"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Universidad de Sonora

Campus Hermosillo

Profesor: Lizarraga Celaya Carlos

Materia: Física Computacional

Trabajo: Reporte de las actividades: 10, 11 y 12

Alumnor: Bonillas Miranda Akin

Número de Expediente: 219211360

Correo: a219211360@unison.mx/akinbonillasmiranda@gmail.com

Número Telefónico: 662 368 2474

Grupo: 2

Carrera: Licenciatura en Física

Semestre: Cuarto Semestre

Viernes 30 de Abril de 2021, Hermosillo, Sonora

Introducción

Una Ecuación Diferencial Parcial es aquella ecuación que involucra a una función, sus derivadas, y a 2 o más variables independientes, y cuya forma general es:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ...\right) = 0 \tag{1}$$

Este tipo de ecuaciones son utilizadas para la formulación y solución de problemas de propagación típicos como los de sonido, calor, electrostática, electrofinámica, dinámica de fluídos, elasticidad, mecáica cuántica, entre muchos otros campos.

Las últimas 3 actividades (10, 11, 12) consistió en la resolución numérica de 3 ecuaciones diferenciales en partícular: Ecuación del Calor; Ecuación de Onda; Ecuación de Poisson, sin embargo, antes de hablar de ellas, comenzaremos hablado de algunas de las características de las ecuaciones diferenciales parciales.

Familias de Ecuaciones Diferenciales

1.- Ecuaciones Diferenciales Parabólicas: Las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas son comunmente usadas para describir una gran variedad de fenómenos dependientes del tiempo, incluyendo la conducción del calor, la dispersión de partículas, por decir algunos.

Para definir el tipo de EDP parabólica más simple consideraremos la función $u(x, y)$ para dos variables independientes. Una EDP lineal de segundo orden (que inluye segundas derivadas), con coeficientes constantes para la función u está dada por la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Eu_x + Du_y + F = 0 \tag{2}$$

Y los coeficientes de esta ecuación cumplen la siguiente relación:

$$B^2 - AC = 0 \tag{3}$$

Usualmente x representa la posición unidimencional y y representa el tiempo, y le EDP se resuelve a partir de la condiciones inciales de frontera.

La palabra "parabólica" en el nombre viene de suponer que los coeficiente de la ecuación son iguales a los de la forma analítica de la ecuación de la parábola:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Ex + Dy + F = 0 \tag{4}$$

2.- Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas: Las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de orden n es una EDP que tiene un problema de valor incial bien planteado para las primeras $n-1$ derivadas. Siendo más específicos, el Problema de Cauchy puede ser solucionado localmente por condiciones iniciales arbitrarias, a lo largo de cualquier hiper-superficie no característica.

Muchas de las ecuaciones de mecánica son hiperbólicas, por lo que el estudio de las ecuaciones hiperbólicas tiene un interés contemporáneo sustancial. La forma general de una EDP hiperbólica es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

Este tipo de ecuaciones tiene la propiedad que, si u y si primera derivada son condiciones inciales arbitrariamente especificadas en la recta $t = 0$ (con suficientes propiedades de suavidad), entonces existe una solución para todos los tiempos t.

Aplicando un cambio lineal de varibles, todas las EDP hiperbólicas tienen la forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (términos\_derivados\_de\_órdenes\_inferiores) = 0 \tag{6}$$

Con:

$$B^2 - AC > 0 \tag{7}$$

Puede ser transformado en una ecuación de onda, dejando de lado los términos derivados de orden, ya que no aportan en el entendimiento de las cualitativo de la ecuación. Semejante al caso anterior, esta definición es análoga a la defínción de la ecuación de la hipérbola

3.- Ecuaciones Diferenciales Elípticas: La forma en general de una EDP elíptica es la siguiente:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{8}$$

Dónde A, B, C, D, E, F, G son funciones de x y y; si se cumple que:

$$B^2 - AC < 0 \tag{9}$$

Igual que en los dos anteriores, el nombre es debido a que la ecuación es análoga a la ecuación de la elipse.

Los ejemplos no triviales más simples de PDE elípticas son la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{10}$$

y la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{11}$$

En cierto modo, cualquier EDP elíptica puede ser considerada como una generalización de alguna de estas dos ecuaciones. ya que siempre pueden ser expresadas en la forma canónica.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + (terminos - de - orden - inferior) = 0 \tag{12}$$

Para cambios de variable.

Condiciones de Frontera

1.- Dirichlet: En matemáticas, las condiciones de frontera de Dirichlet son un tipo de condiciones de frontera en las que se impone una ecuación diferencial, sea ordinaria o parcial, y se especifícan los valores que una de las soluciones debe tomar a lo largo del límite del dominio (de aquí que sean de frontera).

En el método de diferencias finitas, las condiciones de frontera esencial, o de Dirchlet están definidas por una integral ponderada a partir de una ecuación diferencial. La incognita dependiente u en la misma forma que la función ponderada w que aparece en la expresión de la frontera se denomina "variable primaria", y su especificación constituye la condición de frontera de Dirichlet.

Para EDO: Para ecuaciones diferenciales ordinarias, las condiciones de frontera de Dirichlet están dadas de la siguiente manera:

$$y'' + y = 0 \tag{13}$$

En el intervalo $[a, b]$ son:

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta \tag{14}$$

α y β son números.

Para EDP: Para ecuaciones diferenciales parciales, las condiciones de frontera de Dirichlet están dadas de la siguiente manera:

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{15}$$

Donde ∇^2 es el operador laplaciano, las condiciones de frontera de Dirichlet en el dominio $\Omega \subset R^n$ están dadas por:

$$y(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega \tag{16}$$

Donde f es una función conocida dentro de la frontera $\partial\Omega$.

2.- Neumann: Las condiciones de Frontera de Neumann son similares a las de Dirichlet, sin embargo, en lugar de especificar como es la función en la frontera del dominio debemos especificar como es la derivada en la misma.

Para EDO: Para una ecuación diferencial ordinaria, las condiciones de frontera de Neumann están dadas de la siguiente forma:

$$y'' + y = 0 \tag{17}$$

En el intervalo $[a, b]$ son:

$$y'(a) = \alpha, y'(b) = \beta \tag{18}$$

α y β son números.

Para EDP: para ecuaciones diferenciales parciales, las condiciones de frontera de Neumann están dadas de la siguiente forma:

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{19}$$

Donde ∇^2 es el operador laplaciano, las condiciones de frontera de Dirichlet en el dominio $\Omega \subset R^n$ están dadas por:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega \tag{20}$$

Donde n denota la normal (típicamente exterior) de la frontera $\partial\Omega$, y f es una función escalar.

La derivada normal, que aparece en el lado izquierdo, se define como

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = \nabla y(x) \cdot \hat{n}(x) \tag{21}$$

Donde $\nabla y(x)$ es el gradiente de la función $y(x)$, $\hat{n}$ es el vector normal, y $\cdot$ es el producto escalar entre vectores.

3.- Robin: las condiciones de frontera de Robin son una combinación entre las condiciones de frontera de Dirichlet y las de Neumann, Esto contrasta con las condiciones de frontera mixtas, que son condiciones de frontera de diferentes tipos especificadas en diferentes subconjuntos de la frontera. Este tipo de condiciones son también llamadas "condiciones de frontera de impedancia", debido a que son aplicadas en problemas de electromagnetismo, o "condiciones de frontera convectiva", por su aplicación en problemas de transferencia de calor.

Si Ω es el dominio en el que se va a resolver la ecuación dada, y $\partial\Omega$ denota a la frontera del dominio, las condiciones de frontera de Robin está dada por:

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g \tag{22}$$

en la frontera $\partial\Omega$, para constantes no nulas a y b, y una función dada g. u es la solución desconocida definida en Ω y $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada normal en la frontera.

Método de Diferencias Finitas

Los métodos de diferencias finitas son métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales, aproximando las derivadas con diferencias finitas, para esto, tamto el dominio espacial como el temperar deben ser discretizados, de modo que en cada uno haya un número finito de pasos, acompañado de técnicas para escribir ecuaciones diferenciales en ecuaciones lineales de primer grado.

Series de Taylor: Podemos aproximar la derivada mediente una serie de Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x) \tag{23}$$

$R_n(x)$ representa la diferencia entre el polinomio de Taylor y la función real.

Para poder aproximar la derivada de la función tomaremos la serie de Taylor truncada, usando únicamente los primeros dos términos:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h \tag{24}$$

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \tag{25}$$

Depejamos f', dividiendo ambos lados de la aproximación entre h:

$$\frac{f(x_0 + h)}{h} \approx \frac{f(x_0)}{h} + f'(x_0) \tag{26}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h)}{h} - \frac{f(x_0)}{h} \tag{27}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{28}$$

Véase que es la definición de la derivada, omitiendo únicamente el límite cuando h tiende a 0. Esta de aquí es la aproximación de la deriavada hacia adelante, pues se le suma un término h al argumento de la función, análogamente podemos definir la aproximación hacia atrás como:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{29}$$

Y del mismo modo aproximamos la derivada segunda de la función:

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \tag{30}$$

Sustituiremos $f'(x_0+h)$ por una suma finita hacia adelante, y $f'(x_0)$ por una suma hacia atrás:

$$f''(x_0) \approx \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \left(\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right)}{h} \tag{31}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \tag{32}$$

Solución de la Ecuación de Calor (Actividad 10)

La ecuación del calor está dada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{33}$$

En el caso unidimensional, la ecuación sería:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{34}$$

Donde α es el coeficiente de difusión térmica. Si sustituimos la espresión obtenida para la segunda derivada, encontramos que la derivada temporal se aproxima como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2f(x,t) + f(x-h,t)}{h^2} \tag{35}$$

Lo anterior surge a partir de la idea de que hemos discretizado el espacio posición-tiempo, por lo que hacen falta condiciones en el tiempo $t = 0$, y condiciones de frontera, seam de tipo Dirichlet o Neumann. Para hacer la discretización analítica reescribiremos la última expresión obtenida como:

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \tag{36}$$

Donde h es el cambio en la posición, y k es el cambio en el tiempo. Despejaremos ahora $u(x,t+k)$:

$$u(x,t+k) = \frac{\alpha k}{h^2}\left(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right) + u(x,t) \tag{37}$$

$$K = \frac{\alpha k}{h^2} \tag{38}$$

$$u(x,t+k) = Ku(x+h,t) - 2Ku(x,t) + Ku(x-h,t) + u(x,t) \tag{39}$$

$$u(x,t+k) = Ku(x+h,t) + (1-2K)u(x,t) + Ku(x-h,t) \tag{40}$$

$$u_x^{t+k} = Ku_{x+h}^t + (1-2K)u_x^t + Ku_{x-h}^t \tag{41}$$

$$u_x^{t+k} = \frac{\alpha k}{h^2} u_{x+h}^t + \left(1 - 2\frac{\alpha k}{h^2}\right) u_x^t + \frac{\alpha k}{h^2} u_{x-h}^t \tag{42}$$

Donde la discretización consiste en una cantidad de $N-1$ a N puntos en la posición, y de $M-1$ a M puntos en el tiempo.

Se crea el dominio como una matriz entre los puntos a y b, los extremos del dominio con la cantidad de N puntos, se crea la matriz del dominio llenandose con las condiciones iniciales.

Integramos. Después debemos especificar las condiciones de frontera; para poder integral cremos un loop anidado, recorriendo primero el tiempo, y luego recorriendo la posición. Dentro de coda loop se utiliza la ecuación encontrada para las diferencias finitas.

Actividad 10: https://github.com/Akin-Bonillas-Miranda/Fisica$_{C}omputacional/blob/master/Actividad\%2010/$

Solución de la Ecuación de Onda (Actividad 11)

La ecuación de onda está dada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z) \tag{43}$$

donde c es la velocidad de propagación de la información, y la función u representa la presión en una onda acustica, o la intensidad de un campo magnético, entre otras. La ecuación de onda unidimensional está dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,y,z) \tag{44}$$

Donde x está dada por el intervalo $[0, L]$ y t por el intervalo $[0, T]$.

Para encontrar la solución de este tipo de ecuaciones son necesarias 4 condiciones, 2 condiciones inciales, y 2 condiciones de frontera. Utilizaremos los resultados obtenidos en el método de diferencias finitas:

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \tag{45}$$

Observando la ecuación observamos que hay implicados 5 puntos, el actual, un punto hacia atrás y adelante en el espacio, y uno en el pasado y futuro en el tiempo. Reescribimos la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{u_x^{t+k} - 2u_x^t + u_x^{t-h}}{k^2} = c^2 \frac{u_{x+h}^t - 2u_x^t + u_{x-h}^t}{h^2} \tag{46}$$

Despejamos ahora u_x^{t+k}:

$$C^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2} \tag{47}$$

$$u_x^{t+k} = 2u_x^t - u_x^{t-1} + C^2(u_{x+h}^t - 2u_x^t + u_{x-h}^t) \tag{48}$$

Discretizamos el espacio posición-tiempo como en el problema anterior, creando una matriz de dominio para el espacio y para el tiempo, con una cantidad especificada de puntos; el tamaño del paso en el tiempo estará dado por: $C * \frac{dx}{c}$.

Creamos 3 matrices para los 3 tiempos que están implicados en el método,, ya que en cada calculo es necesario el tiempo anterior, y a un nuevo término de modo que es más fácil si les asignamos una variable.

Definimos una función de forazmiento, y la velocidad inicial de la onda en el tiempo $t = 0$. Después usaremos un ciclo for anidado, donde el primero de ellos recorrerá el tiempo, y el segundo recorrerá la posición. Y finalmente declararemos las variables que necesitaremos a lo largo del procedimiento, usandolas como argumentos de la función.

Actividad 11: https://github.com/Akin-Bonillas-Miranda/Fisica$_C$*omputacional/blob/master/Actividad*%2011/*Actividad*$_1$1*.ipynb*

Solución de la Ecuación de Poisson (Actividad 12)

La ecuación de Poisson está dada por la siguente expresión:

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z) \tag{49}$$

La solución numérica para esta ecuación requiere una mezcla de las condiciones de fontera de tipo Dirichlet y Neumann. Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden, con las expresinoes obtenidas en el método de diferencias finitas obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} \tag{51}$$

Sumando y cambiando la notación obtenemos:

$$f_h^k = \left(\frac{u_{x+h}^t + u_{x-h}^t}{h^2} + \frac{u_x^{t+k} + u_x^{t-k}}{k^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) u_x^t \tag{52}$$

Esto en un espacio posición-tiempo discretizado.

Vemos que la ecuación obtenida es una ecuación computacional de 5 puntos. Explicaremos el algoritmo realizado para la solución de este problema:

Para la ecuación con condiciones de frontera de Dirichlet tenemos un problema matricial de la forma:

$$AU = F \tag{53}$$

Donde A es una matriz trdiagonal, U es desconocida y F es conocida. Empezamos creando nuetro dominio en un expacio $x - t$, es decir, creamos los valores iniciales y finales del espacio posición-tiempo, calculamos el tamaño de paso para x y t, y apartir de esto creamos la mata xt.

Después crearemos un funcón que genere dos matrices f y g, donde g es sólo una matriz auxiliar para crear a f, de tal modo que g contiene la información del espacio en el que se trabaja.

Definimos una función que genere nuestras condiciones de frontera de Dirichlet, de modo que a ciertas variables se les asigne el espacio frontera correspondiente y su valor.

Pasamos la información de estas matriecs frontera a matrices que encajen en nuestra matriz, a trabajar la solución numérica. Reunimos las partes de nuestra matriz en construcción en una sola matriz g.

Ahora generamos la matriz A de diagonales, en este paso definimos los calores que deben estar en las diagonales correspondientes de A. Por último, utilizadas estas funciones, con la información a proporcionar del problema se resuleve el sistema lineal de ecuaciones de la matriz A igual a F, con la función *linalg.solve* de *numpy*, de modo que esta matriz excluyendo los puntos.

Actividad 12: https://github.com/Akin-Bonillas-Miranda/Fisica$_{C}omputacional/blob/master/Actividad\%2012/Actividad_{1}2.ipynb$

Resumen y Conclusión

En campos como la física, las ecuaciones diferenciales son algo sumamente importante, por lo que estas actividaes nos fueron de mucha ayuda en técnica para la resolución de las mismas. El aprendizaje en la resolución de estos problema de bastante completo, pues vimos desde los tipos de ecuaciones diferenciales parciales (parabólicas:ecuación del calor, hiperbólicas: ecuación de onda, elípticas: ecuación de Poisson), hasta las condiciones de frontera que se pueden dar (Dirichlet, Neumann o Robin (mixto)). Fue gracias a los ejemplos mencionados anteriormente, y la utilización del método de diferencias finitas que pudimos comprender computacionalmente el cómo se comportan y como solucionarlas.

Mi más sincero agradecimiento al profesor, quién siempre dio su mejor esfuerzo para que nosotros como alumnos comprendieramos los temas, tanto de los presentes en este reporte, como en los pasados, la materia me pareció sumamente interesante, y el analisar y el tratar de entender como funcionaban los códigos de ejemplos fue de las cosas que más me agradó. Gracias a todo esto pudo ampliar mi conocimiento en la programación, y específicamente en el lenguaje Python, así como en los conceptos teóricos de los temas tratados.

Bibliografías empleadas

CAPÍTULO 9 Solución Numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales. (s. f.). Universidad de Granada. Recuperado 1 de mayo de 2021, de https://www.ugr.es/ prodelas/ftp/ETSICCP/Resoluci%F3nNum%E9ricaEDPs.pdf

Ecuación en derivadas parciales. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 1 de mayo de 2021, de https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n$_{e}n_{d}erivadas_{p}arciales$

Parabolic partial differential equation. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 1 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$

Hyperbolic partial differential equation. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 1 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quationDefinition$

Elliptic partial differential equation. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 2 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$

Dirichlet boundary condition. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 2 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet$_{b}oundary_{c}ondition$

Neumann boundary condition. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 2 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann$_{b}oundary_{c}ondition$

Robin boundary condition. (s. f.). Wikipedia. Recuperado 3 de mayo de 2021, de https://en.wikipedia.org/wiki/Robin$_{b}oundary_{c}ondition$