Université de Montréal
Département d'informatique et de recherche opérationnelle

IFT3395/6390
Fondements de l'apprentissage machine

Notion de distributions de probabilité

Gaussienne multivariée

Professeur: Pascal Vincent

LISA Laboratoire d'Informatique des Systèmes d'Apprentissage

Distributions

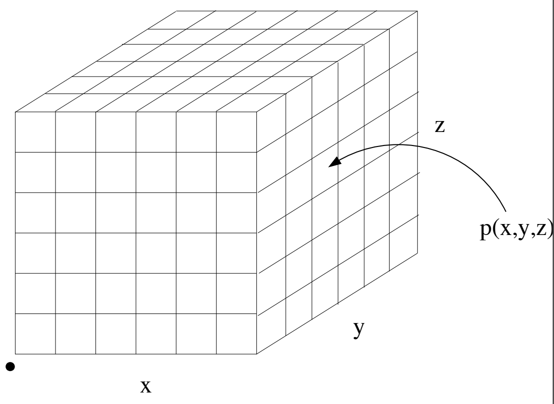
Voir http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=6395
et le rappel de proba de Balazs

- On associe naturellement une loi de probabilité (ou **distribution**) à une variable aléatoire pour décrire la *répartition des valeurs qu'elle peut prendre.*

- La distribution d'une variable aléatoire peut se caractériser par sa fonction de distribution cumulative (c.d.f.):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n)$$

- La loi d'une variable discrète est déterminée par la probabilité de chacune des valeurs qu'elle peut prendre. => table de probabilités (qui doivent sommer à 1).



- La loi d'une variable continue peut être donnée sous la forme d'une fonction de densité de probabilité (p.d.f.) qui est la dérivée de la c.d.f. *La probabilité qu'un tirage de la variable tombe dans une certaine région de l'espace est l'intégrale de la densité sur cette région.*

Opérations avec les distributions

Avec une distribution, on peut vouloir:

- Générer des données, c.a.d. tirer des échantillons selon la distribution.
- Calculer la (log) probabilité d'une configuration (sachant la valeur de certaines des variables et ayant maginalisé celles dont on ne connaît pas la valeur).
- Inférence: *inférer* la valeur la plus probable ou la valeur espérée d'un sous ensemble de variables sachant la valeur des autres.
- Apprentissage des paramètres de la distribution à partir d'un ensemble de données (de sorte à maximiser la probabilité que les données soient générées par cette distribution avec ces paramètres: principe du *maximum de vraisemblance*).

Ex. variable scalaire discrète X

Table de probabilité:

x	$P(X=x)$
1	0.10
2	0.80
3	0.10

Génération

Apprentissage

Ensemble de données:

2
2
2
1
2
2
2
3
2
2
⋮

Ex. variable scalaire continue x

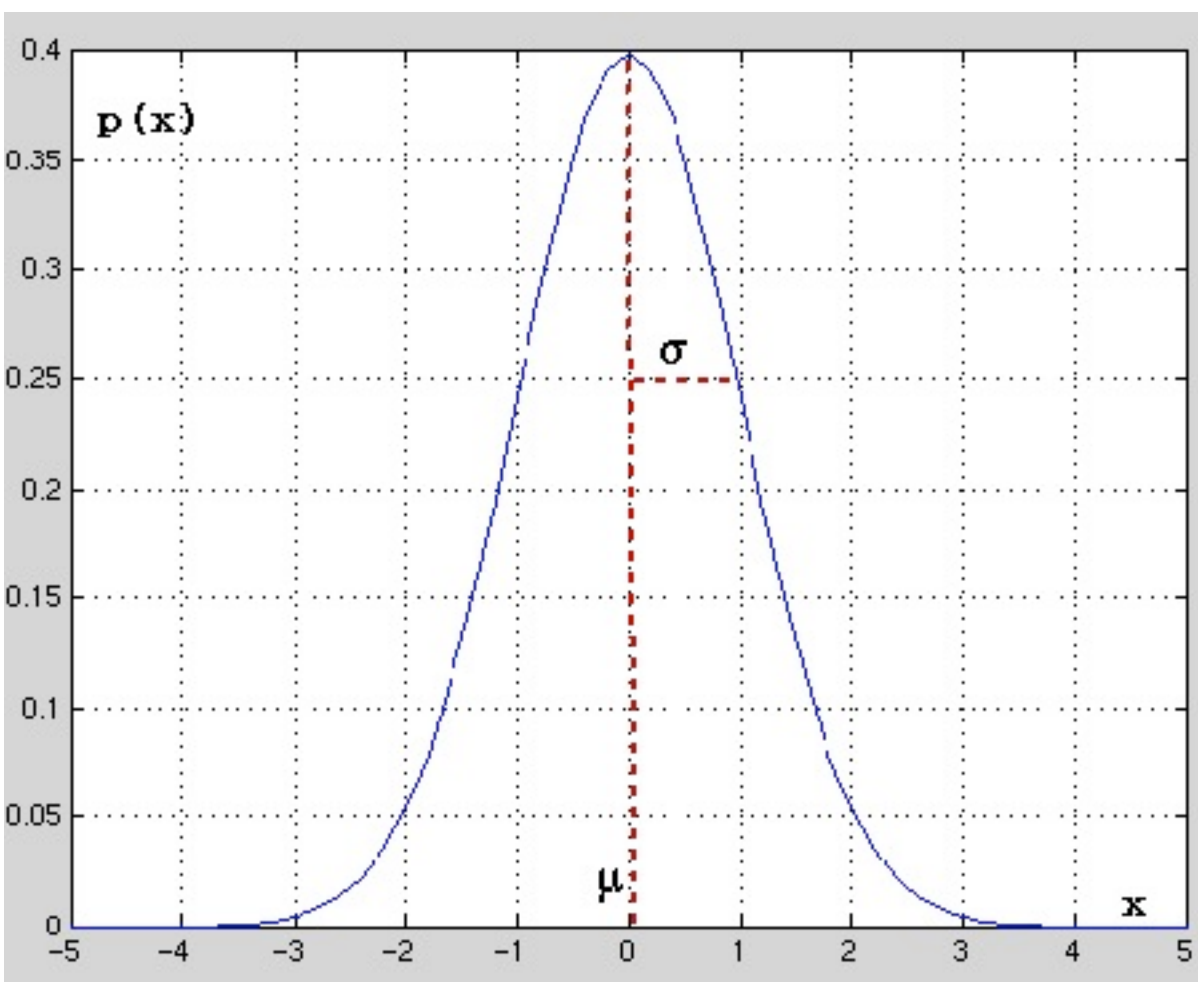
la densité Gaussienne univariée

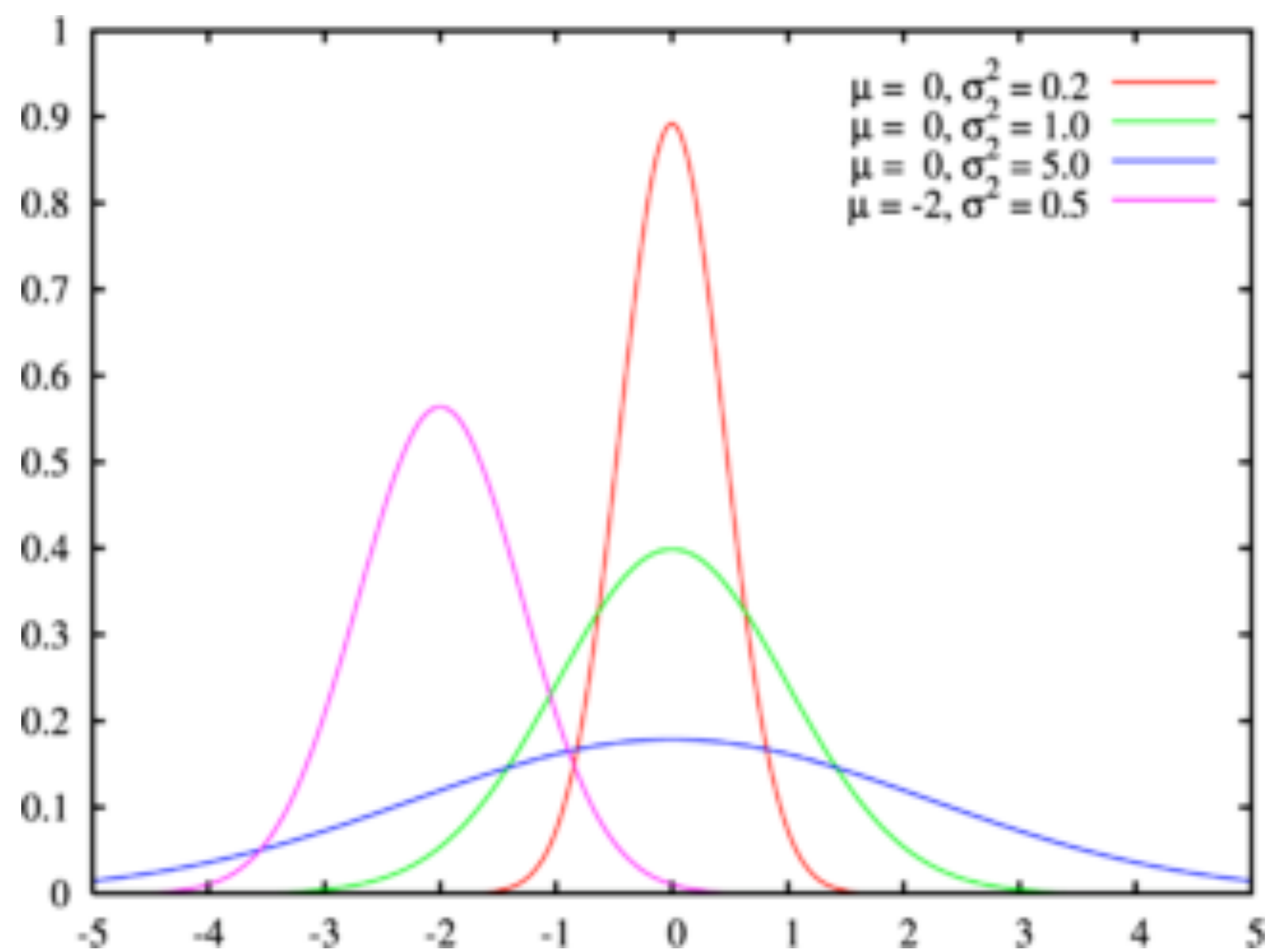
(distribution dite Gaussienne ou Normale)

La densité Gaussienne univariée
(distribution dite Gaussienne ou Normale)

Densité Gaussienne univariée (c.a.d. en dimension 1) de moyenne μ et de variance σ^2 (écart type σ).

$$p(x) = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



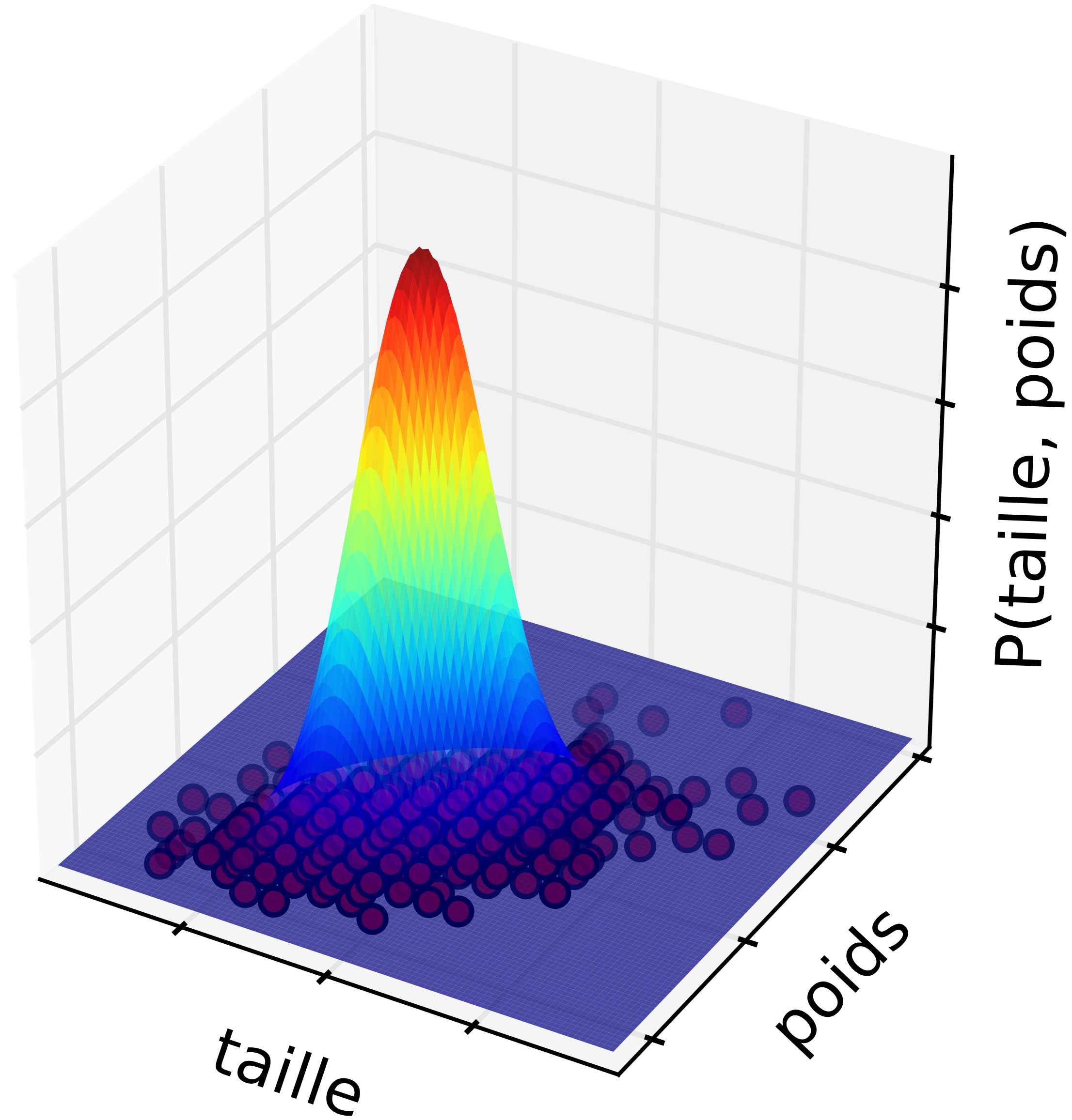


La plupart des graphiques de cette partie proviennent de la page http://www.cs.mcgill.ca/~mcleish/644/normal.html par **Erin Mcleish**

Ex. variable vectorielle continue x

la densité Gaussienne multivariée

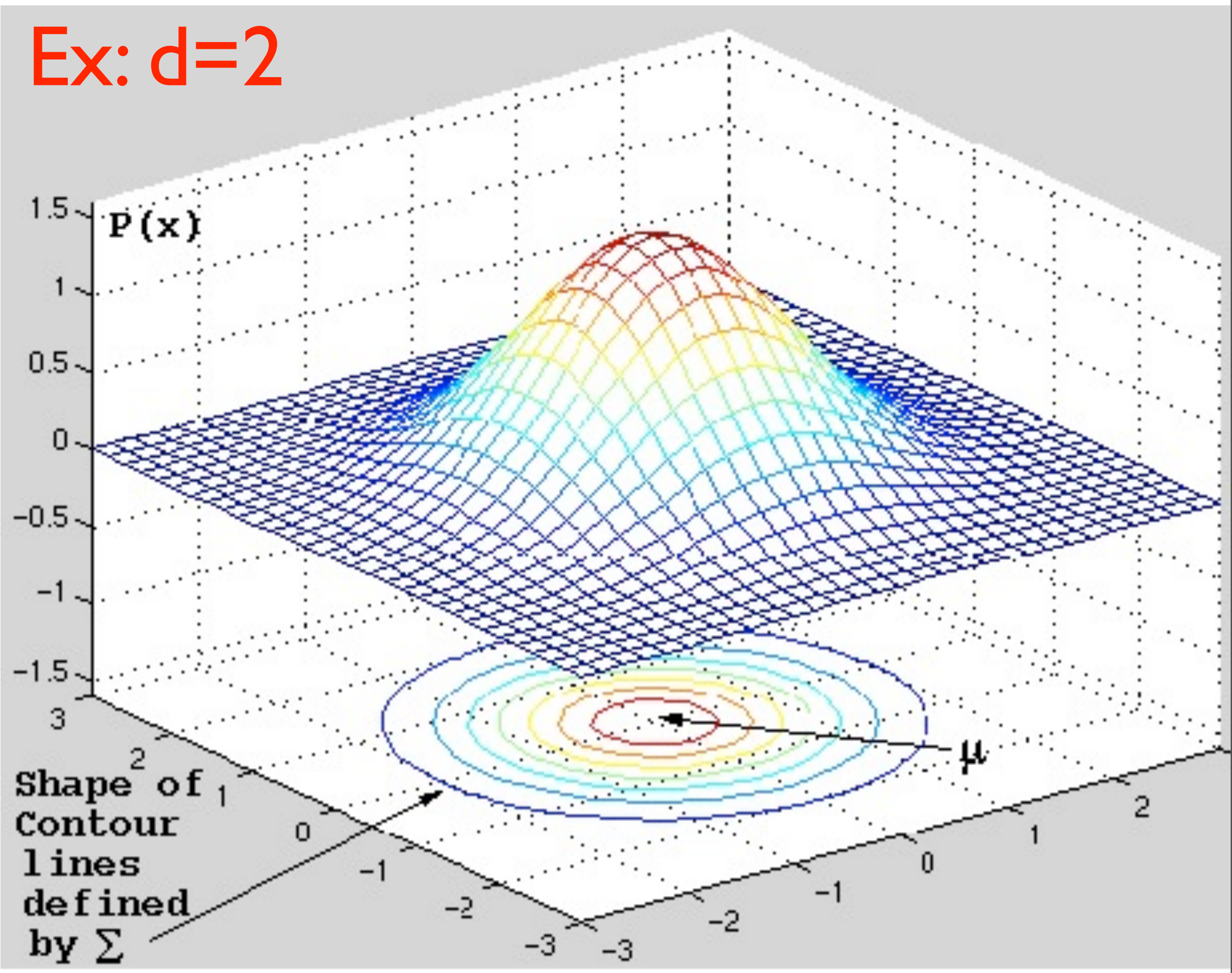
(distribution dite Gaussienne ou Normale)



La densité Gaussienne multivariée

Gaussienne isotropique
("sphérique") en dimension d:

$$p(x) = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sigma^d} e^{-\frac{1}{2}\frac{\|x-\mu\|^2}{\sigma^2}}$$



Il s'agit d'une "bosse" Gaussienne ***"centrée"*** *en* μ *et de* ***"largeur"*** σ*, la même dans toutes les directions.*

Gaussienne générale en dimension d, de moyenne μ et de matrice de covariance Σ.

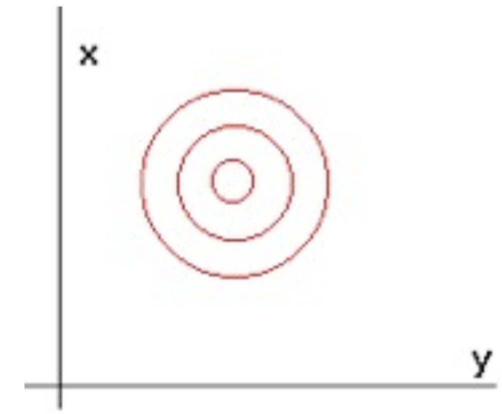
$$p(x) = \mathcal{N}_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\underbrace{\sqrt{|\Sigma|}}_{\text{déterminant de }\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{d1} & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix}$$

Note: le dénominateur est une simple normalisation qui assure que la densité intègre à 1, mais ne change rien à sa forme

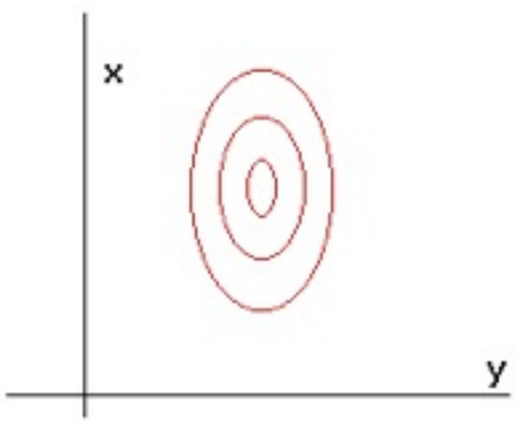
La densité Gaussienne multivariée

matrices de covariance particulières



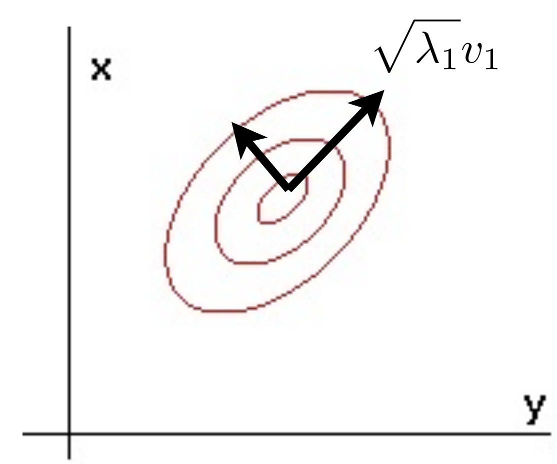
- Gaussienne isotropique ou sphérique: $\Sigma = \sigma^2 I$
  (avec I la matrice identité)

- Gaussienne diagonale: $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \sigma_d^2 \end{pmatrix}$$



- Décomposition en valeurs propres/vecteurs propres:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i v_i^T$$



Les vecteurs propres indiquent les directions des axes de l'ellipsoide associée, les valeurs propres leur "longeur".
Le déterminant $|\Sigma| = \lambda_1 \ \lambda_2 \ \ldots \ \lambda_d$ *indique la "taille" de l'ellipsoide.*

La densité Gaussienne multivariée

apprentissage des paramètres

- On peut apprendre les paramètres d'une Gaussienne à partir d'un ensemble de données de manière simple:
- Pour μ on calcule la moyenne empirique des points (le "centroide").

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbf{x}_t$$

- Pour Σ on calcule la matrice de covariance empirique des données.

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (\mathbf{x}_{ti} - \mu_i)(\mathbf{x}_{tj} - \mu_j) \quad \text{ou bien} \quad \Sigma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (\mathbf{x}_t - \mu)(\mathbf{x}_t - \mu)'$$

- On verra comment dériver ces résultats dans un prochain cours *(principe du maximum de vraisemblance).*