Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №1

по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнила студентка
группы 5030102/20202 Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил
Преподаватель Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$$Ax = b, x = (x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

с матрицей A:

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 0.95 & 1.00 \\ 1.05 & 1.00 \\ 1.10 & 1.00 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathrm{rad}A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \tag{3}$$

или

$$\mathrm{rad}A = \delta \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Задачи:

1. Найти диапазонизначений δ, при которых $0 \in detA$

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta,\ 0.95 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.05 - \delta,\ 1.05 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \\ [1.10 - \delta,\ 1.10 + \delta] & [1.00 - \delta, 1.00 + \delta] \end{pmatrix} \tag{5}$$

   или

$$A = \begin{pmatrix} [0.95 - \delta,\ 0.95 + \delta] & 1.00 \\ [1.05 - \delta,\ 1.05 + \delta] & 1.00 \\ [1.10 - \delta,\ 1.10 + \delta] & 1.00 \end{pmatrix} \tag{6}$$

2. Для минимального значения радиуса матричных элементов $\min \delta$ найти точечную матрицу A':

$$detA' = 0$$

3. Обсудить факт $detA' = 0$ для случая задачи 2-ракурсной томографии и линейной регрессии

2 Теория

2.1 Интервальные матрицы

Интервальная матрица $[A]$ — это матрица, каждый элемент которой задан в виде интервала:

$$[a_{ij}] = [\mathrm{mid} a_{ij} - \mathrm{rad} a_{ij},\, \mathrm{mid} a_{ij} + \mathrm{rad} a_{ij}]$$

где $\mathrm{mid} a_{ij}$ — середина интервала, $\mathrm{rad} a_{ij}$ — радиус интервала. Таким образом, каждый элемент a_{ij} может принимать любое значение в заданном интервале:

$$a_{ij} \in [\mathrm{mid} a_{ij} - \mathrm{rad} a_{ij},\, \mathrm{mid} a_{ij} + \mathrm{rad} a_{ij}]$$

Интервальные матрицы позволяют учитывать неопределенности в данных, например, погрешности измерений или варьирующиеся параметры системы.

2.2 Особенность матрицы

Матрица A называется **особенной** (сингулярной), если её определитель равен нулю:

$$\det(A) = 0$$

Для квадратной матрицы это означает, что строки или столбцы линейно зависимы. Для прямоугольной матрицы (например, 3×2) особенность определяется линейной зависимостью столбцов:

$$\text{столбцы } c_1, c_2 \text{ коллинеарны} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda : c_1 = \lambda c_2$$

2.3 Концепция collinear columns

Матрица A' считается вырожденной, если её две колонки линейно зависимы, то есть существует коэффициент λ такой, что:

$$a_i \approx \lambda b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где a_i и b_i — элементы первой и второй колонок соответственно. Этот коэффициент λ определяется как для каждого ряда через интервалы:

$$\lambda_i \in \left[\frac{a_{\min}^{(i)}}{b_{\max}^{(i)}}, \frac{a_{\max}^{(i)}}{b_{\min}^{(i)}} \right].$$

Пересечение этих интервалов для всех строк даёт общий диапазон λ, в котором колонки могут быть коллинеарны.

2.4 Применение в задачах

- **TOMO**: оба элемента строки варьируются $\pm\delta$: $[a_i - \delta, a_i + \delta]$, $[b_i - \delta, b_i + \delta]$
- **REGRESS**: только первый элемент строки варьируется, второй фиксирован: $[a_i - \delta, a_i + \delta], b_i$

3 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

4 Результаты

4.1 Для 2-ракурсной томографии

$\forall \delta \geq 0.037042 : 0 \in det(A)$

$$A' = \begin{pmatrix} 0.98703 & 0.96297 \\ 1.03796 & 1.01265 \\ 1.06296 & 1.03704 \end{pmatrix}$$

4.2 Для линейной регрессии

$\forall \delta \geq 0.075006 : 0 \in det(A)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1.02499 & 1.00 \\ 1.02499 & 1.00 \\ 1.02499 & 1.00 \end{pmatrix}$$

5 Обсуждение

Факт $\det A' = 0$ для обеих задач (2-ракурсная томография и линейная регрессия) указывает на критический уровень неопределенности δ, при котором система становится вырожденной.

В томографии это означает, что система может иметь бесконечно много решений или быть несовместной, что приводит к нестабильности реконструкции.

В линейной регрессии вырожденность матрицы наблюдений делает невозможным применение метода наименьших квадратов без регуляризации.

Таким образом, $\det A' = 0$ служит индикатором предельного значения неопределенности, влияющего на корректность и устойчивость решения задачи.

6 Приложение

Код программы GitHub URL:

https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab