Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №2

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнила студентка
группы 5030102/20202 Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил
Преподаватель Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Цель работы **3**

2 Постановка задачи **3**

3 Результат **3**

4 Программная реализация **10**

5 Обсуждение **10**

6 Приложение **11**

1 Цель работы

Исследование и сравнение точности различных интервальных методов оценивания области значений функции на заданном отрезке.

2 Постановка задачи

Для каждой из двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервале $X = [a, b]$ необходимо:

A. Аналитически или численно найти область значений $\mathrm{ran}(f, X)$, построить график Функции на заданном интервале.

B. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:

  B.1. Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.

  B.2. Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.

  B.3. Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

  B.4. Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.

  B.5. Бицентрированную форму.

C. Для каждой полученной интервальной оценки вычислить величину $\mathrm{dist}(F(X), \mathrm{ran}(f, X))$-расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:

  C.1. Найти (аналитически или численно) константу Липшица L для функции f на интервале X. Обосновать свой выбор.

  C.2. Используя следствие из теоремы о непрерывности по Липшицу, получить теоретическую оценку погрешности:

$$rad(F(X)) \le L.rad(X)$$

  C.3. Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала rad(F(X))) с теоретической оценкой из пункта (б). Сделать выводы.

D. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода.

3 Результат

Функция

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad X = [0, 3]$$

$$f_2(x) = x^3 \sin x - x^2, \quad X = [-2, 4]$$

A.

Для f_1:

Производная:

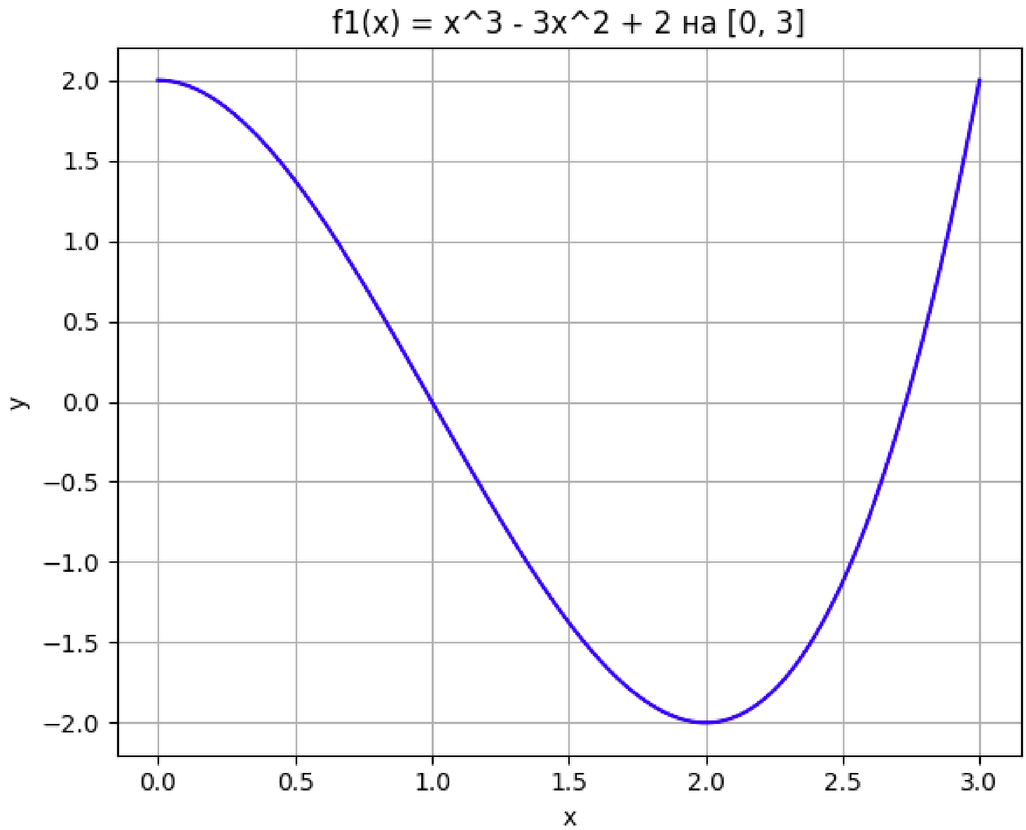
$$f_1'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Критические точки: $x = 0, 2$. На отрезке $[0, 3]$ значения функции:

$$f_1(0) = 2, \quad f_1(2) = -2, \quad f_1(3) = 2.$$

Таким образом, точная область значений:

$$\operatorname{ran}(f_1, [0, 3]) = [-2,\ 2].$$



Для f_2:

Производная:

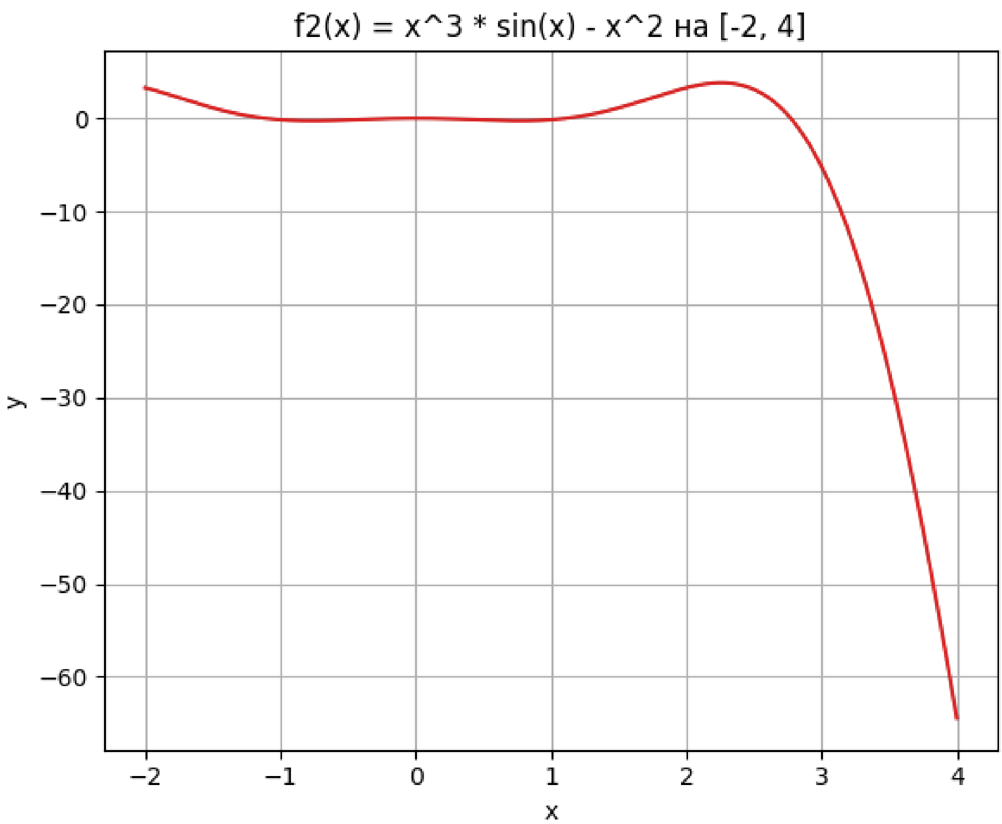
$$f_2'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x - 2x.$$

На отрезке $[-2, 4]$ значения функции:

$$f_2(0) = 0, \quad f_2(2.258) = 3.8, \quad f_2(4) = -64.44.$$

Таким образом, точная область значений:

$$\mathrm{ran}(f_2, [-2, 4]) = [-64.44,\ 3.8].$$



B.

B.1.

Естественное интервальное расширение (natural interval extension) — это метод, при котором каждая переменная x в выражении заменяется интервалом $X = [a, b]$, а все арифметические операции выполняются в интервальной арифметике.

Для f_1:

$$f_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2 = [0, 3]^3 - 3[0, 3]^2 + 2 = [0, 27] - 3[0, 9] + 2 = [-25, 29]$$

Полученная оценка: $F_{nat}(X) = [-25, 29]$.

Для f_2:

$$f_2(X) = X^3 \sin X - X^2 = [-2,4]^3 \sin([-2,4]) - [-2,4]^2 = [-8,64].[-1,1] - [0,16] = [-80,64]$$

Полученная оценка: $F_{nat}(X) = [-80, 64]$.

B.2.

Схема Горнера позволяет представить многочлен в виде, который уменьшает количество повторяющихся переменных, тем самым снижая эффект зависимости (dependency effect).

Для f_1: Представим $f_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ в виде:

$$f_1(x) = (x-3)x^2 + 2 = ([0,3]-3)[0,3]^2 + 2 = [-3,0].[0,9] + 2 = [-25,0]$$

Полученная оценка: $F_{Horner}(X) = [-25, 2]$.

Для f_2: Представим $f_2(X) = X^3 \sin X - X^2$ в виде:

$$f_2(X) = (X \sin X - 1)X^2 = ([-2,4]\sin([-2,4]) - 1)[-2,4]^2 = ([-2,4].[-1,1] - 1).[0,16]$$

$$= [-5,3].[0,16] = [-80,48]$$

Полученная оценка: $F_{Horner}(X) = [-80, 48]$.

B.3.

Дифференциальная центрированная форма (DCF) использует разложение функции в ряд Тейлора первого порядка.

$$f(X) = f(c) + f'(X)(X - c), \quad \text{где } c\text{— центр интервала X.}$$

Для f_1: Пусть $c = 1.5, f_1(1.5) = -1.375$.

$f_1'(x) = 3x^2 - 6x$ На интервале $[0,3]$, $f_1'(x)$ имеет минимум в точке $x = 1$ (f(x)=6x-6=0) и максимум в точке $x = 3$.

$f_1'(1) = 3*1^2 - 6*1 = -3,\ f_1'(3) = 3*3^2 - 6*3 = 9$

$f_1'(X) = [-3, 9]$

$f_1(X) = -1.375 + [-3,9].[-1.5,1.5] = [-14.875, 12.125]$

Полученная оценка: $F_{DCF}(X) = [-14.875, 12.125]$.

Для f_2: Пусть $c = 1, f_2(1) = -0.159$.

$f_2'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x - 2x$

$f_2'(X) = [-86.158, 4.564]$

$f_2(X) = -0.159 + [-86.158, 4.564].[-3,3] = [-258.633, 258.315]$

Полученная оценка: $F_{DCF}(X) = [-258.633, 258.315]$.

B.4.

Наклонная центрированная форма (SCF) использует понятие наклонной функции (slope function) $s(x, y)$, которая представляет собой интервал, содержащий все частные производные в интервале $[x, y]$.

$$f(X) = f(c) + S(X, c)(X - c), \quad \text{где } S(X, c)\text{— интервальная оценка наклонной функции.}$$

$$S(X, c) = \frac{f(X) - f(c)}{x - c}$$

Для f_1: Пусть $c = 1.5, f_1(1.5) = -1.375$.

$$S_1(x, c) = x^2 - 1.5x - 2.25$$

На интервале $[0, 3]$, $S_1(x)$ имеет минимум в точке $x = 0.75$ и максимум в точке $x = 3$.

$S_1(0.75) = 0.75^2 - 1.5 * 0.75 - 2.25 = -2.8125$, $S_1(3) = 3^2 - 1.5 * 2 - 2.25 = 2.25$

$S_1(X, c) = [-2.8125, 2.25]$

$f_1(X) = -1.375 + [-2.8125, 2.25].[-1.5, 1.5] = [-5.594, 2.844]$

Полученная оценка: $F_{SCF}(X) = [-5.594, 2.844]$.

Для f_2: Пусть $c = 1, f_2(1) = -0.159$.

$$S_2(x, c) = \frac{x^3 \sin x - x^2 - \sin 1 + 1}{x - 1}$$

$S_2(X, c) = [-21.426, 3.433]$

$f_2(X) = -0.159 + [-21.426, 3.433].[-3, 3] = [-128.715, 128.397]$

Полученная оценка: $F_{SCF}(X) = [-128.715, 128.397]$.

B.5.

Бицентрированная форма (BCF)— это пересечение двух центрированных форм с разными центрами.

Для f_1: Пусть $c_1 = 1.5$, (результат в пункте B.4): $F_1(X) = [-5.594, 2.844]$.

Центр $c_2 = 2$ (критическая точка $f_1(x)$):

$f_1(2) = -2$

$X - c_2 = [0, 3] - 2 = [-2, 1]$

Наклонная функция $S(x, c_2) = x^2 - x - 2$

Область значений $S_1(x, c_2)$ на [0, 3]: $s_1'(x) = 2x - 1 = 0$ при $x = 0.5$.

Значения $S_1(0) = -2, S_1(0.5) = -2.25, S_1(3) = 4$.

$S_1(X) = [-2.25, 4]$.
$f_1(X) = -2 + [-2.25, 4].[-2, 1] = [-10, 2.5]$
$F_{BCF}(X) = [-5.594, 2.844] \cap [-10, 2.5] = [-5.594, 2.5]$
Полученная оценка: $F_{BCF}(X) = [-5.594, 2.5]$.

Для f_2: Пусть $c_1 = 1$, (результат в пункте B.4): $F_2(X) = [-128.715, 128.397]$.
Центр $c_2 = 2.258$ (критическая точка $f_2(x)$):
$f_2(2) = 3.8$
$X - c_2 = [-2, 4] - 2.258 = [-4.258, 1.742]$
Наклонная функция $S_2(x, c_2) = \frac{x^3 \sin(x) - x^2 - 3.8}{x - 2.258}$
$S_2(X) = [-39.171, 3.564]$.
$f_2(X) = 3.8 + [-39.171, 3.564].[-4.258, 1.742] = [-64.436, 170.59]$
$F_{BCF}(X) = [-128.715, 128.397] \cap [-64.436, 170.59] = [-64.436, 128.397]$
Полученная оценка: $F_{BCF}(X) = [-64.436, 128.397]$.

C.

C.1.

Константа Липшица L — это верхняя граница модуля производной функции на заданном интервале, то есть $|f'(x)| \leq L$ для всех $x \in X$.

Для f_1: $f_1'(x) = 3x^2 - 6x$
Константа Липшица:

$$L_1 = \max_{x \in [0,3]} |f_1'(x)| = 9.$$

Для f_2: $f_2'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x - 2x$
Константа Липшица:

$$L_2 = \max_{x \in [-2,4]} |f_2'(x)| = 86.16.$$

C.2.

Полуширина интервала:

$$rad(A) = \frac{upper(A) - lower(A)}{2}$$

Теоретическая оценка погрешности по следствию из теоремы Липшица:

$$rad(F(X)) \leq L.rad(X)$$

Эта формула дает верхнюю границу для полуширины любого интервального расширения.

Для f_1**:** $rad(X) = \frac{3-0}{2} = 1.5$

Теоретическая оценка: $rad(F(X)) \le 9 * 1.5 = 13.5$

Для f_2**:** $rad(X) = \frac{4-(-2)}{2} = 3$

Теоретическая оценка: $rad(F(X)) \le 86.16 * 3 = 258.48$

C.3.

Для f_1**:** $ran(f_1, [0, 3]) = [-25, 29]$

$rad(ran(F_{nat}(X)) = \frac{29-(-27)}{2} = 28 > 3$

Это объясняется эффектом зависимости (dependency effect). Поскольку переменная x встречается в выражении несколько раз, интервальная арифметика считает их независимыми, что приводит к чрезмерному раздуванию интервала и потере точности.

Для f_2**:** $ran(f_2, [-2, 4]) = [-80, 64]$

$rad(ran(F_{nat}(X)) = \frac{64-(-80)}{2} = 72 < 258.48$

Теория Липшица предоставляет только верхнюю границу для погрешности. В данном случае, интервальное расширение дает приемлемую оценку, которая соответствует теоретическому пределу. Это подчеркивает полезность интервального анализа для оценки сложных функций, где точные вычисления затруднены.

D.

Для f_1**:**

$$L.rad(X) = 13.5$$

Метод	**Оценка** $F(X)$	**rad**$(F(X))$
Точная область	$[-2, 2]$	2
Естественное	$[-25, 29]$	27
Горнер	$[-25, 2]$	13.5
Дифференциальная центрированная	$[-14.875, 12.125]$	13.5
Наклонная центрированная	$[-5.594, 2.844]$	4.22
Бицентрированная	$[-5.594, 2.5]$	4.047

Для f_2**:**

$$L.rad(X) = 258.48$$

Метод	**Оценка** $F(X)$	$\mathbf{rad}(F(X))$
Точная область	$[-64.44, 3.8]$	34.12
Естественное	$[-80, 64]$	72
Горнер	$[-80, 48]$	64
Дифференциальная центрированная	$[-258.633, 258.315]$	258.474
Наклонная центрированная	$[-128.715, 128.397]$	128.556
Бицентрированная	$[-64.436, 128.397]$	96.57

4 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

5 Обсуждение

- Метод естественного интервального расширения: Это самый простой и наименее точный метод из-за проблемы зависимости переменных, которая приводит к сильной переоценке области значений.
- Метод естественного интервального расширения: Это самый простой и наименее точный метод из-за проблемы зависимости переменных, которая приводит к сильной переоценке области значений.
- Метод с использованием схемы Горнера: Этот метод значительно повышает точность для полиномов, поскольку алгебраическая перегруппировка выражения помогает снизить проблему зависимости переменных.
- Дифференциальная центрированная форма: Точность этого метода зависит от ширины интервала производной. Если производная сильно колеблется, этот метод будет давать неточную оценку.
- Наклонная центрированная форма: Этот метод значительно точнее дифференциальной формы, так как использует более точную оценку изменения функции.
- Бицентрированная форма: Это самый точный метод, который использует пересечение интервалов от нескольких оценок, чтобы получить наиболее узкую и точную область значений.

6 Приложение

Код программы GitHub URL:

https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab