

<ユークリッドの互除法>

問題 次の2つの整数の最大公約数を、「ユークリッドの互除法」を用いて求めよ。

(1) 186, 54

(解答)

$$186 \div 54 = 3 \text{ 余り } 24$$

$$54 \div 24 = 2 \text{ 余り } 6$$

$$24 \div 6 = 4 \text{ 余り } 0$$

最大公約数は 6

(2) 731, 301

(解答)

$$731 \div 301 = 2 \text{ 余り } 129$$

$$301 \div 129 = 2 \text{ 余り } 43$$

$$129 \div 43 = 3 \text{ 余り } 0$$

最大公約数は 43

2つの正の整数 a と b について

a を b で割ったときの商を q 、余りを r とします。(つまり $a \div b = q \text{ 余り } r$)

このとき、 $a = bq + r \dots \textcircled{1}$ が成り立ちます。

ユークリッドの互除法

a と b の最大公約数と、 b と r の最大公約数は一致する

(証明) まず、「 a と b のすべての公約数と、 b と r のすべての公約数は一致する」ことを示します。

(i) a と b の公約数を n とすると

$a = cn$, $b = dn$ となる整数 c と d がある。

$$\textcircled{1} \text{ より } r = a - bq = cn - dnq = n(c - dq)$$

となるので n は r の約数である。

つまり a と b の公約数はすべて、 r と b の公約数である。

(ii) r と b の公約数を m とすると、

$$r = cm, \quad b = dm$$

という整数 c と d がある。

$$\textcircled{1} \text{ より } a = bq + r = dmq + cm = m(dq + c)$$

となるので m は a の約数である。

つまり r と b の公約数はすべて、 a と b の公約数である。

以上 (i) (ii) より a と b のすべての公約数と、 b と r のすべての公約数は一致する。

故に、 a と b の最大公約数と、 b と r の最大公約数は一致する。

＜拡張ユークリッドの互除法＞

問題 2 つの整数 154 と 69 は互いに素 (最大公約数は 1) です。

「ユークリッドの互除法」を用いて、等式 $154x + 69y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(解答)

$$\begin{array}{r} 2 \\ 69 \overline{) 154} \\ \underline{138} \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \overline{) 69} \\ \underline{64} \\ 5 \end{array}$$

$$154 \div 69 = 2 \text{ 余り } 16 \implies 154 = 69 \times 2 + 16$$

$$69 \div 16 = 4 \text{ 余り } 5 \implies 69 = 16 \times 4 + 5$$

$$16 \div 5 = 3 \text{ 余り } 1 \implies 16 = 5 \times 3 + 1$$

$$5 \div 1 = 5 \text{ 余り } 0 \implies 5 = 1 \times 5 + 0$$

<拡張ユークリッドの互除法>

問題 2つの整数 154 と 69 は互いに素 (最大公約数は1) です。

「ユークリッドの互除法」を用いて、等式 $(154)x + (69)y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

(解答)

$$\begin{array}{r} 2 \\ 69 \overline{) 154} \\ \underline{138} \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \overline{) 69} \\ \underline{64} \\ 5 \end{array}$$

$$154 \div 69 = 2 \text{ 余り } 16 \Rightarrow 154 = 69 \times 2 + 16 \Rightarrow 154 - 69 \times 2 = 16$$

$$69 \div 16 = 4 \text{ 余り } 5 \Rightarrow 69 = 16 \times 4 + 5 \Rightarrow 69 - 16 \times 4 = 5$$

$$16 \div 5 = 3 \text{ 余り } 1 \Rightarrow 16 = 5 \times 3 + 1 \Rightarrow 16 - 5 \times 3 = 1$$

$$5 \div 1 = 5 \text{ 余り } 0 \Rightarrow 5 = 1 \times 5 + 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= 16 - 5 \times 3 \\ &= 16 - (69 - 16 \times 4) \times 3 \\ &= 16 \times 13 - 69 \times 3 \\ &= (154 - 69 \times 2) \times 13 - 69 \times 3 \\ &= 154 \times 13 - 69 \times 29 \end{aligned}$$

$$\therefore 154 \times 13 + 69 \times (-29) = 1$$

$$\therefore \underline{x = 13, y = -29}$$