Avaliação de resolvedores para problemas de localização de facilidades com capacidade limitada

RESUMO

Este modelo resume as normas de formatação para os trabalhos completos a serem publicados nos Anais do LII SBPO. Título, filiação, resumo e palavras-chave devem repetir fielmente o que foi informado quando o autor cadastrou o artigo através do sistema de submissão. O Resumo deve ter no máximo 150 palavras.

PALAVRAS CHAVE. Modelos de programação linear inteira mista. Localização de facilidades com capacidade limitada. Softwares de otimização.

PM – Programação Matemática

ABSTRACT

This document presents the format for full papers to be published in the Annals of the LII SBPO. Title, affiliation, abstract and keywords must be exactly the same as the author informed when registered the paper through the submission system. The Abstract must not exceed 150 words.

KEYWORDS. Mixed-integer programming model. Capacitated Facility Location Problem. Optimization software.

MP – Mathematical Programming

1. Introdução

2. Definição do problema

No problema de localização de facilidades com capacidade limitada (*Capacitated Facility Location Problem*, CFLP) são minimizados os custos de instalação de facilidades e de designação de clientes a elas, de forma a respeitar as limitações de capacidade das facilidades e a satisfazer as demandas dos clientes. Se não forem definidas outras restrições além da capacidade das facilidades e da demanda dos clientes, nada impede que a demanda de um cliente seja satisfeita designando mais do que uma facilidade para ele, o que caracteriza o CFLP com múltiplas fontes (*multi-source*, MS-CFLP) [2.1].

Quando cada demanda deve ser atendida por somente uma facilidade, tem-se o CFLP com fonte única (*single-source*, SS-CFLP) [2.2].

Quando houver clientes que não possam ser atendidos por uma mesma facilidade, tem-se o CFLP com incompatibilidade de clientes (*customer incompatibilities*, CFLP-CI) [2.3].

2.1. MS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e múltiplas fontes

São dados o conjunto de facilidades I e o conjunto de clientes J. Para cada facilidade $i \in I$, tem-se o custo de abertura $f_i \in \mathbb{R}$ e a capacidade máxima de atendimento $s_i \in \mathbb{Z}$. Tem-se também a demanda de produtos $d_j \in \mathbb{Z}$ para cada cliente $j \in J$. Para cada par de facilidade e cliente $\langle i, j \rangle \in I \times J$, há o custo $c_{ij} \in \mathbb{R}$ do atendimento de j por i por unidade do produto demandado.

O modelo pode ser descrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}) \tag{1}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq y_i s_i \quad \forall i \in I \tag{3}$$

$$y_i \in \{0, 1\},\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I,\ j \in J \tag{4}$$

O atendimento da demanda do cliente $j \in J$ pela facilidade $i \in I$ é representado pela variável inteira não-negativa x_{ij}, cujo valor é a quantidade de unidades do produto são fornecidas por i para j. A restrição 2 garante que a soma de todos os atendimentos de cada cliente por todas as facilidades satisfaça sua demanda d_j. Os custos de atendimento são somados na função objetivo (1) de acordo com o custo c_{ij} por unidade.

A abertura da facilidade $i \in I$ é representada pela variável binária y_i, que assume valor 0 quando i estiver fechada e 1 se tiver sido instalada. A restrição 3 exige que, se a soma dos atendimentos prestados por i para todos os seus clientes for positiva, a facilidade deva ser aberta ($y_i = 1$). Essa restrição também limita a soma dos atendimentos à capacidade s_i da facilidade. O custo de instalação f_i da facilidade será somado ao custo na função objetivo (1) se $y_i = 1$.

Observação 1 *É importante ressaltar que esse modelo considera que o produto possui unidades indivisíveis e que, portanto, os atendimentos x_{ij}, as capacidades s_i e as demandas d_j são inteiros.*

Caso fossem fornecidas capacidades reais $s'_i \in \mathbb{R}$, bastaria utilizar $s_i = \lfloor s'_i \rfloor$. Se fossem demandas reais $d'_j \in \mathbb{R}$, bastaria utilizar $d_j = \lceil d'_j \rceil$.

Contudo, sendo necessário utilizar valores fracionários de atendimento, capacidade e demanda, bastará alterar a restrição 4 para que sejam reais as variáveis $x_{ij} \in \mathbb{R}$. A modelagem do problema funciona para atendimentos no domínio dos reais.

2.2. SS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e fonte única

A modelagem pode ser essencialmente a mesma do MS-CFLP [2.1], simplesmente se alterando o domínio de cada $x_{ij} \in \{0, d_j\}$ na restrição 4. Porém a restrição para uma única fonte permite algumas alterações razoáveis.

Novamente são dados o conjunto de facilidades I e o conjunto de clientes J, bem como o custo de abertura $f_i \in \mathbb{R}$ e a capacidade máxima de atendimento $s_i \in \mathbb{Z}$ para cada facilidade $i \in I$. Então, para cada par de facilidade e cliente $\langle i, j \rangle \in I \times J$, há a demanda $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ (quantas unidades do produto i deveria fornecer a j caso o atenda) e o custo $g_{ij} \in \mathbb{R}$ de atendimento de toda essa demanda. A possibilidade de a demanda ser diferente se for atendida por facilidades diferentes é uma generalização razoável permitida pela restrição maior das fontes de atendimento.

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij}) \tag{5}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \tag{6}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq y_i s_i \quad \forall i \in I \tag{7}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \; j \in J \tag{8}$$

Dessa vez, x_{ij} é definida como variável binária, representando se a facilidade i atende o cliente j. A restrição 6 garante que exatamente uma facilidade atenda cada cliente. Os custos de atendimento são somados na função objetivo (5) de acordo com o custo total g_{ij}.

Novamente, y_i é a variável binária que representa se a facilidade $i \in I$ está aberta. A restrição 7 exige que, se a soma dos atendimentos prestados por i para todos os seus clientes for positiva, a facilidade deva ser instalada ($y_i = 1$). Essa restrição também limita a soma dos atendimentos (considerando a quantidade de produtos p_{ij} de cada um deles) à capacidade s_i da facilidade. Serão somados na função objetivo (5) os custos de instalação f_i das facilidades abertas ($y_i = 1$).

Observação 2 *Assim como o modelo MS-CFLP [2.1], esse modelo considera indivisibilidade de unidades do produto nas capacidades s_i e demandas p_{ij} inteiras. Mas se elas fossem reais não haveria nenhuma alteração de funcionamento, dispensando alteração de domínio das variáveis.*

Observação 3 *Embora tenha mudado a representação, não houve alteração nos dados de custo de atendimento. Pode-se substituir, neste modelo, $g_{ij} = c_{ij} p_{ij}$ e, no MS-CFLP [2.1], $g_{ij} = c_{ij} d_j$.*

Observação 4 *A relaxação linear das variáveis $x_{ij} \in \mathbb{R}$ permitiria a representação de um modelo MS-CFLP [2.1] com unidades divisíveis. Contudo, devido à variação da demanda de um mesmo cliente para cada facilidade que o possa atender, esse relaxação modelaria uma situação incomum e estranha. Dessa forma, não utilizaremos instâncias desse formato como se não tivessem a restrição de fonte única.*

2.2.1. De MS-CFLP para SS-CFLP

Para utilizar dados de uma instância do MS-CFLP [2.1] e utilizá-la SS-CFLP, basta que, para todo $i \in I$ e $j \in J$, $p_{ij} = d_j$ e $g_{ij} = c_{ij}p_{ij} = c_{ij}d_j$ (conforme a observação 3).

Os demais dados são os mesmos para ambos.

2.3. MS-CFLP-CI: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e incompatibilidade de clientes

Algumas instâncias que foram utilizadas apresentavam uma restrição a mais. Além da função objetivo (1), da restrição de atendimento de demanda 2, de limitação de capacidade 3 e das variáveis definidas na restrição 4, é adicionado um conjunto de pares de clientes incompatíveis $\Gamma \subset J^2$. Os clientes desses pares não podem ser atendidos pela mesma facilidade.

$$x_{ij_1} \leq \lambda_{ij_1j_2}s_i, \ x_{ij_2} \leq (1 - \lambda_{ij_1j_2})s_i \quad \forall i \in I, \langle j_1, j_2 \rangle \in \Gamma \tag{9}$$

Para isso, são definidas as variáveis de disjunção $\lambda_{ij_1j_2}$

$$\lambda_{ij_1j_2} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \langle j_1, j_2 \rangle \in \Gamma \tag{10}$$

3. Experimentos computacionais

Foram escolhidos os resolvedores *Cbc*, *CPLEX* e *Gurobi* para comparação de otimalidade, tempo e nós visitados. Os dados para comparação são extraídos dos arquivos de *log* com a biblioteca *Orloge*. Como ela não oferece suporte para leitura de *log* do *SCIP*, esse resolvedor não foi incluído no estudo.

Foram utilizadas instâncias do CFLP de quatro diferentes conjuntos:

1. `sobolev` Sobolev Institute of Mathematics [2021]: esse conjunto de 100 instâncias do modelo SS-CFLP [2.2] possui, para cada facilidade e cliente, diferentes demandas. Foi utilizado somente com fonte única, apresentado na tabela **??** como `sobolev .ss`. Esse conjunto possui a peculiaridade de alguns pares de facilidade e cliente não terem demanda especificada, indicando que aquela facilidade não pode atender a esse cliente. Ele é organizado em 5 grupos de 20 instâncias, tendo em cada um desses a mesma capacidade para todas as facilidades: 10, 20, 30, 40 e 50.

2. `beasley` Beasley [1990]: há 36 instâncias do modelo MS-CFLP [2.1], sendo as primeiras 24 muito pequenas e as 12 últimas, grandes. Foi utilizado na forma MS-CFLP original e também com as restrições adicionais de SS-CFLP [2.2.1]. Nas tabelas **??**, 3 e 4 é apresentado esse conjunto em partes: `beasley.small.ms` e `beasley.small.ss` referem-se às 24 instâncias menores, com múltiplas fontes (MS) e fonte única (SS); `beasley.large.ms` e `beasley.large.ss` são as 12 grandes, MS e SS.

3. `holmberg` Holmberg et al. [1999]: as 71 instâncias pequenas desse conjunto utilizam o mesmo formato do conjunto `beasley`, também utilizado na forma original MS-CFLP [2.1] e na adaptada para SS-CFLP [2.2.1]. Estão apresentadas nas tabelas **??** e 4 como `holmberg.ms` e `holmberg.ss` para as soluções MS e SS.

4. `mess` Maia et al. [2022]: conjunto de 20 instâncias muito grandes no modelo MS-CFLP-CI [2.3], utilizados como MS-CFLP [2.1] e SS-CFLP [2.2.1]. Chamado de `mess.ms` e `mess.ss` nas tabelas 5 e **??**

As instâncias são lidas por um *script Python* que constrói o modelo de otimização mista da biblioteca *PuLP* e executa os resolvedores pela interface de linha de comando.

Cada instância de `sobolev` , `beasley` e `holmberg` foi resolvida três vezes, com os limites de tempo de 2, 5 e 10 minutos. As instâncias de `mess` tiveram limitação maior, de 10, 30 e 60 minutos.

Os testes foram conduzidos em um computador *desktop* Dell XPS 8930 com sistema operacional Ubuntu 22.04.1 LTS 64-bit, processador Intel® Core™ i7-8700 CPU @ 3.20GHz $\times$ 12 e 16 GB de memória RAM. Os resultados estão nas tabelas **??**, 3, 5, 4 e **??**.

4. Considerações finais

Referências

Beasley, J. E. (1990). OR-library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, 41(11):1069–1072.

Holmberg, K., Rönnqvist, M., e Yuan, D. (1999). An exact algorithm for the capacitated facility location problems with single sourcing. *European Journal of Operational Research*, 113(3): 544–559.

Maia, M. R., Reula, M., Parreño-Torres, C., Vuppuluri, P. P., Plastino, A., Souza, U. S., Ceschia, S., Pavone, M., e Schaerf, A. (2022). Metaheuristic techniques for the capacitated facility location problem with customer incompatibilities. *Soft Computing*, p. 1–14.

Sobolev Institute of Mathematics (2021). Discrete location problems: Benchmark library.

Tabela 1

InstÃ¢ncias			CBC 120	CBC 300	CBC 600	CPLEX 120	CPLEX 300	CPLEX 600	GUROBI 120	GUROBI 300	GUROBI 600
`sobolev.ss`	**Gap**	**MÃ©dia**	4,68	2,12	0,12	0	0	0	0,01	0	0
		Mediana	5,16	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**MÃ©dia**	114,48	231,07	310,80	17,76	17,77	17,70	28,70	28,87	28,76
		Mediana	119,91	275,41	274,85	14,44	14,47	14,49	19,77	19,75	19,73
	Nodes	**MÃ©dia**	4383,73	8574,17	10707,35	12440,43	12440,43	12440,43	20989,02	21176,65	21176,65
		Mediana	4261	9601	10410,50	9752	9752	9752	14843	14843	14843
	#Opt		16	57	86	100	100	100	99	100	100
	#Fact		100	100	100	100	100	100	100	100	100
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`holmberg.ss`	**Gap**	**MÃ©dia**	0,03	0,03	0,02	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**MÃ©dia**	7,72	12,79	19,48	0,57	0,57	0,57	0,59	0,60	0,59
		Mediana	0,36	0,36	0,35	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13
	Nodes	**MÃ©dia**	2103,03	3901,08	5994,70	718,46	718,46	718,46	747,58	747,58	747,58
		Mediana	2	2	2	0	0	0	0	0	0
	#Opt		69	69	70	71	71	71	71	71	71
	#Fact		71	71	71	71	71	71	71	71	71
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.small.ss`	**Gap**	**MÃ©dia**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**MÃ©dia**	0,26	0,26	0,26	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06
		Mediana	0,17	0,17	0,17	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	Nodes	**MÃ©dia**	5,83	5,83	5,83	0,62	0,62	0,62	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#Opt		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#Fact		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2

InstÃ¢ncias			CBC 120	CBC 300	CBC 600	CPLEX 120	CPLEX 300	CPLEX 600	GUROBI 120	GUROBI 300	GUROBI 600
beasley.large.ss	**Gap**	**MÃ©dia**	80,44	80,05	55,24	4,24	1,01	0,58	5,36	1,13	0,53
		Mediana	78,50	78,06	77,94	3,13	0	0	5,27	0,41	0
	Time	**MÃ©dia**	129,87	313,05	609,31	120,05	241,57	322,60	120,11	292,33	446,46
		Mediana	128,53	308,43	601,07	120,04	256,37	252,09	120,02	300,01	452,43
	Nodes	**MÃ©dia**	0	1,58	128,83	77,58	1376,33	2211,25	1279,75	1858,75	3475,42
		Mediana	0	0	4,50	0	1079,50	1886	1284	1367	2813,50
	#Opt		0	0	0	0	7	9	0	3	9
	#Fact		12	12	12	12	12	12	12	12	12
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3

InstÃ¢ncias			CBC 600	CBC 1800	CBC 3600	CPLEX 600	CPLEX 1800	CPLEX 3600	GUROBI 600	GUROBI 1800	GUROBI 3600
mess.ss	**Gap**	**MÃ©dia**	24,57	22,37	20,17	2,60	1,45	1,02	2,30	1,56	1,11
		Mediana	30,85	29,47	29,47	2,17	1,14	0,79	1,74	1,21	0,86
	Time	**MÃ©dia**	557,44	1654,72	3291,50	522,15	1466,69	2837,35	537,67	1548,80	2985,01
		Mediana	597,42	1794,17	3563,45	600,24	1800,51	3601,46	600,05	1800,13	3600,08
	Nodes	**MÃ©dia**	4341	22587,62	60128,23	33706,75	83416,20	171594,67	27669,29	67568,38	140783,73
		Mediana	672	2127	7710	1766	18008	52627	1519	6608	15406
	#Opt		1	1	1	2	2	2	2	2	2
	#Fact		7	7	7	12	10	9	14	13	11
	#OfM		1	0	0	0	2	3	0	1	3
	#TL		6	6	6	0	0	0	0	0	0

Tabela 4

InstÃ¢ncias			CBC 600	CBC 1800	CBC 3600	CPLEX 600	CPLEX 1800	CPLEX 3600	GUROBI 600	GUROBI 1800	GUROBI 3600
mess.ms	**Gap**	**MÃ©dia**	10,89	9,16	6,72	0,15	0,08	0,03	0,12	0,05	0,02
		Mediana	2,61	2,15	2,55	0	0	0	0,11	0	0
	Time	**MÃ©dia**	526,02	1542,08	2863,96	319,47	836,33	1149,43	391,60	982,17	1262,47
		Mediana	591,30	1767,44	3448,16	373,65	374,77	209,70	600,12	1331,56	290,23
	Nodes	**MÃ©dia**	4591,43	11778,64	24014,82	12246,71	29640,43	51592,67	8464,40	23655,44	27462,29
		Mediana	1567,50	5230,50	4565	7996	24770	15520,50	2888,50	12491	25388
	#Opt		2	2	3	4	4	5	4	5	5
	#Fact		14	14	11	7	7	6	10	9	7
	#OfM		1	0	3	0	0	1	3	3	5
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 5

InstÃ¢ncias			CBC 120	CBC 300	CBC 600	CPLEX 120	CPLEX 300	CPLEX 600	GUROBI 120	GUROBI 300	GUROBI 600
`holmberg.ms`	**Gap**	**MÃ©dia**	0,03	0,01	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**MÃ©dia**	3,69	6,19	8,49	0,25	0,26	0,25	0,17	0,17	0,17
		Mediana	0,36	0,33	0,34	0,13	0,14	0,12	0,11	0,11	0,11
	Nodes	**MÃ©dia**	188,49	354,62	583,15	72,42	72,42	72,42	10,76	10,76	10,76
		Mediana	2	2	2	0	0	0	0	0	0
	#Opt		70	70	71	71	71	71	71	71	71
	#Fact		71	71	71	71	71	71	71	71	71
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.small.ms`	**Gap**	**MÃ©dia**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**MÃ©dia**	0,39	0,39	0,39	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07
		Mediana	0,11	0,11	0,11	0,06	0,06	0,06	0,04	0,04	0,04
	Nodes	**MÃ©dia**	45,17	45,17	45,17	11,46	11,46	11,46	0	0	0
		Mediana	6	6	6	0	0	0	0	0	0
	#Opt		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#Fact		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.large.ms`	**Gap**	**MÃ©dia**	82,74	82,45	69,94	1,92	0,59	0,42	5,31	1,70	0,31
		Mediana	80,94	80,61	80,50	0,32	0	0	4,01	0,75	0
	Time	**MÃ©dia**	130,41	308,56	607,54	106,23	183,49	258,48	111,08	261,11	392,52
		Mediana	128,40	309,72	603,09	120,07	183,93	183,28	120,02	300,03	371,93
	Nodes	**MÃ©dia**	0	0,17	22,33	580,83	2314,75	3291,58	1043,17	1182,50	1641,83
		Mediana	0	0	0	546,50	2847	2847	1262	1312,50	1546,50
	#Opt		0	0	0	5	9	9	2	2	10
	#Fact		12	12	12	12	12	12	12	12	12
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0