

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

**Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

**Отчёт по лабораторной работе №3**

по дисциплине

«Интервальный анализ»

Выполнила студентка  
группы 5030102/20202

Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил  
Преподаватель

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1 Цель работы . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачи . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>3 Теоретическая часть . . . . .</b>	<b>4</b>
3.1 Интервальное представление и параметры . . . . .	4
3.2 Распознающий функционал . . . . .	4
3.3 Условие разрешимости . . . . .	4
3.4 Описание последовательности действий и методов коррекции . . . . .	4
<b>4 Результат . . . . .</b>	<b>5</b>
4.1 $A_1x = b_1$ . . . . .	5
4.2 $A_2x = b_2$ . . . . .	8
4.3 $A_3x = b_3$ . . . . .	10
4.4 Сравнительный анализ методов коррекции . . . . .	12
<b>5 Программная реализация . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>6 Вывод . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>7 Приложение . . . . .</b>	<b>13</b>

## 1 Цель работы

Изучить методы анализа и коррекции интервальных линейных систем уравнений (ИСЛАУ) с использованием распознающего функционала  $Tol(x, A, b)$ . Закрепить навыки построения допусковых множеств решений и исследовать влияние  $A-$ ,  $b-$  и  $Ab-$  коррекций на разрешимость системы.

## 2 Постановка задачи

Дан набор интервальных систем линейных уравнений:

$$A_i x = b_i, \quad x = (x_1, x_2), \quad i = \overline{1, 3}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

Для каждой системы  $A_i x = b_i$  необходимо:

- A. Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ. В случае, если допусковое множество непусто:
  - A.1. Найти  $\operatorname{argmax} Tol$  и образующие допускового функционала
  - A.2. Построить график функционала  $Tol(x)$ , отметить точку максимума
  - A.3. Построить графики допускового множества ИСЛАУ на плоскости, отметить точку максимума
- B. Если допусковое множество пусто, необходимо скорректировать систему каждым из описанных ниже способов:
  - B.1. С помощью коррекции правой части ИСЛАУ —  $b$ -коррекция
  - B.2. С помощью коррекции матрицы ИСЛАУ —  $A$ -коррекция
  - B.3. С помощью комбинации предыдущих методов (B.1, B.2) с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ —  $Ab$ -коррекция

- С. Сравнить влияние разных видов коррекций на форму и положение допускового множества. Определить, какой вид коррекции является наименее искажением исходных данных при достижении разрешимости.

## 3 Теоретическая часть

### 3.1 Интервальное представление и параметры

Интервал  $\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$  определяется его срединной точкой *mid* и радиусом *rad*:

$$\text{mid } a = \frac{\bar{a} + \underline{a}}{2}, \quad \text{rad } a = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$$

### 3.2 Распознающий функционал

Распознающий функционал используется для проверки совместимости системы в точке  $x$ :

$$Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad}(b_i) - \left| \text{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^n \text{mid}(a_{ij})(x_j) \right| - \sum_{j=1}^n \text{rad}(a_{ij})|x_j| \right\}$$

### 3.3 Условие разрешимости

Система ИСЛАУ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  имеет **непустое** допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (разрешима) тогда и только тогда, когда:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x, A, b) \geq 0$$

### 3.4 Описание последовательности действий и методов коррекции

Для каждой интервальной системы выполнялась следующая последовательность:

- Проверка исходной системы:** вычислялось максимальное значение допуска  $Tol_{max}$  с помощью функции `ip.linear.Tol.maximize`. Если  $Tol_{max} < 0$ , система считалась неразрешимой.
- А-коррекция:** Корректировались интервалы коэффициентов матрицы  $A$ .

Для каждого ненулевого интервала  $A_{ij}$  вычислялся параметр сужения  $e$ :

$$e = \frac{\text{lower\_bound} + \text{upper\_bound}}{2},$$

где

$$\text{lower\_bound} = \frac{|\text{Tol}_{max}|}{\sum |x_i|}, \quad \text{upper\_bound} = \min \text{rad}(A).$$

Интервалы сужались:

$$A_{ij} = [A_{ij}^{\text{low}} + e, A_{ij}^{\text{high}} - e].$$

Если при этом нижняя граница превышала верхнюю, устанавливалась середина интервала:

$$A_{ij} = \frac{A_{ij}^{\text{low}} + A_{ij}^{\text{high}}}{2}.$$

3. **b-коррекция:** корректировалась правая часть  $b$ . Параметр  $K$  подбирался бинарным поиском: интервалы  $b_i$  расширялись на  $[-K, K]$ , пока система не становилась разрешимой ( $\text{Tol}_{\max} \geq 0$ ).
4. **Ab-коррекция:** Одновременно корректировались матрица  $A$  и правая часть  $b$  через оптимизацию двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$ :

- $\alpha \in (0, 1]$  — коэффициент сужения интервалов матрицы  $A$ ;
- $\beta \geq 1$  — коэффициент расширения интервалов  $b$ .

Выбиралась пара  $(\alpha^*, \beta^*)$ , при которой  $\text{Tol}_{\max} \geq 0$  и минимизировалось отклонение исходных данных:

$$J = w_1(1 - \alpha)^2 + w_2(\beta - 1)^2.$$

После выбора оптимальных  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  строились интервалы:

$$A^* = \text{mid}(A) \pm \alpha^* \cdot \text{rad}(A), \quad b^* = \text{mid}(b) \pm \beta^* \cdot \text{rad}(b).$$

5. **Визуализация:** для каждой системы строились 3D-график функции допуска Tol и 2D-контуры допустимой области. Красные и черные точки показывают максимальное значение Tol и соответствующее решение. Это позволяет наглядно оценить влияние разных видов коррекции на форму и положение допустимого множества.

## 4 Результат

### 4.1 $A_1x = b_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}$$

**A.**

`argmax Tol = -0.277 < 0`

`argmax(x1*, x2*) = [0.4, 0.605]`

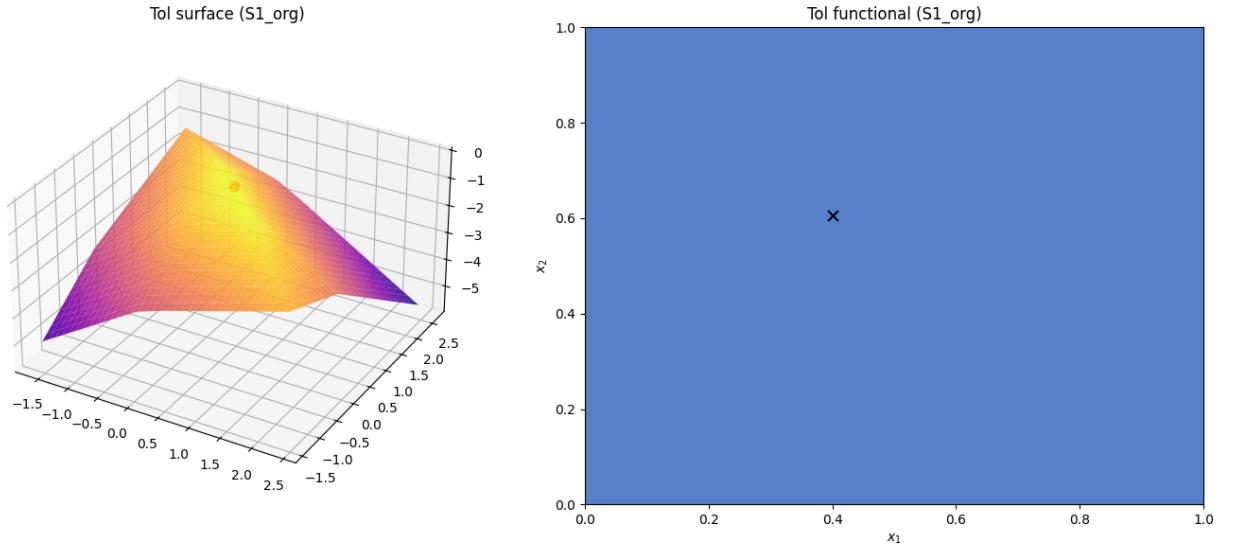


Рис. 1: График для системы  $A_1x = b_1$

### B.1

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.092 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

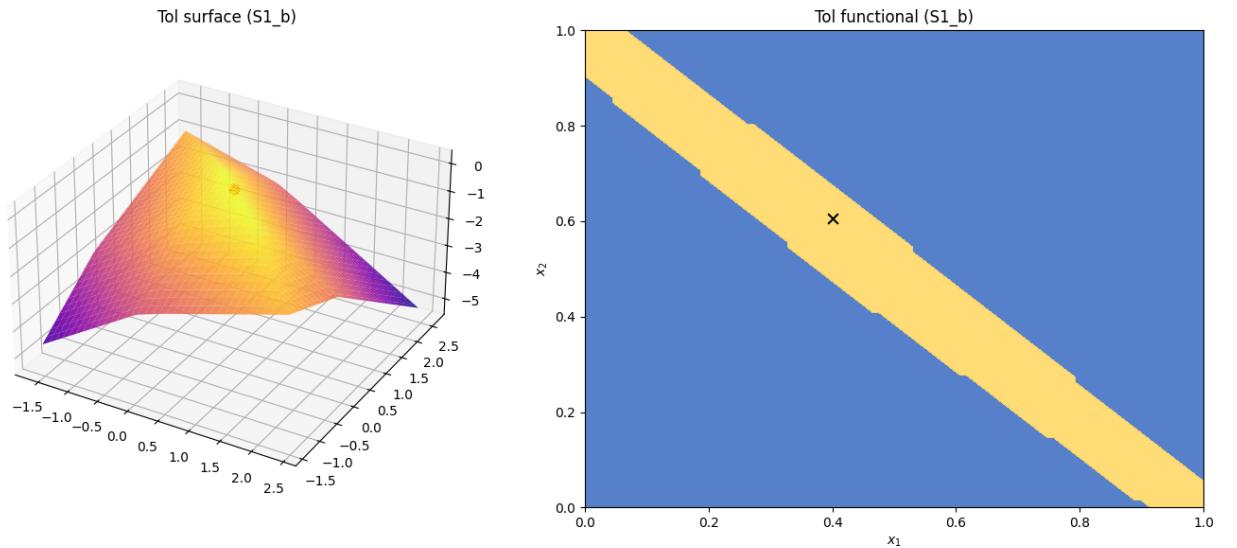


Рис. 2: График после b-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

### B.2

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

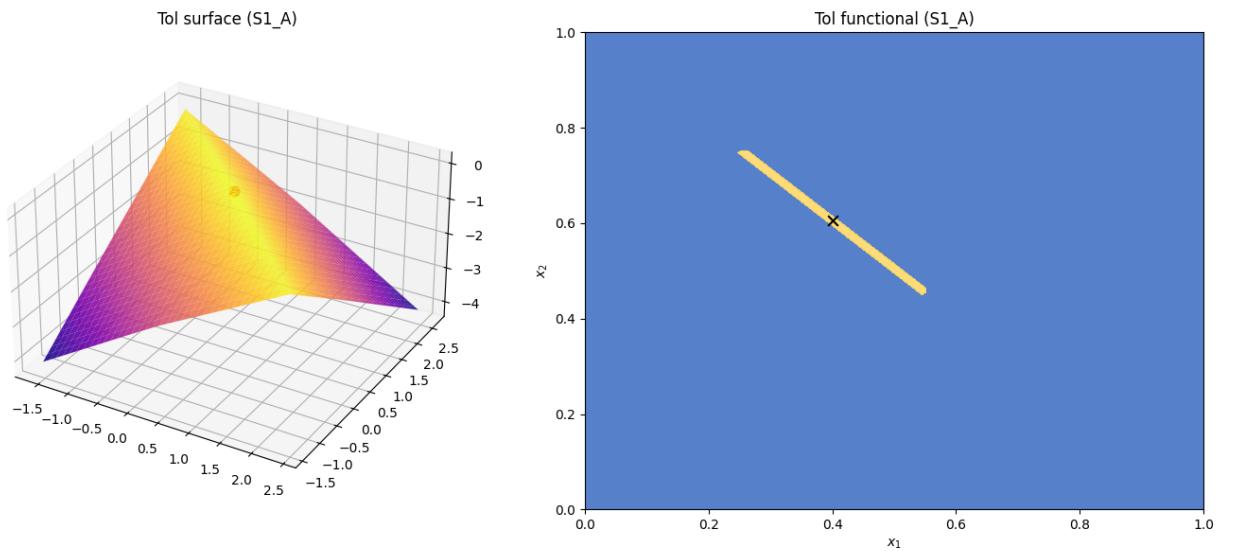


Рис. 3: График после А-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

### B.3

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0006 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

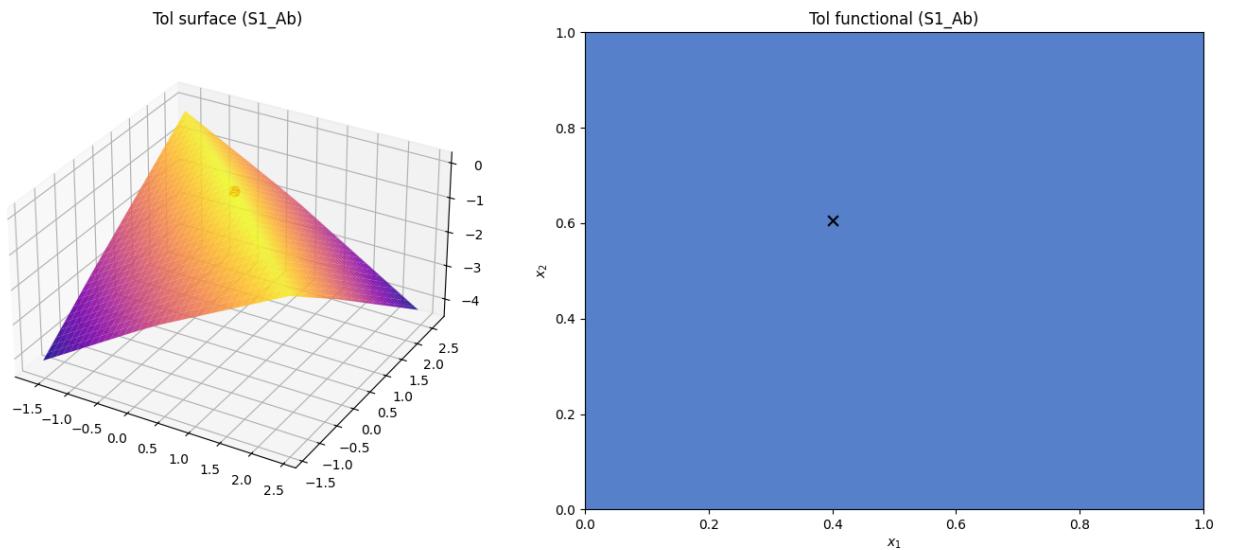


Рис. 4: График после Ab-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

## 4.2 $A_2x = b_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}$$

**A.**

$\text{argmax } \text{Tol} = -0.277 < 0$

$\text{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$

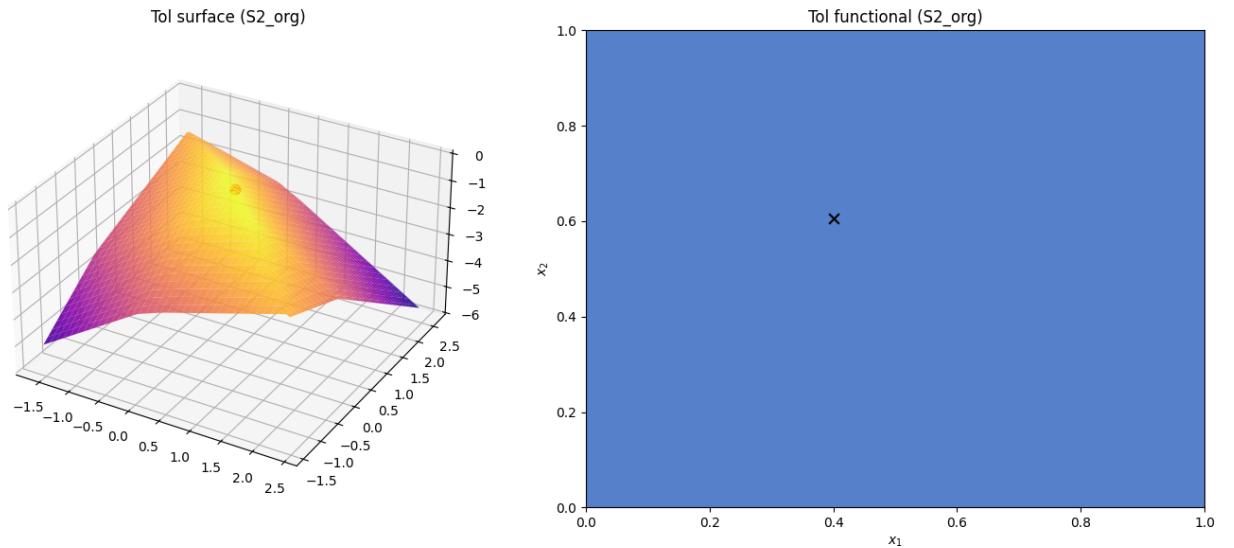


Рис. 5: График для системы  $A_2x = b_2$

**B.1**

$\text{argmax } \text{Tol} = 0.092 > 0$

$\text{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$

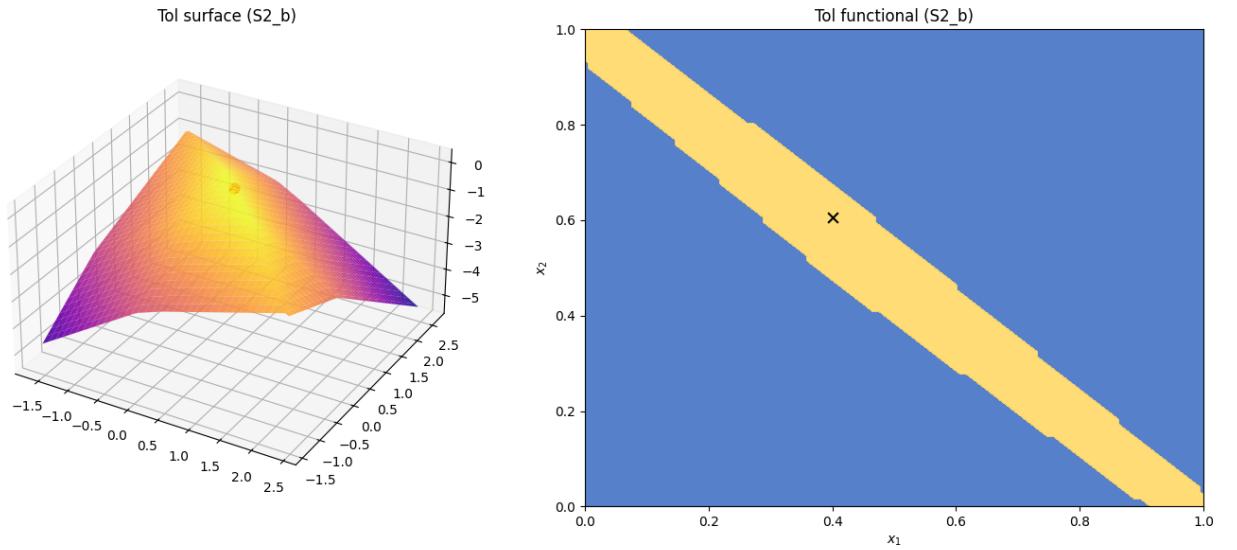


Рис. 6: График после b-коррекции для системы  $A_2x = b_2$

## B.2

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

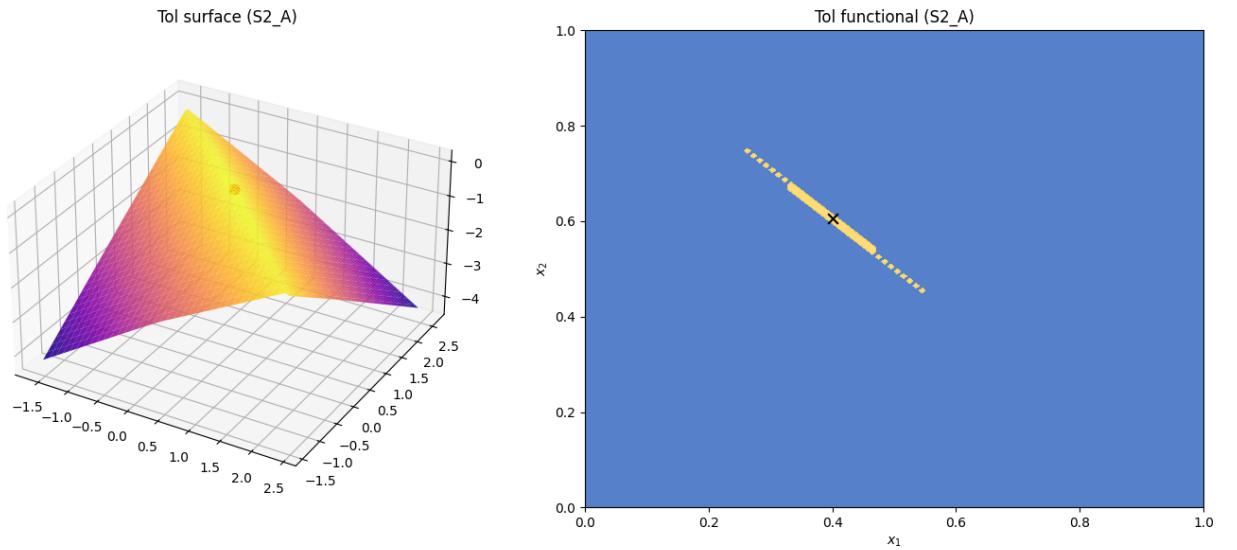


Рис. 7: График после A-коррекции для системы  $A_2x = b_2$

## B.3

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0006 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

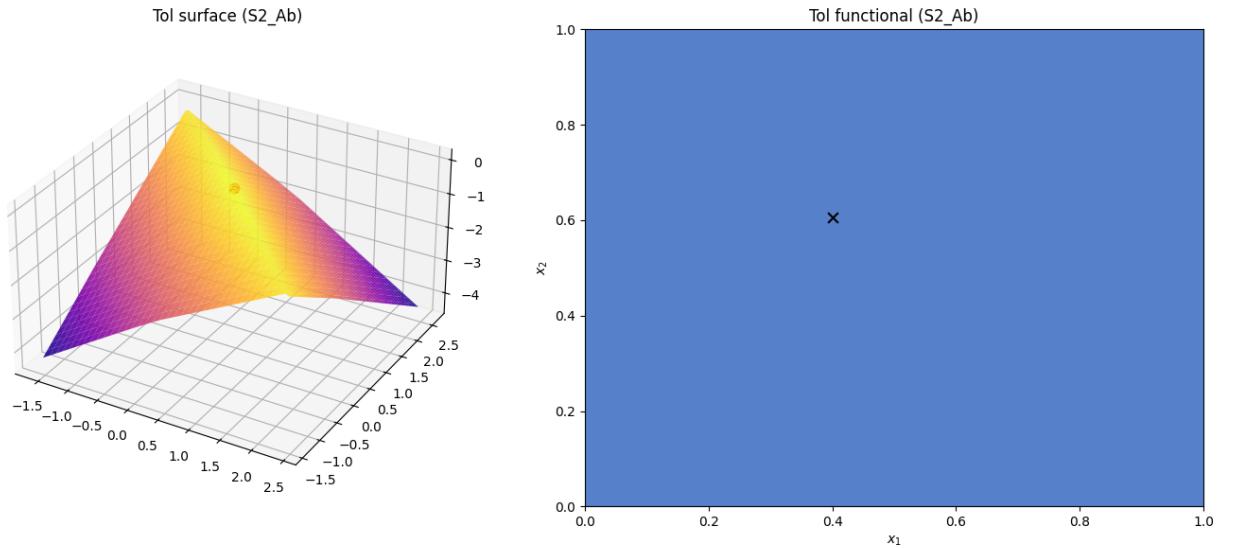


Рис. 8: График после Ab-коррекции для системы  $A_2x = b_2$

### 4.3 $A_3x = b_3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

**A.**

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = -0.28 < 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

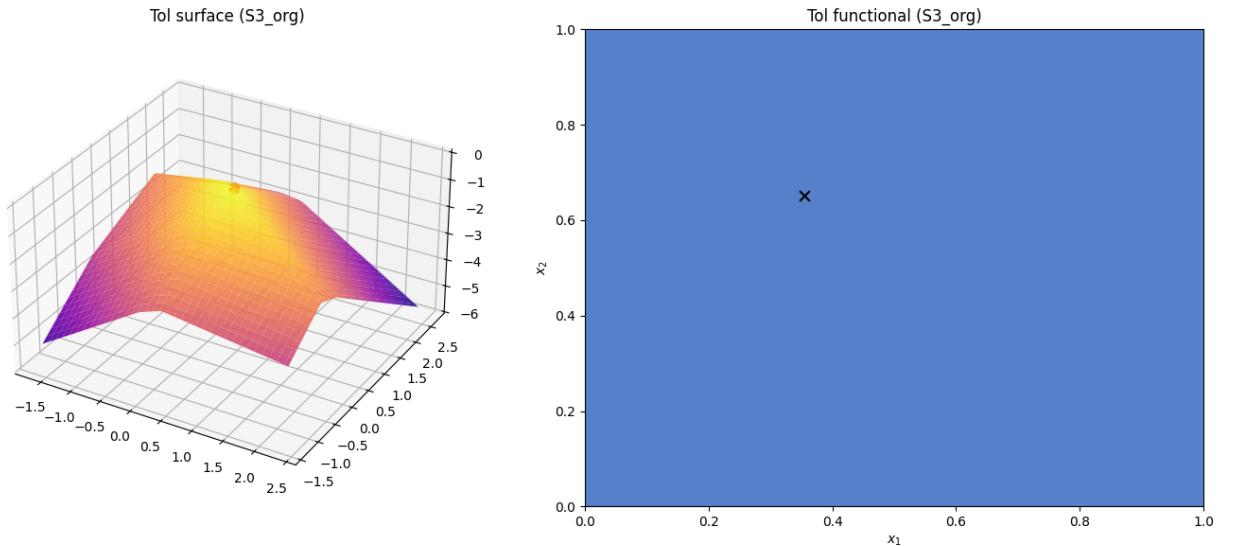


Рис. 9: График для системы  $A_3x = b_3$

### B.1

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.088 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

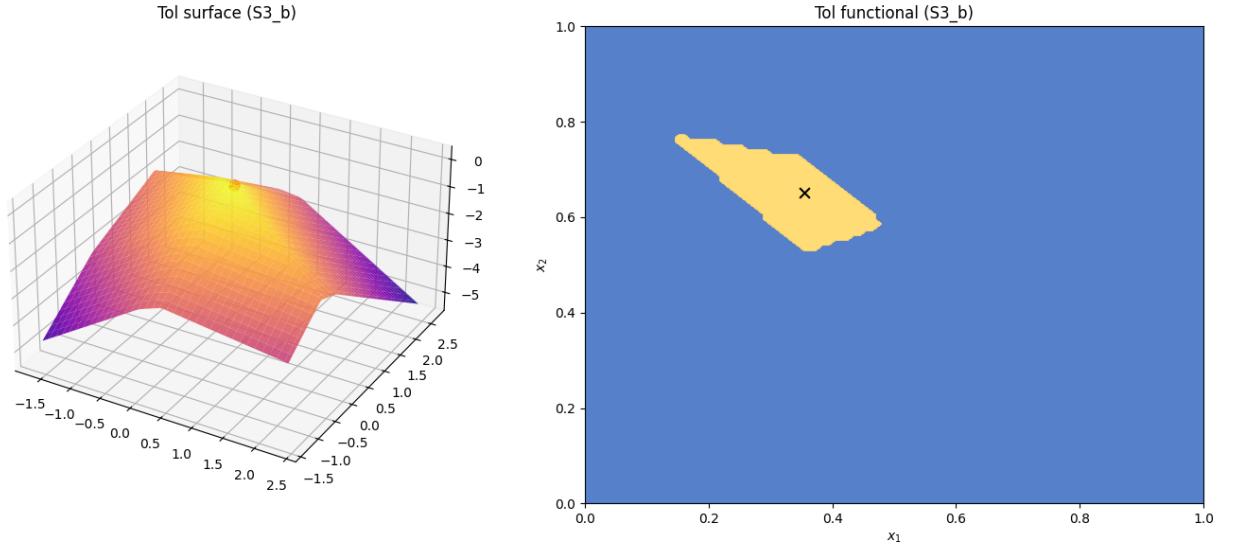


Рис. 10: График после b-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

### B.2

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0108 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

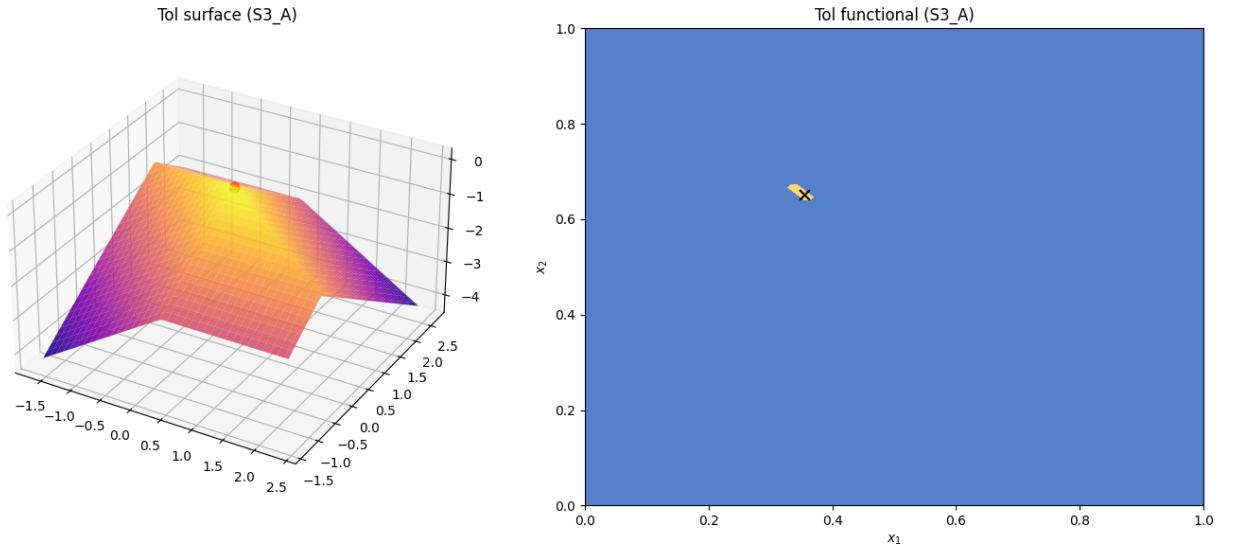


Рис. 11: График после A-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

### B.3

$$\operatorname{argmax} \text{Tol} = 0.0004 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

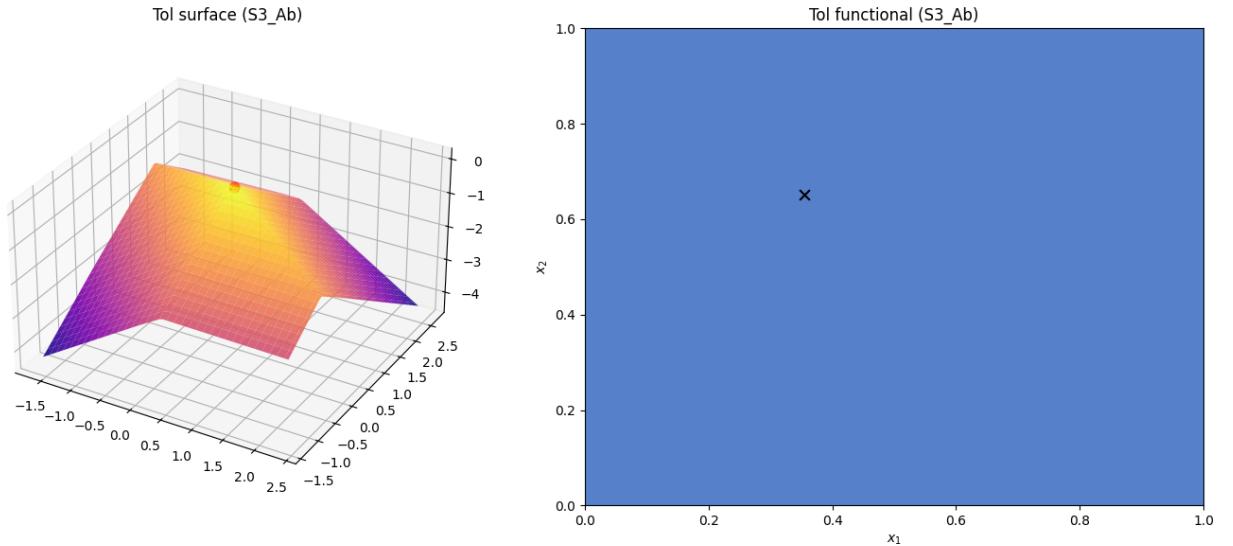


Рис. 12: График после Ab-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

### 4.4 Сравнительный анализ методов коррекции

Система	Без коррекции	А-коррекция	b-коррекция	Ab-коррекция
1	0.000000	0.006020	0.169677	0.0
2	0.000000	0.004387	0.157331	0.0
3	0.000000	0.000612	0.035200	0.0

Таблица 1: Площади областей разрешимости для различных методов коррекции

## 5 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib
3. intvlp

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

## 6 Вывод

Анализ интервальных систем показал:

- Без коррекции все системы неразрешимы ( $\text{Tol}_{\max} < 0$ ).
- **A-коррекция:** минимальное сужение интервалов матрицы  $A$  позволяет достичь положительного  $\text{Tol}_{\max}$ , но значение остаётся очень близким к нулю. Метод обеспечивает разрешимость при минимальном изменении исходных данных, но эффект незначителен.
- **b-коррекция:** расширение вектора  $b$  с подбором минимального  $K$  позволяет получить значительно положительное  $\text{Tol}_{\max}$ , система полностью разрешима. Однако область решений сильно расширена, что приводит к наибольшему искажению исходных данных.
- **Ab-коррекция:** комбинированное применение A- и b-коррекции. После оптимизации параметров  $\alpha$  и  $\beta$  достигается  $\text{Tol}_{\max} \gtrsim 0$ , при этом изменение исходных данных минимально. Метод обеспечивает оптимальный компромисс между разрешимостью и сохранением исходных интервалов.

**Вывод:** для достижения разрешимости с минимальным искажением исходных данных рекомендуется использовать **Ab-коррекцию**.

## 7 Приложение

Код программы GitHub URL:

<https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab%203>