

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнила студентка
группы 5030102/20202

Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил
Преподаватель

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Цель работы	3
2	Постановка задачи	3
3	Теоретическая часть	4
3.1	Интервальное представление и параметры	4
3.2	Распознающий функционал	4
3.3	Условие разрешимости	4
3.4	Описание последовательности действий и методов коррекции	4
4	Результат	5
4.1	$A_1x = b_1$	5
4.2	$A_2x = b_2$	8
4.3	$A_3x = b_3$	10
4.4	Сравнительный анализ методов коррекции	12
5	Программная реализация	12
6	Вывод	13
7	Приложение	13

1 Цель работы

Изучить методы анализа и коррекции интервальных линейных систем уравнений (ИСЛАУ) с использованием распознающего функционала $Tol(x, A, b)$. Закрепить навыки построения допусковых множеств решений и исследовать влияние A -, b - и Ab -коррекций на разрешимость системы.

2 Постановка задачи

Дан набор интервальных систем линейных уравнений:

$$A_i x = b_i, \quad x = (x_1, x_2), \quad i = \overline{1, 3}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

Для каждой системы $A_i x = b_i$ необходимо:

- А. Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ. В случае, если допусковое множество пусто:
 - А.1. Найти $\arg\max Tol$ и образующие допускового функционала
 - А.2. Построить график функционала $Tol(x)$, отметить точку максимума
 - А.3. Построить графики допускового множества ИСЛАУ на плоскости, отметить точку максимума
- В. Если допусковое множество пусто, необходимо скорректировать систему каждым из описанных ниже способов:
 - В.1. С помощью коррекции правой части ИСЛАУ — b -коррекция
 - В.2. С помощью коррекции матрицы ИСЛАУ — A -коррекция
 - В.3. С помощью комбинации предыдущих методов (В.1, В.2) с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ — Ab -коррекция

- С. Сравнить влияние разных видов коррекций на форму и положение допускового множества. Определить, какой вид коррекции является наименее искажением исходных данных при достижении разрешимости.

3 Теоретическая часть

3.1 Интервальное представление и параметры

Интервал $\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$ определяется его срединной точкой $mid \mathbf{a}$ и радиусом $rad \mathbf{a}$:

$$mid \mathbf{a} = \frac{\bar{a} + \underline{a}}{2}, \quad rad \mathbf{a} = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$$

3.2 Распознающий функционал

Распознающий функционал используется для проверки совместимости системы в точке x :

$$Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ rad(b_i) - \left| mid(b_i) - \sum_{j=1}^n mid(a_{ij})(x_j) \right| - \sum_{j=1}^n rad(a_{ij})|x_j| \right\}$$

3.3 Условие разрешимости

Система ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ имеет **непустое** допусковое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (разрешима) тогда и только тогда, когда:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x, A, b) \geq 0$$

3.4 Описание последовательности действий и методов коррекции

Для каждой интервальной системы выполнялась следующая последовательность:

1. **Проверка исходной системы:** вычислялось максимальное значение допуска Tol_{max} с помощью функции `ip.linear.Tol.maximize`. Если $Tol_{max} < 0$, система считалась неразрешимой.
2. **A-коррекция:** Корректировались интервалы коэффициентов матрицы A .

Для каждого ненулевого интервала A_{ij} вычислялся параметр сужения e :

$$e = \frac{lower_bound + upper_bound}{2},$$

где

$$lower_bound = \frac{|Tol_{max}|}{\sum |x_i|}, \quad upper_bound = \min rad(A).$$

Интервалы сужались:

$$A_{ij} = [A_{ij}^{low} + e, A_{ij}^{high} - e].$$

Если при этом нижняя граница превышала верхнюю, устанавливалась середина интервала:

$$A_{ij} = \frac{A_{ij}^{\text{low}} + A_{ij}^{\text{high}}}{2}.$$

3. **b-коррекция:** корректировалась правая часть b . Параметр K подбирался бинарным поиском: интервалы b_i расширялись на $[-K, K]$, пока система не становилась разрешимой ($\text{Tol}_{\max} \geq 0$).

4. **Ab-коррекция:** Одновременно корректировались матрица A и правая часть b через оптимизацию двух параметров α и β :

- $\alpha \in (0, 1]$ — коэффициент сужения интервалов матрицы A ;
- $\beta \geq 1$ — коэффициент расширения интервалов b .

Выбиралась пара (α^*, β^*) , при которой $\text{Tol}_{\max} \geq 0$ и минимизировалось отклонение исходных данных:

$$J = w_1(1 - \alpha)^2 + w_2(\beta - 1)^2.$$

После выбора оптимальных α^* и β^* строились интервалы:

$$A^* = \text{mid}(A) \pm \alpha^* \cdot \text{rad}(A), \quad b^* = \text{mid}(b) \pm \beta^* \cdot \text{rad}(b).$$

5. **Визуализация:** для каждой системы строились 3D-график функции допуска Tol и 2D-контур допустимой области. Красные и черные точки показывают максимальное значение Tol и соответствующее решение. Это позволяет наглядно оценить влияние разных видов коррекции на форму и положение допустимого множества.

4 Результат

4.1 $A_1x = b_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}$$

A.

$$\text{argmax Tol} = -0.277 < 0$$

$$\text{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

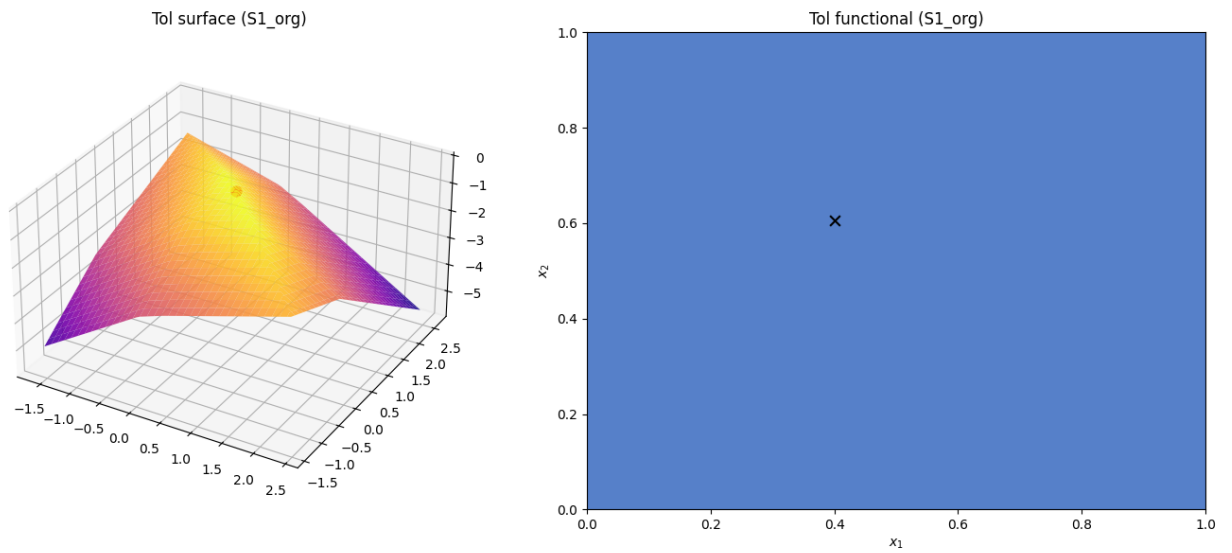


Рис. 1: График для системы $A_1x = b_1$

B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.092 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

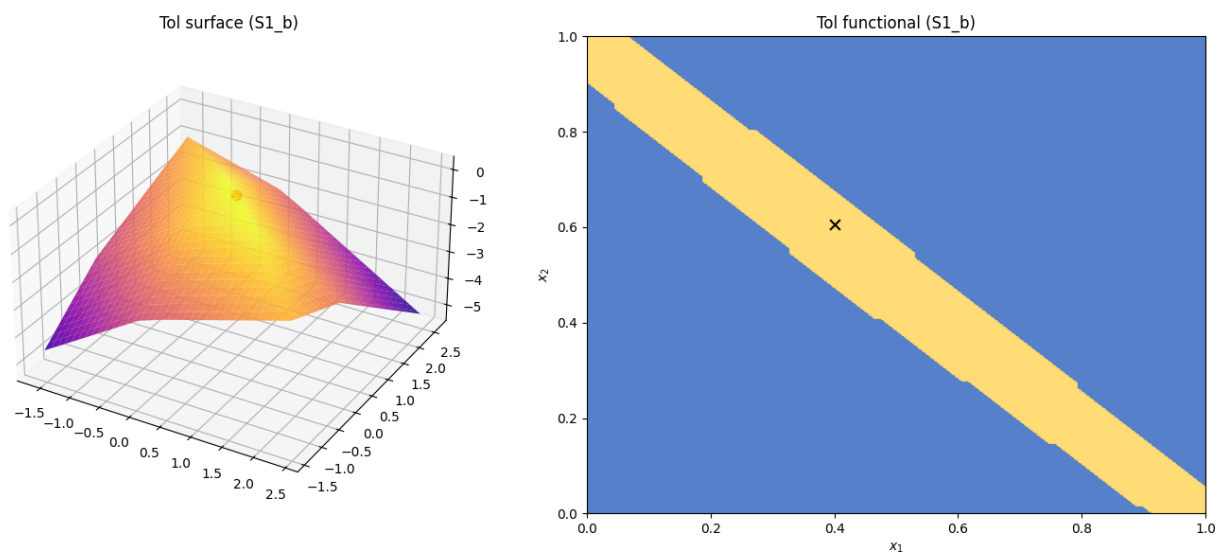


Рис. 2: График после b-коррекции для системы $A_1x = b_1$

B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

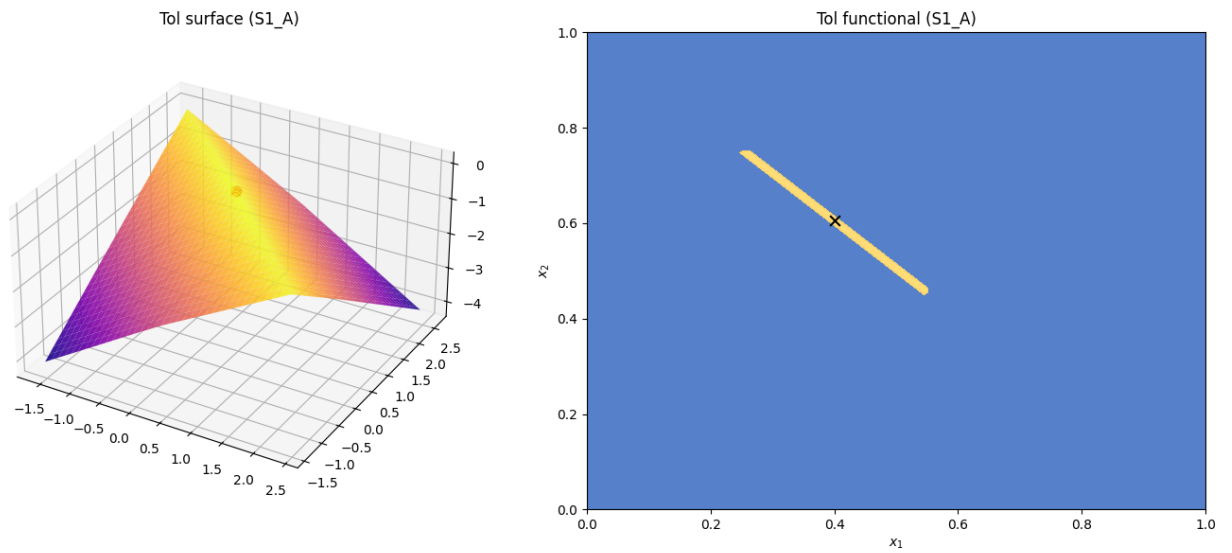


Рис. 3: График после A-коррекции для системы $A_1x = b_1$

B.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0006 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

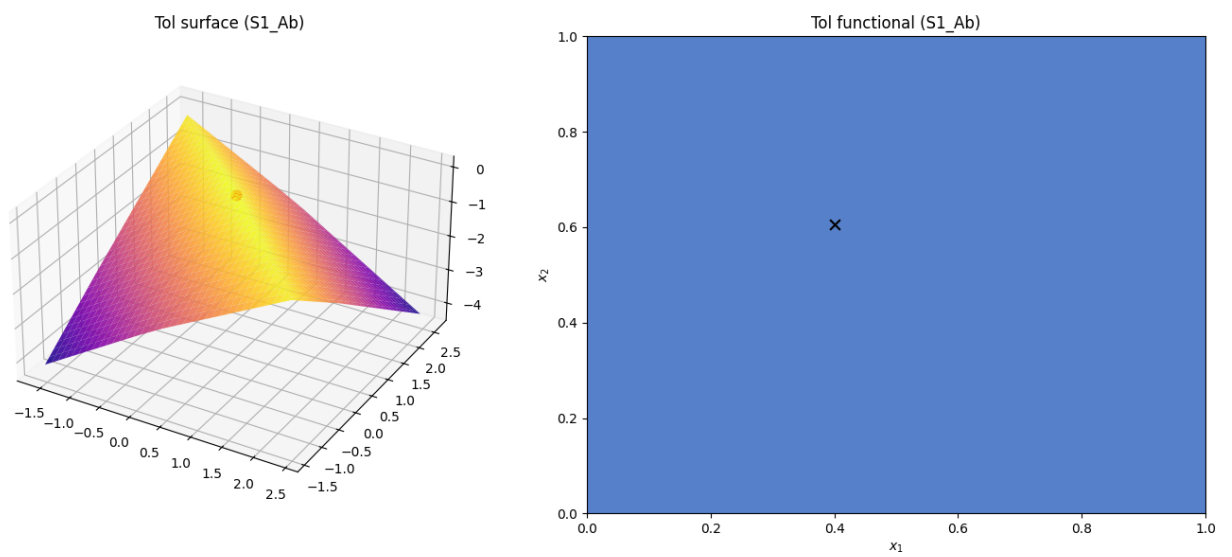


Рис. 4: График после Ab-коррекции для системы $A_1x = b_1$

4.2 $A_2x = b_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}$$

A.

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = -0.277 < 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

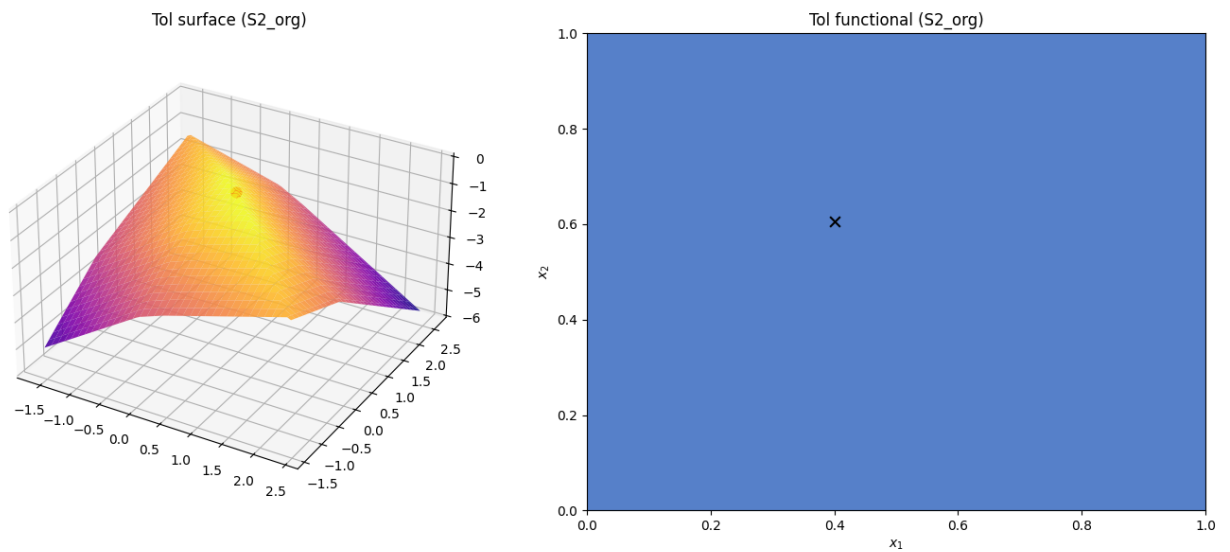


Рис. 5: График для системы $A_2x = b_2$

B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.092 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

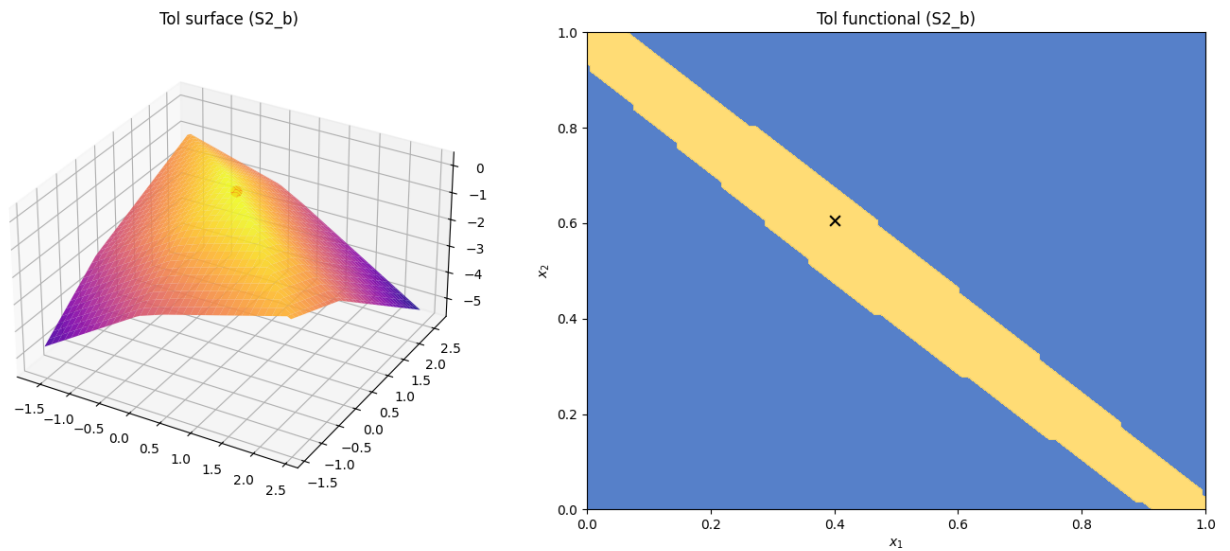


Рис. 6: График после b-коррекции для системы $A_2x = b_2$

B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

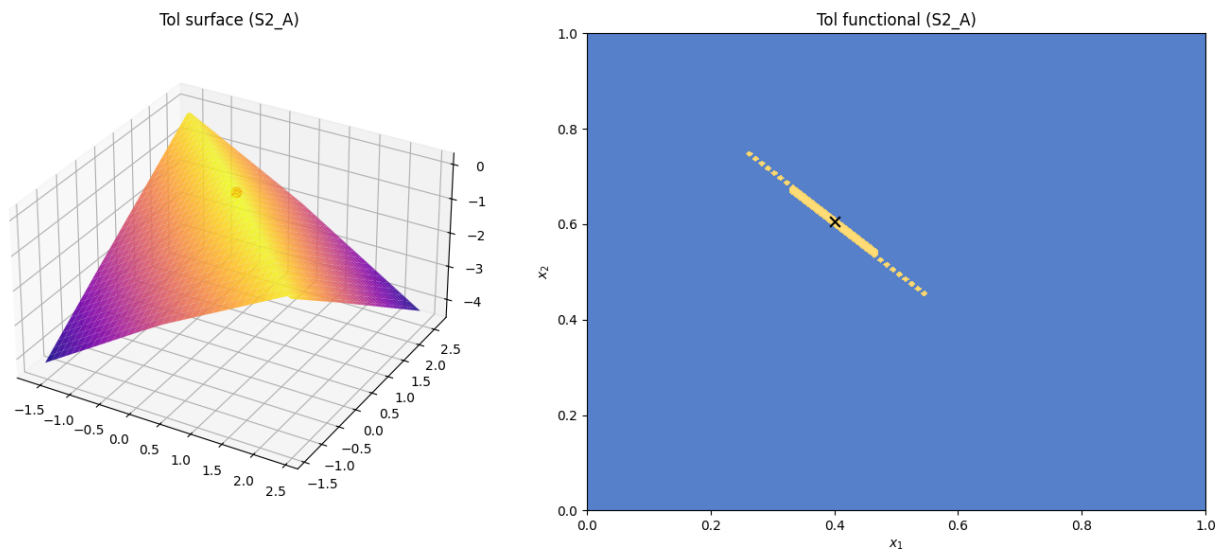


Рис. 7: График после A-коррекции для системы $A_2x = b_2$

B.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0006 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

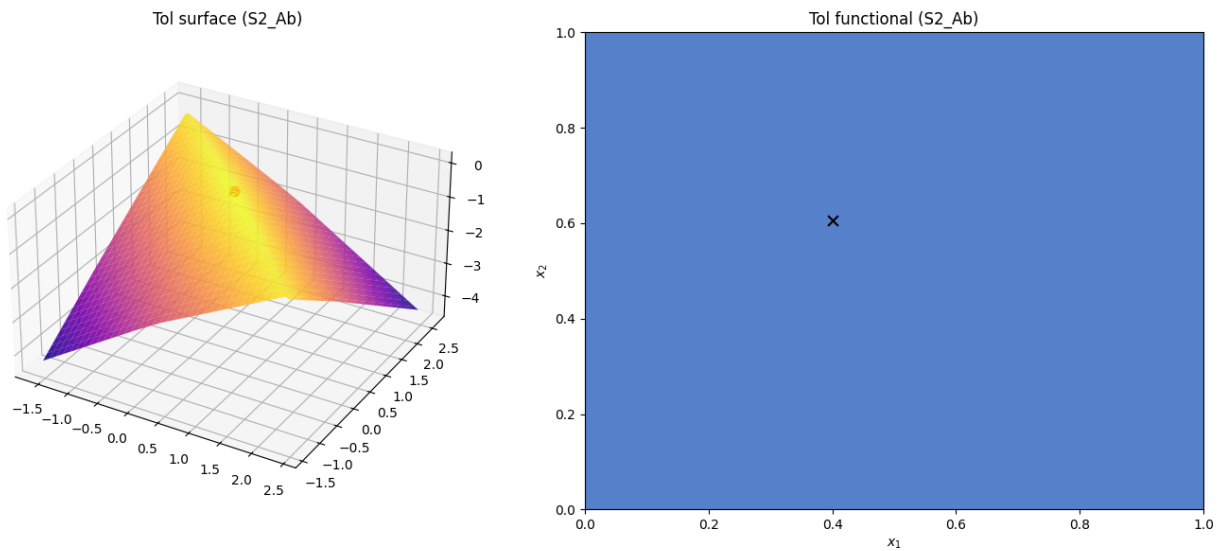


Рис. 8: График после Аб-коррекции для системы $A_2x = b_2$

4.3 $A_3x = b_3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

A.

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = -0.28 < 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

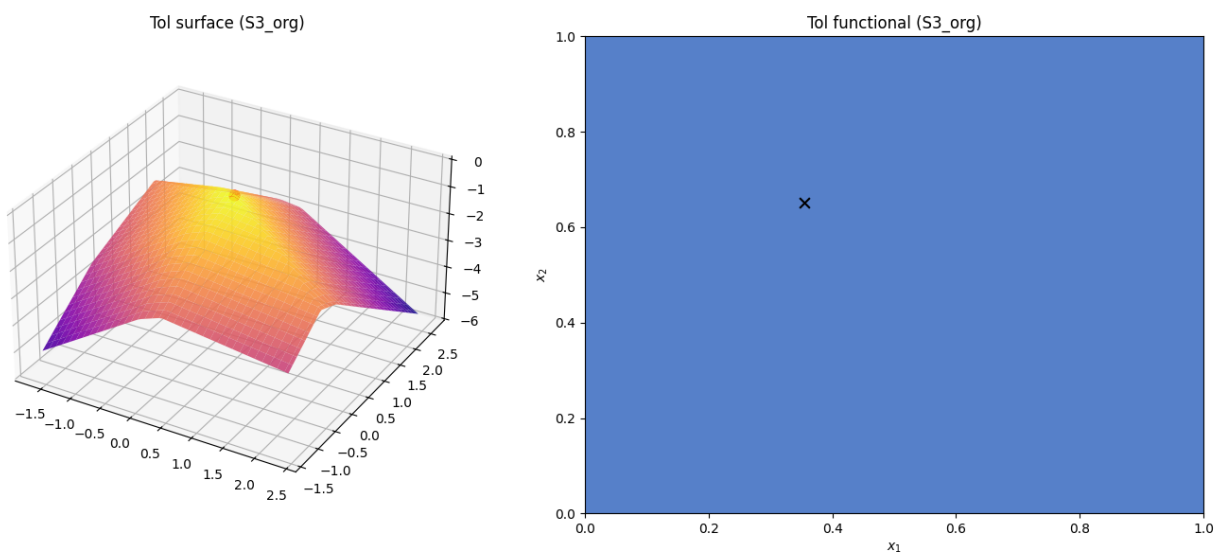


Рис. 9: График для системы $A_3x = b_3$

B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.088 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

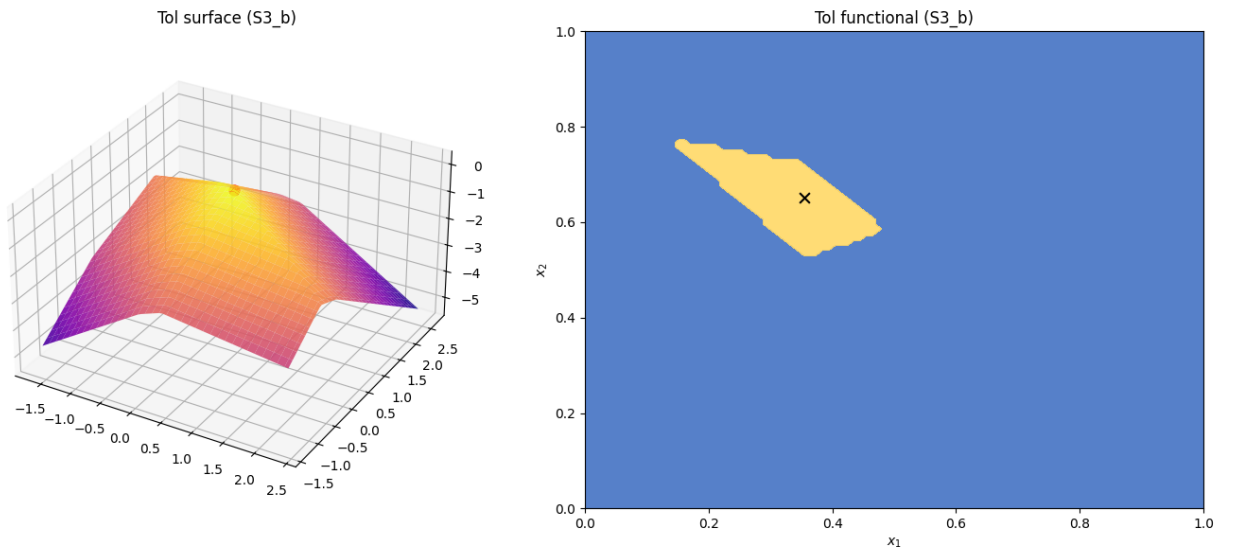


Рис. 10: График после b-коррекции для системы $A_3x = b_3$

B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0108 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

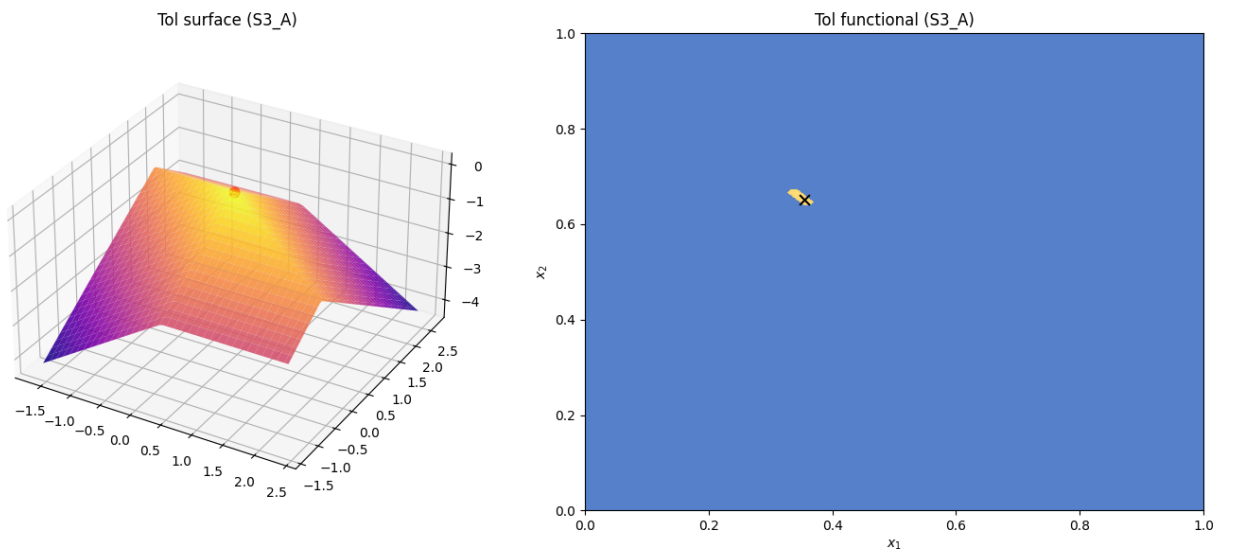


Рис. 11: График после A-коррекции для системы $A_3x = b_3$

В.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0004 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

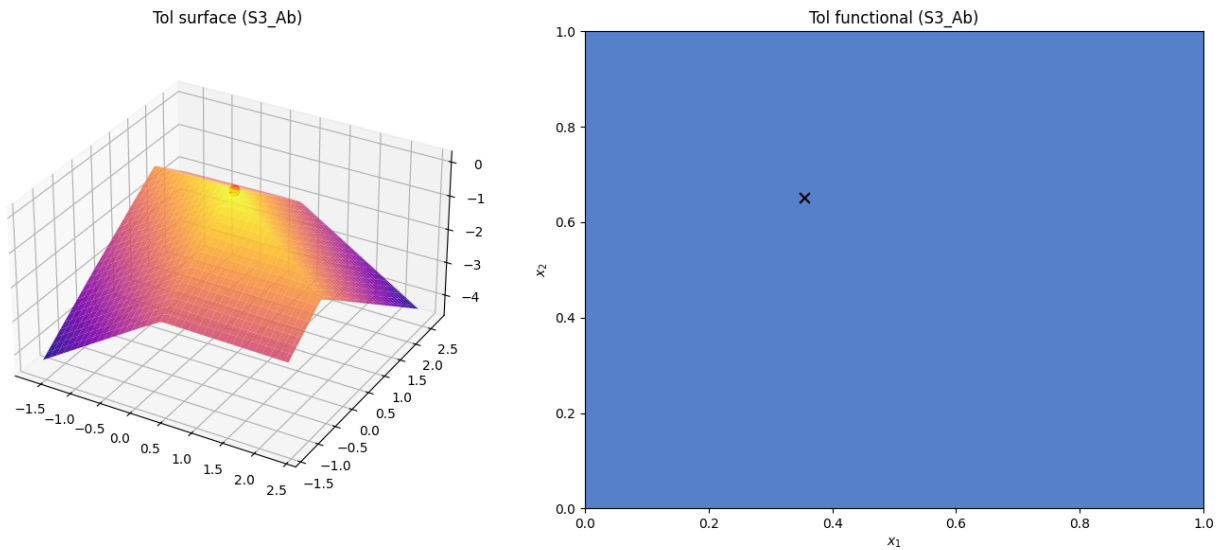


Рис. 12: График после Аб-коррекции для системы $A_3x = b_3$

4.4 Сравнительный анализ методов коррекции

Система	Без коррекции	А-коррекция	б-коррекция	Аб-коррекция
1	0.000000	0.006020	0.169677	0.0
2	0.000000	0.004387	0.157331	0.0
3	0.000000	0.000612	0.035200	0.0

Таблица 1: Площади областей разрешимости для различных методов коррекции

5 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib
3. intvalpy

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

6 Вывод

Анализ интервальных систем показал:

- Без коррекции все системы неразрешимы ($\text{Tol}_{\max} < 0$).
- **A-коррекция:** минимальное сужение интервалов матрицы A позволяет достичь положительного Tol_{\max} , но значение остаётся очень близким к нулю. Метод обеспечивает разрешимость при минимальном изменении исходных данных, но эффект незначителен.
- **b-коррекция:** расширение вектора b с подбором минимального K позволяет получить значительно положительное Tol_{\max} , система полностью разрешима. Однако область решений сильно расширена, что приводит к наибольшему искажению исходных данных.
- **Ab-коррекция:** комбинированное применение A- и b-коррекции. После оптимизации параметров α и β достигается $\text{Tol}_{\max} \gtrsim 0$, при этом изменение исходных данных минимально. Метод обеспечивает оптимальный компромисс между разрешимостью и сохранением исходных интервалов.

Вывод: для достижения разрешимости с минимальным искажением исходных данных рекомендуется использовать **Ab-коррекцию**.

7 Приложение

Код программы GitHub URL:

<https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab%203>