Matemática Financeira: uma abordagem via progressões e funções

Wálmisson Régis de Almeida
Tiago de Oliveira Dias

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Formação Inicial e Continuada

+IFMG

Wálmisson Régis de Almeida

Tiago de Oliveira Dias

Matemática Financeira: uma abordagem via progressões e funções

1ª Edição

Belo Horizonte

Instituto Federal de Minas Gerais

2021

Pró-reitor de Extensão	Carlos Bernardes Rosa Júnior
Diretor de Programas de Extensão	Niltom Vieira Junior
Coordenação do curso	Wálmisson Régis de Almeida
Arte gráfica	Ângela Bacon
Diagramação	Eduardo dos Santos Oliveira

FICHA CATALOGRÁFICA
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A447m Almeida, Wálmisson Régis de; Dias, Tiago de Oliveira.

Matemática Financeira: uma abordagem via progressões e funções. [recurso eletrônico] / Wálmisson Régis de Almeida; Tiago de Oliveira Dias. – Belo Horizonte: Instituto Federal de Minas Gerais. 2021.
60 p.; il. color.

E-book, no formato PDF.
Material didático para Formação Inicial e Continuada.
ISBN 978-65-5876-130-3

1.Matemática financeira. 2.Progressões Aritméticas. 3.Funções Exponenciais. 4.Progressões Geométricas. I. Almeida, Wálmisson Régis de. II. Dias, Tiago de Oliveira. III. Título.

CDD 513.93

Catalogação: Rejane Valéria Santos - CRB-6/2907

Índice para catálogo sistemático:
Matemática Financeira – 513.93

2021
Direitos exclusivos cedidos ao
Instituto Federal de Minas Gerais
Avenida Mário Werneck, 2590,
CEP: 30575-180, Buritis, Belo Horizonte – MG,
Telefone: (31) 2513-5157

Sobre o material

Este curso é autoexplicativo e não possui tutoria. O material didático, incluindo suas videoaulas, foi projetado para que você consiga evoluir de forma autônoma e suficiente.

Caso opte por imprimir este *e-book*, você não perderá a possiblidade de acessar os materiais multimídia e complementares. Os *links* podem ser acessados usando o seu celular, por meio do glossário de Códigos QR disponível no fim deste livro.

Embora o material passe por revisão, somos gratos em receber suas sugestões para possíveis correções (erros ortográficos, conceituais, *links* inativos etc.). A sua participação é muito importante para a nossa constante melhoria. Acesse, a qualquer momento, o Formulário "Sugestões para Correção do Material Didático" clicando nesse *link* ou acessando o QR *Code* a seguir:

Formulário de Sugestões

Para saber mais sobre a Plataforma +IFMG acesse

https://mais.ifmg.edu.br/

Palavra dos autores

Prezado(a) aluno(a), bem-vindo ao curso de Formação Continuada "Matemática Financeira: uma abordagem via progressões e funções"!

Esse material foi construído como suporte teórico para a empreitada a seguir. Aliando-se essas notas de aula às sugestões de textos na internet, esperamos que você consiga aumentar sua proficiência nesse tema tão relevante e ao mesmo tempo tão negligenciado na nossa Educação Básica e mesmo na educação domiciliar informal, ou seja, o aprendizado obtido em casa com os pais e familiares. Ao longo da nossa carreira percebemos que, por algum motivo, existe um tabu em se falar sobre dinheiro...

O professor Augusto César Morgado, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA (*in memorian*), eterna referência em se tratando do assunto, deixou registros da constatação dessa triste verdade em suas clássicas palestras, como no seguinte trecho:

> Matemática Financeira é um assunto que inexplicavelmente não costuma ser ensinado no Ensino Médio. Então a gente chega no Brasil a esta situação absurda de um aluno com 11 anos de Matemática, 8 no Fundamental e 3 no Médio, sai do Ensino Médio, entra na universidade e não é capaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista com desconto e uma compra a prazo. [...] Isto é, na minha opinião, uma maluquice total. (MORGADO, 2002. 4:35)

Enquanto não se verifica uma brusca e drástica mudança dessa realidade, o ideal é que esses conhecimentos sejam ofertados de forma complementar para a comunidade, seja através de palestras, projetos de extensão e intervenção ou cursos de educação continuada, esse último justamente a proposta em questão.

Esperamos que esse curso sirva como elemento transformador para aqueles que o realizarem, seja na perspectiva de uma melhoria na capacidade de tomada de decisões para a sua própria vida financeira, seja como um treinamento pra resoluções de problemas de concursos e processos seletivos, que também pode ser o trampolim para uma oportunidade de vida melhor.

Dividido em 3 módulos, o curso abordará os conceitos de Juros Simples e Compostos, as relações desses com os temas Progressões Aritméticas /

Geométricas e Funções Afins / Exponenciais, estudados no Ensino Médio, e os Sistemas de Amortização mais comuns do nosso sistema financeiro, o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Prestação Constante (SPC, Sistema Price ou Sistema de Amortização Francês).

O curso foi construído para ser finalizado em três semanas, com uma carga de estudos de 10h semanais. Devido à ausência de tutoria, e sabendo-se que as notas a seguir foram construídas como um resumo direcionado da teoria, é imprescindível que você leia todos os textos sugeridos, consulte a bibliografia complementar e assista às videoaulas recomendadas para que se construa uma formação sólida sobre o tema.

Sabemos que existe vasta literatura disponível nessa área (o que é bastante vantajoso). Desse modo, não há nenhuma pretensão da nossa parte em trazermos ideias inéditas e mirabolantes. Apenas desejamos que seja mais um bom curso sobre esse tema, construído sob o nosso ponto de vista.

Convém ressaltar que o ponto de vista sob o qual esse curso foi idealizado vai ao encontro da proposta da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, quando promovemos uma integração curricular dos conteúdos matemáticos, como pode ser visualizado em algumas habilidades propostas nesse documento, como

> (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais; (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial; (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros; (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas; (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 528-533).

Ao trabalho, e bons estudos. Divirtam-se!

Os autores.

Apresentação do curso

Este curso está dividido em três semanas, cujos objetivos de cada uma são apresentados, sucintamente, a seguir.

SEMANA 1	Na semana 1, será abordado o conceito de Juros Simples e sua relação com as Progressões Aritméticas e com as Funções Afins.
SEMANA 2	Na semana 2, será abordado o conceito de Juros Compostos e sua relação com as Progressões Geométricas e com as Funções Exponenciais.
SEMANA 3	Na semana 3, será abordado o conceito Amortização de Débitos e a construção das planilhas de amortização SAC e SPC (ou Price).

Carga horária: 30 horas.

Estudo proposto: 2h por dia em cinco dias por semana (10 horas semanais).

Apresentação dos Ícones

Os ícones são elementos gráficos para facilitar os estudos, fique atento quando eles aparecem no texto. Veja aqui o seu significado:

Atenção: indica pontos de maior importância no texto.

Dica do professor: novas informações ou curiosidades relacionadas ao tema em estudo.

Atividade: sugestão de tarefas e atividades para o desenvolvimento da aprendizagem.

Mídia digital: sugestão de recursos audiovisuais para enriquecer a aprendizagem.

Sumário

Objetivos
Nessa semana, você aprenderá os conceitos básicos sobre o tema; o que caracteriza o sistema de juros simples; como efetuar cálculos de montante e equivalência de taxas nesse contexto; e a relação entre esse regime de capitalização, as progressões aritméticas e as funções afins.

Mídia digital: antes de iniciar os estudos, vá até a sala virtual e assista ao vídeo “Apresentação do curso”.

1.1. Introdução

Nada como falar em dinheiro, não é mesmo? Vai que dá sorte e atrai um pouco...

Como já dito anteriormente, é triste a constatação que, de forma geral, as pessoas não abordam esse tema nos seus cafés da manhã, almoços, churrascos ou reuniões em família. Até porque esses momentos são cada vez mais raros nesses tempos corridos!

Além disso, a formação deficiente sobre o bom uso dos recursos financeiros pode fazer com que as dicas e recomendações sejam deturpadas pela própria vivência de quem as transmite. Pelos altos índices de inadimplência e endividamento dos brasileiros, não é difícil concluir que os conselhos da grande maioria das pessoas de nossa convivência não devem ser levados muito a sério. Nesse momento que escrevemos essas linhas, estamos vivendo uma situação em que esses problemas se agravam, como em uma pandemia mundial, que abala todo o sistema econômico.

Dica do Professor: Leia a reportagem da Agência Brasil sobre o pico de endividamento das famílias com relação à série histórica desde janeiro de 2010 (*download*).

Existe um velho ditado que diz que o “dinheiro não traz felicidade”. Concordo em partes, existem pessoas felizes e infelizes / deprimidas em todas as classes sociais. Mas nas mãos de uma pessoa com boa formação intelectual e social, o dinheiro pode ser um facilitador na busca pela felicidade, seja através do uso em benefício próprio, como prover uma bela viagem, a aquisição de um sonhado patrimônio ou para crescimento profissional; seja para o bem coletivo, como auxílio de familiares, de pessoas próximas ou mesmo de toda a sociedade, como a manutenção de uma praça pública efetuada por moradores locais, algo que acontece em várias cidades. Em suma, boa condição financeira é um dos fatores que pode facilitar a busca pela felicidade!

1.2. Conceitos Básicos de Matemática Financeira

Imagine que algum amigo ou familiar lhe aborde nessa data e lhe faça a seguinte proposta:

- Meu caro, me empreste R$ 10.000,00? Te devolvo os mesmos R$ 10.000,00 daqui a um ano!

Provavelmente, você achará essa proposta nada interessante. Por que você se disporia desse dinheiro em prol alheio?

Em primeiro lugar, sempre existe a hipótese de inadimplência, ou seja, de você "tomar o cano", como dizem por aí! Mesmo que a pessoa seja de absoluta confiança, coisas ruins acontecem...

Além disso, mesmo que a hipótese anterior seja descartada, há outros motivos para rejeitar a oferta. O dinheiro na sua mão é a porta para várias oportunidades. Por exemplo, sempre existem descontos numa compra à vista. Ou um grande negócio pode bater à sua porta, como um conhecido que precisa realizar uma cirurgia de urgência e para isso está vendendo um belo lote por um valor interessante.

Se mesmo assim você ainda não se convenceu, a afirmação a seguir é indiscutível: os dez mil reais de hoje não valerão dez mil reais daqui a 1 ano! Não que o valor absoluto mude, mas o poder de compra dessa quantia de dinheiro altera com o tempo conforme a inflação. Para confirmar essa afirmação, basta lembrar (ou perguntar quem se lembre) quantos pães você adquiria com 1 real há 15 anos e quantos pães você adquire com essa mesma quantia hoje...

Por todas as situações expostas e mais vários outros motivos que poderíamos elencar, uma coisa fica evidente: para se dispor de uma certa quantia financeira a favor de outrem, seria justo uma retribuição financeira para compensar o fato que o valor dinheiro muda com o tempo e que é desfavorável você abrir mão dele por um certo período. Essa compensação é o famoso juro! Se o seu interlocutor dissesse "Me empreste R$ 10.000,00? Te devolvo R$ 11.200,00 daqui a um ano!", provavelmente você já teria ouvidos para a ideia, já que receberia R$ 1.200,00 em um ano pela simples compensação do empréstimo dos R$ 10.000,00. Poderia lhe render uma bela viagem de fim de ano!

Do exemplo anterior, é possível extrair os principais elementos / conceitos básicos e variáveis do estudo de Matemática Financeira, já que todas as operações que abordaremos nessas notas praticamente se resumem a empréstimos: temos de um lado o **credor**, que é aquele que empresta o capital, e do outro lado o **devedor**, que é quem recebe o capital emprestado e que pagará os **Juros (J)**, que nada mais é do que o valor monetário pago pelo "aluguel" ou concessão momentânea do dinheiro por um **tempo (t)** ou período de capitalização, pré-definido ou não, referenciado em alguma unidade de tempo (dia, mês, semestre, ano, ...). Uma boa perspectiva financeira é tentar estar sempre do lado credor das operações!

Chamamos **Capital (C)** ou valor presente o valor monetário do empréstimo no momento de sua contratação ($t = 0$) e **Montante (M)** ou valor futuro o valor desse capital com a correção dos juros devidos, ou seja:

$$\boxed{\boldsymbol{M = C + J}}$$

Utilizando essas definições e simbologia para o caso do exemplo anterior, teríamos:

$$C = 10.000;$$

$$M = 11.200;$$

$$J = M - C = 11.200 - 10.000 = 1.200.$$

Outro importante conceito nas operações de empréstimo é a **Taxa de Juros (i)** (do inglês, *interest rate*), definida como a razão entre os juros auferidos em um empréstimo e o capital disponibilizado, ou seja:

$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{J}{C}}}$$

sendo essa taxa referenciada em uma certa unidade de tempo: ao mês, ao ano, ao bimestre, ao semestre, etc., e costumeiramente representada pelas siglas a.m., a.a., a.b., a.s., respectivamente, conforme o prazo de capitalização da dívida. No exemplo anterior, teríamos:

$$i = \frac{1.200}{10.000} \Rightarrow i = 12\%\ a.a.$$

A propósito, antes de dizer que essa taxa seria equivalente a 1% ao mês, saiba que isso dependerá do regime de capitalização envolvido, ou seja, se o juro adotado no empréstimo é simples ou composto. Então, nada de conclusões precipitadas, certo?

Exemplo: Alice se descontrolou financeiramente devido aos gastos de início de ano com material escolar, IPTU, seguro do carro, compras de Natal, etc. Para não ficar no vermelho, contraiu um empréstimo de R$ 3.000,00, a ser pago daqui a 6 meses, sujeito a uma taxa de juros de 12% ao semestre (12% a.s.). Calcule o montante da dívida ao final do período.

Solução: Nesse problema, temos dados o capital (valor inicial da dívida), a taxa de juros e o tempo de capitalização da dívida, esses dois últimos referenciados na mesma unidade de tempo (1 semestre). Assim, como $i = \frac{J}{C}$, temos $J = C \cdot i$ e então:

$$M = C + J = C + C \cdot i \Rightarrow$$

$$M = 3.000 + 3.000 \cdot 0{,}12 \Rightarrow$$

$$M = 3.000 + 360 = 3.360.$$

Sendo assim, Alice pagará R$ 3.360,00 ao final dos 6 meses. Observe um detalhe interessante que é um erro corriqueiro em avaliações dessa disciplina: $12\% = 0{,}12$. O uso do valor da taxa sem o percentual (ou seja, usar $i = 12$ na equação) produz erros grotescos. Verifique!

Exemplo: Bruno comprou uma televisão nova e por isso anunciou sua TV antiga num aplicativo de vendas de produtos usados por R$ 1.500,00. Carla visualizou o anúncio e constatou que a TV a atendia muito bem e estava em bom estado, porém não tinha todo o valor do produto. Enviou uma mensagem a Bruno para não perder a compra, sugerindo uma entrada e uma parcela depois de 2 meses. Este aceitou o acordo, mas embutiu juros na operação: ficou acertado uma entrada de R$ 1.000,00 e uma parcela de R$ 600,00 ao final dos dois meses. Determine a taxa de juros bimestral proposta por Bruno.

Solução: Muita atenção a esse tipo de problema. Apesar de envolver a compra de um produto, no fundo o que temos é uma relação de empréstimo: no frigir dos ovos, Bruno emprestou dinheiro para Carla ao permitir que ela levasse a TV naquela data e pagasse o restante após 2 meses. E o Capital do empréstimo foi de R$ 1.500,00? Não, pois Carla pagou R$ 1.000,00 no ato da compra, ou seja, à vista. Na verdade, ela pega R$ 500,00 emprestados de Bruno (capital) e devolve-o R$ 600,00 após 2 meses (montante).

$$M = C + J \Rightarrow J = M - C \Rightarrow$$

$$J = 600 - 500 = 100.$$

Então, Carla pagou R$ 100,00 de juros em R$ 500,00 tomados emprestados, isso num prazo de dois meses. Logo:

$$i = \frac{100}{500} = 0{,}2$$

ou 20% de taxa de juros bimestral (20% a.b.).

Atenção: nesse exemplo, que se parece muito com algumas relações de compra do nosso cotidiano, conseguimos visualizar como são exorbitantes as taxas de juros embutidas em compras parceladas de produtos. Faça o teste com alguns anúncios *on-line*!

Perceba que nos exemplos de empréstimos anteriores, o tempo e a taxa sempre estiveram referenciados na mesma unidade de tempo (tempo e taxa ao semestre, no caso do primeiro exemplo; tempo e taxa ao bimestre, no segundo exemplo). Caso o tempo e a taxa não estejam em mesma unidade, como num empréstimo pactuado por uma taxa mensal a ser quitado após um ano, teremos de conhecer qual foi o regime combinado para efetuar as nossas análises.

Quanto a esse regime de capitalização para uma operação financeira a uma taxa i % ao período durante n períodos, temos duas possibilidades:

- Juros Simples: a taxa de juros incide sempre no valor inicial (capital) da operação.

- Juros Compostos: a taxa de juros incide no montante acumulado do período anterior.

A partir de agora, abordaremos as relações de empréstimo acordadas pela cobrança de juros simples.

1.3. Caracterização do Regime de Juros Simples e Cálculo do Montante

Dizemos que o regime de capitalização de um empréstimo é simples quando a taxa de juros é sempre incidente sobre o capital da operação, enquanto durar esse empréstimo. Vamos ilustrar essa situação com um caso concreto: suponha que Davi tomou um empréstimo no valor de R$ 5.000,00 a juros simples, e a taxa de juros pactuada foi de 2% a.m. Isso significa que a cada mês que Davi permanecer com o dinheiro do empréstimo, ele pagará 2% sobre o capital a título de retribuição.

Nesse caso, passado 1 mês da data de contração do empréstimo, Davi terá sua dívida aumentada pelos juros referentes a um mês de empréstimo: $J = i \cdot C = 2\% \cdot 5.000 = 100$ reais. O novo montante da dívida será:

$$M_1 = C + J = 5.000 + 2\% \cdot 5.000 = 5.100$$

sendo M_1 a designação do montante da dívida após um mês de capitalização de juros.

Imagine agora que Davi tenha de permanecer com o dinheiro por mais um mês. Como dito anteriormente, sendo o sistema de juros simples, a taxa de juro incidirá novamente sobre o capital emprestado, ou seja, a dívida crescerá novamente $J = 2\% \cdot 5.000 = 100$ reais. Teremos

$$M_2 = M_1 + J = 5.100 + 2\% \cdot 5.000 = 5.200,$$

e é fácil concluir que esse padrão se manterá enquanto durar o empréstimo, ou seja, a dívida de Davi crescerá R$ 100,00 todo mês enquanto não houver a quitação total ou parcial do débito. A sequência dos juros é uma constante durante toda a operação: $(100; 100; 100; \dots)$.

Vamos generalizar o exemplo anterior para obtermos uma equação que forneça o montante de um empréstimo a juros simples em qualquer situação de empréstimo em taxas constantes. Suponha um empréstimo de um valor C arbitrário, pactuado a uma taxa $i\ a.p.$ (ou ao período, leia-se um padrão de tempo qualquer), que é capitalizado em n períodos (sendo que n está na mesma unidade de medida da taxa de juros).

Como sabemos, no caso de juros simples, a taxa incide sempre sobre o capital da operação. Então, o acréscimo no valor do montante é sempre o mesmo a cada unidade de capitalização, ou seja, $J = i \cdot C$ é o que se adiciona ao montante a cada período.

Após 1 período: $M_1 = C + J \Rightarrow M = C + i \cdot C$;

Após 2 períodos: $M_2 = C + J \Rightarrow M = C + 2 \cdot i \cdot C$;

Após 3 períodos: $M_3 = C + J \Rightarrow M = C + 3 \cdot i \cdot C$;

$$\vdots$$

Após n períodos: $M_n = C + J \Rightarrow M = C + n \cdot i \cdot C \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{M = C(1 + n \cdot i)}}$$

Essa é a equação que nos fornece o montante da dívida em juros simples após n períodos de capitalização.

Atenção: a equação anterior só pode ser utilizada se a taxa de juros e o tempo de capitalização n estiverem referenciados na mesma unidade. Caso não estejam, transforme as unidades de medida, preferencialmente do tempo para a unidade da taxa. Salvo se dito o contrário, adote o mês comercial de 30 dias e o ano comercial de 360 dias.

Exemplo: Emerson tomou emprestado o valor de R$ 25.000,00 para realizar reformas em sua residência. O regime de capitalização pactuado foi o de juros simples, a taxa de juros combinada foi de 2% a.m. e ele poderia manter o empréstimo pelo tempo que julgasse necessário. O valor foi quitado em uma única parcela após 1 ano e meio da tomada do empréstimo. Qual foi o montante pago por ele?

Solução: Nesse problema, conhecemos o valor do capital, a taxa de juros combinada e o tempo de capitalização. Porém, antes de recorrermos à equação, note que a unidade de medida da taxa e do tempo não são as mesmas. Devemos converter uma delas. O caminho mais fácil, em geral, é a conversão do tempo (essa afirmação ficará mais clara quando trabalharmos equivalência de taxas em juros compostos).

$$n = 1{,}5\ ano = 1{,}5 \cdot 12\ meses = 18\ meses.$$

Agora estamos prontos para efetuar os cálculos:

$$M = C(1 + n \cdot i) = 25.000(1 + 18 \cdot 0{,}02) \Rightarrow$$
$$M = 34.000.$$

Emerson pagou R$ 34.000,00 ao final dos 18 meses.

1.4. Juros Simples, Progressões Aritméticas e Funções Afins

Mídia digital: antes de iniciar os estudos desse tópico, vá até a sala virtual e assista a aula sobre as Progressões Aritméticas, ministrada pelo professor Tiago de Oliveira Dias, a fim de revisar esse conteúdo da Educação Básica.

Vamos retomar o caso do empréstimo feito por Davi, no valor de R$ 5.000,00 a juros simples, e a taxa de juros pactuada de 2% a.m. Como já dito, isso significa que a cada mês que Davi permanecer com o dinheiro do empréstimo, ele pagará 2% sobre o capital emprestado a título de retribuição. Como o valor do capital é fixo, teremos um acréscimo constante de R$ 100,00 no montante da dívida a cada mês.

Expressando os montantes da dívida contraída por Davi na forma de uma sequência matemática, a qual denominaremos D_n, teremos:

$$D_n = (5.000;\ 5.100;\ 5.200;\ 5.300, \dots),$$

em que $D_0 = 5000$ é o capital da operação. Essa é uma sequência numérica na qual cada termo é obtido pela soma do termo anterior com um valor constante, nesse caso os 100 reais dos juros acrescidos mensalmente. Esse raciocínio aplicado ao caso do Davi pode ser generalizado:

A sequência formada pelos montantes da dívida de um empréstimo a juros simples de um capital C a uma taxa i, tomada a períodos inteiros de capitalização, é uma Progressão Aritmética (PA) de primeiro termo C e de razão $J = i \cdot C$.

$$\boldsymbol{M_n = (C;\ C+J;\ C+2J;\ C+3J;\ldots;C+nJ,\ldots)}.$$

Isso significa que podemos utilizar as teorias de Progressões Aritméticas para resolver problemas de juros simples sem nenhum prejuízo de informações, desde que o problema trabalhe com tempos inteiros $(n = 1, n = 2, \ldots)$.

No caso do Davi, poderíamos questionar qual seria sua dívida após 25 meses de capitalização. Considerando-se a PA descrita anteriormente, e adequando-se os índices para que D_1 corresponda à dívida de Davi após 1 mês de capitalização (essa opção é feita para que a sequência se inicie do termo D_1, e não de D_0, e a fórmula seja a mesma apresentada na maioria dos livros didáticos), a sequência seria

$$D_n = (5.100, 5.200, 5.300, \ldots)$$

Vimos na videoaula revisional sobre as Progressões Aritméticas que o termo geral de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r é dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

Utilizando-se dessa equação, adequada à nomenclatura do nosso problema:

$$D_n = D_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow$$

$$D_{25} = 5100 + 24 \cdot 100 \Rightarrow$$

$$D_{25} = 7.500$$

ou seja, a dívida será de R$ 7.500,00 após 25 meses de empréstimo. O mesmo valor poderia ser obtido pela equação definida no tópico anterior, $M = C(1 + n \cdot i) = 5.000(1 + 25 \cdot 0{,}02) = 5.000(1{,}5) = 7.500$.

Imagine agora a seguinte situação: Fernando contrai um empréstimo de R$ 100.000,00 como capital de giro para sua empresa, a uma taxa de 15% a.a. em regime de juros simples. Após 21 meses de empréstimo, Fernando resolve quitar integralmente esse valor. Esse problema, ao contrário do anterior, não trabalha com o resgate da dívida em uma unidade inteira de tempo. Então, da forma como o problema foi apresentado, sem ajustes nas medidas, não podemos modelá-lo através de uma PA.

Porém, é fácil observar que o modelo discreto de uma PA pode ser convertido para um modelo contínuo, ou seja, um modelo em que que a variável tempo deixa de ser um número inteiro positivo para se tornar qualquer número real.

O termo geral de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r é dado $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, e o fato de termos $n \in \mathbb{N}$ torna o nosso modelo discreto. Porém, podemos observar que esta equação estabelece uma relação entre as variáveis n (ou tempo de operação t) e a_n (ou Montante da operação M), em que a segunda depende da primeira, ou é função da primeira. Reorganizando os termos dessa equação de forma conveniente, podemos obter:

$$\underbrace{a_n}_{variável} = \underbrace{r}_{constante} \cdot \underbrace{n}_{variável} + \underbrace{(a_1 - r)}_{Constante} \Rightarrow f(t) = a \cdot t + b,$$

em que a constante a (denominada o coeficiente angular) da função f é dada pela própria razão r da PA e a constante b (denominada coeficiente linear) da função f é dada pela diferença $a_1 - r$ da PA. Isso significa que toda PA pode ser vista como um modelo discreto de uma função afim, ou seja, uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a \cdot n + b$.

Em se tratando do nosso objeto de estudo, essas constantes são dadas pelos juros cobrados em um período e pelo capital do empréstimo. De fato,

$$M = C(1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{n}) \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{n} + \mathrm{C} \Rightarrow$$

$$M = J \cdot n + C.$$

A função equivalente é dada por

$$\boxed{\boldsymbol{f(t) = J \cdot t + C}}$$

e o problema do empréstimo de Fernando passa então a aceitar outra modelagem, através do uso da função afim equivalente. Como o resgate é feito após 21 meses de empréstimo, temos

$$n = \frac{21 meses}{12 \frac{meses}{ano}} = 1{,}75\ anos.$$

O juro cobrado a cada período é $J = C \cdot i = 100.000 \cdot 0{,}15 = 15.000$. A função que descreve o empréstimo é, então, dada por:

$$f(t) = 15.000 \cdot t + 100.000.$$

A seguir, temos um gráfico que representa o modelo contínuo dessa operação financeira:

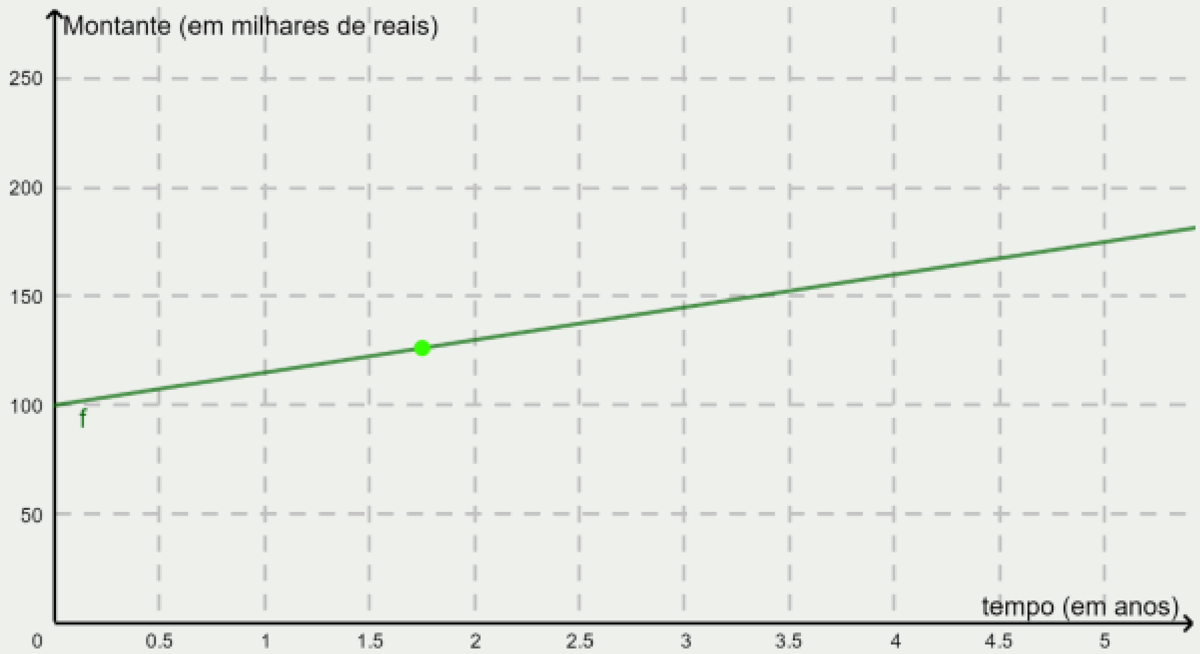

Figura 1 – Gráfico do modelo contínuo do empréstimo de Fernando.
Fonte: Elaborado pelos autores

O valor a ser pago por Fernando será

$$f(1{,}75) = 15.000 \cdot (1{,}75) + 100.000 = 126.250,$$

ou seja, R$ 126.250,00. Pelo gráfico representado na Figura 1, compreendemos por que alguns autores costumam se referir aos juros simples como juros lineares.

1.5. Equivalência de Taxas

No tópico anterior, afirmamos que nas resoluções de problemas de Matemática Financeira devemos sempre utilizar a mesma unidade de medida para a taxa de juros e o tempo do empréstimo (na verdade, a questão de padronização de medidas é algo bem maior, ligado ao princípio científico da Homogeneidade Dimensional, mas isso é outra história, de complexidade bem superior à nossa proposta).

Como já dissemos, em geral é mais simples convertemos a unidade do tempo. Mas em algumas situações, a conversão das taxas de juros é interessante para se estabelecer padrões comparativos. Por exemplo, se você tem noção das taxas de inflação e retorno de aplicações mensais e alguém te oferece uma proposta comercial baseada em uma taxa anual, seria interessante poder converter a taxa anual para mensal, pois isso facilitaria a comparação com seus valores de referência.

Dizemos que duas taxas i_1 e i_2, referenciadas a períodos diferentes, são equivalentes se, aplicadas ao mesmo Capital C durante o mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo Montante (M). Como visto, o regime de juros simples tem como base a noção de proporcionalidade, já que estruturalmente se assemelha a uma função afim (ou a uma PA se considerado seu modelo discreto). Desse modo, é fácil concluir que as taxas de juros são proporcionais ao tempo, ou:

$$\boldsymbol{i_{n\ períodos} = n \cdot i_{ao\ período}}$$

Por exemplo, uma taxa de 2% ao mês corresponde a

$$i_{12\ meses} = 12 \cdot i_{ao\ mês} \Rightarrow i_{ao\ ano} = 12 \cdot 2\% = 24\%$$

ou 24% ao ano; uma taxa de 6% ao semestre corresponde a 2% ao bimestre; uma taxa de 36% ao biênio corresponde a uma taxa de 6% ao quadrimestre; etc. Essa facilidade não se apresentará na etapa de juros compostos. Mas por enquanto, divirta-se convertendo taxas com o uso da boa e velha regra de 3!

Exemplo: Um atento consumidor verificou que a taxa de juros embutida em uma compra a ser paga após 3 meses era de 18%. Considerando uma análise de juros simples, determine as taxas bimestral e anual dessa compra

Solução: Utilizando-se o recuso da regra de três, temos:

$$\frac{18\%}{3\ meses} = \frac{x}{2\ meses} \Rightarrow 3x = 36\% \Rightarrow x = 12\%\ a.b.$$

Podemos utilizar o mesmo raciocínio para o cálculo da taxa anual. Como um ano contém 6 bimestres, podemos realizar:

$$\frac{12\%}{1\ bimestre} = \frac{y}{6\ bimestres} \Rightarrow y = 72\%\ a.a.$$

Mídia digital: antes de realizar a atividade avaliativa desse tópico, vá até a sala virtual e assista a uma videoaula sobre o tema do capítulo, ministrada pelo professor Wálmisson Régis de Almeida, a fim de revisar os conceitos aprendidos.

Atividade: para concluir a primeira semana de estudos, vá até a sala virtual e responda ao Questionário “Juros Simples”. Esse teste será composto de 5 perguntas de múltipla escolha, que se baseiam nos temas estudados nesse capítulo. Não se esqueça de deixar a calculadora a postos para executar as operações e de estudar os pontos principais do capítulo antes de abrir o questionário.

Parabéns, você acaba de concluir a primeira semana de estudos. Faça a leitura (ou releitura) de tudo que lhe foi sugerido, assista aos vídeos propostos e busque novas fontes de informação para que haja assimilação dos conteúdos ensinados. Como já afirmamos, este e-book não representa a completude dos conceitos apresentados, então há muito mais a se descobrir e reforçar sobre o tema. Após essa releitura, descanse um pouco a mente com atividades que lhe sejam prazerosas e prepare-se para as descobertas do próximo capítulo.

Encontramo-nos na próxima semana.

Bons estudos!

Semana 2 – Juros Compostos

Objetivos
Nessa semana, você aprenderá o que caracteriza o sistema de juros compostos; como efetuar cálculos de montante e equivalência de taxas nesse contexto; e a relação entre esse regime de capitalização, as progressões geométricas e as funções exponenciais.

2.1 Caracterização do Regime de Juros Compostos e Cálculo do Montante

Dizemos que um empréstimo é efetuado no regime de capitalização composta quando a taxa de juros pactuada incide sobre o montante acumulado da dívida a cada período, e não sobre o capital da operação.

Na prática, como a taxa de juros incidirá em montantes da dívida cada vez maiores, os juros incorporados a cada período formam uma sequência crescente. Talvez por isso esse regime seja o adotado na maioria absoluta das operações de empréstimo e crédito do mercado financeiro. Isso faz lembrar a fala de um velho conhecido: “A primeira regra do mercado financeiro é: os bancos nunca perdem!”.

Vamos ilustrar uma situação de empréstimo a juros compostos: aproveitando o crescimento de sua empresa de transporte de produtos, fruto do crescimento das compras on-line provocada pelo isolamento social imposto por uma pandemia, George resolveu adquirir mais um caminhão para a sua frota. Nesse interim, toma emprestado o valor de R$ 50.000,00 a uma taxa de juros compostos fixa de 1,5% a.m. para efetuar a compra. A dívida será paga após 2 anos, sem nenhuma quitação parcial desse débito no decorrer desse tempo.

Após um mês do empréstimo, teremos:

$$M_1 = C + J_1 = C + i \cdot C = 50.000 + 0{,}015 \cdot 50.000 = 50.750$$

ou seja, sua dívida passa a ser de R$ 50.750,00 com o acréscimo de R$ 750,00 de juros nesse primeiro mês. Após dois meses do empréstimo:

$$M_2 = M_1 + J_2 = M_1 + i \cdot M_1 = 50.750 + 0{,}015 \cdot 50.750 = 50.750 + 761{,}25 = 51.511{,}25$$

e sua dívida já saltou para R$ 51.511,25, com um acréscimo de R$ 761,25 graças ao juro do segundo mês. Perceba que, ao contrário da análise de caso dos juros simples, estamos estabelecendo subíndices para os juros a cada mês, justamente pois esses não são constantes. Ao final do terceiro mês de empréstimo, teremos:

$$M_3 = M_2 + J_3 = 51.511{,}25 + 0{,}015 \cdot 51.511{,}25 = 51.511{,}25 + 772{,}67 = 52.283{,}92$$

e o juro acrescido nesse mês foi de R$ 772,67. Repare que adotaremos como padrão a prática de arredondar os valores para a casa dos centavos.

Confirmando nossa expectativa, os juros cobrados mês a mês formam uma sequência crescente de valores: $(750;\ 761{,}25; 772{,}67; \dots)$. Mas qual comportamento não-linear é esse apresentado pela sequência de juros? Teremos a resposta a essa pergunta em momento oportuno. O importante no momento é entender que o modelo é não-linear.

Como a dívida foi pactuada para pagamento ao final de dois anos, seria matematicamente elegante continuarmos a análise anterior, mês a mês, até completar os 24 meses? Claro que não! Certamente, existe uma forma de se modelar o problema de forma genérica para obtermos uma equação do montante a qualquer tempo. Vamos proceder à sua dedução.

Considere uma operação financeira em regime de juros compostos genérica, de capital C e combinada a uma taxa fixa de juros i, capitalizada em n períodos. Seguindo a mesma lógica adotada no exemplo do empréstimo de George, considerando os subíndices para representar o número do período de cada montante e juros da operação, teremos:

$\boldsymbol{n}$	**Montante acumulado da dívida**
1	$M_1 = C + J_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$
2	$M_2 = M_1 + J_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3	$M_3 = M_2 + J_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$M_n = M_{n-1} + J_n = M_{n-1} + i \cdot M_{n-1} = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1}(1+i) = C(1+i)^n$

Tabela 1 – Cálculo do montante em regime de juro composto.
Fonte: Elaborado pelos autores

Observe na Tabela 1 que o padrão observado na operação é justamente a multiplicação da dívida inicial pelo fator $(1+i)$ a cada período de aplicação da taxa. Essa constatação será importante para a definição do modelo matemático que rege o sistema de juros compostos, apresentado a seguir.

A última linha da tabela nos fornece a equação do montante em juros compostos:

$$\boldsymbol{M = C(1+i)^n}$$

modelo que podemos utilizar para determinar o pagamento feito por George ao final dos 2 anos sem precisar passar por todas as capitalizações até lá! Lembrando que devemos utilizar taxa e tempo na mesma unidade, temos:

$$M_{24} = 50.000(1+0{,}015)^{24} = 71.475{,}14$$

e o valor de R$ 71.475,14 será desembolsado por George ao final do empréstimo. Espero de coração que ele tenha lucrado bastante com suas entregas e que o investimento tenha valido a pena!

Exemplo: Aproveitando-se da superoferta de crédito fácil, Humberto adquiriu um novo celular (o seu “velho” ainda atendia muito bem, mas vocês sabem como é o brasileiro, não consegue ver um lançamento...) atraído por uma daquelas armadilhas do “compre agora e pague depois”. O celular era anunciado por R$ 800,00, podendo ser pago à vista com 10% de desconto ou após 3 meses, pela bagatela de R$ 1.200,00. Humberto optou pela compra em três meses. Calcule qual é a taxa mensal de juros embutida na compra a prazo.

Solução: Devemos ter muito cuidado com esse tipo de problema. Há uma grande tendência de se acreditar que o capital do empréstimo foi de 800 reais. Mas a mentira está no fato que o celular nunca custou R$ 800,00, já que existe um desconto à vista na oferta. Sendo esse desconto de 10%, isso significa que o preço efetivo do produto comprado nessa modalidade é 90% do preço anunciado, ou seja:

$$C = 90\% \cdot 800 = 720,$$

ou seja, o capital do empréstimo é de 720 reais. Sendo assim, temos

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow 1.200 = 720(1+i)^3 \Rightarrow \frac{1200}{720} = (1+i)^3.$$

e elevando-se os dois lados da equação a $1/3$, eliminamos o expoente:

$$\left(\frac{1200}{720}\right)^{\frac{1}{3}} = [(1+i)^3]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 1{,}1856311 = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}1856311,$$

ou seja, o consumidor paga uma taxa aproximada de 18,56% a.m., um absurdo em uma economia com taxas de inflação estabilizadas em valores baixos.

Dica do Professor: Leia a reportagem sobre a superoferta de crédito, política que mal conduzida pode levar a grandes problemas econômicos. A reportagem é de 2012, e sabemos o que veio depois... (*download*).

2.2 Juros Compostos, Progressões Geométricas e Funções Exponenciais

Mídia digital: antes de iniciar os estudos desse tópico, vá até a sala virtual e assista a aula sobre as Progressões Geométricas, ministrada pelo professor Tiago de Oliveira Dias, a fim de revisar esse conteúdo da Educação Básica.

Vamos analisar matematicamente o modelo apresentado pelo crescimento dos montantes da dívida do empréstimo efetuado por George no tópico anterior. A sequência formada pelos montantes desse empréstimo mês a mês, que chamaremos G_n, é

$$G_n = (50.000; 50.750; 51.511{,}25; 52.283{,}92; \dots).$$

O padrão de crescimento dessa sequência não é tão óbvio quanto o caso da sequência D_n, do empréstimo do Davi, analisada no primeiro capítulo. Porém, um leitor diligente deve ter se atentado ao fator $(1 + i)$ apresentado na dedução da equação do cálculo do montante de juros compostos. É justamente esse fator que transforma os termos dessa sequência: observe que se dividirmos os termos G_2 por G_1, G_3 por G_2 e G_4 por G_3:

$$\frac{50.750}{50.000}; \frac{51.511{,}25}{50.750}; \frac{52.283{,}92}{51.511{,}25}$$

obteremos sempre o mesmo valor de 1,015 (lembre-se que os valores estão arredondados). E o que esse valor representa? Justamente $1 + 0{,}015$, ou seja, um inteiro mais a taxa de juros da operação, dada como $1{,}5\%$. Coincidência? Claro que não. Esse modelo discreto dos montantes a cada tempo inteiro de empréstimo a juros compostos é justamente o que aprendemos na Educação Básica como Progressão Geométrica (ou PG), sequência na qual cada termo é obtido pelo produto do termo anterior por um fator constante, chamado razão da PG.

A sequência formada pelos montantes da dívida de um empréstimo a juros compostos de um capital C a uma taxa i, tomada a períodos inteiros de capitalização, é uma Progressão Geométrica (PG) de primeiro termo C e de razão $(1+i)$.

$$\boldsymbol{M_n = (C;\ C(1+i);\ C(1+i)^2; C(1+i)^3; \ldots; C(1+i)^n, \ldots)}$$

Isso significa que podemos utilizar as teorias de Progressões Geométricas para resolver problemas de Juros Compostos sem nenhum prejuízo de informações, desde o problema trabalhe com tempos inteiros $(n = 1, n = 2, \ldots)$. Vamos analisar o problema do empréstimo de George para comprar seu caminhão nessa nova ótica, ajustando o primeiro termo da sequência para que G_1 corresponda à dívida após um mês do empréstimo, e assim consecutivamente:

$$G_n = (50.750; 51.511{,}25; 52.283{,}92; \ldots)$$

Sabemos que a expressão do termo geral de uma Progressão Geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é dado por:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Adequando a expressão ao nosso problema, teremos

$$G_n = G_1(1+i)^{n-1} \Rightarrow G_{24} = 50.750 \cdot (1+0{,}015)^{24-1} \Rightarrow$$
$$G_{24} = 50.750 \cdot (1{,}015)^{23} = 71.475{,}14.$$

De modo semelhante ao descrito nas relações entre juros simples, progressões aritméticas e funções afins, é natural imaginar que deve existir uma modelagem na forma de função que realize a passagem do modelo discreto descrito pela PG para um modelo contínuo, com o tempo expresso como variável real, para que possamos imaginar o cálculo do montante para tempos não inteiros.

Observe a equação do montante dos juros compostos:

$$M = C(1+i)^n.$$

A fórmula anterior é equivalente ao que a literatura costuma tratar genericamente como “modelo exponencial clássico", já que a variável se encontra no expoente, ou seja,

$$M = C(1+i)^n \text{ é } da\ forma\ f(t) = K \cdot a^t,$$

sendo t o tempo de capitalização do empréstimo, agora considerado variável real ($t \in \mathbb{R}$), sendo K o chamado valor inicial desse modelo, no nosso caso o capital C da operação de empréstimo e $(1+i)$ representando a base da função exponencial, ou seja, nesses novos parâmetros:

$$\boxed{\boldsymbol{f(t) = C(1+i)^t}}$$

Por esse motivo, os juros compostos são também chamados de juros exponenciais (ou uma forma muito corriqueira entre o público leigo, "juros sobre juros"). Fácil também perceber que esse modelo corresponde a uma PG se tomarmos o caso discreto, ou seja, considerando apenas $n \in \mathbb{N}$.

Infelizmente, enquanto escrevemos as páginas dessas notas de aula, estamos vivendo um momento em que os modelos de PG e Funções Exponenciais estão em evidência, justamente por ser o modelo ideal para analisar o crescimento de infectados em uma pandemia, como a de Covid-19, conhecida a sua taxa de contágio...

Exemplo: Após o apelo sentimental de seu neto, afundado em dívidas, Dona Ioná resolve tomar um empréstimo pessoal para ajudá-lo nas negociações com o Serasa[1]. A operação foi combinada a uma taxa de 40% ao semestre em juros compostos, a ser quitada em uma única parcela de R$ 15.680,00 após 12 meses. Porém, após 8 meses da tomada do empréstimo, Dona Ioná procura o banco para quitar integralmente o débito. Qual é o valor devido por ela para pagamento nessa data, mantidas as condições combinadas inicialmente?

Solução: Vamos abordar esse problema com o uso da modelagem exponencial apresentada nesse tópico. Conforme vimos anteriormente, precisamos do capital do empréstimo para tal análise. E como obtê-lo? Simples, temos o montante após 12 meses e a taxa da operação:

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow 15.680 = C(1{,}40)^2 \Rightarrow C = \frac{15.680}{1{,}40^2} = 8.000{,}00$$

---

[1] Empresa brasileira criada há mais de 45 anos, que faz parte do Grupo Experian desde 2007. Ela foi criada em 1968 para padronizar formulários e dar rapidez nas decisões bancárias e controle ao sistema financeiro. Atualmente, a empresa possui indicadores econômicos que são referência tanto para o comércio e a indústria, como para o setor de serviços.
Extraído de https://www.serasa.com.br/ensina/seu-nome-limpo/como-serasa-funciona/. Acesso em: 31 ago. 2020.

ou seja, um empréstimo de R$ 8.000,00. Note que temos o expoente 2 na equação pois 12 meses são 2 semestres, unidade de tempo da taxa de juros. O modelo exponencial relativo a esse empréstimo será

$$f(t) = C \cdot (1+i)^t = 8.000(1{,}4)^t$$

e o expoente é dado pelo tempo da operação em semestres, ou seja,

$$t = \frac{8\,meses}{6\,\frac{meses}{semestre}} = \frac{4}{3}\,semestres.$$

Então,

$$f(t) = 8.000(1{,}4)^{\frac{4}{3}} = 12.529{,}31$$

e o valor devido por Dona Ioná é de R$ 12.529,31.

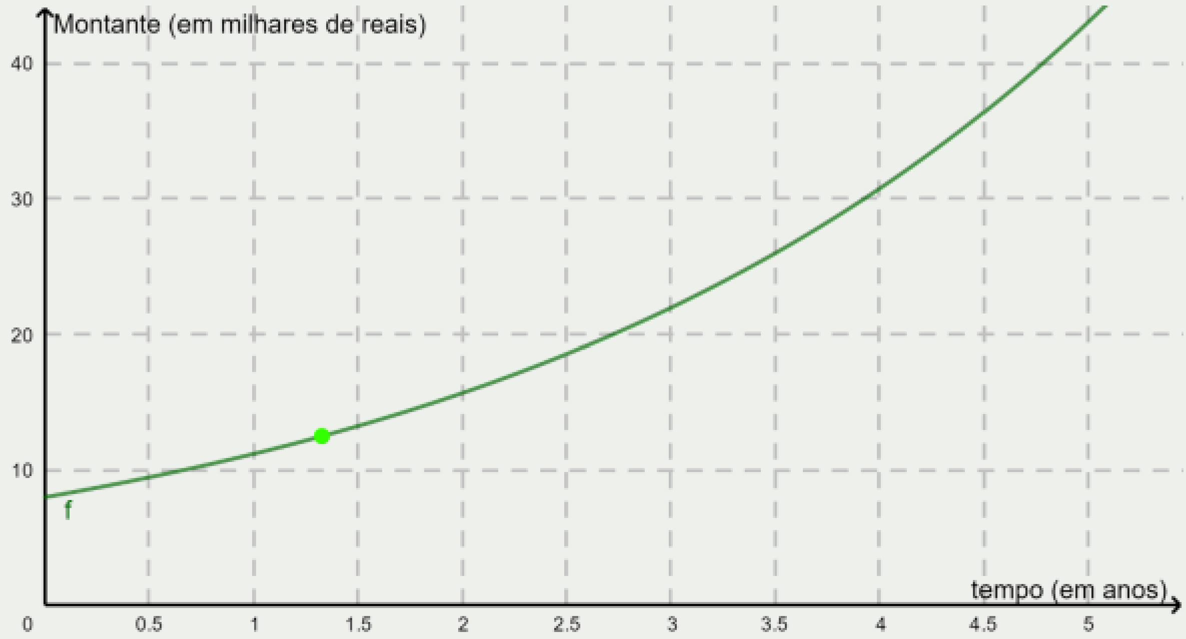

Figura 2 – Gráfico do modelo contínuo do empréstimo de Dona Ioná.
Fonte: Elaborado pelos autores

2.3 Equivalência de Taxas

Como já abordado no Capítulo 1, duas taxas i_1 e i_2 referenciadas a períodos diferentes são equivalentes se, aplicadas ao mesmo Capital C durante o mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo Montante (M). No caso dos juros compostos, não existe proporção entre as taxas, ou seja, não podemos usar regra de 3 para convertê-las. O processo é um pouco mais complexo. Vamos ilustrar a fórmula de conversão através um exemplo aplicado: como seria a conversão de uma taxa de 2% ao mês para o seu valor anual?

Segundo a definição, duas taxas são equivalentes de produzirem o mesmo montante quando aplicadas sobre o mesmo capital C. Assim, podemos concluir que

$$M_{taxa\ anual} = M_{taxa\ mensal} \Rightarrow$$
$$C(1 + i_{a.a.})^{n\ em\ anos} = C(1 + 2\%)^{n\ em\ meses} \Rightarrow$$
$$1 + i_{a.a.} = (1{,}02)^{12} \Rightarrow$$
$$i_{a.a.} = 26{,}824179$$

ou seja, 2% ao mês produzem uma taxa acumulada próxima de 26,82% ao ano. Não esperava que fosse 24%, certo? Aqui não existe mais proporção.

Seguindo-se a mesma lógica adotada no exemplo anterior, podemos afirmar que:

$$\boxed{\mathbf{1 + i_{n\ períodos} = \left(1 + i_{ao\ período}\right)^{n}}}$$

e que o segredo dessas conversões é saber quantas vezes o período de uma taxa "cabe" dentro do outro, que é a concepção do valor do expoente n na equação.

Exemplo: Determine a taxa mensal equivalente a uma taxa semestral de 30%.

Solução: Nesse problema, teremos que analisar uma taxa mensal que, capitalizada a juros compostos, resultem em 30% após um semestre (ou seja, a taxa capitalizada após 6 períodos). Só a título de ilustração e como padrão de comparação, se dividirmos a taxa por 6, como se faz em caso de juros simples, teríamos 5% a.m. Isso significa que o resultado desse problema deve ser inferior aos 5%, já que há incidência de juros sobre juros. Temos:

$$1 + i_{a.s.} = (1 + i_{a.m.})^6 \Rightarrow 1 + 0{,}3 = (1 + i_{a.m.})^6 \ \Rightarrow$$

$$(1{,}3)^{\frac{1}{6}} = [(1 + i_{a.m.})^6]^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 1{,}04469751 = 1 + i_{a.m.} \Rightarrow i_{a.m.} = 0{,}04469751,$$

ou seja, a taxa é de aproximadamente 4,47% ao mês, inferior aos 5%, como já era esperado.

Exemplo: Determine a taxa anual equivalente a uma taxa trimestral de 3%.

Solução: Primeiramente é importante determinar o n da equação. É fácil notar que:

$$\frac{1\ ano}{1\ trimestre} = \frac{12\ meses}{3\ meses} = 4,$$

e assim, podemos afirmar que

$$1 + i_{a.a.} = (1 + i_{a.t.})^4 \Rightarrow 1 + i_{a.a} = (1 + 0{,}03)^4 \ \Rightarrow$$
$$i_{a.a} = 1{,}12550881 - 1 \Rightarrow i_{a.a.} = 0{,}12550881,$$

ou aproximadamente uma taxa de 12,55% ao ano, valor superior ao que seria obtido se simplesmente tomássemos 4 vezes a taxa trimestral, como seria em juros simples.

2.4 Taxas Variáveis e Taxas Médias

No estudo que efetuamos até o momento sobre juros compostos, consideramos sempre situações em que as taxas de juros são constantes. Porém, existem muitos contextos no nosso dia a dia nos quais as operações financeiras (seja você o credor ou o devedor) possuem taxas variáveis, como por exemplo, as aplicações em fundos de investimento que envolvem taxas que não são prefixadas, ou compras de ações, ou reajustes de contratos por indexadores[2], como IPCA, CDI, Selic ou IGP-M no caso de aluguéis.

Certamente você observou que, no caso de taxas fixas, o montante da dívida em juros compostos é multiplicado pelo famoso fator $(1 + i)$ a cada período inteiro de

[2] Os indexadores são taxas de reajuste utilizadas na política econômica. Eles têm como finalidade acompanhar a atividade econômica, corrigir preços e evitar volatilidade. Nos investimentos em renda fixa, por exemplo, o indexador mais comum está atrelado à taxa Selic, que representa a taxa de juros básicos do país.
Extraído de https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/glossario-o-que-voce-quer-saber-de-economia. Acesso em: 01 set. 2020.

capitalização, gerando o fator $(1+i)^n$ aplicado ao capital da dívida, o que acabou por evidenciar o caráter exponencial da operação.

Considere agora uma situação em que a taxa de juros é variável. Assumindo os valores $i_1, i_2, \cdots, i_n$ respectivamente em n períodos de capitalização, o montante acumulado após essas n capitalizações será dado, analogamente, por:

$$\boldsymbol{M_n = C(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)}$$

e a taxa média da operação, ou seja, uma taxa que mantida constante geraria o mesmo montante ao final desse período é dada por

$$\boldsymbol{(1+i_{média})^n = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n)}$$

fórmula essa construída seguindo-se a mesma ideia utilizada na dedução da fórmula de equivalência de taxas.

Dica do Professor: O IGP-M é um indicador muito importante para a nossa economia e para diversos setores, como o de imóveis. A sigla quer dizer Índice Geral de Preços do Mercado, e é calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). Ao final de cada ciclo de 30 dias, eles divulgam o resultado e o mercado se baseia nele para a tomada de diversas decisões. Entre outras coisas, esse é o índice de referência usado para fazer os reajustes de aumento da energia elétrica e dos contratos de aluguel atualmente. O seu cálculo é feito levando em conta uma série de fatores e variáveis, que vão desde matérias-primas agrícolas até os produtos que são consumidos pelo comprador final na cidade grande (*download*).

Exemplo: Um inquilino assinou um contrato de locação de imóvel em 01/01/2010, e nesse contrato consta que o valor do seu aluguel será reajustado anualmente, segundo o IGP-M acumulado no período. O valor do aluguel inicialmente contratado foi de R$ 1.200,00. A tabela abaixo mostra o IGP-M acumulado nos anos de 2010, 2011 e 2012 (os valores abaixo são hipotéticos, não correspondendo aos valores reais desse indicador no período citado):

Período	IGP-M Acumulado
01/01/2010 a 31/12/2010	+ 5,25%
01/01/2011 a 31/12/2011	- 8%
01/01/2012 a 31/12/2012	+ 2,75%

Tabela 2 – Valores fictícios do IGP-M para o problema
Fonte: Elaborado pelos autores

Determine o valor do aluguel desse inquilino em 01/01/2013 e calcule a taxa média anual do IGP-M, considerando esses 3 anos de vigência do contrato.

Solução: Um erro muito comum na abordagem desse problema seria o de se efetuar a soma algébrica das taxas, apropriadamente criadas para se gerar uma soma nula: 5,25% - 8% + 2,75% = 0%, e o aluguel seria o mesmo do início de 2010. Mas a situação não pode ser tratada dessa maneira, e sim da seguinte forma:

$$M_3 = C(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) = 1.200(1+0{,}0525)\big(1+(-0{,}08)\big)(1+0{,}0275) \Rightarrow$$

$$M_3 = 1.200(1{,}0525)(0{,}92)(1{,}0275) \Rightarrow$$

$$M_3 = 1.200(1{,}0525)(0{,}92)(1{,}0275) = 1.193{,}91$$

e o valor do aluguel após essas três correções seria de R$ 1.193,91. Repare que esse problema traz uma situação de taxa negativa, que é muito comum acontecer com taxas de rendimento em aplicações de risco, como ações. A taxa média do IGP-M nesses três anos pode ser determinada da seguinte forma:

$$(1+i_{média})^3 = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) \Rightarrow$$

$$(1+i_{média})^3 = (1+0{,}0525)\big(1+(-0{,}08)\big)(1+0{,}0275) \Rightarrow$$

$$(1+i_{média})^3 = 0{,}99492825 \Rightarrow$$

$$i_{média} = 0{,}998306551 - 1 = -0{,}001693449$$

ou aproximadamente $i_{média} = -0{,}17\ \%$ ao ano. Como esperado, a taxa média foi negativa no período apresentado, pois o aluguel ao final dos três anos foi menor que o aluguel inicial.

Mídia digital: antes de realizar a atividade avaliativa desse tópico, vá até a sala virtual e assista a uma videoaula sobre o tema do capítulo, ministrada pelo professor Wálmisson Régis de Almeida, a fim de revisar os conceitos aprendidos.

Atividade: para concluir a segunda semana de estudos, vá até a sala virtual e responda ao Questionário “Juros Compostos”. Esse teste será composto de 5 perguntas de múltipla escolha, que se baseiam nos temas estudados nesse capítulo. Não se esqueça de deixar a calculadora a postos para executar as operações e de estudar os pontos principais do capítulo antes de abrir o questionário.

Parabéns, você acaba de concluir a segunda semana de estudos. Faça a leitura (ou releitura) de tudo que lhe foi sugerido, assista aos vídeos propostos e busque novas fontes de informação para que haja assimilação dos conteúdos ensinados. Reiteramos que este e-book não representa a completude dos conceitos apresentados, então há muito mais a se descobrir e reforçar sobre o tema. Após essa releitura, descanse um pouco a mente com atividades que lhe sejam prazerosas e prepare-se para as descobertas do próximo capítulo.

Encontramo-nos na próxima semana.

Bons estudos!

Objetivos
Nessa semana, você aprenderá os conceitos básicos sobre amortização; o sistema de amortização constante – SAC; o sistema de prestações constantes – SPC ou PRICE; e como montar as suas próprias planilhas de amortização.

3.1 Conceitos Básicos sobre Amortização de Débitos

Nesse último capítulo do nosso curso, falaremos de algo bastante comum em nossas vidas: as compras (ou empréstimos) a prazo com parcelas periódicas. Vemos esse tipo de operação em situações amplas, desde a compra de uma geladeira nova em 12 vezes até o financiamento da compra da casa própria em 30 anos.

Esse formato de pagamento de dívidas, em geral de longo prazo, no qual cada um dos pagamentos realizados traz em si uma parte como amortização do débito, na perspectiva de extinção da dívida, e a outra parte como pagamento de juros ao credor, é o que chamamos de sistema de amortização.

Existe uma multiplicidade de sistemas distintos de amortização de débitos, ou seja, existem várias metodologias possíveis para se extinguir os financiamentos. Uma breve consulta a bibliografias especializadas no tema confirmaria tal afirmação. Porém, existem várias definições e práticas comuns a todos esses sistemas.

Além disso, a grande maioria das relações de empréstimo no Brasil são amortizadas segundo dois sistemas: o Sistema de Amortizações Constantes (SAC), muito utilizado em financiamentos habitacionais, ou seja, de longo prazo, e o Sistema de Prestações Constantes (SPC, ou Sistema de Amortização Francês, ou Sistema PRICE) muito comum em compras parceladas de bens móveis, eletrodomésticos, eletrônicos e empréstimos pessoais.

O objetivo desse material é que você crie familiaridade com os aspectos comuns desses sistemas, para que você consiga analisar qualquer proposta que lhe apareça nesse sentido, e que além disso saiba construir as planilhas SAC e SPC no seu próprio computador, com a ajuda de programas simples de planilha, como o EXCEL™ [3].

Como já dito, algumas definições e relações são comuns a todos os sistemas. Vamos abordá-las inicialmente, indicando a nomenclatura que será utilizada na sequência.

---

[3] O Microsoft Excel é um editor de planilhas (Folhas de Cálculo) produzido pela Microsoft para computadores que utilizam o sistema operacional Microsoft Windows, além de computadores Macintosh da Apple Inc. e dispositivos móveis como o Windows Phone, Android ou o iOS.
Extraído de https://pt.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Excel. Acesso em: 31 ago. 2020

Saldo Devedor (SD_n): é o valor devido pelo devedor após n períodos da contração do empréstimo, imediatamente após a realização do pagamento da prestação relativa a este período.

Juros (J): é o custo ou retorno do capital, ou seja, o pagamento efetuado pela concessão do empréstimo sob o aspecto do devedor e o retorno do capital investido sob o aspecto do credor.

Taxa de Juro (i): valor percentual da taxa de retorno do empréstimo, combinado entre o credor e o devedor no momento da contratação ou atrelado a algum indexador. Consideraremos na nossa análise que a taxa é sempre prefixada.

Amortização (A): quantia destinada ao pagamento (ou amortização) do capital emprestado, ou seja, do saldo devedor, feito normalmente de forma periódica e sucessiva durante o prazo de financiamento.

Prestação (P): pagamento periódico efetuado pelo devedor ao credor, sendo sempre composto da amortização do débito somada aos juros relativos ao saldo devedor imediatamente anterior ao período referente à prestação.

Note que existe uma diferença significativa nos conceitos amortização e prestação. Chamamos de prestação o valor do pagamento periódico efetuado pelo devedor, geralmente mensal. A amortização refere-se a uma parte dessa prestação que efetivamente é descontada ou abatida do saldo devedor do empréstimo, ou seja:

$$\boxed{P = A + J}$$

Outras características comuns dos sistemas de amortização são o fato da taxa de juros sempre incidir sobre o montante da dívida do período anterior, ou seja:

$$\boxed{J_k = i \cdot SD_{k-1} \;, com \; 1 \leq k \leq n}$$

e que o saldo da dívida de cada período é calculado pela diferença do saldo devedor do período anterior pela amortização da prestação paga naquele tempo, ou seja

$$\boxed{SD_k = SD_{k-1} - A_k, , com \; 1 \leq k \leq n.}$$

A seguir, vamos apresentar a construção das planilhas de amortização via SAC e SPC. Devemos saber calcular a cada etapa da planilha o saldo devedor, a prestação, a amortização e os juros daquela etapa.

Quando as teorias desse curso se transportarem para situações reais, é comum surgirem outras abas na planilha, como "seguro", "IOF – Imposto sobre Operações Financeiras" (que encontra-se em vias de possível extinção caso seja aprovada a Reforma Tributária, mas tenham certeza que entra outra em seu lugar...), e outros penduricalhos que os credores, digamos, enfiam nos contratos. Aquelas famosas letras miúdas. Como sempre desabafou um grande amigo, "nada é de graça"!

3.2 Sistema de Amortização Constante - SAC

Os dois sistemas que estudaremos tem nomes 100% sugestivos. Falaremos nesse tópico do Sistema de Amortizações Constantes, ou seja, a sua principal característica é apresentar... amortizações constantes, *uai* (no bom mineirês).

Essa amortização é obtida pela divisão do saldo inicial da dívida pelo número de parcelas combinadas para a quitação total do débito, ou seja:

$$\boldsymbol{A = \frac{SD_0}{n}}$$

em que o subíndice 0 indica justamente o saldo devedor inicial, sem nenhuma amortização da dívida $(t = 0)$.

A partir do momento em que a amortização é determinada, o restante da construção da tabela é trivial, pois basta lembrarmos que:

- a taxa de juros incide sobre o saldo devedor do período anterior;

- a prestação é a soma da amortização com os juros.

Vamos ilustrar o tema com um exemplo que envolva poucas parcelas, para que não fique repetitivo e exaustivo:

Exemplo: Joana, cansada da falta de reconhecimento e de possibilidade de crescimento em sua profissão, efetua um empréstimo no valor de R$ 30.000,00 para abrir uma franquia em sua cidade. Ela combina com o credor quitar o empréstimo em 5 pagamentos anuais, a uma taxa de juros de 10% a.a. Monte a planilha de amortização desse empréstimo, sabendo que o sistema combinado foi o SAC.

Solução: Primeiramente, vamos determinar a amortização constante que Joana pagará ao final de cada ano, contado da data inicial do empréstimo. Como temos $SD_0 = 30.000$ e $n = 5$:

$$A = \frac{30.000}{5} = 6.000,$$

ou seja, Joana pagará R$ 6.000,00 ao final de cada ano, certo?

Errado, esse é o valor da amortização. Em cada prestação existe uma fração embutida de juros. Estava bom demais para ser verdade... Os juros pagos da primeira prestação ($k = 1$) dependem do saldo devedor inicial, ou seja, do tempo $t = 0$:

$$J_1 = i \cdot SD_0 = 0{,}1 \cdot 30.000 = 3.000$$

e a primeira prestação do seu financiamento será

$$P_1 = A + J_1 = 6.000 + 3.000 = 9.000,$$

ou seja, de R$ 9.000,00. Note que não utilizamos o subindice 1 na amortização, já que ela é constante, ou seja, sempre o mesmo valor para todas as parcelas. Isso significa que ao final do primeiro ano Joana paga R$ 9.000,00 e fica devendo R$ 21.000,00 para o credor, certo?

Errado de novo. Como já dito, apesar da moça pagar R$ 9.000,00, apenas R$ 6.000,00 são utilizados para se amortizar a dívida, ou seja, Joana ainda deve

$$SD_1 = SD_0 - A = 30.000 - 6000 = 24.000.$$

e agora determinaremos a etapa $k = 2$. Calculando-se os juros dessa etapa, obtemos:

$$J_2 = i \cdot SD_1 = 0{,}1 \cdot 24.000 = 2.400.$$

Enfim uma boa notícia. A sequência de juros é decrescente, já que sua dívida com o credor diminui a cada prestação paga. A segunda parcela então será

$$P_2 = A + J_2 = 6.000 + 2.400 = 8.400$$

e o novo saldo da dívida será

$$SD_2 = SD_1 - A = 24.000 - 6000 = 18.000.$$

Nessa altura, você já consegue finalizar sua tabela sem muitas explicações, simplesmente seguindo os passos anteriores.

Para $k = 3$:

$$J_3 = i \cdot SD_2 = 0{,}1 \cdot 18.000 = 1.800;$$

$$P_3 = A + J_3 = 6.000 + 1.800 = 7.800;$$

$$SD_3 = SD_2 - A = 18.000 - 6000 = 12.000.$$

Para $k = 4$:

$$J_4 = i \cdot SD_3 = 0{,}1 \cdot 12.000 = 1.200;$$

$$P_4 = A + J_4 = 6.000 + 1.200 = 7.200;$$

$$SD_4 = SD_3 - A = 12.000 - 6000 = 6.000.$$

Para $k = 5$:

$$J_5 = i \cdot SD_4 = 0{,}1 \cdot 6.000 = 600;$$

$$P_5 = A + J_5 = 6.000 + 600 = 6.600;$$

$$SD_5 = SD_4 - A = 6.000 - 6000 = 0.$$

Como esperado, o saldo da dívida se anula após as 5 parcelas, como deve ser! Assim fica a nossa planilha de amortização para o financiamento de Joana:

Período $\mathbf{1 \leq k \leq n}$	**Saldo Devedor** $\boldsymbol{SD_k = SD_{k-1} - A}$	**Amortização** $\boldsymbol{A = SD_0/n}$	**Juros** $\boldsymbol{J_k = i \cdot SD_{k-1}}$	**Prestação** $\boldsymbol{P_K = A + J_k}$
0	30.000	-	-	-
1	24.000	6.000	3.000	9.000
2	18.000	6.000	2.400	8.400
3	12.000	6.000	1.800	7.800
4	6.000	6.000	1.200	7.200
5	0	6.000	600	6.600

Tabela 3 – Planilha SAC do empréstimo de Joana.
Fonte: Elaborado pelos autores

Observe um interessante resultado: o saldo devedor em uma planilha SAC formará sempre uma Progressão Aritmética decrescente de razão $r = -A$. Até aí, tudo muito óbvio.

O interessante é que podemos provar que as sequências de juros e das prestações também formam Progressões Aritméticas, e não só nesse caso do nosso exemplo, mas para qualquer planilha SAC.

Sabemos que uma sequência forma uma PA se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é um valor constante. De fato, para qualquer financiamento pelo SAC, sempre temos que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J_{k+1} - J_k} &= \boldsymbol{i \cdot SD_k - i \cdot SD_{k-1}} \\ &= \boldsymbol{i(SD_k - SD_{k-1})} \\ &= \boldsymbol{-iA.} \end{aligned}$$

ou seja, os juros decrescem como uma PA de razão $-iA$, que é um valor constante justamente pela principal característica desse tipo de financiamento. O mesmo vale para a sequência de prestações, pois

$$\boldsymbol{P_{k+1} - P_k = (A + J_{k+1}) - (A + J_k) = J_{k+1} - J_k = -iA,}$$

uma PA com a mesma razão da sequência de juros.

Exemplo: O financiamento de uma casa própria foi realizado pela tabela SAC, devendo ser amortizado com parcelas mensais num prazo de pagamento de 20 anos, a uma taxa fixa de 0,90% a.m. Sabendo-se que o capital do empréstimo foi de R$ 360.000,00, determine qual é o valor dos juros pagos na prestação de número 127, e o valor total dessa prestação.

Solução: Certamente, uma possibilidade de solução deste problema é a construção de toda a tabela do financiamento. Porém, há uma maneira matematicamente mais elegante de se proceder. Como o prazo de amortização foi combinado em 20 anos, teremos

$$n = 20\ anos \cdot \frac{12\ meses}{1\ ano} = 240\ meses.$$

A amortização, que é fixa nesse sistema de financiamento, será

$$A = \frac{SD_0}{n} = \frac{360.000}{240} = 1.500$$

ou seja, de R$ 1.500,00. Sabemos que os juros da primeira prestação podem ser determinados pelo saldo devedor inicial:

$$J_1 = i \cdot SD_0 = 0{,}009 \cdot 360.000 = 3.240$$

e que os juros do SAC formam uma Progressão Aritmética de razão

$$r = -i \cdot A = -0{,}009 \cdot 1.500 = -13{,}5.$$

Sendo assim, utilizando-se a fórmula do termo geral de uma PA, teremos:

$$J_{127} = J_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow J_{127} = 3.240 + (127-1) \cdot (-13{,}5) \Rightarrow$$
$$J_{127} = 3.240 - 1701 = 1.539.$$

Os juros da parcela número 127 serão de R$ 1.539,00 e o valor da prestação será a soma da amortização com os juros, ou seja,

$$P_{127} = A + J_{127} = 1.500 + 1.539 = 3.039$$

um total de R$ 3.039,00.

3.3 Sistema de Prestação Constante – SPC ou Tabela PRICE

Também conhecido amplamente na literatura como Sistema de Amortização Francês, por ter sido primeiramente aplicado para cálculos de aposentadoria e pensões na França do século XVIII, ou Sistema Price, em homenagem ao seu idealizador, o inglês Richard Price, o SPC possui como principal característica as suas prestações constantes, ou seja, pagamentos iguais em todas as parcelas de quitação do débito.

A Figura 3 apresenta um diagrama conhecido na literatura especializada como diagrama de fluxo de caixa. Imagine um empréstimo de um valor SD_0 qualquer, que será quitado através de uma série de n parcelas de pagamentos uniformes (de valor constante P), a uma taxa fixa i. A nomenclatura SD_0 foi escolhida justamente por representar o valor inicial da dívida, assim como no tópico anterior.

Para o caso em questão, consideraremos que a primeira parcela ocorre um período após a operação, ou seja, um período após a tomada de empréstimo. Caso se trate, por exemplo, do parcelamento de um produto para o qual foi concedida uma entrada, ou seja, um pagamento à vista, basta deduzir esse valor pago à vista dos cálculos da planilha do empréstimo.

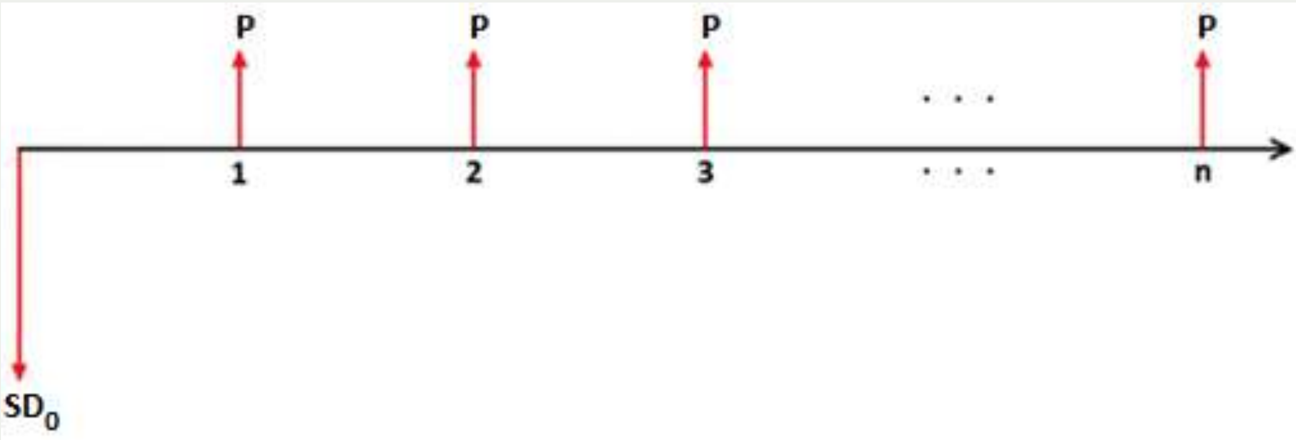

Figura 3 – Diagrama de pagamentos de um SPC (ou Sistema Price).
Fonte: Elaborado pelos autores

Atenção: existe uma regra da Matemática Financeira que nos afirma ser impossível efetuar operações de soma e subtração de valores financeiros em tempos diferentes, assim como comparar esses valores na forma absoluta se não referenciados seus valores equivalentes em mesma data a uma taxa conhecida.

Então, para garantirmos que o valor do empréstimo tomado seja equivalente monetariamente ao somatório das prestações P, já com os seus juros embutidos, deveremos retomar o valor de cada uma dessas parcelas ao tempo da tomada do empréstimo, ou seja, o nosso $t = 0$, para que assim seja possível somá-las e compará-las ao valor do saldo inicial da dívida, conhecida a taxa de juros do empréstimo.

Já vimos que a relação entre um capital e seu montante a juros compostos é dada por

$$M = C(1 + i)^n.$$

Isso significa que para "deslocarmos" o valor de um capital hoje para n períodos no futuro, a uma taxa i, multiplicamos o capital pelo fator $(1+i)^n$. Logo, pelo raciocínio oposto, para trazer o valor futuro de um capital para o tempo atual, basta que o dividamos pelo mesmo fator:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}.$$

Isso significa que, para deslocarmos o valor de cada uma das prestações P para a data do empréstimo, ou seja, $t = 0$, deveremos verificar qual a diferença de tempo entre aquela parcela e o dia da tomada de empréstimo. Então, para o primeiro pagamento temos $t = 1$ e o expoente do denominador da fração é $n = 1$; para o segundo pagamento, efetuado dois períodos após o empréstimo, teremos $n = 2$; para o terceiro pagamento teremos $n = 3$, e assim sucessivamente até o n-ésimo pagamento.

O somatório de todas as parcelas deslocadas para o tempo da tomada do empréstimo deve ser matematicamente igual ao valor do capital emprestado:

$$SD_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n} \Rightarrow$$

$$SD_0 = P\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

Dentro dos parênteses vemos uma soma de n parcelas com algo que nos parece familiar... É claro! Perceba que os termos dessa soma formam uma sequência em que cada elemento é o produto do anterior pelo fator constante $\frac{1}{(1+i)}$:

$$a_n = \left(\frac{1}{(1+i)}; \frac{1}{(1+i)^2}; \frac{1}{(1+i)^3}; \cdots; \frac{1}{(1+i)^n}\right),$$

e sabemos que existe uma fórmula para se efetuar essa soma: para uma PG de primeiro termo a_1 e razão q, a soma é dada por

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \frac{(q^{n-1} - 1)}{q - 1}}.$$

O valor do saldo devedor SD_0, ou seja, o valor do empréstimo, é dado pelo produto do valor das prestações P pela soma de termos de uma PG de primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{1+i}$. Usando a expressão para a soma dentro dos parênteses, temos:

$$SD_0 = P \cdot \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{1+i} - 1}.$$

Manipulando-se algebricamente essa difícil expressão (que não vem ao caso nesse momento) o saldo inicial da dívida, que é o valor do empréstimo, se relaciona com as prestações segundo a seguinte expressão:

$$\boxed{\boldsymbol{SD_0 = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}}}$$

e assim poderemos calcular o valor das prestações de um financiamento pelo SPC conhecido o valor do empréstimo, a taxa de juros e o número de parcelas pactuadas entre o credor e o devedor.

Exemplo: Luciana pretende tomar um empréstimo para trocar seu carro velho por um “zero quilômetro”, anunciado por R$ 49.900,00. Seu carro foi avaliado por R$ 19.900,00 e entrará na troca por esse valor. O saldo devedor deve ser quitado em dois anos através de prestações mensais fixas. A taxa de juros oferecida pela loja é de 1,8% a.m., já considerados todos os impostos. Determine o valor da prestação mensal assumida por Luciana por essa compra.

Solução: Em primeiro lugar, deve-se observar que o valor da dívida assumida por Luciana não é de R$ 49.900,00, já que ela vendeu seu usado para a loja. O empréstimo que ela assumiu é, na verdade, de

$$SD_0 = 49.900 - 19.900 = 30.000$$

ou seja, de R$ 30.000,00. Temos também que $i = 1{,}8\%\ a.m.$ e $n = 2\ anos = 24\ meses$, já que as parcelas são mensais. Assim, substituindo-se os valores conhecidos na equação, teremos:

$$30.000 = P \cdot \frac{(1+0{,}018)^{24}-1}{(1+0{,}018)^{24}\cdot 0{,}018} \Rightarrow P = \frac{30.000\cdot(1+0{,}018)^{24}\cdot 0{,}018}{(1+0{,}018)^{24}-1} \Rightarrow$$

$$P = 1.550{,}42505.$$

Então, Luciana sai da loja com seu belo carro novo e um carnê com 24 boletos de R$ 1.550,43. Espero que ela tenha uma boa renda mensal...

Vamos dar sequência à construção da tabela do financiamento no sistema SPC ou Price. Ilustraremos uma situação com pequeno número de parcelas por questões didáticas.

Exemplo: Mariano deseja reformar e ampliar sua loja de materiais de construção. Para isso, contrata um empréstimo bancário no valor de R$ 120.000,00, que será quitado em 5 parcelas semestrais, a uma taxa de juros mensal de 1,2909457% a.m., taxa essa que engloba todos os encargos do processo. Construa a Tabela Price (ou SPC) desse financiamento.

Solução: A primeira coisa a se observar nesse problema é a falta de padronização de unidade de medida de tempo e taxa. Como a planilha envolve pagamentos semestrais, nesse caso não podemos usar o artifício mais simples de conversão do tempo. Vamos transformar a taxa de juros mensal em semestral:

$$1 + i_{a.s.} = (1 + i_{a.\,m.})^6 \Rightarrow 1 + i_{a.s.} = (1 + 0{,}012909457)^6 \Rightarrow$$

$$i_{a.s.} = (1{,}012909457)^6 - 1 \Rightarrow i_{a.s.} = 0{,}08$$

ou seja, o empréstimo foi pactuado a uma taxa de juros semestral de 8%. O valor das prestações desse financiamento pode ser determinado como já exemplificado anteriormente:

$$SD_0 = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \Rightarrow 120.000 = P \cdot \frac{(1{,}08)^6 - 1}{(1{,}08)^6 \cdot 0{,}08} \Rightarrow$$

$$P = \frac{120.000 \cdot (1{,}08)^6 \cdot 0{,}08}{(1{,}08)^6 - 1} = 25.957{,}8463.$$

Temos então 6 parcelas de R$ 25.957,85. Em seguida, basta lembrar que os juros de um financiamento sempre incidem sobre o saldo devedor do período anterior:

$$J_1 = i \cdot SD_0 = 0{,}08 \cdot 120.000 = 9.600$$

e que a prestação é sempre dada pela soma da amortização com os juros de cada período, ou seja:

$$P = A_1 + J_1 \Rightarrow A_1 = P - J_1 = 25.957{,}85 - 9.600 = 16.357{,}85.$$

Esse valor de R$ 16.357,85 é aquele que se abate na dívida de Mariano na primeira prestação. Note que aqui não atribuímos subíndices para P, pois as prestações são fixas, mas passamos a atribuir subíndices para a amortização A, pois essas agora são variáveis. O saldo devedor passa a ser:

$$SD_1 = SD_0 - A_1 = 120.000 - 16.357{,}85 = 103.642{,}15.$$

Agora, basta seguir esse mesmo passo a passo para a construção das demais linhas da tabela, com $2 \leq k \leq 6$.

Para $k = 2$:

$$J_2 = i \cdot SD_1 = 0{,}08 \cdot 103.642{,}15 = 8.291{,}37;$$

$$A_2 = P - J_2 = 25.957{,}85 - 8.291{,}37 = 17.666{,}48;$$

$$SD_2 = SD_1 - A_2 = 103.642{,}15 - 17.666{,}48 = 85.975{,}67.$$

Para $k = 3$:

$$J_3 = i \cdot SD_2 = 0{,}08 \cdot 85.975{,}67 = 6.878{,}05;$$

$$A_3 = P - J_3 = 25.957{,}85 - 6.878{,}05 = 19.079{,}80;$$

$$SD_3 = SD_2 - A_3 = 85.975{,}67 - 19.079{,}8 = 66.895{,}87.$$

Para $k = 4$:

$$J_4 = i \cdot SD_3 = 0{,}08 \cdot 66.895{,}87 = 5.351{,}67;$$

$$A_4 = P - J_4 = 25.957{,}85 - 5.351{,}67 = 20.606{,}18;$$

$$SD_4 = SD_3 - A_4 = 66.895{,}87 - 20.606{,}18 = 46.289{,}69.$$

Para $k = 5$:

$$J_5 = i \cdot SD_4 = 0{,}08 \cdot 46.289{,}69 = 3.703{,}18;$$

$$A_5 = P - J_5 = 25.957{,}85 - 3.703{,}18 = 22.254{,}67;$$

$$SD_5 = SD_4 - A_5 = 46.289{,}69 - 22.254{,}67 = 24.035{,}02.$$

Para $k = 6$:

$$J_6 = i \cdot SD_5 = 0{,}08 \cdot 24.035{,}02 = 1.922{,}80;$$

$$A_6 = P - J_6 = 25.957{,}85 - 1.922{,}80 = 24.035{,}05;$$

$$SD_6 = SD_3 - A_6 = 24.035{,}02 - 24.035{,}05 = -0{,}03.$$

Assim, o financiamento é integralmente quitado após 6 semestres de pagamentos. Note que nas nossas contas há um “resíduo” de 3 centavos. Isso se deve aos arredondamentos realizados durante os cálculos. Quando a planilha é montada em um programa de computador, que utiliza muitas casas decimais, o resíduo será sempre nulo, indicando a quitação do saldo devedor.

Período $\mathbf{1 \leq k \leq n}$	Saldo Devedor $\mathbf{SD_k = SD_{k-1} - A_k}$	Prestação $\mathbf{P = \dfrac{SD_0 \cdot (1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}}$	Juros $\mathbf{J_k = i \cdot SD_{k-1}}$	Amortização $\mathbf{A = P - J_k}$
0	120.000,00	-	-	-
1	103.642,15	25.957,85	9.600,00	16.357,85
2	85.975,67	25.957,85	8.291,37	17.666,48
3	66.895,87	25.957,85	6.878.05	19.079,80
4	46.289,69	25.957,85	5.351,67	20.606,18
5	24.035,02	25.957,85	3.703,18	22.254,67
6	-0,03 (resíduo)*	25.957,85	1.922,80	24.035,05

* Resultado dos arredondamentos. Com todas as casas decimais, o resultado é sempre $SD_n = 0$.

Tabela 4 – Planilha SPC ou Price do empréstimo de Mariano.
Fonte: Elaborado pelos autores

Logo que visualizamos a planilha do financiamento SAC, as Progressões Aritméticas nos saltaram aos olhos, sendo muito fácil de identificá-las. Nessa planilha de financiamento pelo Sistema SPC, também temos uma progressão, porém nem tão evidente como naquele caso.

Observe que aqui as amortizações são crescentes. Considere a sequência formada por essas amortizações, que chamaremos de A_n:

$$A_n = (16.357{,}85; 17.666{,}48; 19.079{,}80; 20.606{,}18; 22.254{,}67; 24.035{,}05).$$

Não é nem um pouco simples de se ver, mas se dividirmos os termos dessa sequência pelos termos anteriores, teremos:

$$\frac{17.666{,}48}{16.357{,}85} = \frac{19.079{,}80}{17.666{,}48} = \frac{20.606{,}18}{19.079{,}80} = \frac{22.254{,}67}{20.606{,}18} = \frac{24.035{,}05}{22.254{,}67} \cong 1{,}08.$$

Na verdade, os valores não se igualaram a 1,08 devido aos arredondamentos efetuados na construção da planilha. Esse valor se refere a $1 + 0{,}08$, ou seja, o nosso bom e velho $(1 + i)$, que tantas vezes se repetiu no nosso estudo. Por definição, a sequência de amortizações da planilha de financiamento de Mariano é uma Progressão Geométrica de razão 1,08.

Será que isso foi uma coincidência? Claro que não. A regra é geral, válida para qualquer planilha de amortização de débitos via Sistema de Prestações Constantes ou Price. Vamos demonstrar esse fato.

Como no sistema Price as prestações são fixas, temos:

$$P_{k+1} = P_k \Rightarrow$$

$$J_{k+1} + A_{k+1} = J_k + A_k \Rightarrow$$

$$i \cdot SD_k + A_{k+1} = i \cdot SD_{k-1} + A_k \Rightarrow$$

$$i(SD_{k-1} - A_k) + A_{k+1} = i \cdot SD_{k-1} + A_k \Rightarrow$$

$$i \cdot SD_{k-1} - iA_k + A_{k+1} = i \cdot SD_{k-1} + A_k \Rightarrow$$

$$A_{k+1} = A_k + iA_k = A_k(1 + i) \Rightarrow$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = (1 + i),$$

e por definição as sequências de amortização nesse formato geram uma Progressão Geométrica de razão $(1 + i)$.

Exemplo: Determine o valor dos juros da prestação de número 265 referente ao financiamento de um imóvel via sistema Price, combinado a uma taxa de 1,2% a.m. e com prazo de pagamento de 30 anos. O valor total do empréstimo é de R$ 250.000,00.

Solução: Assim como no problema semelhante apresentado ao final do tópico sobre o SAC, é possível descobrir o valor dos juros solicitados construindo-se a planilha de amortização até a parcela de número 265. Porém, se lembrarmos que o valor das prestações do sistema Price são constantes e que as amortizações desse sistema formam uma Progressão Geométrica de razão $q = (1 + i)$, o problema se resolve de forma mais compacta. Como são 360 meses de financiamento, teremos:

$$SD_0 = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \Rightarrow 250.000 = P \cdot \frac{(1{,}012)^{360} - 1}{(1{,}012)^{360} \cdot 0{,}012} \Rightarrow$$

$$P = \frac{250.000 \cdot (1{,}012)^{360} \cdot 0{,}012}{(1{,}012)^{360} - 1} = 3.041{,}51.$$

A amortização de número 265 pode ser determinada pela fórmula do termo geral de uma PG, desde que determinemos o valor do primeiro termo dessa sequência. Isso pode ser realizado da seguinte forma:

$$P = A_1 + J_1 \Rightarrow$$

$$3.041{,}51 = A_1 + i \cdot SD_0 \Rightarrow$$

$$3.041{,}51 = A_1 + 0{,}012 \cdot 250.000 \Rightarrow$$

$$A_1 = 3.041{,}51 - 3.000 = 41{,}51.$$

Isso mesmo, apenas R$ 41,51 como valor da primeira amortização. Cruel... Agora sim, podemos fazer

$$A_{265} = A_1 \cdot (1+i)^{n-1} = 41{,}51 \cdot (1{,}012)^{264} = 967{,}85$$

ou seja, a amortização da parcela de número 265 é de R$ 967,85. O juro dessa parcela é a diferença entre a prestação e a amortização, ou seja,

$$J_{265} = P - A_{265} = 3.041{,}51 - 967{,}85 = 2.073{,}66.$$

Os valores são ligeiramente diferentes daqueles simulados em planilhas financeiras, conforme já dito anteriormente, pelos arredondamentos nas nossas contas. Caso utilizássemos mais casas decimais, teríamos aqui a mesma exatidão dessas planilhas.

Outro aspecto interessante de se notar é a lenta amortização dos débitos nos financiamentos de longo prazo. Nesse exemplo, o devedor toma R$ 250.000,00 emprestado e paga um total de R$ 1.094.941,92 nesses trinta anos, ou seja, mais de um milhão de reais. É o preço a se pagar por não ser o detentor do capital. Por isso, esses empréstimos só devem ser efetuados por boas causas, como aquisição de patrimônio, e em condições muito favoráveis.

Mídia digital: antes de realizar a atividade avaliativa desse tópico, vá até a sala virtual e assista a uma videoaula sobre o tema do capítulo, ministrada pelo professor Wálmisson Régis de Almeida, a fim de revisar os conceitos aprendidos.

Atividade: para concluir a terceira e última semana de estudos, vá até a sala virtual e responda ao Questionário “Sistemas de Amortização”. Esse teste será composto de 5 perguntas de múltipla escolha, que se baseiam nos temas estudados nesse capítulo. Não se esqueça de deixar a calculadora a postos para executar as operações e de estudar os pontos principais do capítulo antes de abrir o questionário.

Prezados(as) alunos(as),

em primeiro lugar gostaríamos de agradecer pelo empenho apresentado até o final do curso! O grande prazer do professor é constatar o desenvolvimento de seus alunos, e por isso espero que esse texto aliado às videoaulas e atividades na plataforma do +IFMG, além das indicações de vídeos, links e livros disponíveis na rede, tenham contribuído de forma efetiva no seu crescimento, tanto profissional quanto pessoal, principalmente na questão da organização de suas finanças.

Reiteramos que a busca por conhecimento e qualificação profissional deve ser uma meta de vida. E a proposta do +IFMG é oportunizar cursos nas mais variadas áreas de atuação profissional.

Sendo assim, reforçamos o convite para que você continue a se aperfeiçoar pela nossa plataforma, realizando outros cursos que se encontram disponíveis em https://mais.ifmg.edu.br/.

Abraços, até a próxima, e parabéns pela conclusão do curso. Foi um prazer tê-lo conosco!

Referências

BRASIL. **BNCC - Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. **Fundamentos de Matemática Elementar 11:** matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. 2. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MORGADO, Augusto César. **Vídeos: Matemática Financeira**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. Retransmitida em 2010. Disponível em < https://www.youtube.com/watch?v=RK6IqHLBILE&list=PLo4jXE-LdDTSZ478vmsigEEFCPhBDBJMa&index=9&t=0s>. Acesso em 14/05/2020

MORGADO, Augusto César. WAGNER, Eduardo. ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**, 5. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Currículo dos autores

Wálmisson Régis de Almeida: Mestre em Matemática pela Universidade Federal de São João Del Rei (CAPES - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática) (2016). Pós-Graduado em Gestão Educacional pelo SENAC - MG (2011) e Matemática pela Universidade Federal de São João Del Rei (2010). Graduado em Matemática (Licenciatura Plena) pelo Centro Universitário de Sete Lagoas (2007) e Odontologia pela Faculdade Federal de Odontologia de Diamantina - FAFEOD, atual UFVJM (2001). Trabalhou como Odontólogo de 2001 a 2008, com ênfase em cirurgia oral menor; como professor de Física e Matemática na Educação Básica e Pré-Vestibulares de 1999 a 2017, nas cidades de Diamantina, Curvelo, Viçosa e Sete Lagoas; e como professor de Cálculo I, Cálculo II e Geometria Analítica e Álgebra Linear no Centro Universitário de Sete Lagoas - UNIFEMM - de 2012 a 2017. Atuou como Gestor Educacional no Colégio Anglo de Sete Lagoas de 2009 a 2012. Atualmente, é professor efetivo EBTT da área de Matemática do IFMG (Instituto Federal de Minas Gerais - Campus São João Evangelista). Coordenador da Licenciatura em Matemática do IFMG (Instituto Federal de Minas Gerais - Campus São João Evangelista) desde dezembro de 2017.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/6332544449538505

Tiago de Oliveira Dias: Possui graduação em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Minas Gerais (2004) e Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa (2014). Atualmente leciona nos cursos técnicos integrados e superiores do IFMG - Campus São João Evangelista e é analista de dados educacionais do campus. Experiência dentro do ensino fundamental, médio e superior. Foi diretor da Escola Estadual Pedro II, Belo Horizonte, melhor escola estadual no PROEB 2012, 2013 e 2014 e maior média geral no ENEM 2013 e 2014 dentre as escolas estaduais de MG.

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/3012322412587235

Feito por (professor-autor)	Data	Revisão de *layout*	Data	Versão
Wálmisson Régis de Almeida / Tiago de Oliveira Dias	01/09/2020	Dandara Lorrayne do Nascimento	18/03/2021	1.0

Glossário de códigos QR (*Quick Response*)

Mídia digital
Apresentação do curso

Dica do professor
Texto Complementar 1

Mídia Digital
Progressões Aritméticas

Mídia Digital
Revisão Aplicada Juros Simples

Dica do professor
Texto Complementar 2

Mídia Digital
Progressões Geométricas

Dica do professor
Texto Complementar 3

Mídia Digital
Revisão Aplicada Juros Compostos

Mídia Digital
Revisão Aplicada Sistemas de Amortização

Plataforma +IFMG

Formação Inicial e Continuada EaD

A Pró-Reitoria de Extensão (Proex), neste ano de 2020 concentrou seus esforços na criação do Programa +IFMG. Esta iniciativa consiste em uma plataforma de cursos *online*, cujo objetivo, além de multiplicar o conhecimento institucional em Educação à Distância (EaD), é aumentar a abrangência social do IFMG, incentivando a qualificação profissional. Assim, o programa contribui para o IFMG cumprir seu papel na oferta de uma educação pública, de qualidade e cada vez mais acessível.

Para essa realização, a Proex constituiu uma equipe multidisciplinar, contando com especialistas em educação, *web design*, *design* instrucional, programação, revisão de texto, locução, produção e edição de vídeos e muito mais. Além disso, contamos com o apoio sinérgico de diversos setores institucionais e também com a imprescindível contribuição de muitos servidores (professores e técnico-administrativos) que trabalharam como autores dos materiais didáticos, compartilhando conhecimento em suas áreas de atuação.

A fim de assegurar a mais alta qualidade na produção destes cursos, a Proex adquiriu estúdios de EaD, equipados com câmeras de vídeo, microfones, sistemas de iluminação e isolação acústica, para todos os 18 *campi* do IFMG.

Somando à nossa plataforma de cursos *online*, o Programa +IFMG disponibilizará também, para toda a comunidade, uma Rádio *Web* Educativa, um aplicativo móvel para Android e IOS, um canal no Youtube com a finalidade de promover a divulgação cultural e científica e cursos preparatórios para nosso processo seletivo, bem como para o Enem, considerando os saberes contemplados por todos os nossos cursos.

Parafraseando Freire, acreditamos que a educação muda as pessoas e estas, por sua vez, transformam o mundo. Foi assim que o +IFMG foi criado.

O +IFMG significa um IFMG cada vez mais perto de você!

Professor Carlos Bernardes Rosa Jr.
Pró-Reitor de Extensão do IFMG

Características deste livro:
Formato: A4
Tipologia: Arial e Capriola.
E-book:
1ª. Edição
Formato digital