

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчёт по лабораторной работе №5

по дисциплине

«Интервальный анализ»

Выполнила студентка
группы 5030102/20202

Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил
Преподаватель

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Цель работы	3
2 Постановка задачи	3
3 Теория	4
3.1 Интервальная система	4
3.2 Метод Кравчика	4
4 Результаты	4
4.1 Параметр $x_c = 0$	5
4.1.1 Корень:	5
4.1.2 Корень:	6
4.2 Параметр $x_c = 0.5$	7
4.2.1 Корень:	7
4.2.2 Корень:	8
4.3 Параметр $x_c = 1.0$	9
4.3.1 Корень:	9
4.3.2 Корень:	10
4.3.3 Корень:	11
4.4 Параметр $x_c = 1.2$	12
4.4.1 Корень:	12
4.4.2 Корень:	13
4.4.3 Корень:	14
4.4.4 Корень:	15
5 Программная реализация	16
6 Выводы В.3	17
7 Приложение	18

1 Цель работы

Получить практические навыки решения интервальных систем нелинейных уравнений и исследовать особенности применения интервальных методов для нахождения точек пересечения кривых, а также изучить влияние выбора начального приближения и параметров системы на сходимость итерационного процесса.

2 Постановка задачи

Задана система нелинейных уравнений, описывающая точку касания f_1 и f_2 :

$$f(X) = \begin{cases} f_1(X) = X_1 - X_2^2 = 0, \\ f_2(X) = (X_1 - x_c)^2 + (X_2 - y_c)^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где x_c — параметр, принимающий значения из набора $[0, 0.5, 1.0, 1.2]$, $y_c = 0$.

A. Для каждого значения параметра x_c из заданного набора:

- A.1 Выбрать начальное интервальное приближение $X^{(0)} = [X_1] \times [X_2]$, обеспечивающее старт итерационного процесса.
- A.2 Выполнить не менее трёх итераций методом Кравчика для уточнения локализации решения.
- A.3 На каждом шаге фиксировать получающиеся интервальные векторы $X^{(k)}$.

B. Провести анализ результатов:

- B.1 Для каждого x_c построить графическую иллюстрацию, отображающую последовательные приближения (брюсы $X^{(k)}$) и линии уровней функций $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$.
- B.2 Сравнить скорость сходимости метода для разных значений параметра x_c . Объяснить наблюдаемые различия.
- B.3 Проанализировать влияние выбора начального приближения $X^{(0)}$ на возможность старта и сходимость итерационного процесса.

Примечание: В ходе работы следует обратить внимание на возможное расширение интервалов на некоторых итерациях (как в приведённом примере для координаты x_1) и связать это с геометрической интерпретацией задачи.

3 Теория

3.1 Интервальная система

Рассматривается система:

$$\begin{cases} f_1(X) = X_1 - X_2^2 = 0, \\ f_2(X) = (X_1 - x_c)^2 + (X_2 - y_c)^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

где $x_c \in \{0, 0.5, 1.0, 1.2\}$, а $y_c = 0$.

Первая функция задаёт параболу $x_1 = x_2^2$, а вторая — окружность радиуса 1 с центром $(x_c, 0)$. Их пересечения и являются решениями системы.

3.2 Метод Кравчика

Пусть X — интервальный вектор. Определим:

$$x_0 = \text{mid}(X),$$

$$K(X) = x_0 - Yf(x_0) + (I - YJ(X))(X - x_0),$$

где:

- $J(X)$ — интервальная якобиана,
- $Y = J(x_0)^{-1}$ — обратная матрица к якобиане в центре интервала,
- $K(X)$ — новый интервальный вектор, содержащий потенциальные корни.

Если выполняется включение:

$$K(X) \subset \text{int}(X),$$

то вектор X гарантированно содержит единственное решение системы.

В практике часто применяется итерация:

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}.$$

Этот процесс повторяется, пока интервалы не перестанут уменьшаться.

4 Результаты

На графике представлены следующие элементы:

- **Синяя линия** — кривая уровня $f_1(X) = 0$, представляющая параболу

$$X_1 = X_2^2.$$

- **Красная линия** — кривая уровня $f_2(X) = 0$, соответствующая окружности радиуса 1 с центром в точке $(x_c, 0)$:

$$(X_1 - x_c)^2 + X_2^2 = 1.$$

- **Зелёные прямоугольники** — интервальные векторы $X^{(k)}$, получаемые на последовательных итерациях метода Кравчика. Каждый прямоугольник показывает область, в которой гарантированно находится решение.

Подписи X^0, X^1, X^2, X^3 обозначают шаги итерационного процесса.

4.1 Параметр $x_c = 0$

Решая $(X_2^2 - 0)^2 + X_2^2 - 1 = 0$ даёт:

4.1.1 Корень:

$$x_2 \approx -0.786, \quad x_1 \approx 0.618;$$

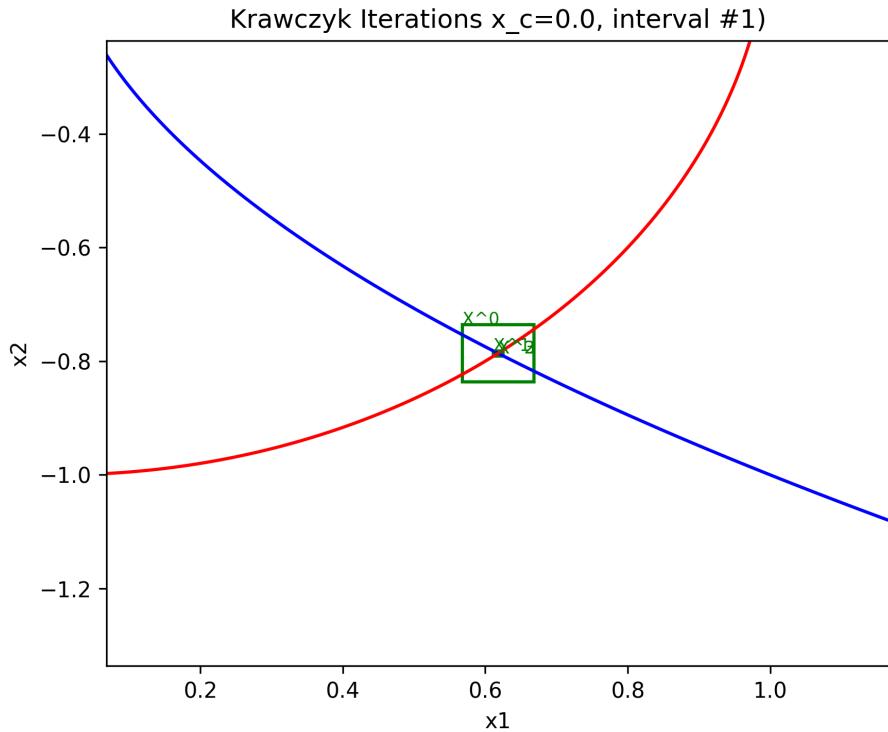
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.568, 0.668] \times [-0.836, -0.736].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} : x_1 &\in [0.5680, 0.6680], & x_2 &\in [-0.8361, -0.7362] \\ X^{(1)} : x_1 &\in [0.6113, 0.6247], & x_2 &\in [-0.7908, -0.7815] \\ X^{(2)} : x_1 &\in [0.6179, 0.6181], & x_2 &\in [-0.7862, -0.7861] \\ X^{(3)} : x_1 &\in [0.6180, 0.6180], & x_2 &\in [-0.7861, -0.7861] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



4.1.2 Корень:

$$x_2 \approx 0.786, \quad x_1 \approx 0.618;$$

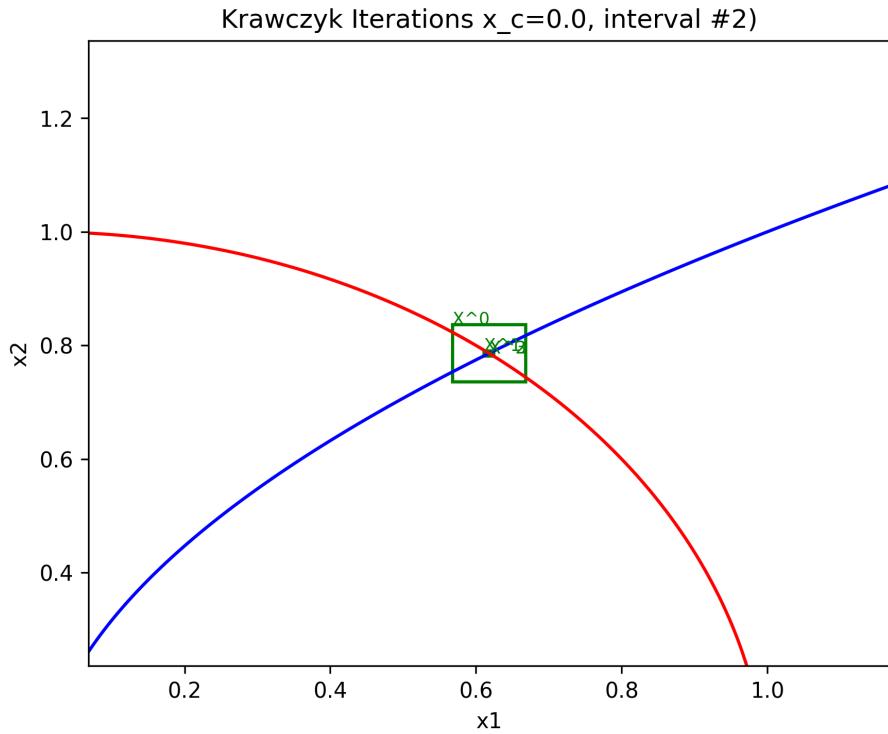
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.568, 0.668] \times [0.736, 0.836].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} : x_1 &\in [0.5680, 0.6680], \quad x_2 \in [0.7362, 0.8361] \\ X^{(1)} : x_1 &\in [0.6113, 0.6247], \quad x_2 \in [0.7815, 0.7908] \\ X^{(2)} : x_1 &\in [0.6179, 0.6181], \quad x_2 \in [0.7861, 0.7862] \\ X^{(3)} : x_1 &\in [0.6180, 0.6180], \quad x_2 \in [0.7861, 0.7861] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



Линии уровней $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$ пересекаются под достаточно острый углом, матрица Якоби хорошо обусловлена. В результате интервалы на каждой итерации быстро и монотонно сужаются. Уже к третьей итерации ширина $X^{(k)}$ составляет порядка 10^{-6} . Это соответствует «быстрой» и устойчивой сходимости.

4.2 Параметр $x_c = 0.5$

Решая $(X_2^2 - 0.5)^2 + X_2^2 - 1 = 0$ даёт:

4.2.1 Корень:

$$x_2 \approx -0.931, \quad x_1 \approx 0.866;$$

Выбор:

$$X^{(0)} = [0.816 \ 0.916] \times [-0.981 \ -0.881].$$

Итерации метода Кравчика:

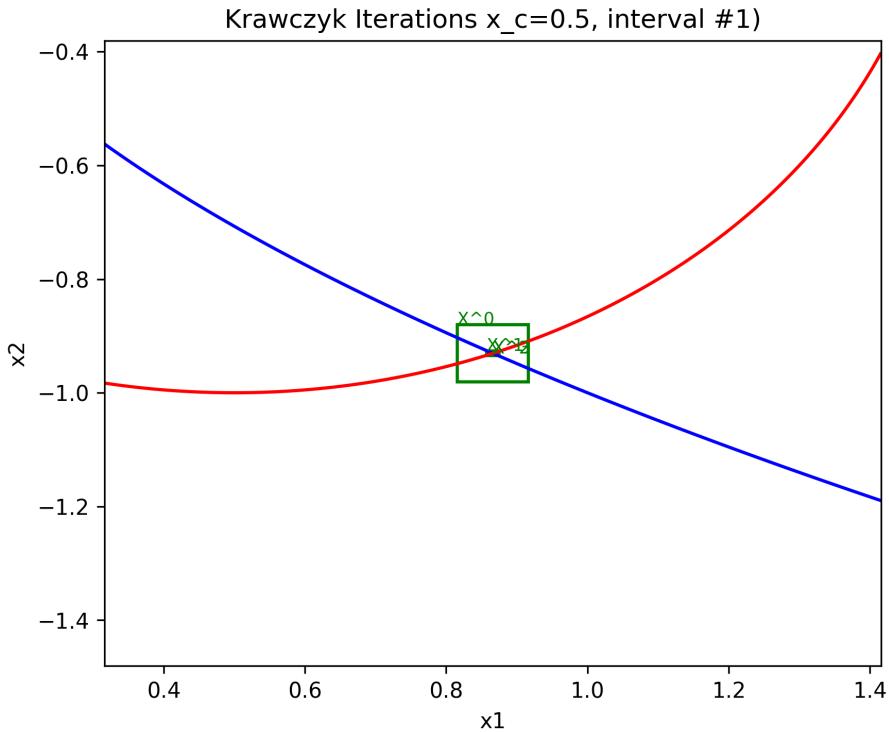
$$X^{(0)} : x_1 \in [0.8160, 0.9160], \quad x_2 \in [-0.9806, -0.8806]$$

$$X^{(1)} : x_1 \in [0.8574, 0.8747], \quad x_2 \in [-0.9348, -0.9264]$$

$$X^{(2)} : x_1 \in [0.8659, 0.8662], \quad x_2 \in [-0.9307, -0.9305]$$

$$X^{(3)} : x_1 \in [0.8660, 0.8660], \quad x_2 \in [-0.9306, -0.9306]$$

Графическая иллюстрация:



4.2.2 Корень:

$$x_2 \approx 0.931, \quad x_1 \approx 0.866.$$

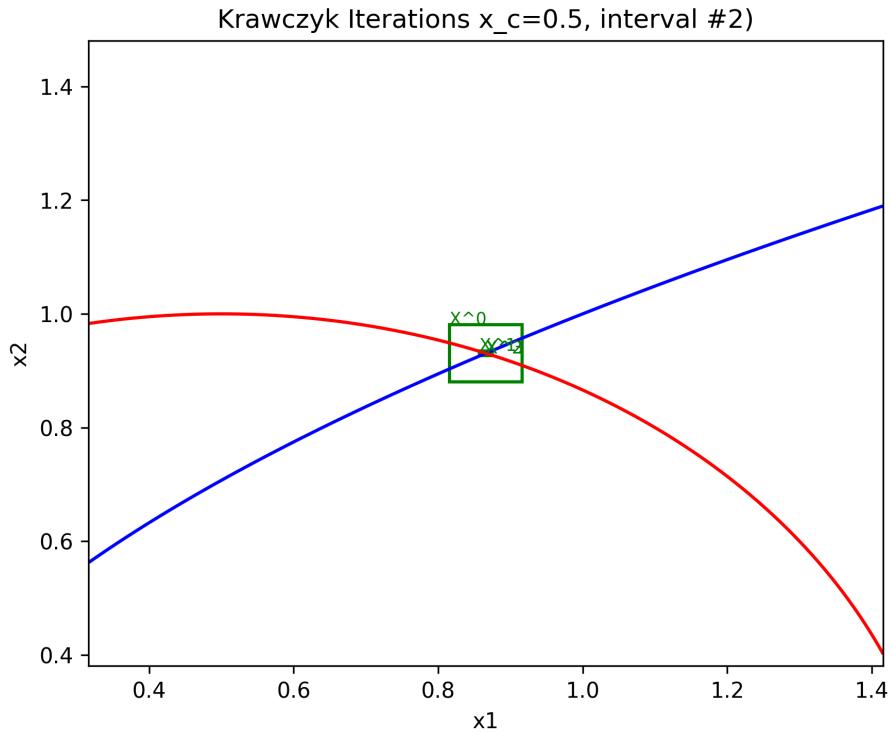
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.816 \ 0.916] \times [0.881 \ 0.981].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} : x_1 &\in [0.8160, 0.9160], & x_2 &\in [0.8806, 0.9806] \\ X^{(1)} : x_1 &\in [0.8574, 0.8747], & x_2 &\in [0.9264, 0.9348] \\ X^{(2)} : x_1 &\in [0.8659, 0.8662], & x_2 &\in [0.9305, 0.9307] \\ X^{(3)} : x_1 &\in [0.8660, 0.8660], & x_2 &\in [0.9306, 0.9306] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



Характер поведения аналогичен предыдущему случаю. Пересечение кривых остаётся достаточно выраженным, что обеспечивает высокую устойчивость процесса. Метод демонстрирует почти такую же скорость и качество сходимости, как при $x_c = 0$. Уменьшение интервалов равномерное и предсказуемое.

4.3 Параметр $x_c = 1.0$

Решая $(X_2^2 - 1.0)^2 + X_2^2 - 1 = 0$) даёт:

4.3.1 Корень:

$$x_2 = -1, \quad x_1 = 1;$$

Выбор:

$$X^{(0)} = [0.95 \ 1.05] \times [-1.05 \ -0.95].$$

Итерации метода Кравчика:

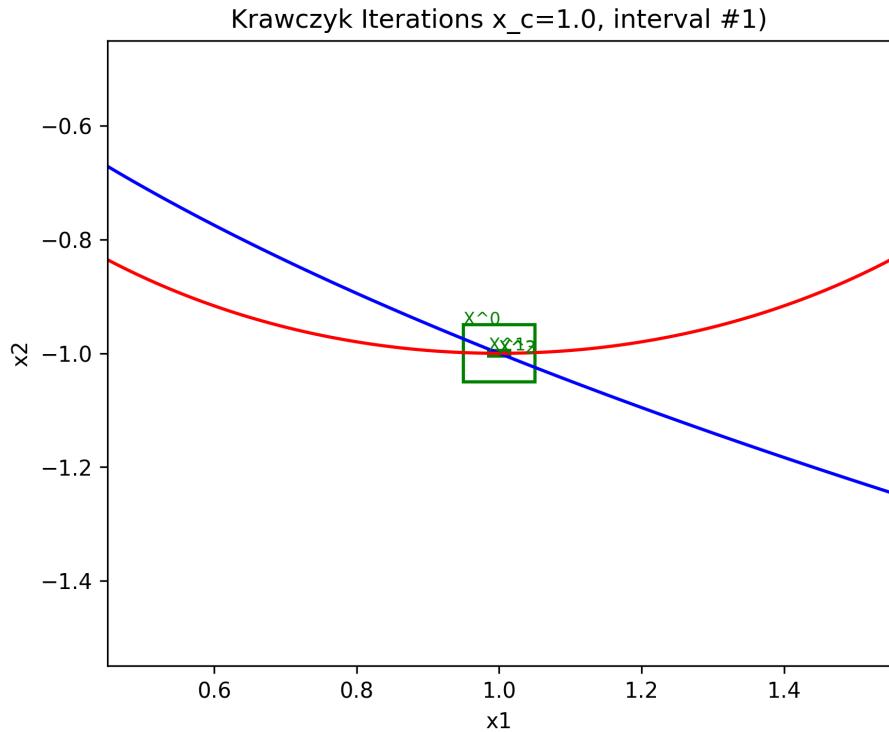
$$X^{(0)} : x_1 \in [0.95, 1.05], \quad x_2 \in [-1.05, -0.95]$$

$$X^{(1)} : x_1 \in [0.985, 1.015], \quad x_2 \in [-1.005, -0.995]$$

$$X^{(2)} : x_1 \in [0.9994, 1.0006], \quad x_2 \in [-1.0003, -0.99975]$$

$$X^{(3)} : x_1 \in [0.9999, 1.0000], \quad x_2 \in [-1.0000, -0.99999]$$

Графическая иллюстрация:



4.3.2 Корень:

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 0.$$

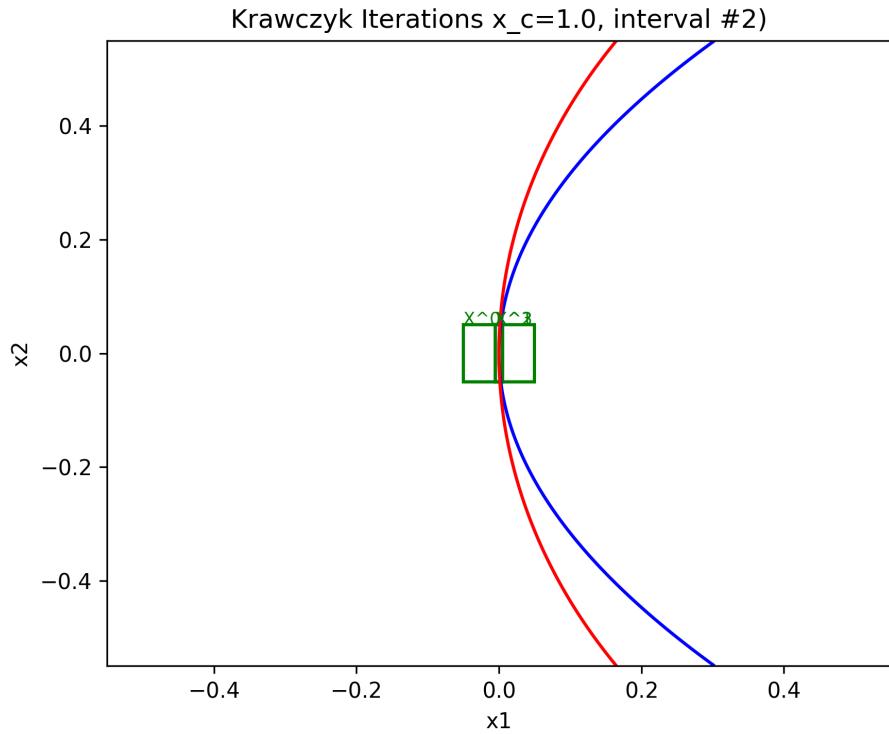
Выбор:

$$X^{(0)} = [-0.05 \ 0.05] \times [-0.05 \ 0.05].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &: x_1 \in [-0.05, 0.05], \quad x_2 \in [-0.05, 0.05] \\ X^{(1)} &: x_1 \in [-0.005, 0.005], \quad x_2 \in [-0.005, 0.005] \\ X^{(2)} &: x_1 \in [-0.005, 0.005], \quad x_2 \in [-0.005, 0.005] \\ X^{(3)} &: x_1 \in [-0.005, 0.005], \quad x_2 \in [-0.005, 0.005] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



4.3.3 Корень:

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 1;$$

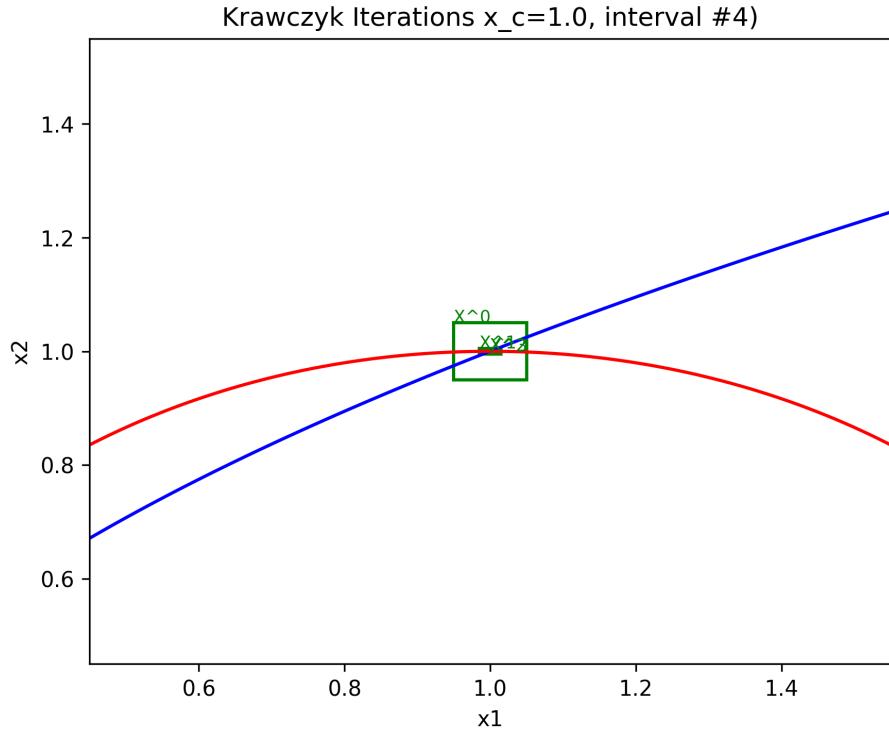
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.95 \ 1.05] \times [0.95 \ 1.05].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &: x_1 \in [0.95, 1.05], \quad x_2 \in [0.95, 1.05] \\ X^{(1)} &: x_1 \in [0.985, 1.015], \quad x_2 \in [0.995, 1.005] \\ X^{(2)} &: x_1 \in [0.9994, 1.0006], \quad x_2 \in [0.99975, 1.0003] \\ X^{(3)} &: x_1 \in [0.9999, 1.0000], \quad x_2 \in [0.99999, 1.0000] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



Здесь наблюдается принципиально иное поведение. Окружность располагается так, что становится почти касательной к параболе, и система приобретает вырожденный характер. В окрестности точки $(1, 0)$ матрица Якоби близка к вырожденной:

$$\det J(X) \approx 0.$$

Это приводит к значительному ухудшению обусловленности.

Для начальных интервалов, расположенных около $(1, \pm 1)$, сходимость сохраняется, но становится заметно медленнее. Для начального приближения, расположенного в центре $(X^{(0)} \approx [-0.05, 0.05]^2)$, метод фактически перестаёт сужать интервалы:

$$X^{(k+1)} \approx X^{(k)}.$$

Таким образом, данный случай демонстрирует сильное замедление или полную потерю сходимости.

4.4 Параметр $x_c = 1.2$

Решая $(X_2^2 - 1.2)^2 + X_2^2 - 1 = 0$ даёт:

4.4.1 Корень:

$$x_2 = -0.961, \quad x_1 = 0.924;$$

Выбор:

$$X^{(0)} = [0.874 \ 0.974] \times [-1.011 \ -0.911].$$

Итерации метода Кравчика:

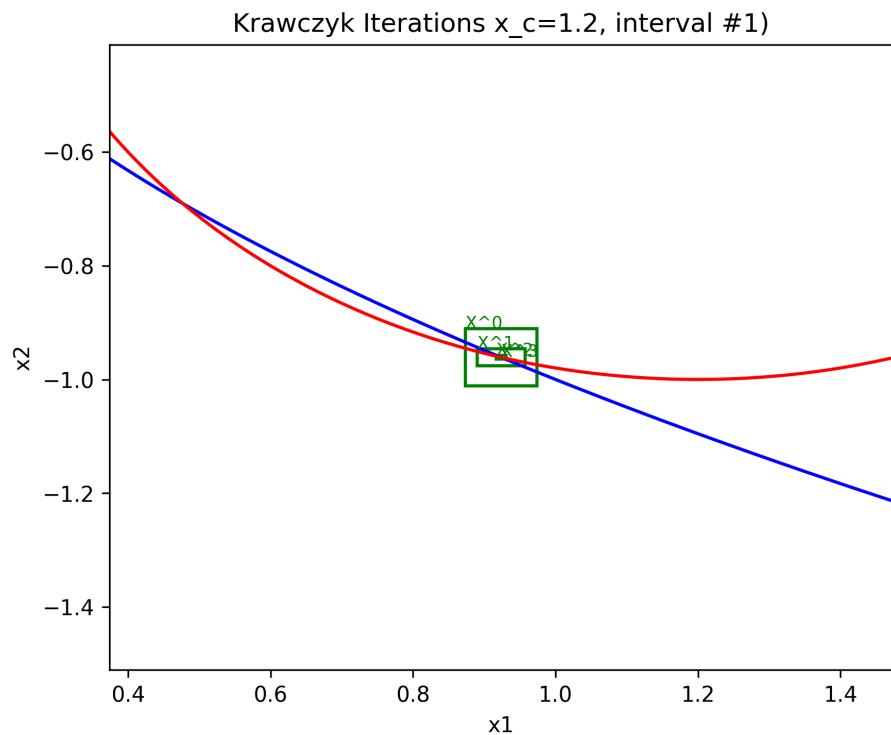
$$X^{(0)} : x_1 \in [0.874, 0.974], \quad x_2 \in [-1.011, -0.911]$$

$$X^{(1)} : x_1 \in [0.890, 0.957], \quad x_2 \in [-0.976, -0.946]$$

$$X^{(2)} : x_1 \in [0.9166, 0.9306], \quad x_2 \in [-0.964, -0.958]$$

$$X^{(3)} : x_1 \in [0.9233, 0.9239], \quad x_2 \in [-0.9612, -0.9609]$$

Графическая иллюстрация:



4.4.2 Корень:

$$x_2 = 0.961, \quad x_1 = 0.924;$$

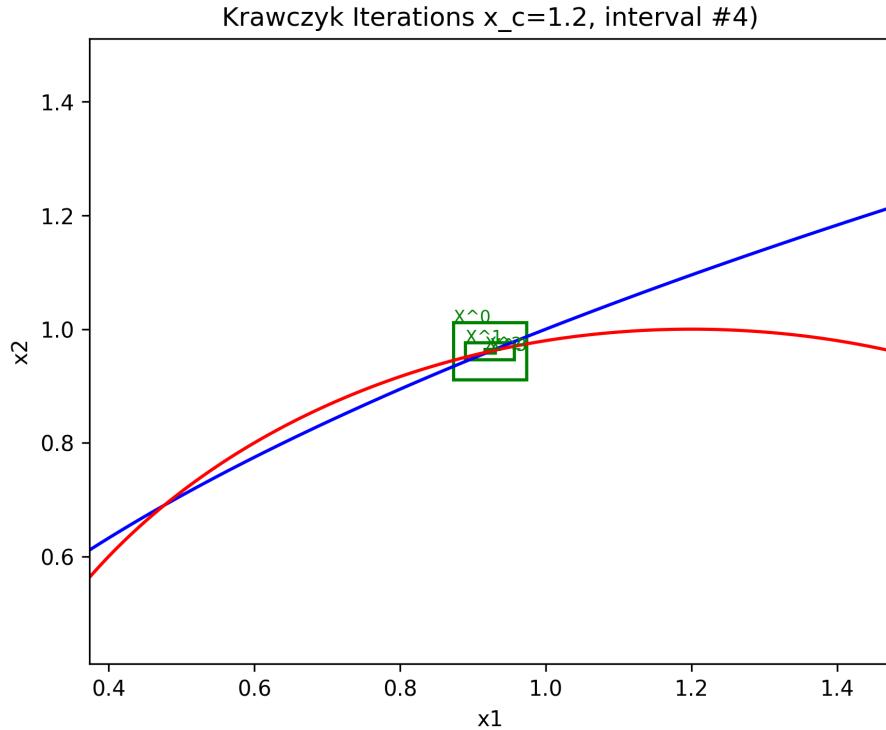
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.874 \ 0.974] \times [0.911 \ 1.011].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} : x_1 &\in [0.874, 0.974], \quad x_2 \in [0.911, 1.011] \\ X^{(1)} : x_1 &\in [0.890, 0.957], \quad x_2 \in [0.946, 0.976] \\ X^{(2)} : x_1 &\in [0.9166, 0.9306], \quad x_2 \in [0.958, 0.964] \\ X^{(3)} : x_1 &\in [0.9233, 0.9239], \quad x_2 \in [0.9609, 0.9612] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



4.4.3 Корень:

$$x_2 = -0.69, \quad x_1 = 0.476$$

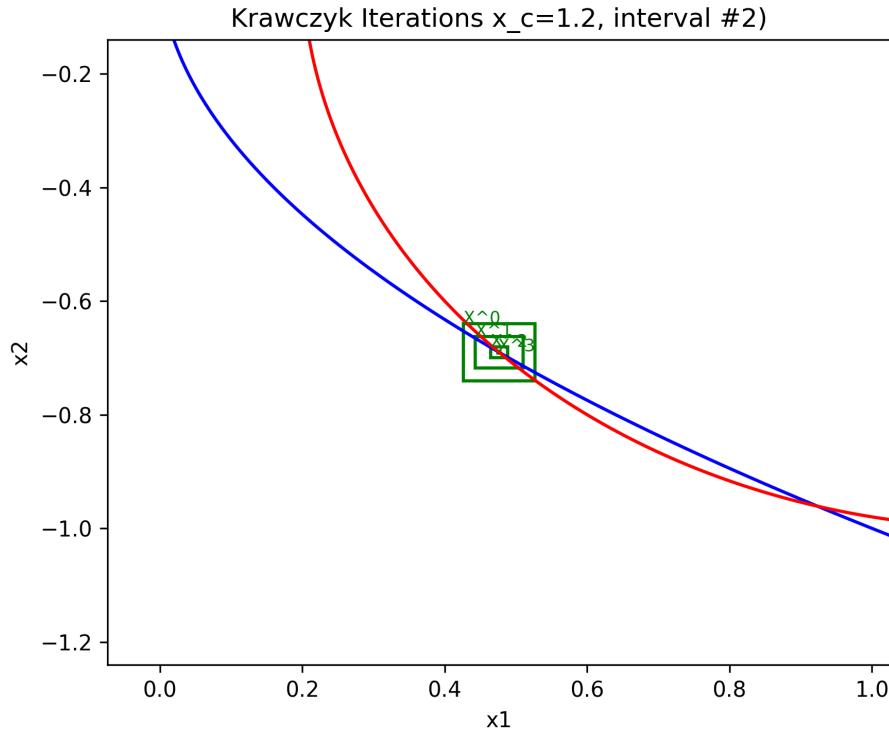
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.426 \ 0.05] \times [-0.74 \ -0.64].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} : x_1 &\in [0.426, 0.526], \quad x_2 \in [-0.740, -0.64] \\ X^{(1)} : x_1 &\in [0.443, 0.51], \quad x_2 \in [-0.718, -0.662] \\ X^{(2)} : x_1 &\in [0.464, 0.488], \quad x_2 \in [-0.700, -0.680] \\ X^{(3)} : x_1 &\in [0.475, 0.478], \quad x_2 \in [-0.691, -0.689] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



4.4.4 Корень:

$$x_2 = 0.69, \quad x_1 = 0.476$$

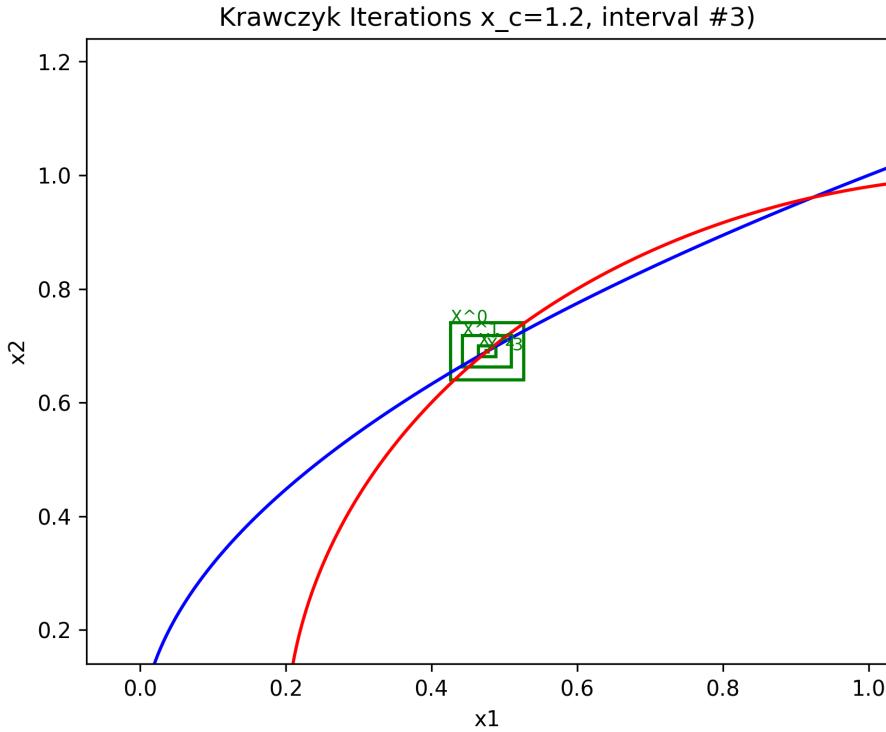
Выбор:

$$X^{(0)} = [0.426 \ 0.05] \times [0.64 \ 0.74].$$

Итерации метода Кравчика:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &: x_1 \in [0.426, 0.526], \quad x_2 \in [0.640, 0.740] \\ X^{(1)} &: x_1 \in [0.443, 0.51], \quad x_2 \in [0.662, 0.718] \\ X^{(2)} &: x_1 \in [0.464, 0.488], \quad x_2 \in [0.680, 0.700] \\ X^{(3)} &: x_1 \in [0.475, 0.478], \quad x_2 \in [0.689, 0.691] \end{aligned}$$

Графическая иллюстрация:



При этом значениях параметры близки к касательному положению ещё больше, чем при $x_c = 1$. Тем не менее пересечения сохраняются, и метод даёт сходимость. Однако интервалы уменьшаются заметно медленнее, чем при $x_c = 0$ и $x_c = 0.5$. Особенно медленно сужается координата x_2 , что связано с малым углом пересечения кривых.

Вывод В.2 Скорость работы метода Кравчика существенно зависит от положения центра окружности. При малых значениях x_c система хорошо обусловлена, и метод сходится быстро. При значениях x_c , близких к касательности ($x_c = 1.0$ и 1.2), сходимость замедляется или даже становится невозможной. Чем меньше угол пересечения кривых $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$, тем хуже поведение итерационного процесса.

5 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib
3. intvralpy

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

6 Выводы В.3

Полученные результаты позволяют проследить влияние начального приближения на работу метода.

1. Удачный выбор $X^{(0)}$. Если начальный интервал расположен вблизи реального решения, метод Кравчика быстро начинает сужать интервалы, их ширина уменьшается практически на порядок за каждую итерацию. Такое поведение наблюдается:

- для всех начальных интервалов при $x_c = 0$ и $x_c = 0.5$;
- для интервалов, расположенных около $(1, \pm 1)$ при $x_c = 1.0$;
- для всех четырёх интервалов при $x_c = 1.2$.

2. Неудачный выбор $X^{(0)}$. При выборе начального приближения, не содержащего решение или расположенного в области вырождения Якоби, сходимость может не начаться вовсе. Яркий пример — начальный интервал

$$X^{(0)} = [-0.05, 0.05] \times [-0.05, 0.05]$$

при $x_c = 1.0$. В этом случае интервалы практически не изменяются:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)},$$

что означает отсутствие прогресса. Причина — слишком малая информативность производных и близость кривых к касательному положению.

3. Размер начального интервала. Если $X^{(0)}$ слишком большой, возможно расширение интервалов и «интервальный взрыв». Если слишком маленький — метод может просто не захватить реального решения. Правильная стратегия — выбирать начальный интервал достаточно узким, но гарантированно содержащим решение.

4. Геометрическая интерпретация. При хорошем угле пересечения линий $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$ метод проявляет устойчивое и быстрое сужение интервалов. При почти касательном расположении (как при $x_c = 1.0$) даже небольшое смещение начального приближения может приводить к полной потере сходимости.

Итог. Выбор начального приближения играет ключевую роль. Для хорошо обусловленных систем ($x_c = 0$ и 0.5) метод устойчив к выбору $X^{(0)}$. Для плохо обусловленных систем ($x_c = 1.0$ и 1.2) от начального интервала зависит, начнётся ли вообще сходимость.

7 Приложение

Код программы GitHub URL:

<https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab%205>