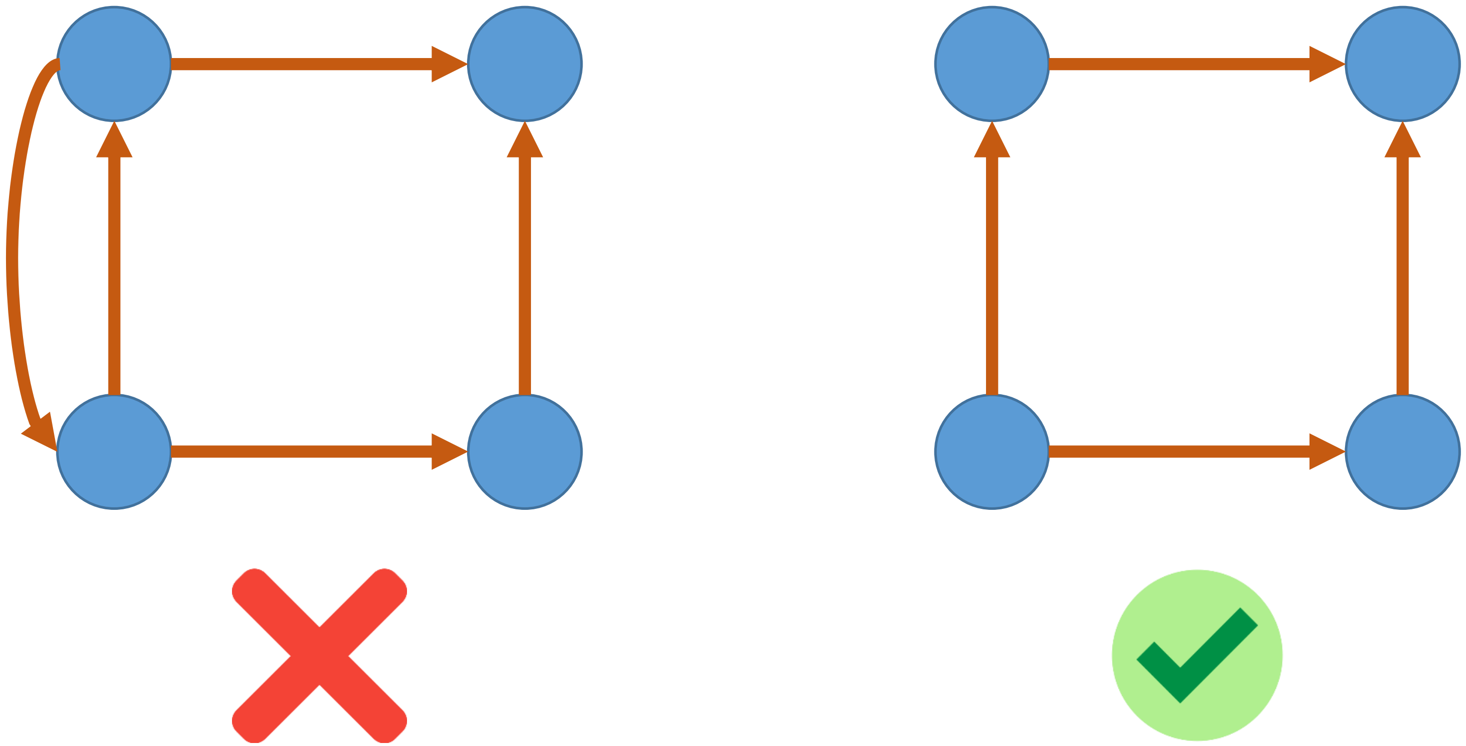
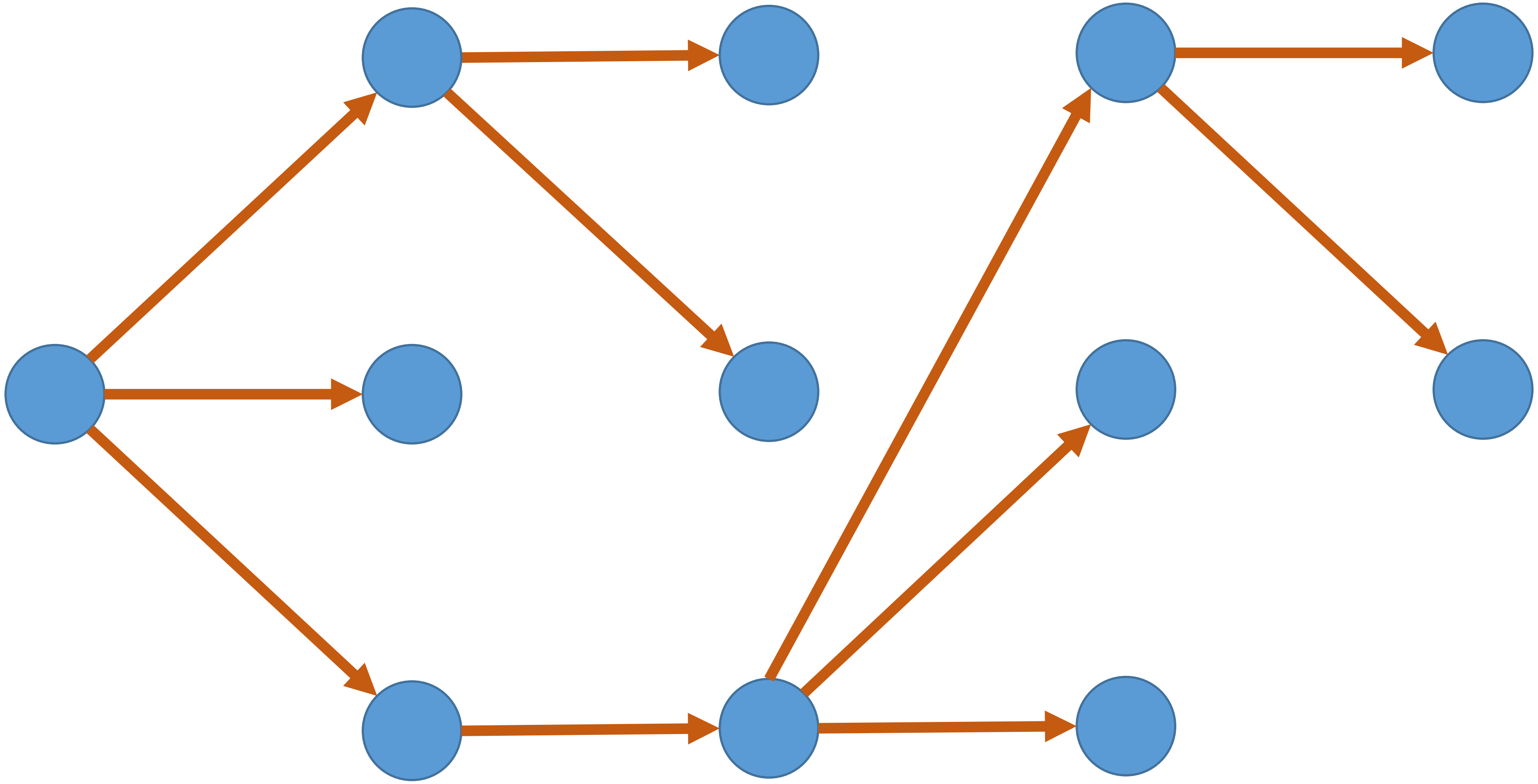
Взвешенные графы

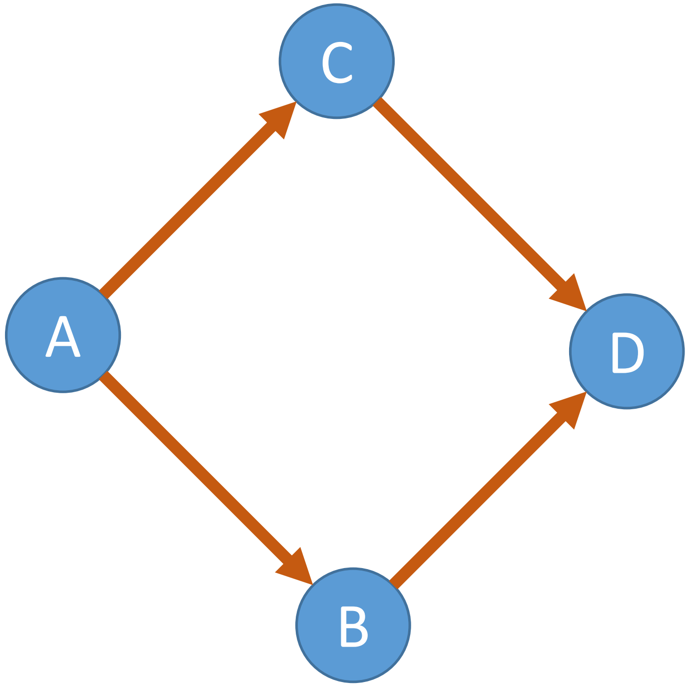
Ориентированный ациклический граф. DAG



Ориентированный ациклический граф. DAG



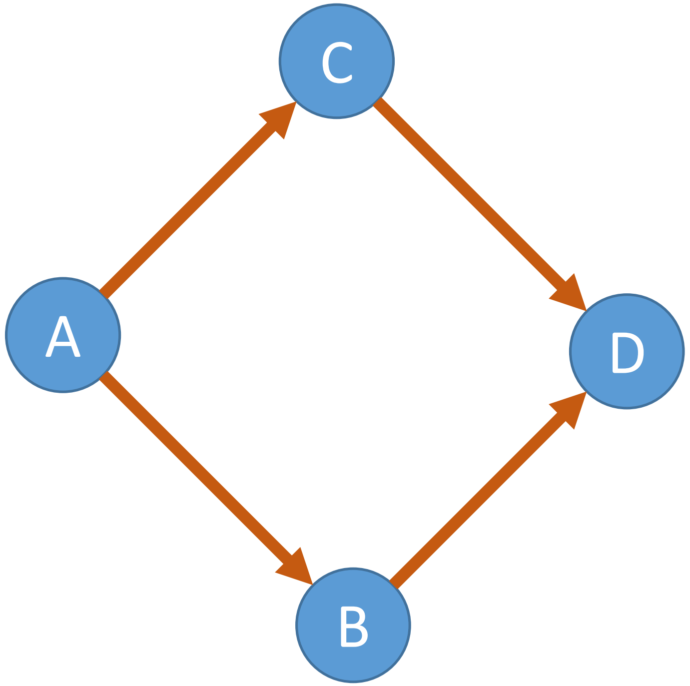
DAG. Топологический порядок



ABCD

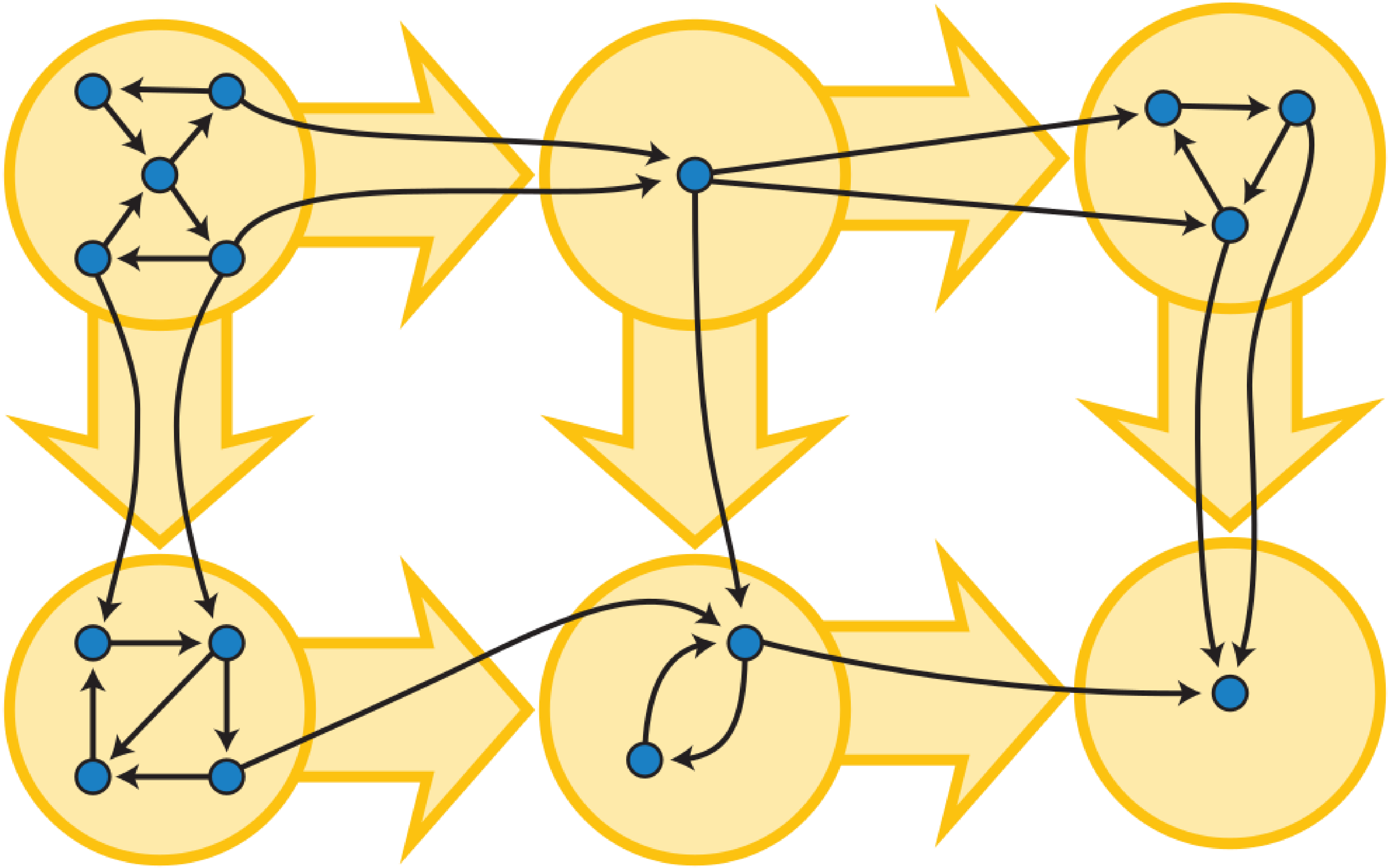
ACBD

DAG. Finishing Order



DBCA

DAG. Приведение обычных графов



Алгоритмы на графах. BFS/DFS

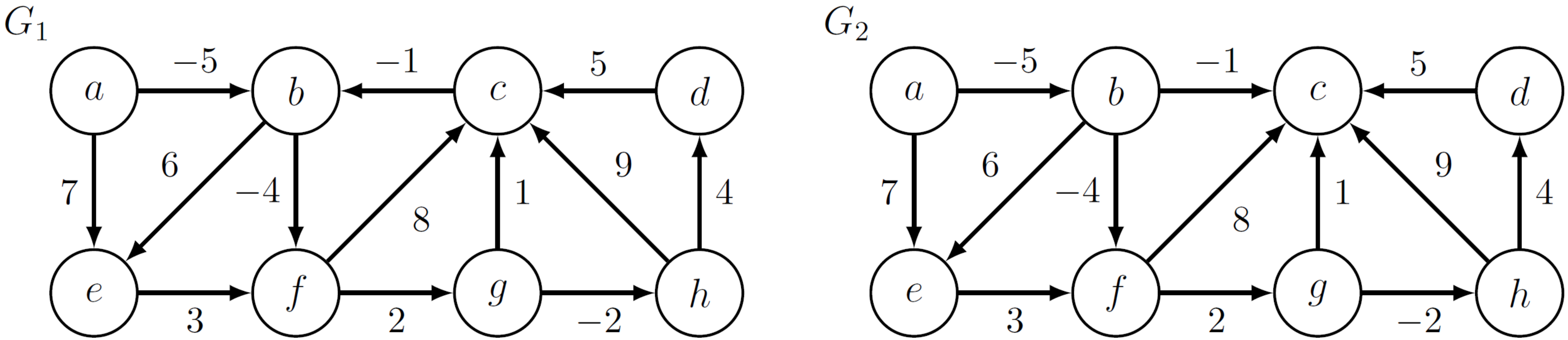
Single-Source Shortest Paths

Single-Source Reachability

Connected components

Topological Sort

Алгоритмы на графах. Взвешенные графы



δ(s, v) = k (Количество ребер) → δ(s, v) = ∑w (Веса ребер)

Взвешенные графы. Представление

Взвешенный граф – это:

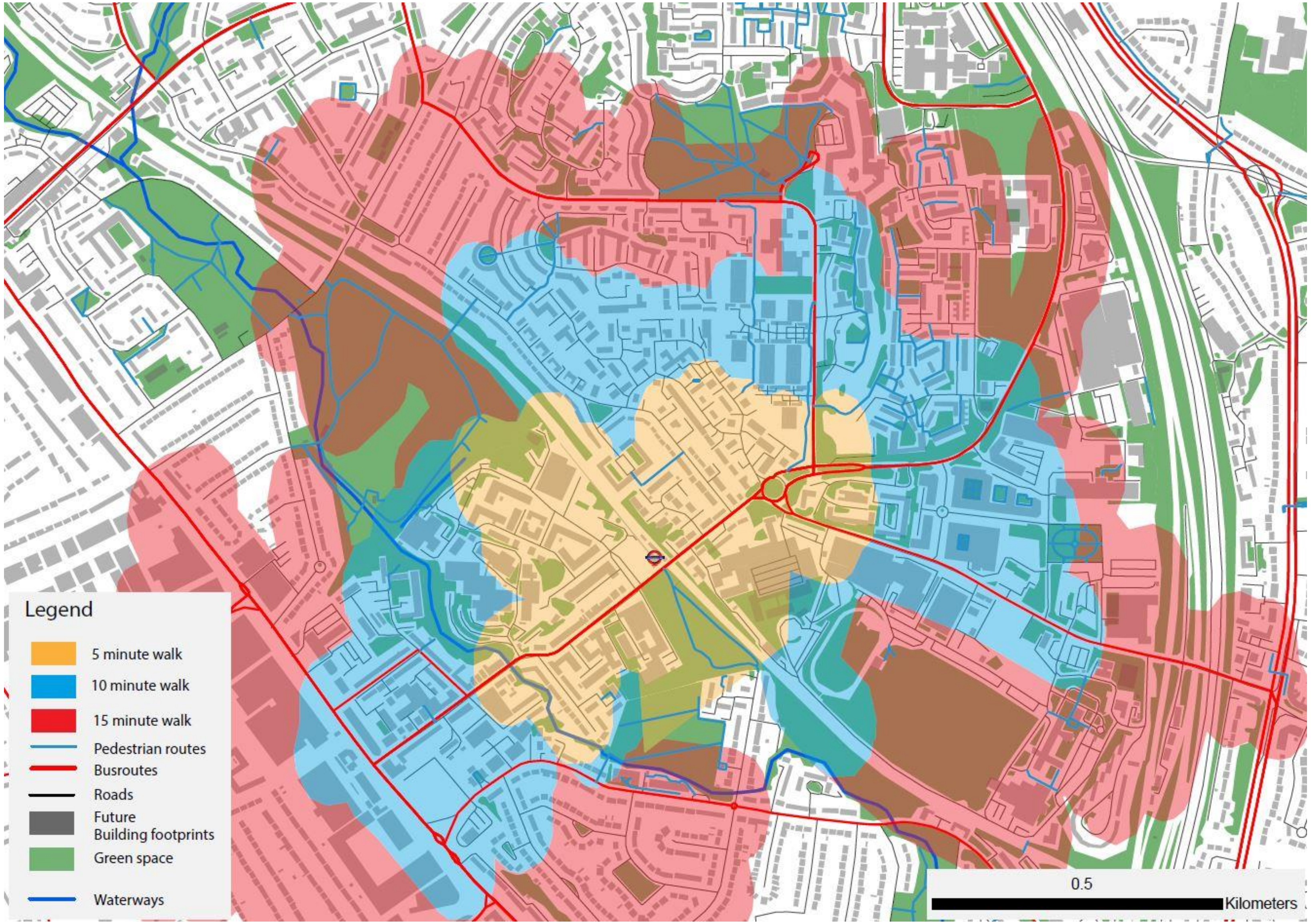
- граф $G = (V, E)$;
- его весовая функция $w : E \to Z$.

Взвешенные графы. Представление

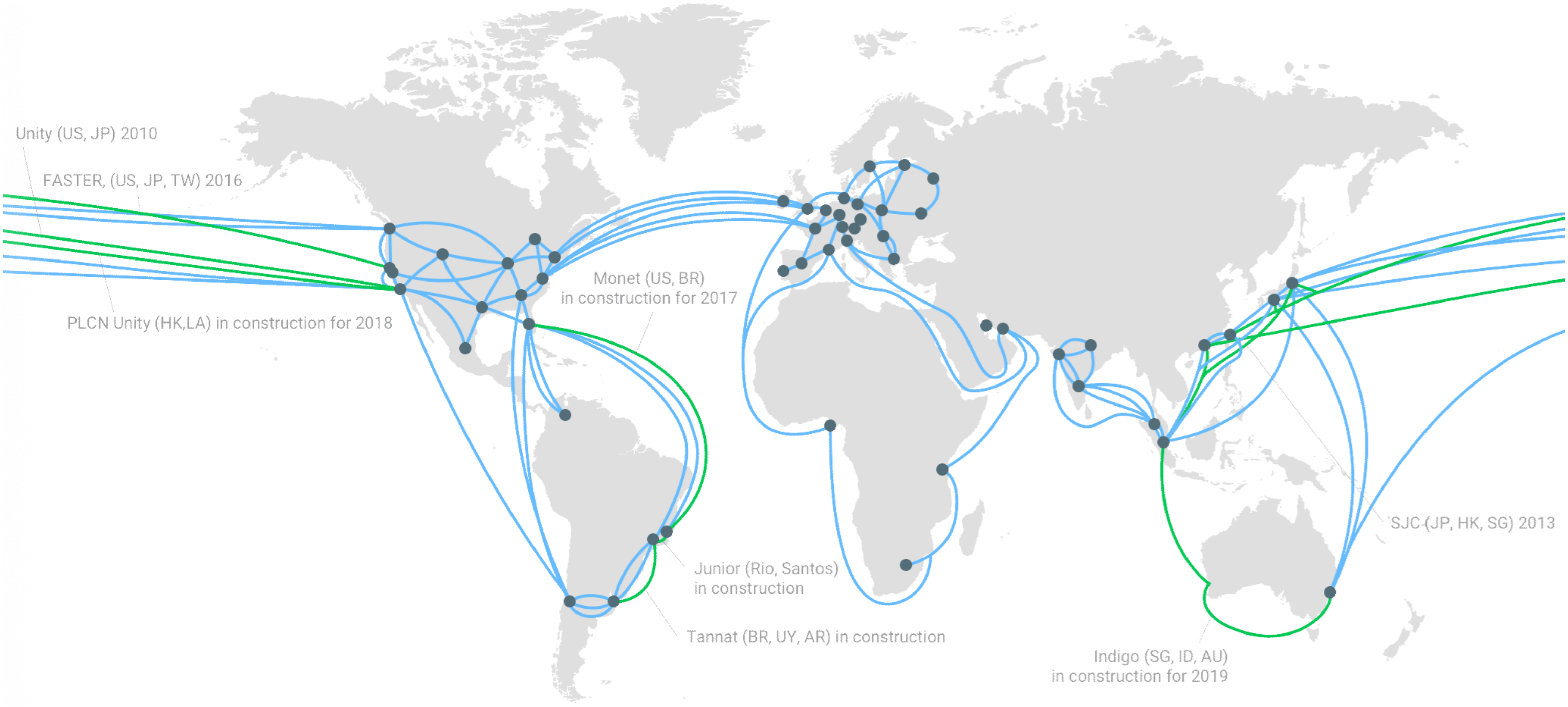
Два основных способа представления:

- Хранить вес внутри репрезентации графа;
- Хранить отдельный Set, размечающий вес каждого ребра.

Взвешенные графы. Применение

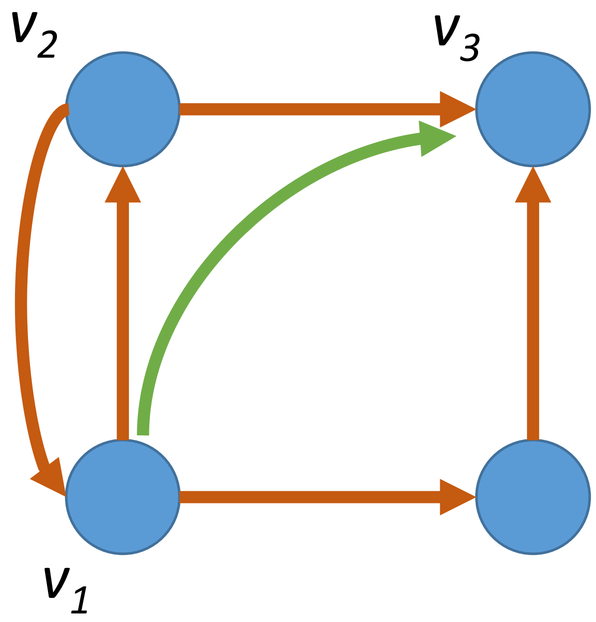


Взвешенные графы. Применение



Взвешенные графы. Простой путь

Простой путь – путь без повторений вершин

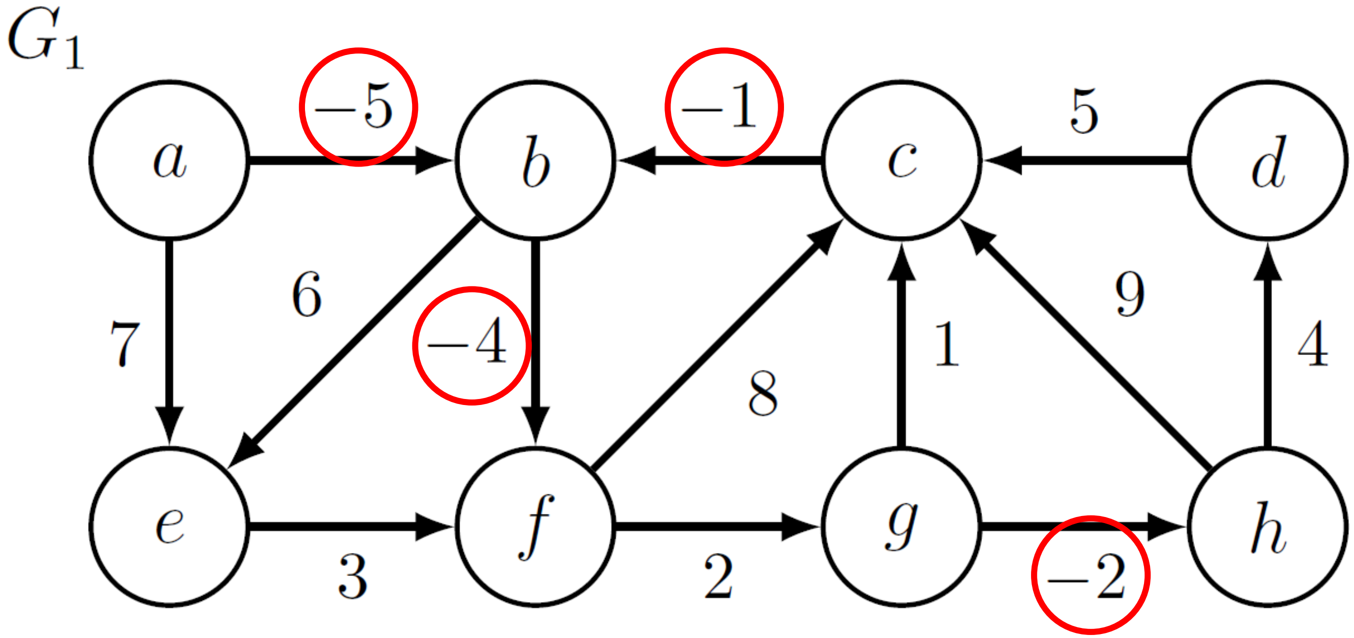


$p = (v_1, v_2, v_3)$

$\cancel{p = (v_1, v_2, v_1, v_2, v_3)}$

Взвешенные графы. Простой путь

Простой путь – путь без повторений вершин



Взвешенные графы. Путь

Вес пути во взвешенном графе – сумма весов ребер в пути

$$w(\pi)\ \textit{пути}\ \pi = \sum w(e)$$

Взвешенные графы. Кратчайший путь

Взвешенный кратчайший путь из $s \in V$ в $t \in V$ – путь минимальных весов их s в t

$$\delta(s,t) = min\{w(\pi) \mid path\ \pi\ from\ s\ to\ t\}$$

$\delta(s, t) = \infty$ if no path

Взвешенные графы. Кратчайший путь

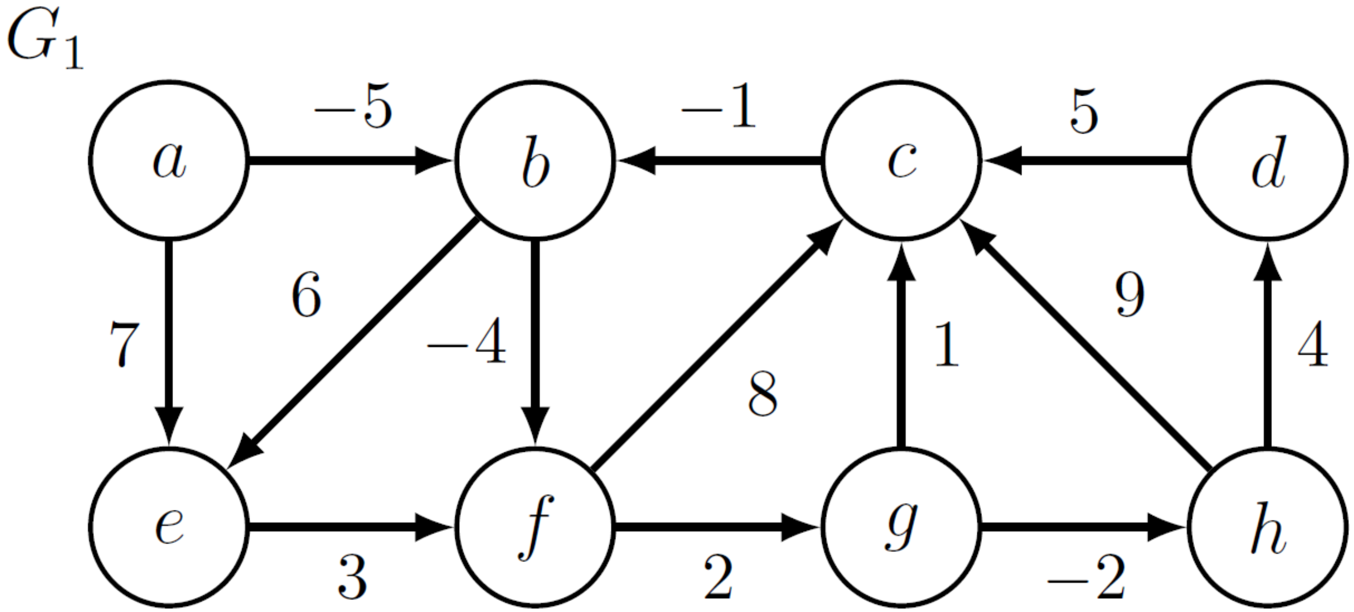
Взвешенный кратчайший путь из $s \in V$ в $t \in V$ – путь минимальных весов их s в t

$$\delta(s,t) = \cancel{min}\{w(\pi) \mid path\ \pi\ from\ s\ to\ t\}$$

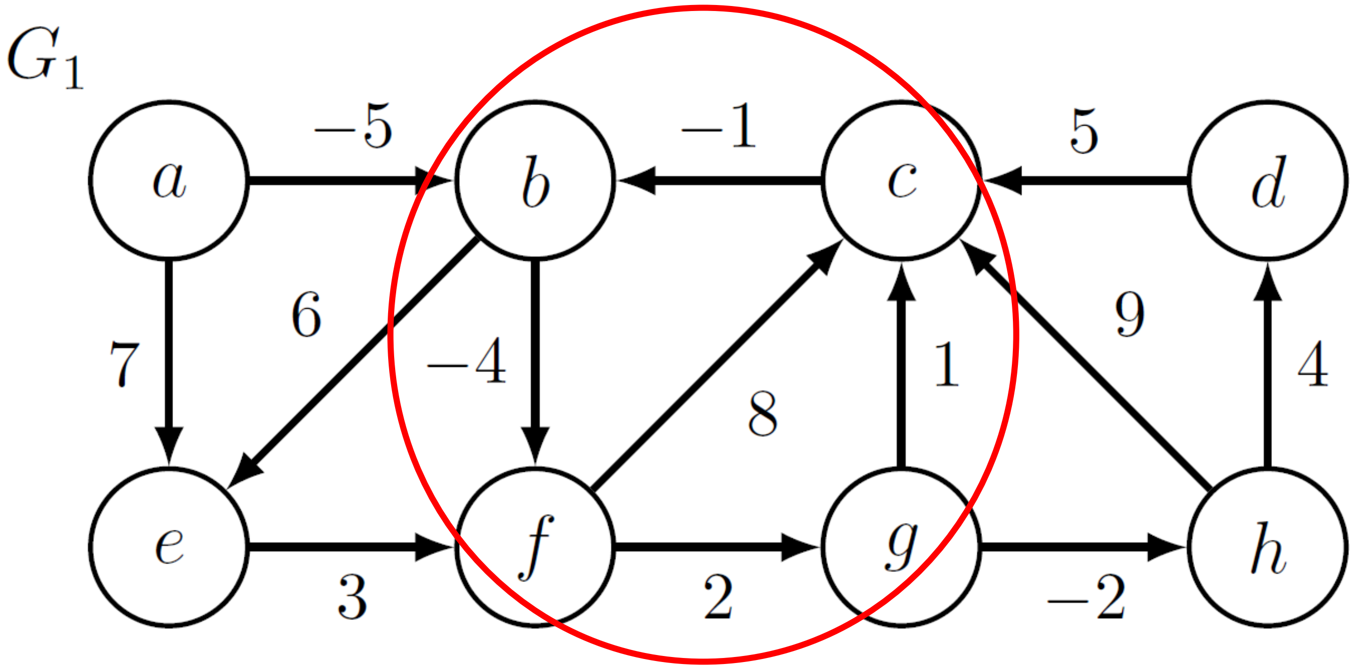
$$\delta(s,t) = inf\{w(\pi) \mid path\ \pi\ from\ s\ to\ t\}$$

Infimum

Взвешенные графы. Negative-weight cycle



Взвешенные графы. Negative-weight cycle



$$w(f, g, c, b, f) = 2 + 1 - 1 - 4 = -2$$

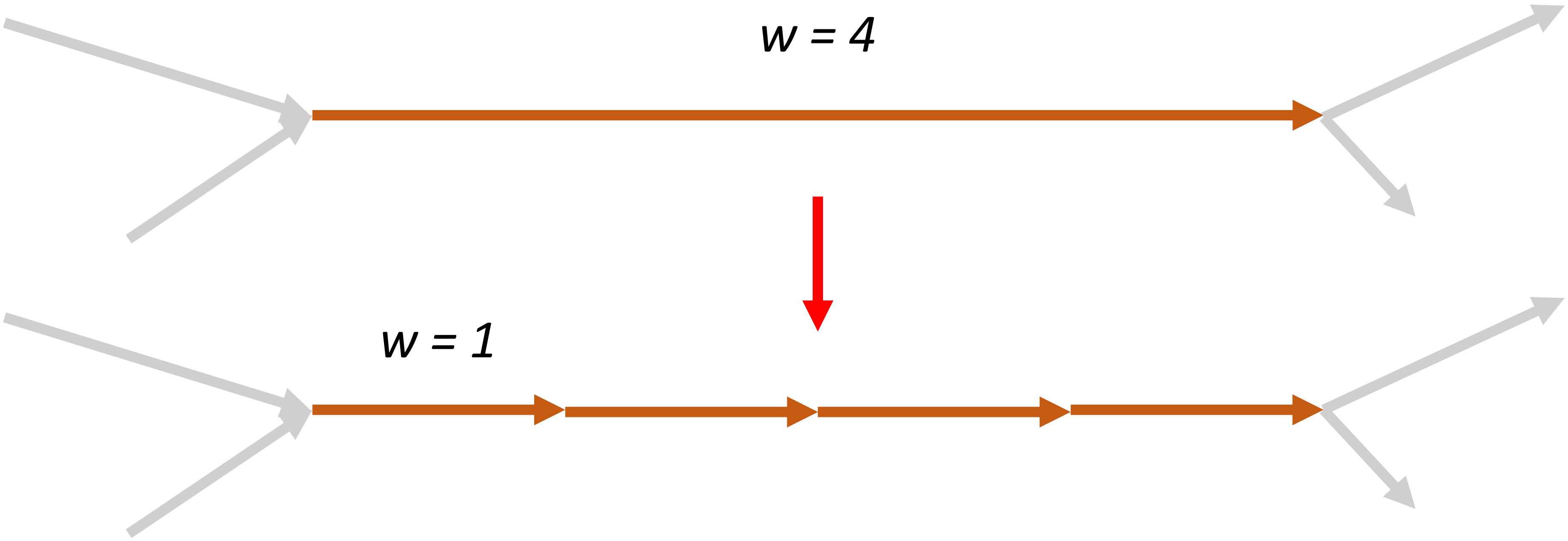
Взвешенные графы. Negative-weight cycle

$\delta(s, t) = -\infty$ если есть путь из s в t, который содержит цикл с негативной суммой

Взвешенный кратчайший путь

Граф	**Веса**	**Алгоритм**	**Сложность O(·)**
Любой	Unweighted	BFS	$\lvert V \rvert + \lvert E \rvert$
DAG	Any	DAG Relaxation	$\lvert V \rvert + \lvert E \rvert$
Любой	Any	Bellman-Ford	$\lvert V \rvert \cdot \lvert E \rvert$
Любой	Non-negative	Dijkstra	$\lvert V \rvert \log \lvert V \rvert + \lvert E \rvert$

Взвешенный кратчайший путь. BFS



Взвешенные графы. Дерево кратчайших путей

Если известны $\delta(s, v)$ для всех вершин $v \in V$, то можем построить дерево кратчайших путей за $O(|V| + |E|)$

Взвешенный кратчайший путь. DAG Relaxation

$\delta(s, t)$ – кратчайший путь

$d(s, t)$ – оценка расстояния

Взвешенный кратчайший путь. DAG Relaxation

Поддерживаем $d(s, v)$ (изначально ∞) для каждой $v \in V$, которая всегда ограничивает сверху $\delta(s, v)$, постепенно понижая d, пока не достигнем: $d(s, v) = \delta(s, v)$

DAG Relaxation. Когда понижаем оценку?

Неравенство треугольника: вес кратчайшего пути из u в v не может быть больше чем кратчайший путь из u в v через другую вершину x.

$$\delta(u, v) \leq \delta(u, x) + \delta(x, v) \; for \; all \; u, v, x \in V$$

DAG Relaxation

$Set\ d(s,v) = \infty$ for all $v \in V$

$Set\ d(s,s) = 0$

For u in a topological sort order of G:

For $v \in Adj+(u)$:

  If $d(s,v) > d(s,u) + w(u,v)$:

    relax edge (u,v) : set $d(s,v) = d(s,u) + w(u,v)$

“Линейное время”

$$O(|V| + |E|)$$

DAG Relaxation