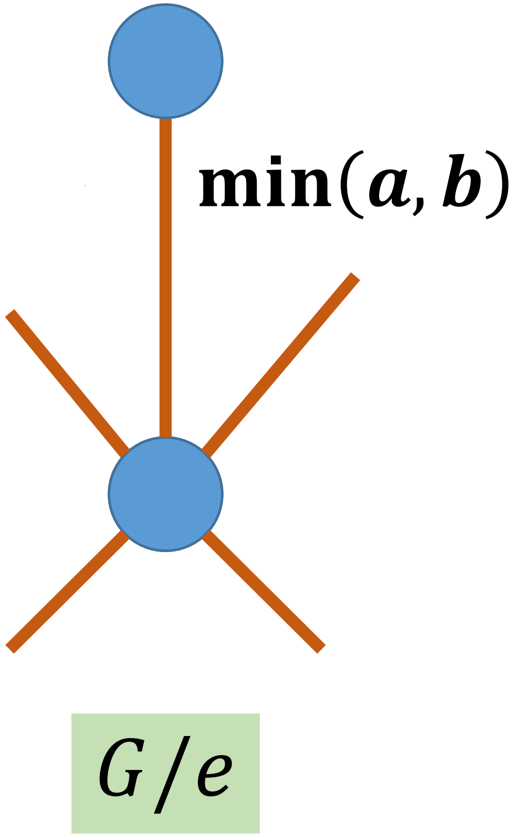
Идея'! Предположим, что мы знаем ребро $e = \{u, v\}$, которое находится в каком-то МОД.

Минимальное остовное дерево



Минимальное остовное дерево





Минимальное остовное дерево

Идея! Если T' МОД графа G/e, тогда $T' \cup \{e\}$ – МОД G.

Минимальное остовное дерево

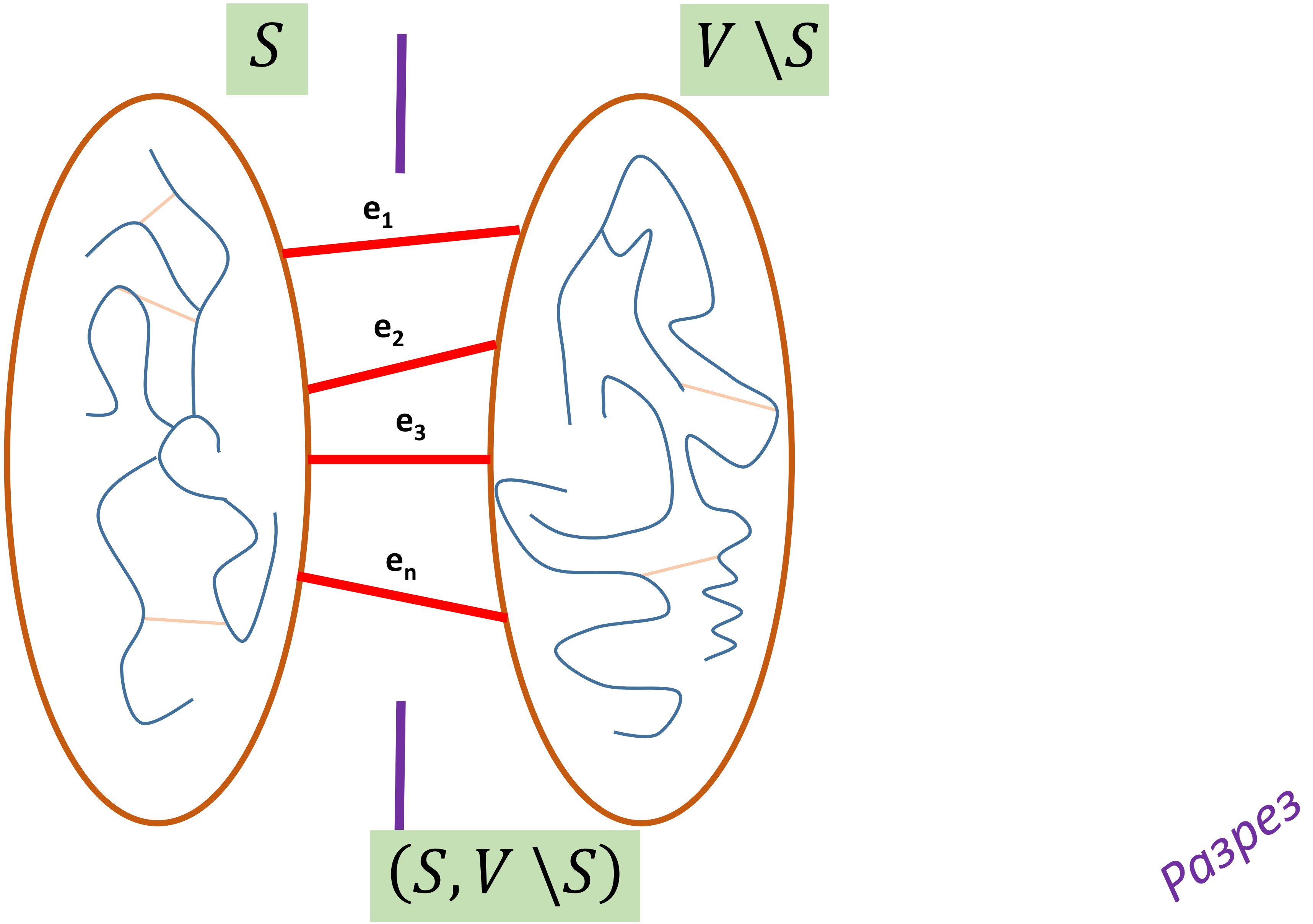
Dynamic program:

- guess edge *e* in МОД;
- contract *e*;
- recurse;
- decontract;
- add *e* to the МОД.

Минимальное остовное дерево

$$O(2^{|V|})$$

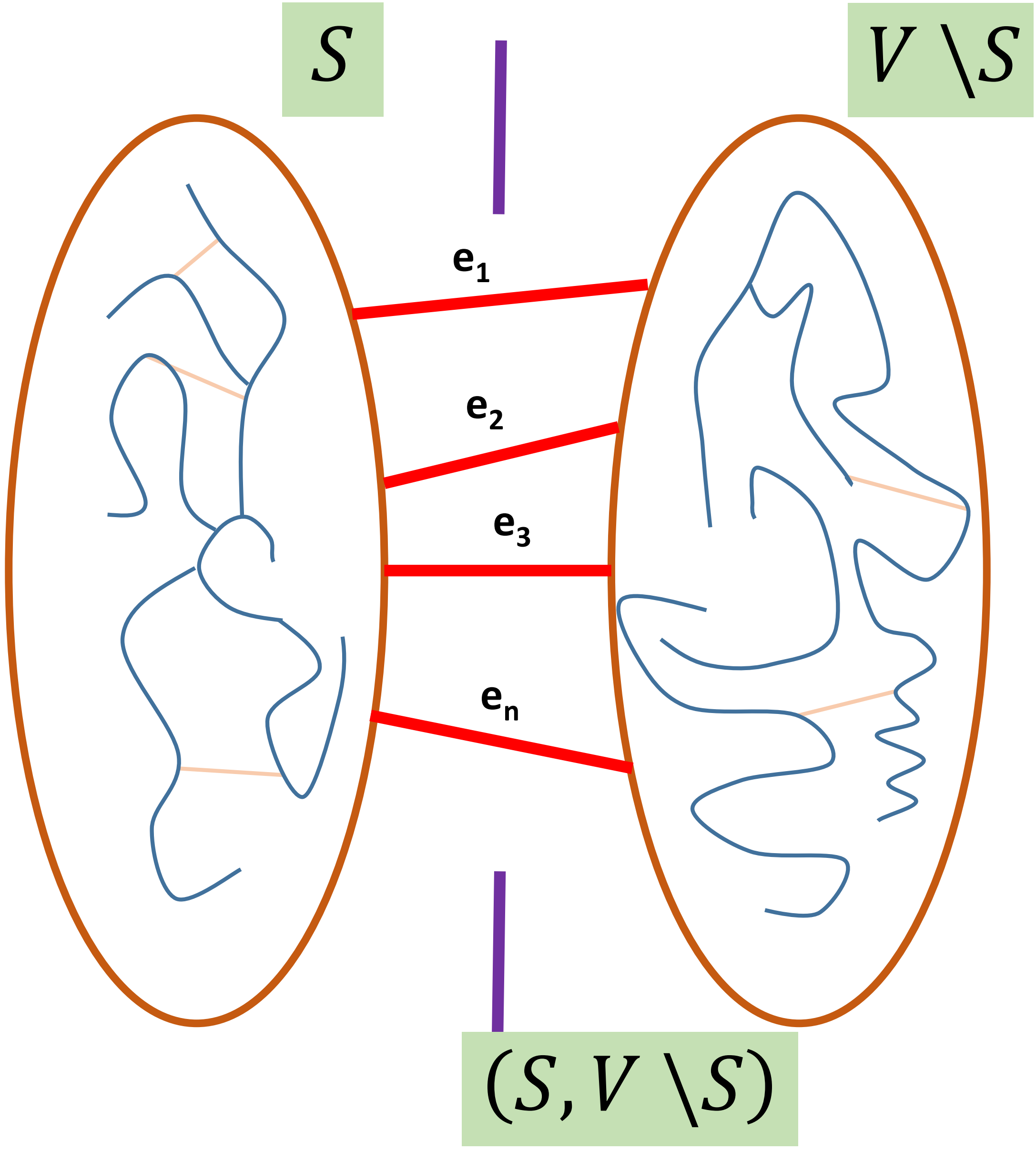
Минимальное остовное дерево



Минимальное остовное дерево

Идея! Для любого разреза $(S, V \setminus S)$ в $G = (V, E, w)$, любой мост с наименьшим весом $e = \{u, v\}, u \in S, v \notin S$ находится в каком-то МОД графа G.

Минимальное остовное дерево



$\min(e_1 \ldots e_n)$

Разрез

Минимальное остовное дерево

Задача: Как построить минимальное остовное дерево?

Минимальное остовное дерево

Крускал
Прим
Борувка

Минимальное остовное дерево. Прим

Maintain priority queue Q on $V \setminus S$, where $v.key = \min\{w(u,v) \mid u \in S\}$

$Q = V$

Choose arbitrary start vertex $s \in V$, $s.key = \emptyset$

for v in $V \setminus \{s\}$

  $v.key = \infty$

while Q is not empty

  $u = \text{Extract-Min}(Q)$, add u to S

  for $v \in \text{Adj}[u]$

    if $v \in Q$ and $v \notin S$ and $w(u,v) < v.key$:

    $v.key = w(u,v)$ (via a Decrease-Key operation)

    $v.parent = u$

return $\{\{v, v.parent\} \mid v \in V \setminus \{s\}\}$

Минимальное остовное дерево. Крускал

Maintain connected components that have been added to the MST so far T, in a Union-Find structure

Initialize $T = \emptyset$

for v in V

  Make-Set(v)

Sort E by weight

For $e = (u, v) \in E$ (in increasing-weight order):

  if Find-Set(u) $\neq$ Find-Set(v):

    Add e to T

    Union(u, v)