

Guilherme Akira Demenech Mori

February 16, 2023

Abstract

1 Modelagem dos problemas

Consideramos três casos do problema de localização de facilidades com capacidade limitada (*Capacitated Facility Location Problem*, CFLP): com fonte única (*single-source*, SS) e com múltiplas fontes (*multi-source*, MS), esse último com e sem incompatibilidades de clientes (*customer incompatibilities*, CI).

1.1 SS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e fonte única

No caso de fonte única das instâncias adotadas, a limitação de capacidade é uma mesma constante s fixada para todas as facilidades. O valor do custo fixo f de abertura também é o mesmo para todas. O conjunto de facilidades é dado por I e o de clientes por J . A formulação adotada traz a demanda p_{ij} do cliente $j \in J$ se for atendido pela facilidade $i \in I$, podendo existir i que não seja capaz de atender j . O custo de transporte g_{ij} de $i \in I$ para $j \in J$ é referente à toda a demanda desse cliente j para a facilidade i , não ao transporte de cada unidade (ou medida) requerida.

x_{ij} indica se a facilidade $i \in I$ atenderá a demanda do cliente $j \in J$ e a variável binária y_i indica se i será aberta ou não, sendo exigido que a facilidade seja aberta para poder atender demandas de clientes.

São aplicadas as restrições de abertura e capacidade das facilidades (1) e de satisfação da demanda (2).

$$\sum_{j \in J} x_{ij} p_{ij} \leq y_i s \quad \forall i \in I \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq 1 \quad \forall j \in J \quad (2)$$

As variáveis devem ser binárias (3) e o objetivo é minimizar os custos de abertura e transporte (4).

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (3)$$

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij}) \quad (4)$$

A relaxação linear das variáveis x (da forma $x_{ij} \in [0, 1]$) transformaria esse caso em um problema com múltiplas fontes, o modelo, porém, se tornaria bastante estranho: demandas p_{ij} diferentes poderiam ser parcialmente atendidas, satisfazendo uma demanda mista não-planejada.

1.2 MS-CFLP: problema de localização de facilidades com capacidade limitada e múltiplas fontes

No caso de fontes múltiplas, para o conjunto de facilidades I e de clientes J , a capacidade s_i e o custo fixo de abertura f_i não são necessariamente os mesmos para todo $i \in I$, enquanto a demanda d_j de $j \in J$ é a mesma independente de qual (ou quais) facilidade(s) a satisfaça(m). Nas instâncias utilizadas, o custo de transporte c_{ij} , por unidade, da facilidade i para o cliente j existe para todos os pares.

Nesse caso, x_{ij} indica quantas unidades a facilidade $i \in I$ suprirá ao cliente $j \in J$ e, novamente, a variável binária y_i indica se a facilidade $i \in I$ será aberta ou não.

Da mesma forma que o caso anterior, são aplicadas as restrições de capacidade das facilidades (5) e de satisfação da demanda (6), dessa vez variando a capacidade de acordo com a facilidade e mantendo a demanda do cliente a mesma para todas as facilidades que o atenderem.

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq y_i s_i \quad \forall i \in I \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J \quad (6)$$

A abertura continua sendo binária, o atendimento deve ser inteiro (7) e o objetivo é minimizar os custos de abertura e transporte (8).

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (7)$$

$$\min \sum_{i \in I} (f_i y_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}) \quad (8)$$

1.3 MS-CFLP-CI: problema de localização de facilidades com capacidade limitada, múltiplas fontes e incompatibilidades de clientes

No modelo utilizado [Maia et al., 2022], é introduzido o conjunto $\Gamma \subseteq J^2$ de pares incompatíveis $\{j_1, j_2\} \in \Gamma$, nos quais os clientes $j_1, j_2 \in J$ não podem ser atendidos simultaneamente por uma mesma facilidade $i \in I$.

Aqui aplicam-se as mesmas restrições de domínio (7), de capacidade (5), de satisfação da demanda (6) e a mesma função objetivo (8) do modelo MS-CFLP, sendo somente adicionadas as restrições de incompatibilidade entre clientes.

A disjunção dos pares de clientes incompatíveis pode ser perfeitamente formulada pela técnica *big M* (9), uma vez que o limitante superior s_i é garantido para todo x_{ij} .

$$x_{ij_1} \leq \lambda_{ij_1j_2} s_i, \quad x_{ij_2} \leq (1 - \lambda_{ij_1j_2}) s_i \quad \forall i \in I, \{j_1, j_2\} \in \Gamma \quad (9)$$

As variáveis de disjunção *big M* também devem ser binárias (10).

$$\lambda_{ij_1j_2} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \{j_1, j_2\} \in \Gamma \quad (10)$$

Alternativamente, podemos definir as restrições de pares incompatíveis (9) para conjuntos incompatíveis $u_k \in \Gamma'$ (11). Também é razoável utilizar d_j como limitante superior, já que a minimização dos custos não-negativos torna a demanda do cliente $j \in J$ o máximo desejável para o atendimento x_{ij} da facilidade $i \in I$.

$$x_{ij_1} \leq \lambda_{ij_1k} d_{j_t} \quad \forall i \in I, j_t \in u_k, u_k = \{j_1, j_2 \dots j_n\}, u_k \in \Gamma' \quad (11)$$

A disjunção seria generalizada para os conjuntos de n clientes limitando a $n - 1$ clientes incompatíveis $j_t \in u_k$ atendidos pela mesma facilidade $i \in I$ (12).

$$\sum_{j_t \in u_k} \lambda_{ij_1k} \leq n - 1 \quad \forall i \in I, u_k = \{j_1, j_2 \dots j_n\}, u_k \in \Gamma' \quad (12)$$

Generalizamos o conjunto de conjuntos de clientes incompatíveis para $\Gamma' \subseteq \{B/B \subseteq J\}$ e adaptamos a variável binária $\lambda_{ij_1k} \in \{0, 1\}$.

References

[Maia et al., 2022] Maia, M. R., Reula, M., Parreño-Torres, C., Vuppuluri, P. P., Plastino, A., Souza, U. S., Ceschia, S., Pavone, M., and Schaerf, A. (2022). Metaheuristic techniques for the capacitated facility location problem with customer incompatibilities. *Soft Computing*, pages 1–14.