Avaliação de resolvedores para problemas de localização de facilidades com capacidade limitada

Guilherme Akira Demenech Mori

May 18, 2023

Abstract

Contents

List of Tables

1 Introdução

2 Atividades desenvolvidas

1. **Estudo de modelos de otimização linear**:
2. **Estudo de solução gráfica e método simplex**:
3. **Estudo de modelos de otimização inteira**:
4. **Estudo do método *branch-and-bound***:
5. **Estudo da configuração padrão e dos recursos disponíveis de cada pacote computacional escolhido**:
6. **Implementação de um modelo clássico de otimização utilizando os pacotes computacionais escolhidos**:
7. **Estudo de uma técnica de decomposição de um problema prático e o surgimento do modelo escolhido como subproblema**:
8. **Testes computacionais e avaliação comparativa dos resultados**:

3 Revisão da literatura

4 Definição e modelagem dos problemas

No problema da localização de facilidades com capacidade limitada (*Capacitated Facility Location Problem*, CFLP) são minimizados os custos de instalação de facilidades e de designação de clientes a elas, de forma a respeitar as limitações de capacidade das facilidades e a satisfazer as demandas dos clientes. Se não forem definidas outras restrições além da capacidade das facilidades e da demanda dos clientes, nada impede que a demanda de um cliente seja satisfeita designando mais do que uma facilidade para ele, o que caracteriza o CFLP com múltiplas fontes (*multi-source*, MS-CFLP) [4.1].

Quando cada demanda deve ser atendida por somente uma facilidade, tem-se o CFLP com fonte única (*single-source*, SS-CFLP) [4.2].

4.1 MS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e múltiplas fontes

São dados o conjunto de facilidades I e o conjunto de clientes J. Para cada facilidade $i \in I$, tem-se o custo de abertura $f_i \in \mathbb{R}$ e a capacidade máxima de atendimento $s_i \in \mathbb{Z}$. Tem-se também a demanda de produtos $d_j \in \mathbb{Z}$ para cada cliente $j \in J$. Para cada par de facilidade e cliente $\langle i, j \rangle \in I \times J$, há o custo $c_{ij} \in \mathbb{R}$ do atendimento de j por i por unidade do produto demandado.

O modelo pode ser descrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}) \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq y_i s_i \quad \forall i \in I \quad (3)$$

$$y_i \in \{0,1\},\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I,\ j \in J \quad (4)$$

O atendimento da demanda do cliente $j \in J$ pela facilidade $i \in I$ é representado pela variável inteira não-negativa x_{ij}, cujo valor é a quantidade de unidades do produto são fornecidas por i para j. A restrição 2 garante que a soma de todos os atendimentos de cada cliente por todas as facilidades satisfaça sua demanda d_j. Os custos de atendimento são somados na função objetivo (1) de acordo com o custo c_{ij} por unidade.

A abertura da facilidade $i \in I$ é representada pela variável binária y_i, que assume valor 0 quando i estiver fechada e 1 se tiver sido instalada. A restrição 3 exige que, se a soma dos atendimentos prestados por i para todos os seus clientes for positiva, a facilidade deva ser aberta ($y_i = 1$). Essa restrição também limita a soma dos atendimentos à capacidade s_i da facilidade. O custo de instalação f_i da facilidade será somado ao custo na função objetivo (1) se $y_i = 1$.

Observação 1 *É importante ressaltar que esse modelo considera que o produto possui unidades indivisíveis e que, portanto, os atendimentos x_{ij}, as capacidades s_i e as demandas d_j são inteiros.*

Caso fossem fornecidas capacidades reais $s'_i \in \mathbb{R}$, bastaria utilizar $s_i = \lfloor s'_i \rfloor$. Se fossem demandas reais $d'_j \in \mathbb{R}$, bastaria utilizar $d_j = \lceil d'_j \rceil$.

Contudo, sendo necessário utilizar valores fracionários de atendimento, capacidade e demanda, bastará alterar a restrição 4 para que sejam reais as variáveis $x_{ij} \in \mathbb{R}$. A modelagem do problema funciona para atendimentos no domínio dos reais.

4.2 SS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e fonte única

A modelagem pode ser essencialmente a mesma do MS-CFLP [4.1], simplesmente se alterando o domínio de cada $x_{ij} \in \{0, d_j\}$ na restrição 4. Porém a restrição para uma única fonte permite algumas alterações razoáveis.

Novamente são dados o conjunto de facilidades I e o conjunto de clientes J, bem como o custo de abertura $f_i \in \mathbb{R}$ e a capacidade máxima de atendimento $s_i \in \mathbb{Z}$ para cada facilidade $i \in I$. Então, para cada par de facilidade e cliente $\langle i, j \rangle \in I \times J$, há a demanda $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ (quantas unidades do produto i deveria fornecer a j caso o atenda) e o custo $g_{ij} \in \mathbb{R}$ de atendimento de toda essa demanda. A possibilidade de a demanda ser diferente se for atendida por facilidades diferentes é uma generalização razoável permitida pela restrição maior das fontes de atendimento.

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij}) \tag{5}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \tag{6}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq y_i s_i \quad \forall i \in I \tag{7}$$

$$y_i \in \{0,1\},\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I,\ j \in J \tag{8}$$

Dessa vez, x_{ij} é definida como variável binária, representando se a facilidade i atende o cliente j. A restrição 6 garante que exatamente uma facilidade atenda cada cliente. Os custos de atendimento são somados na função objetivo (5) de acordo com o custo total g_{ij}.

Novamente, y_i é a variável binária que representa se a facilidade $i \in I$ está aberta. A restrição 7 exige que, se a soma dos atendimentos prestados por i para todos os seus clientes for positiva, a facilidade deva ser instalada ($y_i = 1$). Essa restrição também limita a soma dos atendimentos (considerando a quantidade de produtos p_{ij} de cada um deles) à capacidade s_i da facilidade. Serão somados na função objetivo (5) os custos de instalação f_i das facilidades abertas ($y_i = 1$).

Observação 2 *Assim como o modelo MS-CFLP [4.1], esse modelo considera indivisibilidade de unidades do produto nas capacidades s_i e demandas p_{ij} inteiras. Mas se elas fossem reais não haveria nenhuma alteração de funcionamento, dispensando alteração de domínio das variáveis.*

Observação 3 *Embora tenha mudado a representação, não houve alteração nos dados de custo de atendimento. Pode-se substituir, neste modelo, $g_{ij} = c_{ij}p_{ij}$ e, no MS-CFLP [4.1], $g_{ij} = c_{ij}d_j$.*

4.2.1 De MS-CFLP para SS-CFLP

Para utilizar dados de uma instância do MS-CFLP [4.1] e utilizá-la SS-CFLP, basta que, para todo $i \in I$ e $j \in J$, $p_{ij} = d_j$ e $g_{ij} = c_{ij}p_{ij} = c_{ij}d_j$ (conforme a observação 3).

Os demais dados são os mesmos para ambos.

4.3 MS-CFLP-CI: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e incompatibilidade de clientes

Algumas instâncias que foram utilizadas apresentavam uma restrição a mais. Além da função objetivo (1), da restrição de atendimento de demanda 2, de limitação de capacidade 3 e das variáveis definidas na restrição 4, é adicionado um conjunto de pares de clientes incompatíveis $\Gamma \subset J^2$. Os clientes desses pares não podem ser atendidos pela mesma facilidade.

$$x_{ij_1} \leq \lambda_{ij_1j_2} s_i,\ x_{ij_2} \leq (1 - \lambda_{ij_1j_2}) s_i \quad \forall i \in I, \langle j_1, j_2 \rangle \in \Gamma \tag{9}$$

Para isso, são definidas as variáveis de disjunção $\lambda_{ij_1j_2}$

$$\lambda_{ij_1j_2} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \langle j_1, j_2 \rangle \in \Gamma \tag{10}$$

5 Experimentos computacionais

6 Referências

References

Instâncias			CBC			CPLEX			GUROBI		
			120	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**
`sobolev.ss`	**Gap**	**Média**	4,68	2,12	0,12	0	0	0	0,01	0	0
		Mediana	5,16	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**Média**	114,48	231,07	310,80	17,76	17,77	17,70	28,70	28,87	28,76
		Mediana	119,91	275,41	274,85	14,44	14,47	14,49	19,77	19,75	19,73
	Nodes	**Média**	4383,73	8574,17	10707,35	12440,43	12440,43	12440,43	20989,02	21176,65	21176,65
		Mediana	4261	9601	10410,50	9752	9752	9752	14843	14843	14843
	#Opt		16	57	86	100	100	100	99	100	100
	#Fact		100	100	100	100	100	100	100	100	100
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`holmberg.ss`	**Gap**	**Média**	0,03	0,03	0,02	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**Média**	7,72	12,79	19,48	0,57	0,57	0,57	0,59	0,60	0,59
		Mediana	0,36	0,36	0,35	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13
	Nodes	**Média**	2103,03	3901,08	5994,70	718,46	718,46	718,46	747,58	747,58	747,58
		Mediana	2	2	2	0	0	0	0	0	0
	#Opt		69	69	70	71	71	71	71	71	71
	#Fact		71	71	71	71	71	71	71	71	71
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.small.ss`	**Gap**	**Média**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**Média**	0,26	0,26	0,26	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06
		Mediana	0,17	0,17	0,17	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	Nodes	**Média**	5,83	5,83	5,83	0,62	0,62	0,62	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#Opt		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#Fact		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 1:

Instâncias			**CBC**			**CPLEX**			**GUROBI**		
			120	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**
`beasley.large.ss`	**Gap**	**Média**	80,44	80,05	55,24	4,24	1,01	0,58	5,36	1,13	0,53
		Mediana	78,50	78,06	77,94	3,13	0	0	5,27	0,41	0
	Time	**Média**	129,87	313,05	609,31	120,05	241,57	322,60	120,11	292,33	446,46
		Mediana	128,53	308,43	601,07	120,04	256,37	252,09	120,02	300,01	452,43
	Nodes	**Média**	0	1,58	128,83	77,58	1376,33	2211,25	1279,75	1858,75	3475,42
		Mediana	0	0	4,50	0	1079,50	1886	1284	1367	2813,50
	#Opt		0	0	0	0	7	9	0	3	9
	#Fact		12	12	12	12	12	12	12	12	12
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 2:

Instâncias			**CBC**			**CPLEX**			**GUROBI**		
			600	**1800**	**3600**	**600**	**1800**	**3600**	**600**	**1800**	**3600**
`mess.ss`	**Gap**	**Média**	19,53	17,34	15,14	2,40	1,32	0,92	1,72	1,25	0,82
		Mediana	29,47	21,24	9,41	1,99	0,93	0,59	1,46	1,07	0,73
	Time	**Média**	509,77	1517,66	2978,46	481,98	1333,36	2553,62	486,70	1410,30	2648,31
		Mediana	597,25	1794,17	3571,55	600,21	1800,38	3601	600,05	1800,06	3600,04
	Nodes	**Média**	4341	22587,15	65098,17	31113,92	75832,91	154435,20	29797,69	67568,38	140780,45
		Mediana	672	2127	10508	540	8167	39436	1813	6608	15406
	#Opt		2	2	2	3	3	3	3	3	3
	#Fact		7	7	7	13	11	10	13	13	11
	#OfM		0	0	0	0	2	3	0	0	1
	#TL		6	6	5	0	0	0	0	0	0

Table 3:

Instâncias			CBC			CPLEX			GUROBI		
			120	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**	**120**	**300**	**600**
`holmberg.ms`	**Gap**	**Média**	0,03	0,01	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**Média**	3,69	6,19	8,49	0,25	0,26	0,25	0,17	0,17	0,17
		Mediana	0,36	0,33	0,34	0,13	0,14	0,12	0,11	0,11	0,11
	Nodes	**Média**	188,49	354,62	583,15	72,42	72,42	72,42	10,76	10,76	10,76
		Mediana	2	2	2	0	0	0	0	0	0
	#Opt		70	70	71	71	71	71	71	71	71
	#Fact		71	71	71	71	71	71	71	71	71
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.small.ms`	**Gap**	**Média**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Mediana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Time	**Média**	0,39	0,39	0,39	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07
		Mediana	0,11	0,11	0,11	0,06	0,06	0,06	0,04	0,04	0,04
	Nodes	**Média**	45,17	45,17	45,17	11,46	11,46	11,46	0	0	0
		Mediana	6	6	6	0	0	0	0	0	0
	#Opt		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#Fact		24	24	24	24	24	24	24	24	24
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0
`beasley.large.ms`	**Gap**	**Média**	82,74	82,45	69,94	1,92	0,59	0,42	5,31	1,70	0,31
		Mediana	80,94	80,61	80,50	0,32	0	0	4,01	0,75	0
	Time	**Média**	130,41	308,56	607,54	106,23	183,49	258,48	111,08	261,11	392,52
		Mediana	128,40	309,72	603,09	120,07	183,93	183,28	120,02	300,03	371,93
	Nodes	**Média**	0	0,17	22,33	580,83	2314,75	3291,58	1043,17	1182,50	1641,83
		Mediana	0	0	0	546,50	2847	2847	1262	1312,50	1546,50
	#Opt		0	0	0	5	9	9	2	2	10
	#Fact		12	12	12	12	12	12	12	12	12
	#OfM		0	0	0	0	0	0	0	0	0
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 4:

Instâncias			**CBC**			**CPLEX**			**GUROBI**		
			600	**1800**	**3600**	**600**	**1800**	**3600**	**600**	**1800**	**3600**
`mess.ms`	**Gap**	**Média**	10,16	8,55	6,16	0,13	0,07	0,03	0,11	0,04	0,02
		Mediana	2,57	2,07	2,19	0	0	0	0,09	0	0
	Time	**Média**	490,95	1439,28	2625,29	279,55	731,79	985,22	356,01	883,96	1104,66
		Mediana	591	1762,92	3437,64	209,53	210,01	45,26	600,10	810,70	152,61
	Nodes	**Média**	4285,33	10993,40	22013,58	10715,88	25935,38	44222,29	7694,91	21289,90	24029,50
		Mediana	1176	4239	3582,50	7133,50	15520,50	6271	2675	10121,50	14357
	#Opt		3	3	4	5	5	6	5	6	6
	#Fact		15	15	12	8	8	7	11	10	8
	#OfM		1	0	3	0	0	1	3	3	5
	#TL		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 5: