初步整理

Silver·湫漾

2018.08.30

目录

无穷初步与 e

无穷大

无穷大，让想象扩展扩展。

$$\infty$$

无穷大的倍数

$$n(\infty + 1) - 1$$

高阶和低阶

$$(\infty + 1)^{n} - 1$$

计算，让想象可扩展。

$$\infty + n$$

无穷之间的关系，后面再探。

位数

对于任意进制，在一阶里的总位数

$$w_{v} = \log_{v}(\infty_{v} + 1)$$

对于 2 进制

$$w_{2} = \log_{2}(\infty_{2} + 1)$$

对于 10 进制

$$w_{10} = \log_{10}(\infty_{10} + 1)$$

对于 16 进制

$$w_{16} = \log_{16}(\infty_{16} + 1)$$

注意

$$\infty_{2} \neq \infty_{10} \neq \infty_{16}$$

每一种写法，都是为了，在那种进制下，进行对理想中的数字进行合理运算的基础。

一阶无穷小

对于 2 进制

$$\frac{1}{10^{w_{2}}} = \frac{1}{\infty_{2} + 1}$$

对于 10 进制

$$\frac{1}{10^{w_{10}}}=\frac{1}{\infty_{10}+1}$$

对于 16 进制

$$\frac{1}{10^{w_{16}}}=\frac{1}{\infty_{16}+1}$$

无穷之间的关系，后面再探。

自然数 e 簇

e 的定义

$$e=\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{\infty+1}$$

实际上在整个 e 簇，都具有几乎相同的值，即可以认为是相同的值，看起很奇怪，但是某种意义上确实是这样子的，后面再说。

簇，这里说的而意思是，不同的表达式，却趋近或等价于同一个值，这个误差是$\frac{1}{\infty+1}$是它的高阶无穷小，或者小到无法用公式描述。如

$$\forall \mathrm{n}>1,\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}(\infty+1)}\right)^{\mathrm{n}(\infty+1)}\cong \mathrm{e}$$

或者类似的。

e 与 a 的幂函数的转换

$$a^{x}=(e^{\ln a})^{x}=e^{\mathrm{x}\ln a}$$

或

$$a^{x}=e^{\ln a^{x}}=e^{\mathrm{x}\ln a}$$

$(e^{x})'_{+}$是e^{x}

$$(e^{x})'_{+}=\frac{e^{x+\Delta}-e^{x}}{\Delta}$$

$$=\frac{e^{x+\frac{1}{\infty+1}}-e^{x}}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left[\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)}\right]^{\left(x+\frac{1}{\infty+1}\right)}-\left[\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)}\right]^{x}}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)\left(x+\frac{1}{\infty+1}\right)}-\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)\frac{1}{\infty+1}}-\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}\left[\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)\frac{1}{\infty+1}}-1\right]}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}\left[\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{1}-1\right]}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}\frac{1}{\infty+1}}{\frac{1}{\infty+1}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)x}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\infty+1}\right)^{(\infty+1)}\right]^{x}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

$(\ln x)'_{+}$是$\frac{1}{\mathrm{x}}$

$$(\ln x)'_{+}=?$$

根据反函数的导数与原函数的导数的关系得

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})'_{+}=\frac{1}{(\ln e^{x})'_{+}}$$

$$e^{x}=\frac{1}{(\ln e^{x})'_{+}}$$

令$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=t$则，$\mathrm{x}=\ln t$

$$e^{\ln t}=\frac{1}{(\ln t)'_+}$$
$$t=\frac{1}{(\ln t)'_+}$$
$$(\ln t)'_+=\frac{1}{t}$$

即

$$(\ln x)'_+=\frac{1}{x}$$

$(\log_{\mathrm{a}} x)'$是$\frac{1}{x\ln a}$

$$(\log_{\mathrm{a}} x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'$$

根据复合函数求导法则有

$$=\frac{1}{x\ln a}$$

$(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})'_+$是$\mathrm{a}^{\mathrm{x}}\ln a$

$$(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})'_+=\left(e^{x\ln a}\right)'_+$$

根据复合函数求导法则有

$$=\ln a\left(e^{x\ln a}\right)$$
$$=e^{x\ln a}\ln a$$
$$=\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})}\ln a$$
$$=\mathrm{a}^{\mathrm{x}}\ln a$$

e 的值与 e 簇的值

1.对$\mathrm{y}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$做级数展开，然后证$\mathrm{x}=1$时的那个级数单调递增并收敛。

2.对函数

$$y=\left(1+\frac{1}{\mathrm{x}+1}\right)^{\mathrm{x}+1}$$

证它单调递增，并且有上界。

过程比较枯燥，等等再写。

一个简单的计算方式是，代一个简单的 x 进去，用计算器算一下，可以得到一个满足日常生活使用的 e 的值。

整个 e 簇虽然表达式不同，但是具有相同的上界即相同的值。这个后面再说。

向量与矩阵初步

数量与向量

数量，坐标轴或坐标系上的数，就是数量，它代表的是坐标轴上的一个点。

1 代表点 1 的位置，它是一个点。

（1,1）代表点 1 的位置，它是一个点。

向量，坐标轴或坐标系上的有向线段，就是向量，它代表一个指向一个方向的线段。通常他带有表示方向的箭头。

[1]代表方向为从 0 指向 1，长度为从 0 到 1 的有向线段

[1,1]代表方向为从(0,0)指向(1,1)，长度单位从（0,0）到（1,1）的有向线段

向量的计算

向量的合成与数乘

加法和乘法的本质是一样的，不多赘述。

$$\vec{\mathrm{a}} = [\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A}] = \mathrm{x_A}\overrightarrow{\mathrm{e_x}} + \mathrm{y_A}\overrightarrow{\mathrm{e_y}}$$

向量的正交分解

简单讲就是$\overrightarrow{\mathrm{e_x}}$与$\overrightarrow{\mathrm{e_y}}$正交，维度上相互间无关。

$$\vec{\mathrm{a}} = [\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A}] = \mathrm{x_A}\overrightarrow{\mathrm{e_x}} + \mathrm{y_A}\overrightarrow{\mathrm{e_y}} = |\vec{\mathrm{a}}|\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{e_x}} + |\vec{\mathrm{a}}|\sin\theta\,\overrightarrow{\mathrm{e_y}}$$

二维数量积

基础定义：

1.任意单位向量的平方为 1

$$\overrightarrow{\mathrm{ee}} = \vec{\mathrm{e}}^2 = 1$$

即有

$$\overrightarrow{\mathrm{e_x}} \times \overrightarrow{\mathrm{e_x}} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{e_y}} \times \overrightarrow{\mathrm{e_y}} = 1$$

2. 可以根据正交分解原理得到：任意夹角为$\frac{\pi}{2}$的单位的数量积为 0，

$$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = 0$$

$$\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_x} = 0$$

向量长度与勾股定理

$$\vec{a}^2 = x_a^2 + y_a^2$$

$$\vec{a}^2 = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}|\vec{a}|\right)^2 = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2 |\vec{a}|^2 = (\overrightarrow{e_a})^2|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$$

即

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_a^2 + y_a^2$$

因为

$$x_a^2 = |\vec{a}| \cos\theta\, \overrightarrow{e_x}$$

$$y_a^2 = |\vec{a}| \sin\theta\, \overrightarrow{e_y}$$

代入得

$$|\vec{a}|^2 = (|\vec{a}| \cos\theta\, \overrightarrow{e_x})^2 + \left(|\vec{a}| \sin\theta\, \overrightarrow{e_y}\right)^2$$

化简得

$$1 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$

代数乘法

1

$$\overrightarrow{ab} = [x_A\overrightarrow{e_x} + y_A\overrightarrow{e_y}][x_B\overrightarrow{e_x} + y_B\overrightarrow{e_y}] = x_Ax_B + y_Ay_B$$

2

$$\overrightarrow{ae_x} = |\vec{a}| \cos\theta\, \overrightarrow{e_xe_x} + |\vec{a}| \sin\theta\, \overrightarrow{e_ye_x} = |\vec{a}| \cos\theta$$

$$\overrightarrow{ae_y} = |\vec{a}| \cos\theta\, \overrightarrow{e_xe_y} + |\vec{a}| \sin\theta\, \overrightarrow{e_ye_y} = |\vec{a}| \sin\theta = |\vec{a}| \cos\alpha$$

α为$\vec{a}$与$\overrightarrow{e_y}$的夹角。

虽然，上两式乘的三角形式不同，但却本质相同，表达了同一个映射，即以参考向量的夹角的 cos 值做乘向量的映射或者说一个向量在另一个向量方向上的正交投影。

对于$\overrightarrow{ab}$，可以将$\vec{b}$所在的方向向量$\overrightarrow{e_b}$作为标准基，$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角即$\vec{a}$、$\overrightarrow{e_b}$夹角为θ

可得

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\left|\vec{b}\right|\overrightarrow{e_b}=\left|\vec{b}\right|\overrightarrow{\vec{a}e_b}=\left|\vec{b}\right||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

叉积

基础定义

叉积可以简单理解为两个向量围成的面积

$$\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_x}=0$$

$$\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_y}=0$$

$$\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y}=1$$

那么，问$\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y}$也等于 1 吗？

$$\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}=?$$

解：已知[1,1]与[1,1]围成面积为 0

$$0=[1,1]\times[1,1]=\left[\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y}\right]\times\left[\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y}\right]$$

$$=\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_y}+\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y}+\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}$$

$$=0+0+1+\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}$$

$$1+\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}$$

所以

$$\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_x}=-1$$

代数乘法

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left[x_A\overrightarrow{e_x}+y_A\overrightarrow{e_y}\right]\times\left[x_B\overrightarrow{e_x}+y_B\overrightarrow{e_y}\right]=x_Ay_B-y_Ax_B$$

原理同数量积的代数乘法，可得

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

几何证明

平行

若$\vec{a} = n\vec{b}$或$\vec{a} \times \vec{b} = 0$则平行

同时可得，两直线平行同位角相等等基础平面几何结论

垂直

若$\vec{a}\vec{b} = 0$则垂直

夹角

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\sin\theta = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

三角形内角和

对任意三角形$\triangle_{ABC}$，取向量

$$\overrightarrow{AB}、\overrightarrow{AC}、\overrightarrow{BC}$$

$$\cos B = -\frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

令

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AX^{-}} = -\overrightarrow{AX}$$

则

$$\cos B = -\frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AX}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AX^{-}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \cos\angle X^{-}AB$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AX}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AX}\right|} = \cos\angle XAC$$

所以

$$\angle \mathrm{B} = \angle X^{-}AB$$

$$\angle \mathrm{C} = \angle XAC$$

所以

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{BAC} + \angle X^{-}AB + \angle XAC = \angle X^{-}AX$$

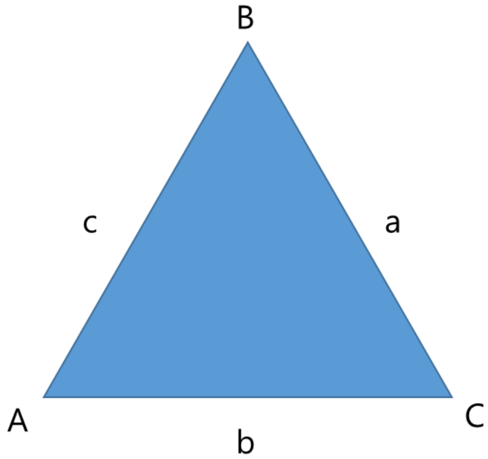
$$\cos \angle X^{-}AX = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AX}}\,\overrightarrow{\mathrm{XA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AX}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{XA}}\right|} = -1$$

$$\angle X^{-}AX = \pi$$

所以三角形内角和为π。多边形内角和不再赘述

三角关系

基础定理



余弦定理

$$\left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

同理有：

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

正弦定理

正弦定理好像与向量关系不大，但其实是没扯，因为确实可用向量直接弄出来，后面再加吧。

$$\mathrm{ab}\sin C = 2S_{\Delta}$$

$$\mathrm{bc}\sin A = 2S_{\Delta}$$

$$\mathrm{ca}\sin B = 2S_{\Delta}$$

有

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

根据，同弧所对圆周角相等（初中几何圆部分的定理），有

$$2\mathrm{r}\sin A = a$$

即有

$$\frac{a}{\sin A} = 2\mathrm{r}$$

同理有

$$\frac{b}{\sin B} = 2\mathrm{r}$$

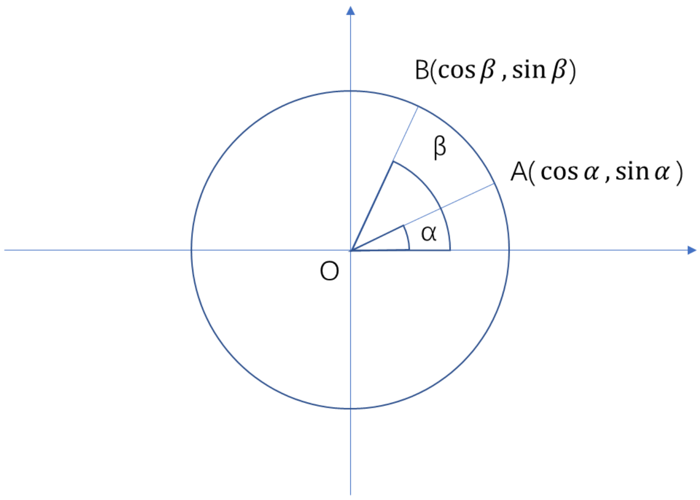
$$\frac{c}{\sin C} = 2\mathrm{r}$$

综上

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

和差公式

以下计算过程均在单位圆下进行,注意$\sin -\theta = -\sin\theta$变号，而$\cos -\theta = \cos\theta$不变号



$$\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OA} = \cos(\beta - \alpha)$$

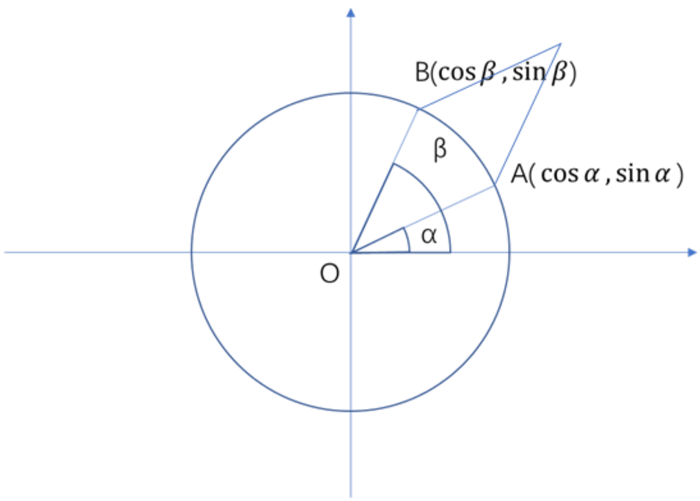
$$\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OA} = (\ \cos\beta , \sin\beta)(\ \cos\alpha , \sin\alpha)$$

$$= \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

所以

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$



$$S_{▱} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \sin(\beta - \alpha)$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (\ \cos\alpha , \sin\alpha)(\ \cos\beta , \sin\beta)$$

$$= \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

（注意：这里是叉乘，叉乘要注意乘的顺序，否则$S_{▱}$的面积为负值）

（注意：这里是叉乘，叉乘要注意乘的顺序，所以中间是减号）

所以

$$\sin(\beta-\alpha)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

矩阵初步

矩阵的高阶部分尚在整理中。

基础描述

我们把在做叉积求面积时候的那两个向量写一起，得到一个简单的记法

$$\begin{bmatrix}[x_a,y_a]\\ [x_b,y_\mathrm{b}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}$$

向量的长是它的模长，它们围成平行四边形的面积，应该是该复合向量的模，那我们这样记

$$\left|\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$$

我们发现，转置这个复合向量

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{2,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{1,1}\end{vmatrix}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}$$

即转置矩阵的模不变。

改变向量的顺序试下

$$\begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{1,1} & a_{1,2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,1}\\ a_{2,2} & a_{2,1}\end{vmatrix}=a_{1,2}a_{2,1}-a_{1,1}a_{2,2}=-\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}$$

即改变向量顺序模变为相反数

综上，行向量和列向量在矩阵上是等价的。

矩阵的数乘

$$s\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}=s(a_{1,2}a_{2,1}-a_{1,1}a_{2,2})$$

所以，矩阵的数量乘，应该为数量乘以矩阵的任一行或列

变换与矩阵乘法

平移

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]+[\Delta\mathrm{x},\Delta\mathrm{y}]=[\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y}+\Delta\mathrm{y}]$$

缩放与矩阵乘法

这里比较“迷惑”，因为这里我们要定义一个新的计算方式。

首先我们思考一下：

为了缩放，我们需要乘以一个系数

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot s=[\mathrm{x}\cdot \mathrm{s},\mathrm{y}\cdot \mathrm{s}]$$

1 为了分别缩放不同维度，我们需要乘以另一个变换向量。

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot[\mathrm{s_x},\mathrm{s_y}]=[\mathrm{x}\cdot \mathrm{s_x},\mathrm{y}\cdot \mathrm{s_y}]$$

2 不同于点乘，这次我们要得到的是一个新的向量，有两个值，而不是一个，所以区分与点乘，我们写两个，并且写成矩阵

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot\begin{bmatrix}s_x & 0\\ 0 & s_y\end{bmatrix}==[\mathrm{x}\cdot \mathrm{s_x},\mathrm{y}\cdot \mathrm{s_y}]$$

3 但是为了与点乘区分，并且矩阵具有行列等价的性质，所以我们把它交叉着乘，准确地说，我们把被乘的向量竖着写，或者说被乘的矩阵转置

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot\begin{bmatrix}s_x & 0\\ 0 & s_y\end{bmatrix}=[x\cdot s_x+0y,0x+y\cdot s_y]=[x\cdot s_x,y\cdot s_y]$$

从此，我们得到了向量与矩阵的乘法，并且从倾斜和旋转也看的出来，向量与矩阵的乘法的几何意义是对做向量做空间变换。

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}=[a_{1,1}x+a_{2,1}y,a_{1,2}x+a_{2,2}y]$$

以下我们将这种乘法在其他变换上用一下，看下效果。

倾斜

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot\begin{bmatrix}1 & \tan\beta\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}=[x+y\tan\alpha\,,x\quad\tan\beta+y]$$

旋转

$$[\mathrm{x},\mathrm{y}]\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=[x\cos\theta-y\sin\theta\,,x\quad\sin\theta+y\cos\theta]$$

基础仿射变换矩阵

在游戏制作中，如何将平移与其他变换合在一起呢？看下面。

$$[\mathrm{x},\mathrm{y},1]\cdot\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{bmatrix}=[a_{1,1}x+a_{2,1}y+a_{3,1},a_{1,2}x+a_{2,2}y+a_{3,2}]$$

在三维游戏制作中，也会用到类似变换，只不过要再加一维度。以后有需要

再补上三维的。

概率论与信息初步

信息，是一个很大分支，将会在后续的整理中慢慢出现。

分布这里还存在一定的缺口尚未补全，缺口主要在正太分布参数推导、λ分布的机制这两点，将会在后续的整理中慢慢出现。

排列与组合

排列组合

注意：记法常变而原理不变。

对 n 个小球进行排列的可能，有

$$\mathrm{n} * (\mathrm{n}-1) * (\mathrm{n}-2) \cdots * (2) * 1 = \mathrm{n}!$$

种

记作

$$\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} = n!$$

对 n 个小球进行排列，前 m 个位置排列的可能，有

$$\mathrm{n} * (\mathrm{n}-1) * (\mathrm{n}-2) * \cdots * \big(\mathrm{n}-(\mathrm{m}-1)\big) = \frac{\mathrm{n}!}{(n-m)!}$$

种

记作

$$\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

从 n 个小球中拿出 m 个小球，记作

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$$

那么，从 n 个小球中拿出 m 个小球进行排列可记作

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} * A_m^m$$

那么，从 n 个小球中拿出 m 个小球进行排列等价于对 n 个小球进行排列，前 m 个小球进行排列，故

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} * A_m^m = \mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}}$$

那么

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m! * (n-m)!}$$

N 项展开的通项公式

$$(a+b)^n = \sum_p C_n^p a^{n-p} b^p$$

相关事件与条件概率

条件概率

A 事件发生下 B 事件发生的概率，记为

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

相关事件是指事件之间有本质联系，而不是表象上发生上的关系。

本质关系：喝酒和肝硬化　　　　　　（引发，相关）

表象关系：喝水和肝硬化　　　　　　（无关，独立）

本质关系，会影响另一件事出现的概率

而表象关系，不会影响另一件事出现的概率

独立性与相关

那么,若 A、B 事件相互独立，A 事件的发生不影响 B 事件发生，B 事件发生不影响 A 事件发生，即就

A 事件发生下 B 事件发生的概率仍旧是 B 事件发生的概率, B 事件发生下 A 事件发生的概率仍旧是 A 事件发生的概率，则 AB 时间相互独立

即就

$$\mathrm{P(B|A)} = P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\mathrm{P(A|B)} = P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

即就，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则，两件事独立

离散分布

老生常谈的就先不说了——还在整理中，先来点新的。

还是掷硬币，但是这次正面向上继续游戏，正面向下结束游戏，设随机变量 X 为游戏进行的次数，求 X 的分布

$$k=1,2,3,\ldots$$

$$P(X=k)=p^{k-1}(1-p)^1$$

这就是指数分布

不管了，先求和

$$F(X=k)=\sum_{i=1}^{k}p^{i-1}(1-p)^1$$

根据等比数列求和有

$$a_1=(1-p)^1$$

$$q=p$$

$$F(X=n)=(1-p)\frac{1-p^n}{1-p}=1-p^n$$

$$F(X=n=\infty)=\lim_{n\to\infty}1-p^n=1$$

期望

$$E(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}(1-p)$$

$$=(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}$$

又因为实际上

$$E(X=k)=\frac{1}{1-p}$$

所以

$$(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}=\frac{1}{1-p}$$

一种简单的幂型离散分布

设有 n 个盒子，并进行编号 0,1,2，…n

对每一个盒子都与其他盒子比较编号大小，若编号大的获得编号大的编号减去编号小的编号的小球，求小球的分布律。

对于第 k 个盒子，它里面的小球数量应为

$$\mathrm{y_k} = (k-0)+(k-1)+\cdots+(k-k) = k+(k-1)+\cdots+2+1+0$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}$$

总小球数量为

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}[(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2)+(0+1+2+\cdots+n)]$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}]$$
$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{6}]$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12}$$

随便拿出一个小球，小球属于第 k 个盒子的概率为

$$\mathrm{f(X=k)} = \begin{cases} 0 & x>n \\ \dfrac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+4)}{12}} & 0<x\le n \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

即

$$f(\mathrm{X=k}) = \begin{cases} 0 & x>n \\ 6\dfrac{k(k+1)}{n(n+1)(2n+4)} & 0<x\le n \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

连续分布

老生常谈的就先不说了——还在整理中，先来点新的。

一种简单的幂型连续分布

如果 x2>x1。那么获得 x2-x1 分。求密度函数。

那么$\mathrm{x_{min}}$与x_{max}间$\mathrm{x_k}$处获得的分数为

$$\mathrm{y_{x_k}} = \int_{x_{min}}^{x_k}(x_k - x)dx = x_k^2 - \frac{x_k^2}{2} - x_k x_{min} + \frac{x_{min}^2}{2} = \frac{x_k^2 + x_{min}^2}{2} - x_k x_{min}$$

即就分数与 x 的关系为

$$\mathrm{y} = \frac{x^2 + x_{min}^2}{2} - x x_{min} = \frac{(x - x_{min})^2}{2}$$

总分为

$$\mathrm{T} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} y_{x_k} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (\frac{x^2 + x_{min}^2}{2} - x x_{min})dx$$

$$= \frac{x_{max}{x_{min}}^2}{2} - \frac{{x_{max}}^2 x_{min}}{2} + \frac{{x_{max}}^3}{6} - \frac{{x_{min}}^3}{6} = \frac{(x_{max} - x_{min})^3}{6}$$

那么分数分分布的密度函数为

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & x > x_{max} \\ \dfrac{\dfrac{x^2 + x_{min}^2}{2} - x x_{min}}{\dfrac{x_{max}{x_{min}}^2}{2} - \dfrac{{x_{max}}^2 x_{min}}{2} + \dfrac{{x_{max}}^3}{6} - \dfrac{{x_{min}}^3}{6}} & x_{min} < x \le x_{max} \\ 0 & x \le x_{min} \end{cases}$$

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & x > x_{max} \\ \dfrac{\dfrac{(x - x_{min})^2}{2}}{\dfrac{(x_{max} - x_{min})^3}{6}} & x_{min} < x \le x_{max} \\ 0 & x \le x_{min} \end{cases}$$

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & x > x_{max} \\ 3\dfrac{(x - x_{min})^2}{(x_{max} - x_{min})^3} & x_{min} < x \le x_{max} \\ 0 & x \le x_{min} \end{cases}$$

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 1 & x > x_{max} \\ \dfrac{(x - x_{min})^3}{(x_{max} - x_{min})^3} & x_{min} < x \le x_{max} \\ 0 & x \le x_{min} \end{cases}$$

若

$$\mathrm{x}_{max} = -x_{min} \to \infty$$

$$\forall\ \ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$$

$$f(x)_{x\to t} = \lim_{x\to\infty} 3\frac{(x - x_{min})^2}{(x_{max} - x_{min})^3} = 0$$

$$F(x)_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - x_{min})^3}{(x_{max} - x_{min})^3} = 1$$

这是一个特殊的定积分。