

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
**Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3**

по дисциплине  
«Интервальный анализ»

Выполнила студентка  
группы 5030102/20202

Чинь Тхи Тху Хоай

Проверил  
Преподаватель

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>4</b>
3.1	Интервальное представление и параметры	4
3.2	Распознающий функционал	4
3.3	Условие разрешимости	4
<b>4</b>	<b>Результат</b>	<b>4</b>
4.1	$A_1x = b_1$	4
4.2	$A_2x = b_2$	7
4.3	$A_3x = b_3$	10
<b>5</b>	<b>Программная реализация</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Вывод</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Приложение</b>	<b>13</b>

# 1 Цель работы

Изучить методы анализа и коррекции интервальных линейных систем уравнений (ИСЛАУ) с использованием распознающего функционала  $Tol(x, A, b)$ . Закрепить навыки построения допусковых множеств решений и исследовать влияние  $A$ -,  $b$ - и  $Ab$ -коррекций на разрешимость системы.

# 2 Постановка задачи

Дан набор интервальных систем линейных уравнений:

$$A_i x = b_i, \quad x = (x_1, x_2), \quad i = \overline{1, 3}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

Для каждой системы  $A_i x = b_i$  необходимо:

- А. Проверить непустоту допускового множества ИСЛАУ. В случае, если допусковое множество пусто:
  - А.1. Найти  $\arg\max Tol$  и образующие допускового функционала
  - А.2. Построить график функционала  $Tol(x)$ , отметить точку максимума
  - А.3. Построить графики допускового множества ИСЛАУ на плоскости, отметить точку максимума
- В. Если допусковое множество пусто, необходимо скорректировать систему каждым из описанных ниже способов:
  - В.1. С помощью коррекции правой части ИСЛАУ —  $b$ -коррекция
  - В.2. С помощью коррекции матрицы ИСЛАУ —  $A$ -коррекция
  - В.3. С помощью комбинации предыдущих методов (В.1, В.2) с одновременным изменением правой части и матрицы ИСЛАУ —  $Ab$ -коррекция

- С. Сравнить влияние разных видов коррекций на форму и положение допускового множества. Определить, какой вид коррекции является наименее искажением исходных данных при достижении разрешимости.

## 3 Теоретическая часть

### 3.1 Интервальное представление и параметры

Интервал  $\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$  определяется его срединной точкой  $mid \mathbf{a}$  и радиусом  $rad \mathbf{a}$ :

$$mid \mathbf{a} = \frac{\bar{a} + \underline{a}}{2}, \quad rad \mathbf{a} = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}$$

### 3.2 Распознающий функционал

Распознающий функционал используется для проверки совместимости системы в точке  $x$ :

$$Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ rad(b_i) - \left| mid(b_i) - \sum_{j=1}^n mid(a_{ij})(x_j) \right| - \sum_{j=1}^n rad(a_{ij})|x_j| \right\}$$

### 3.3 Условие разрешимости

Система ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  имеет **непустое** допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (разрешима) тогда и только тогда, когда:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x, A, b) \geq 0$$

## 4 Результат

### 4.1 $A_1 x = b_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \end{pmatrix}$$

**A.**

$$\argmax Tol = -0.277 < 0$$

$$\argmax(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

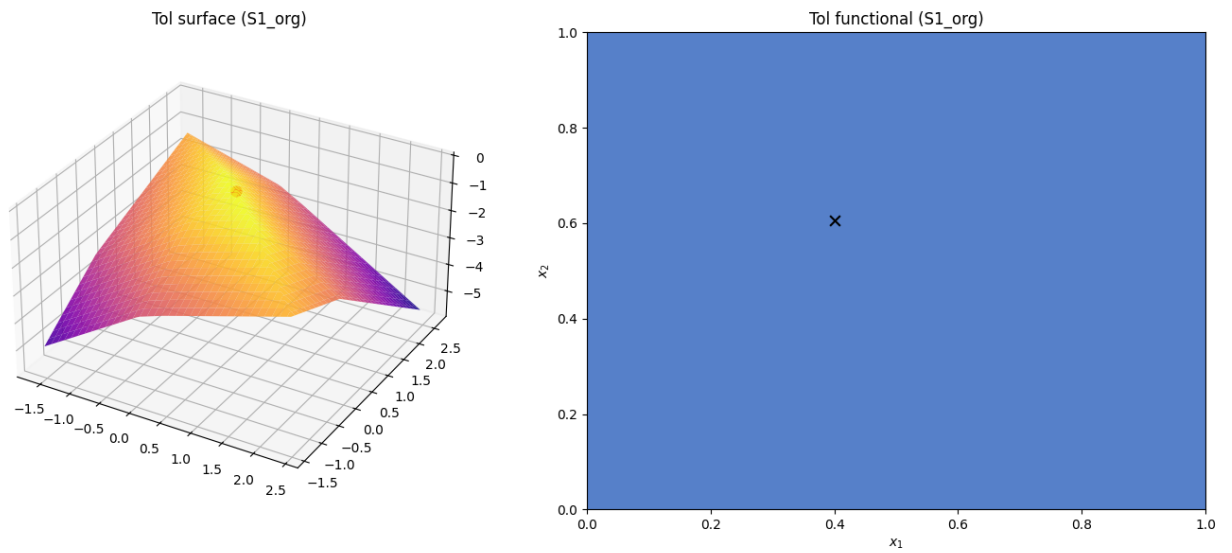


Рис. 1: График для системы  $A_1x = b_1$

### B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.092 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

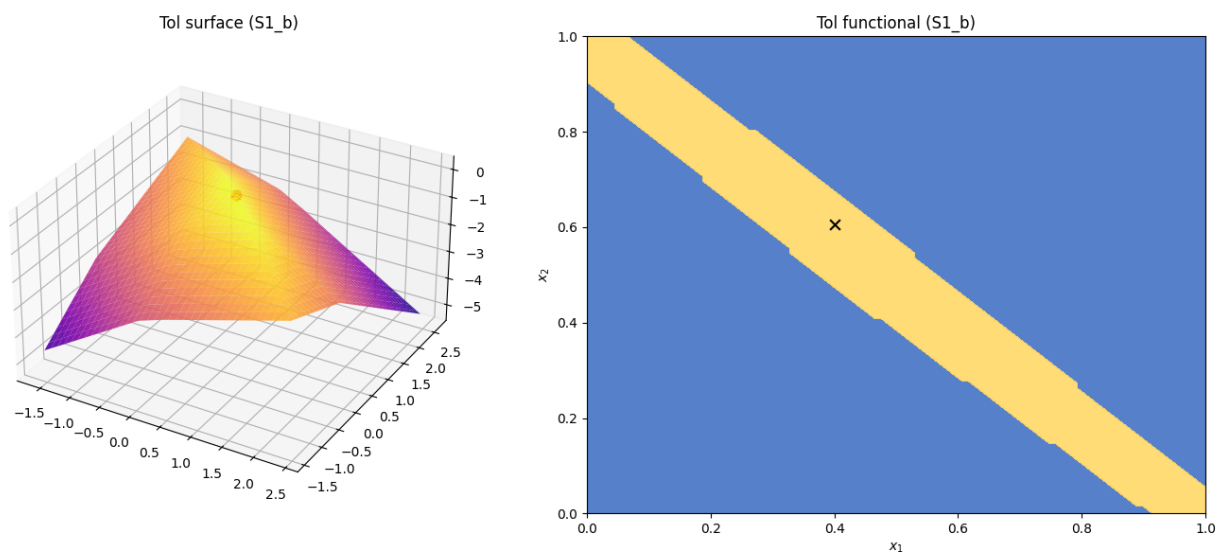


Рис. 2: График после b-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

### B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

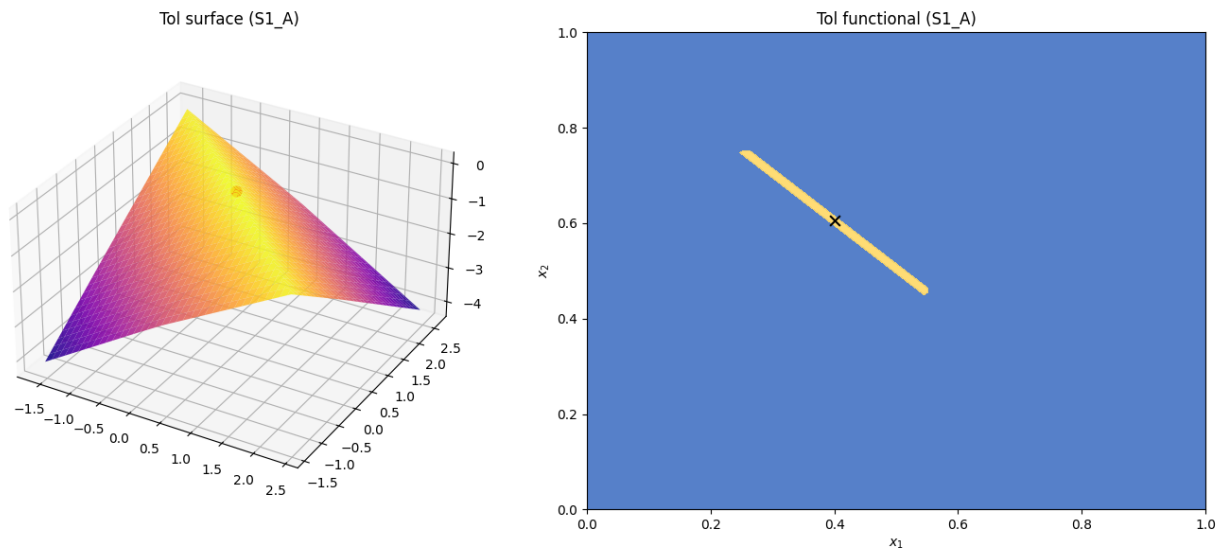


Рис. 3: График после A-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

### B.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

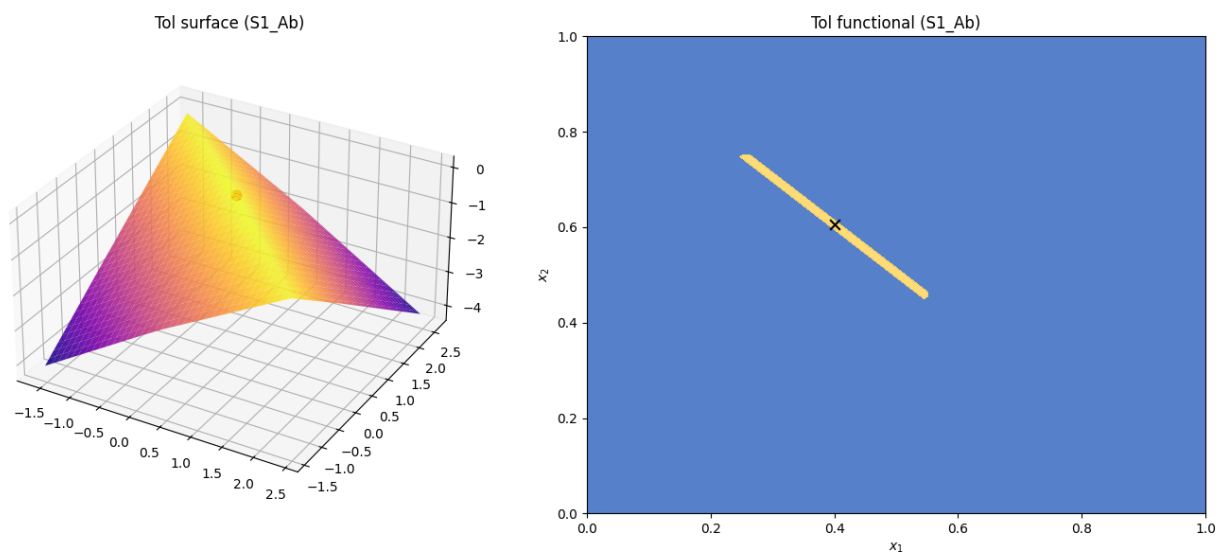


Рис. 4: График после Ab-коррекции для системы  $A_1x = b_1$

## 4.2 $A_2x = b_2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \end{pmatrix}$$

A.

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = -0.277 < 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

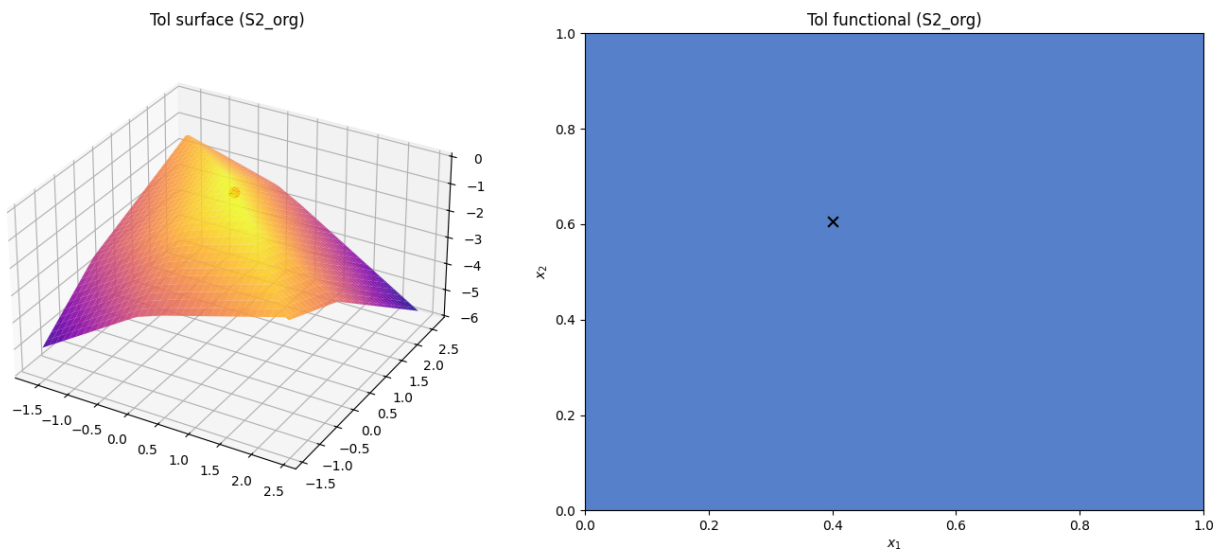


Рис. 5: График для системы  $A_2x = b_2$

## B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.092 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

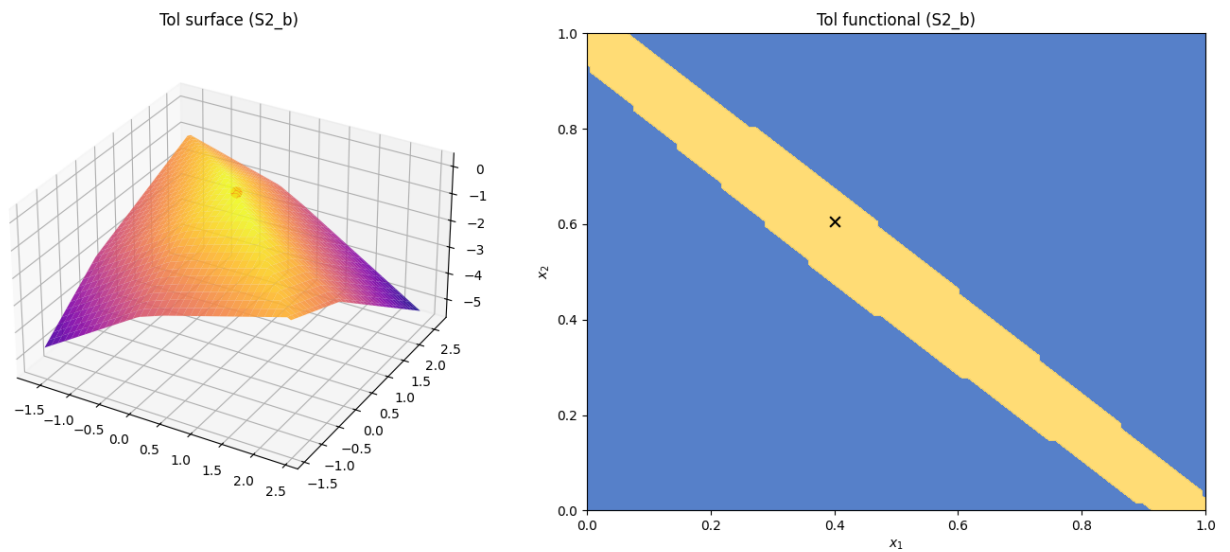


Рис. 6: График после b-коррекции для системы  $A_2x = b_2$

## B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

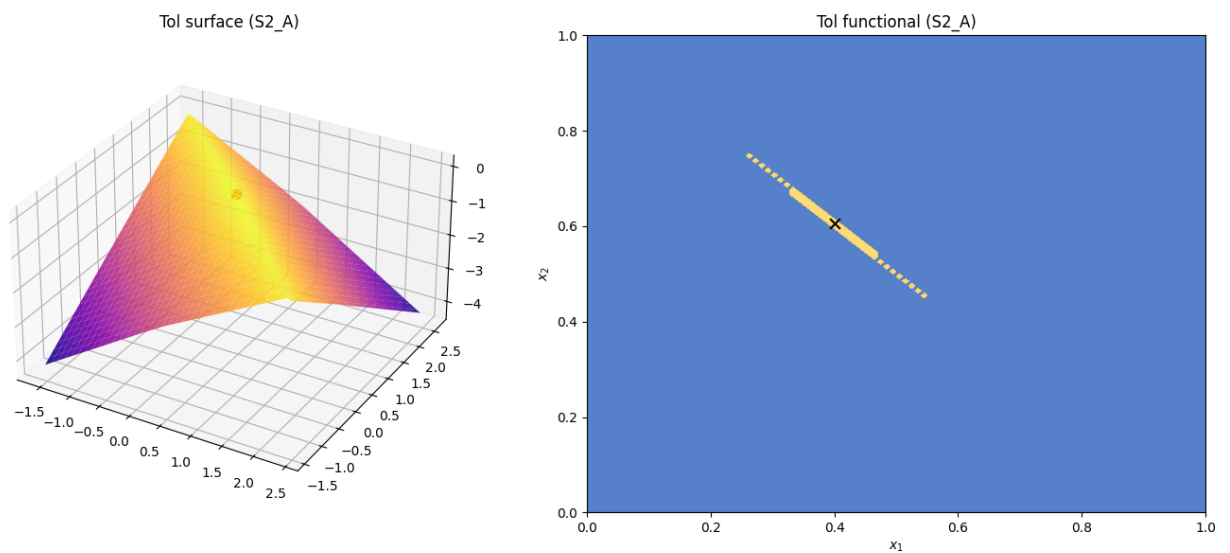


Рис. 7: График после A-коррекции для системы  $A_2x = b_2$



## B.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0125 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.4, 0.605]$$

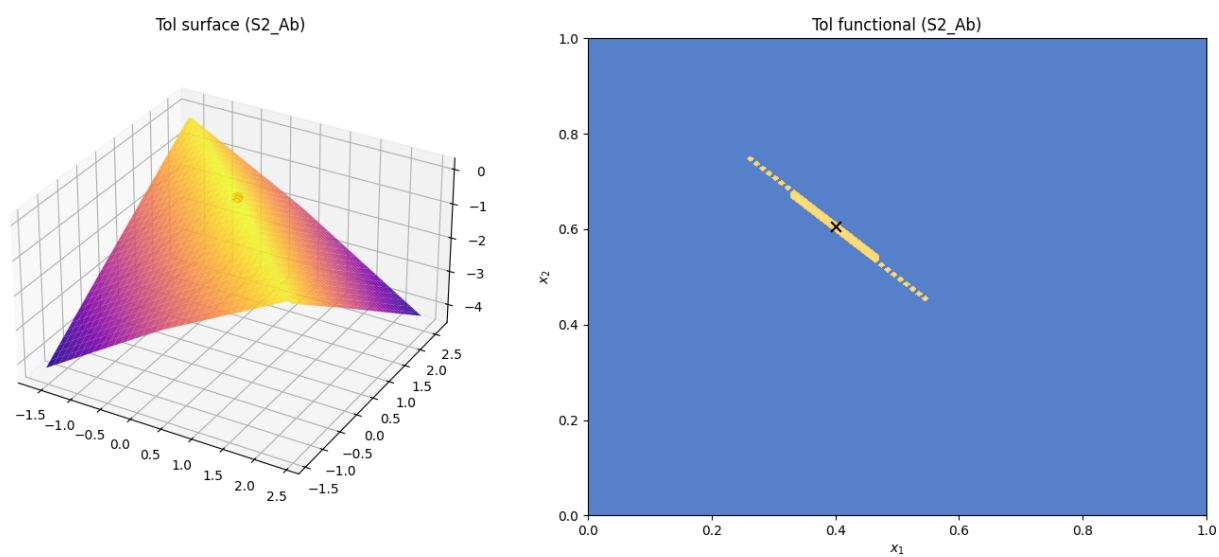


Рис. 8: График после Аб-коррекции для системы  $A_2x = b_2$

$$4.3 \quad A_3 x = b_3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.70, 1.30] \\ [0.75, 1.35] & [0.70, 1.30] \\ [0.80, 1.40] & [0.70, 1.30] \\ [-0.30, 0.30] & [0.70, 1.30] \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} [0.96, 1.01] \\ [1.00, 1.05] \\ [1.02, 1.07] \\ [0.63, 0.68] \end{pmatrix}$$

A.

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = -0.28 < 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

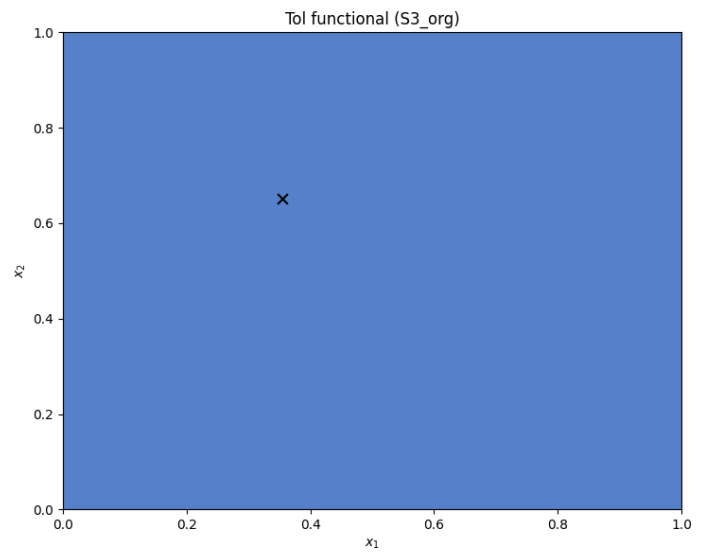
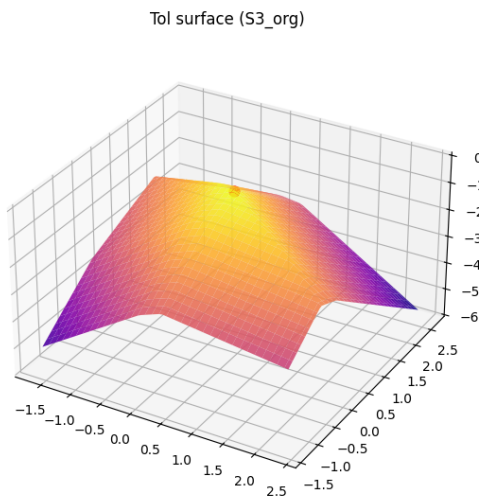


Рис. 9: График для системы  $A_3 x = b_3$

## B.1

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.088 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

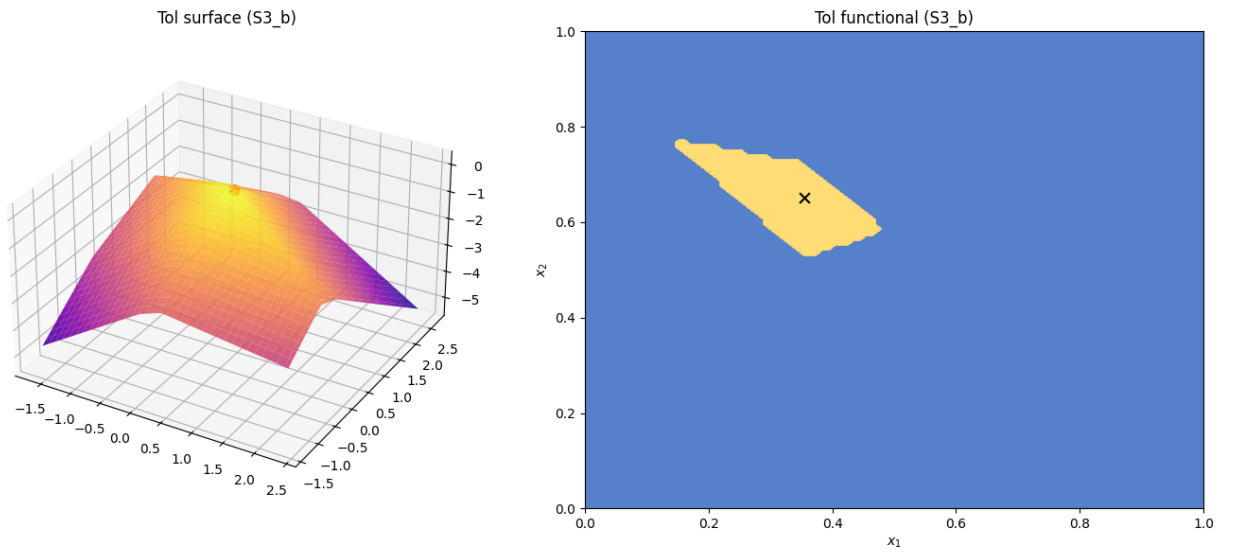


Рис. 10: График после b-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

## B.2

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0108 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

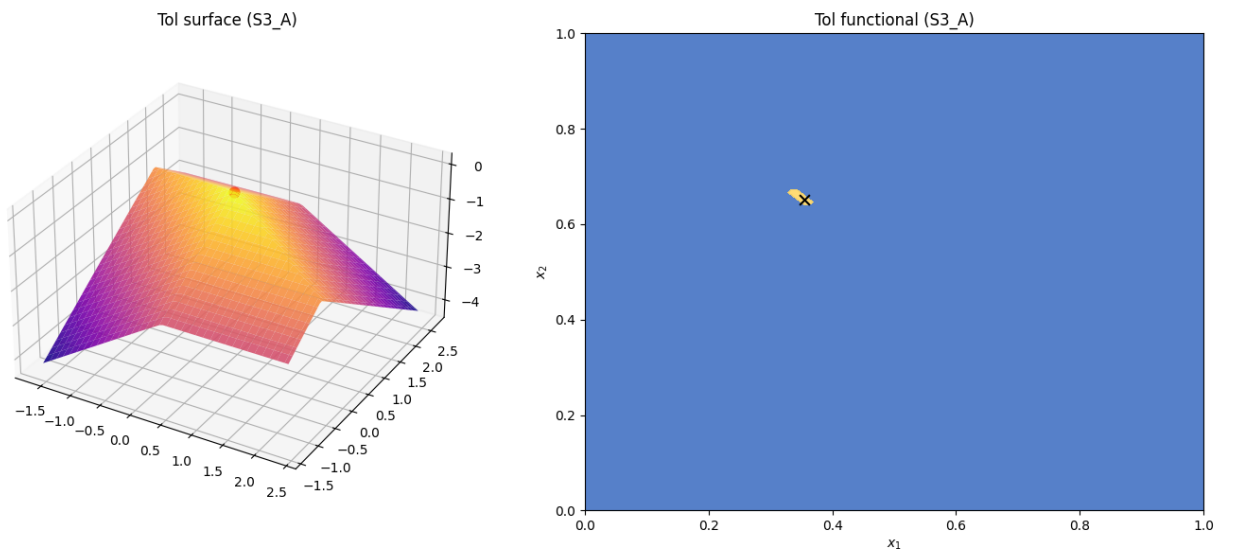


Рис. 11: График после A-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

## B.3

$$\operatorname{argmax} \operatorname{Tol} = 0.0108 > 0$$

$$\operatorname{argmax}(x_1^*, x_2^*) = [0.355, 0.652]$$

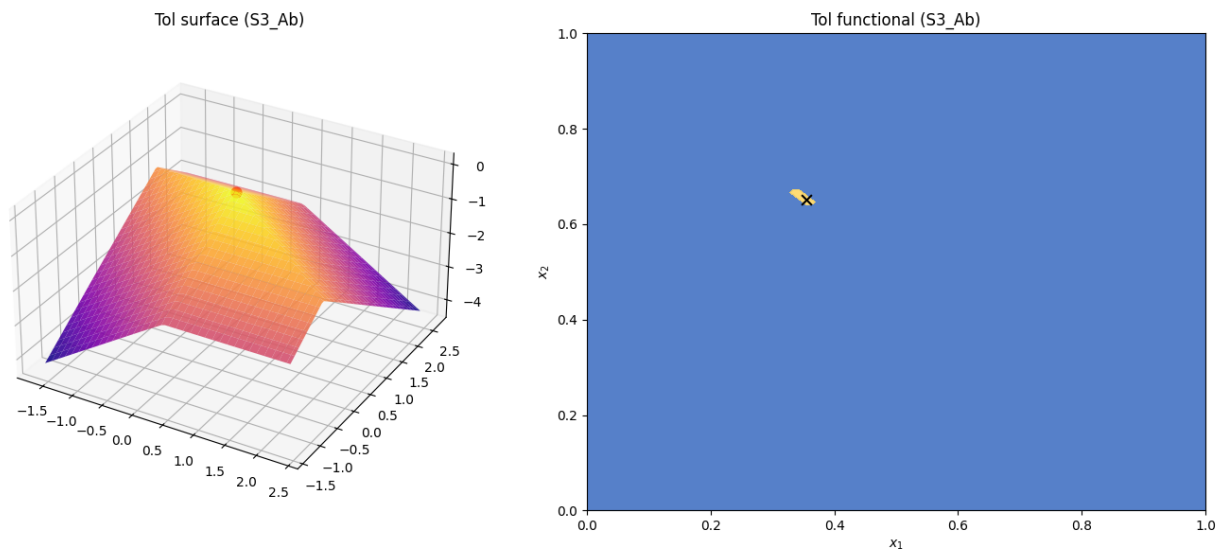


Рис. 12: График после Аб-коррекции для системы  $A_3x = b_3$

## 5 Программная реализация

Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.12.6 в среде разработки Visual Studio Code. Использовались дополнительные библиотеки:

1. numpy
2. matplotlib
3. intervalpy

В приложении находится ссылка на GitHub репозиторий с исходным кодом.

## 6 Вывод

Анализ интервальных систем показал:

- Без коррекции все системы неразрешимы ( $\text{Tol max} < 0$ ).
- **A-коррекция** обеспечивает разрешимость с минимальным изменением матрицы  $A$  ( $\text{Tol max} \approx 0.01$ ), сохраняя допустовое множество близким к исходному.
- **b-коррекция** также делает системы разрешимыми, но сильнее смещает допустовое множество ( $\text{Tol max} \approx 0.09$ ).
- **Ab-коррекция** даёт те же результаты, что и A-коррекция, дополнительная коррекция  $b$  практически не влияет.

Вывод: для минимального искажения исходных данных рекомендуется использовать **A-коррекцию**.

## 7 Приложение

Код программы GitHub URL:

<https://github.com/Akira1707/IntervalAnalysis/tree/main/Lab>