

### Лек 3: Синдромное декодирование

$(n, k)$  - код (линейный)

$$GF(2) = \{0, 1\}$$

$$R = \frac{k}{n}$$

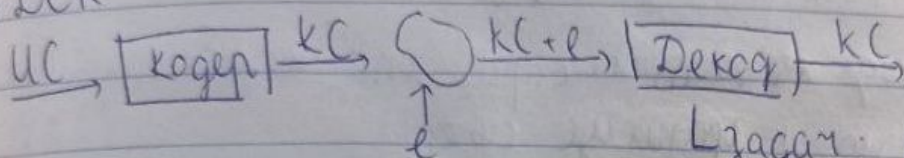
$$G = (k \times n)$$

$$G \cdot H^T = 0$$

$$H = \left( \frac{n-k}{n} \times n \right)$$

$$(k \times n - k)$$

Алгоритм декодирования  $(n, k)$  линейных кодов над  $GF(2)$   
в DSK



Задача: Найти кодовые слова, отличающиеся от принятой (обнаружено) в наименьшем числе позиций.

$$\bar{c} \in C \quad \bar{y} = \bar{c} + \bar{e}$$

$\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$  - вектор ошибки

Сколько различных комбинаций ошибок может исправлять код?

$$\bar{e} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{000 \dots 0}^n \quad C \quad \overbrace{00 \dots 0}^n \\ \vdots \\ \underbrace{111 \dots 1}_n \end{array} \right\} 2^n$$

$$\bar{y} = \bar{c} + \bar{e}$$

$$\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k} = n$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (n=3)$$

$$H = [1 \ 1 \ 1]$$

$$k=2 \quad \begin{bmatrix} 000 \\ 101 \\ 011 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 101 \\ 011 \\ 110 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 001 \\ 011 \\ 100 \\ 010 \\ 111 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 010 \\ 011 \\ 111 \\ 001 \\ 100 \end{matrix}$$

$$n=3 \quad 2^{n-k}=2$$

Хороший код. Ипотесты исправят комбинации по формуле, близкой к Хэммингу сфер

$$c \cdot H^T = 0$$

$$\begin{array}{ll} c_1 & 000 \\ c_2 & 101 \\ c_3 & 011 \\ c_4 & 110 \end{array} \quad \begin{array}{l} 001 \\ 100 \\ 010 \\ 111 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y &= c + e \\ s &= y \cdot H^T = (c + e) \cdot H^T \\ &= \underbrace{c \cdot H^T}_0 + e \cdot H^T = e \cdot H^T \end{aligned}$$

$$c_2 + e = 101 + 100 = 001$$

$$e \quad s$$

$$000 \quad 0$$

$$001 \quad 1$$

$$010 \quad 1$$

$$011 \quad 0$$

$$100 \quad 1$$

$$101 \quad 0$$

$$110 \quad 0$$

$$111 \quad 1$$

$$\begin{aligned} \bar{e} \quad y + e_1 &= 1 \quad H^T = 0 & (y + e_1) H^T &= 0 \\ &+ e_2 = & y + e_2 &= c \\ &+ & c &= y \cdot H^T = e \cdot H^T \\ &+ e_3 = \end{aligned}$$

$$G = [111]$$

$$H = \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

$$e \quad s$$

$$000 \quad 00$$

$$001 \quad 11$$

$$010 \quad 01$$

$$011 \quad 10$$

$$100 \quad 10$$

$$101 \quad 01$$

$$110 \quad 11$$

$$111 \quad 00$$

$$s$$

$$e$$

$$00 \rightarrow 000$$

$$01 \rightarrow 010$$

$$10 \rightarrow 100$$

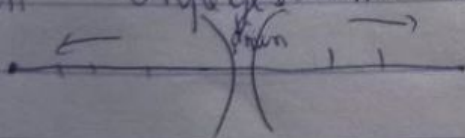
$$11 \rightarrow 001$$

$$e \cdot H^T = 001 \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\checkmark y \\ 111 + 001 &\rightarrow 110 \quad H^T = [11] \\ &+ 001 \\ &111 \end{aligned}$$

Радиус покрытия

$d_{\min}$  - определяет число исправляемых ошибок



$$\frac{d_{\min} - 1}{2}$$

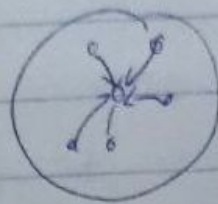
Радиус покрытия - это наибольшее число ошибок, которые может исправить код

$(n, k)$ -код РП - наибольший вес среди всех последовательностей, которые декодируются в ДСК

00000...

1100...

1010...



задача построения кода с заданной кратностью исправления  $t$  ошибок - задача упаковки пространства шаров радиуса  $t$  с центрами, заданными кодовыми словами.

Плотная сферическая упаковка

Кеттив лин. кода - кода Хэмминга и код Голея

Граница Хэмминга  $GF(q)$

Для любого  $q$ -ичного кода с длиной  $n$  и минимальным расстоянием  $d \geq 2t+1$

число кодовых слов  $M$

$$M \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t C_n^i (q-1)^i}$$

$$C_n^0 \cdot (q-1)^0$$

$$C_n^1 \cdot (q-1)^1$$

Граница Варшавова - Шимберта

Если имеет место неравенство

$q^{n-k} > \sum_{i=0}^{d-2} C_n^i (q-1)^i$ , то  $\exists q$ -ичный  $(n, k)$ -код  
с мин. расc.:  $d$

И  $d$ , то  $d-1$  - мин. рл в  $H$

1 - столбец -  $\forall H \neq 0$

2 - столбец - не кратны

3 -

$i$  - столбцов -  $i-1$  столбцов линейно независимы  
существует

- нулевой

-  $(i-1) \cdot (q-1)$

-  $C_{i-1}^2 \cdot (q-1)^2$

$\vdots$   
 $C_{i-1}^{d-2} (q-1)^{d-2}$

$d \leq n+1$