第二章 控制系统的数学模型

2-1 控制系统的时域数学模型

2-2 控制系统的传递函数

2-3 控制系统的结构图与信号流图

2-4 数学模型的实验测定法(自学)

- 总学时数：10学时（2.5~4周）

- 基本内容：数学模型的基本概念，控制系统的结构图、信号流图、微分方程和传递函数及相互转换关系，数学模型的等效变换。

- 基本要求：数学模型的一般建立方法，数学模型之间的关系和相互等效变换方法，传递函数的概念及其性质。

学习重点

- 微分方程式的列写
- 传递函数的定义及其性质
- 微分方程和传递函数的相互转换
- 应用传递函数求系统的响应
- 系统动态结构图及简化
- 信号流图和Mason公式
- 闭环系统的传递函数

2-1 控制系统的时域数学模型

- 数学模型：系统内部各变量之间的数学表达式
- 静态模型：静态条件下的代数方程；
- 动态模型：描述动态关系的微分方程。
- 分析建模法：利用数学物理方程或者化学规律来得到表达式；
- 实验建模法：采集输入-输出数据，然后进行曲线拟合（系统辨识）

一. 控制系统微分方程的建立

系统微分方程的建立步骤：

① 确定系统的输入、输出变量；

② 输入端开始，按照信号的传递顺序，根据各变量所遵循的物理定理写出各微分方程；

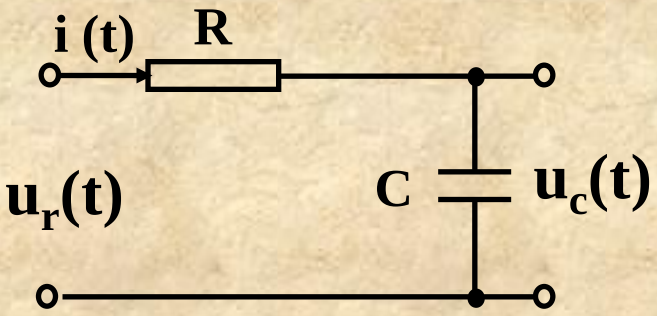
③ 消去中间变量，写出输入、输出变量的微分方程；

④ 变换成标准形式。

例1：RC电路

$$u_r = iR + \frac{1}{C}\int idt$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int idt$$



消去中间变量后得到:

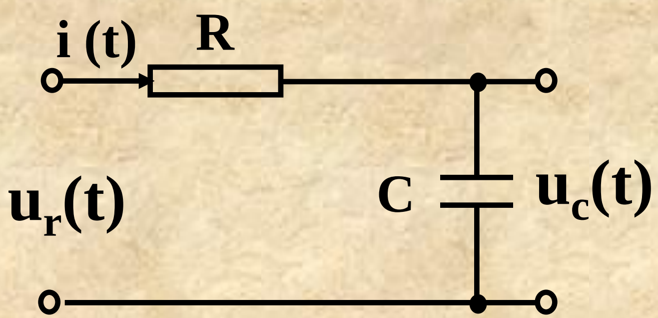
$$T\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

$$T = RC$$

时间常数

例1：RC电路

即：消去中间变量后得到:



$$u_r = Ri + u_C$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt$$

$$i = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

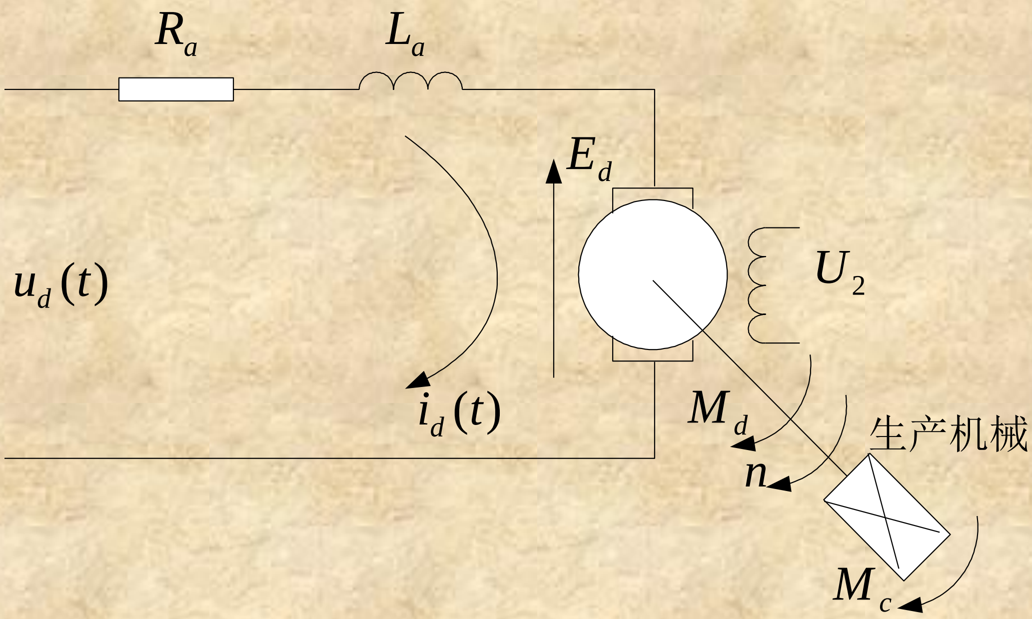
$$u_r = RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_C$$

$$T\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

$$T = RC$$

时间常数

例2：直流电动机



R_a:电枢电阻；L_a:电枢总电感；

M_d:电机转矩；M_c:负载（取为零）；

$u_d(t)$:电枢电压(输入)；$n(t)$:电机转速（输出）

微分方程：

$$\begin{cases} u_d(t) = R_a i_d + L_a \dfrac{di_d(t)}{dt} + E_d \\ M_d - M_c = \dfrac{1}{375} GD^2 \cdot \dfrac{dn(t)}{dt} \\ M_d = C_M \varphi i_d \\ E_d = C_e \varphi n \end{cases}$$

负载为零时：$M_c = 0$

$$M_d = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{dn(t)}{dt} \Rightarrow i_d = \frac{M_d}{C_M \varphi} = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M \varphi} \cdot \frac{dn(t)}{dt}$$

$$\frac{di_d(t)}{dt} = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M \varphi} \cdot \frac{d^2 n}{dt^2}$$

微分方程:

$$\begin{cases} u_d(t) = R_a i_d + L_a \dfrac{di_d(t)}{dt} + E_d \\ M_d - M_c = \dfrac{1}{375} GD^2 \cdot \dfrac{dn(t)}{dt} \\ M_d = C_M \varphi i_d \\ E_d = C_e \varphi n \end{cases}$$

$$i_d = \frac{M_d}{C_M\varphi} = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M\varphi} \cdot \frac{dn(t)}{dt} \qquad \frac{di_d(t)}{dt} = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M\varphi} \cdot \frac{d^2n}{dt^2}$$

$$u_d(t) = R_a \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M\varphi} \cdot \frac{dn(t)}{dt} + L_a \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{1}{C_M\varphi} \cdot \frac{d^2n}{dt^2} + C_e\varphi n$$

$$u_d(t) = C_e\phi\left(\frac{GD^2}{375} \cdot \frac{R_a}{C_M\varphi C_e\phi}\left(\frac{dn}{dt} + \frac{L_a}{R_a}\frac{d^2n}{dt^2}\right) + n\right)$$

$$u_d(t) = C_e\phi\left(\frac{GD^2}{375}\cdot\frac{R_a}{C_M\varphi C_e\phi}\left(\frac{dn}{dt}+\frac{L_a}{R_a}\frac{d^2n}{dt^2}\right)+n\right)$$

$T_a = \dfrac{L_a}{R_a}$ ： 电磁时间常数

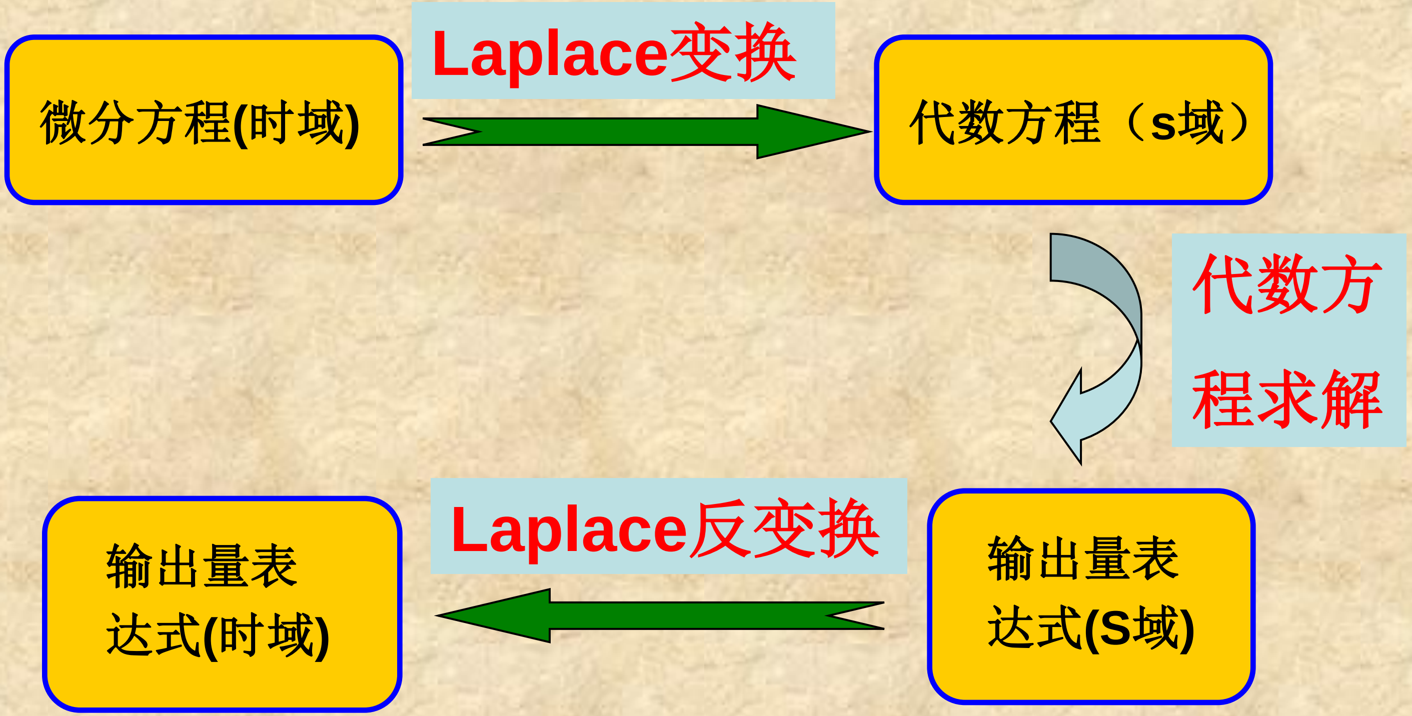
$T_M = \dfrac{GD^2}{375}\cdot\dfrac{R_a}{C_M\phi C_e\phi}$ ： 机电时间常数

二阶系统:

$$T_aT_M\frac{d^2n}{dt^2}+T_M\frac{dn}{dt}+n=\frac{u_d(t)}{C_e\varphi}$$

二. 用拉氏变换求解线性定常微分方程

求解过程:



拉氏变换定义:

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

常用函数的拉氏变换

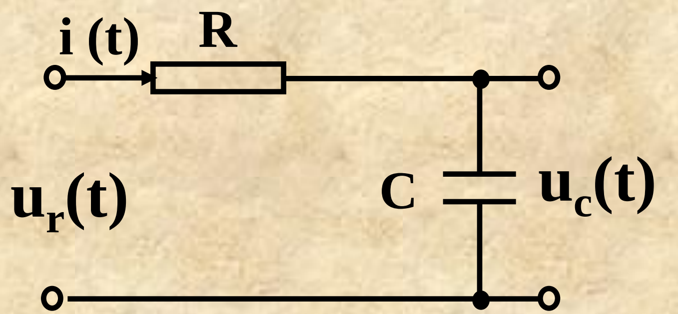
拉氏变换的*性质*

拉氏反变换

例: RC电路:

$$T\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

设 $u_r(t)=1(t)$，初始条件为：$u_c(0)=0$ ，试求系统响应 $u_c(t)$ 。



解：对上式取拉氏变换得到：

$$TsU_c(s)-Tu_c(0)+U_c(s)=U_r(s)=\frac{1}{s}$$

$$U_c(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1/T}{s(s+1/T)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1/T}$$

$$\left(\frac{1/T}{s(s+1/T)}\right)s=\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1/T}\right]s$$

部分分式和，便于求反变换

其中，

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{s\to 0}\left[\dfrac{1}{Ts+1}\cdot\dfrac{1}{s}\right]\cdot s=1\\ B=\lim\limits_{s\to -\frac{1}{T}}\left[\dfrac{1/T}{s+1/T}\cdot\dfrac{1}{s}\right]\cdot\left(s+1/T\right)=-1\end{cases}$$

$$u_c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t},t>0$$

三．非线性微分方程的线性化

- 忽略非线性特性：**非线性特性不强，精确度要求不高**情况下
- 偏差法：将非线性方程在平衡点附近进行线性化

定理 3.1（泰勒（Taylor）定理） 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{3.1}$$

其中

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]\quad(x\to x_0). \tag{3.2}$$

即 $R_n(x)$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小.

平衡点（状态不再发生变化）：$y_0 = f(x_0)$

当受到干扰偏离平衡点时，

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Longrightarrow \quad y = ?$$

泰勒展开：

$$y = f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0} \Delta x + o(\Delta x)$$

所以得到如下的**增量线性化**方程：

$$y - y_0 = \Delta y = K \cdot \Delta x$$

$$K = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}$$

四. 运动的模态

- 微分方程的解 = 特解 + 通解

决定于微分方程的特征根，代表自由运动

- 运动的模态：若n阶微分方程的特征根是λ_1、λ_2、…、λ_n，且无重根，则把函数$e^{\lambda_1 t}$、$e^{\lambda_2 t}$、…、$e^{\lambda_n t}$，称为该微分方程所描述运动的模态（振型）。

特征根与运动模态的对应关系：

特征根的形式	特征根	运动包含的模态
单特征根	λ_1、λ_2、$\ldots\lambda_n$	$e^{\lambda_1 t}$、$e^{\lambda_2 t}$、$\ldots e^{\lambda_n t}$
重特征根	λ^m	$e^{\lambda t}$、$te^{\lambda t}$、$\ldots t^{m-1}e^{\lambda t}$
共轭复根	$\sigma \pm j\omega$	$e^{(\sigma \pm j\omega)t}$ $e^{\sigma t}\sin\omega t + e^{\sigma t}\cos\omega t$

2-2 控制系统的传递函数

- 传递函数的定义与基本性质
- 应用传递函数来计算系统的响应
- 传递函数的零极点及其对输出的影响
- 典型环节的传递函数

一.　传递函数的定义与基本性质

例： 已知某二阶系统的微分方程为：

$$\ddot{c}(t)+3\dot{c}(t)+2c(t)=2r(t)$$

当初始条件为零时，试计算系统分别在单位阶跃和单位斜坡信号作用下的响应。

解： 当初始条件为零时，对系统微分方程求拉氏变换得到：

$$\left[s^2+3s+2\right]C(S)=2R(s)$$

$$C(S)=\frac{2}{s^2+3s+2}R(s)$$

输入1. $r(t)=1, t>0 \longrightarrow R(s)=\dfrac{1}{s}$

$$C(S)=\frac{2}{s^2+3s+2}R(s)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$\Longrightarrow c(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}, t>0$$

输入2. $r(t)=t, t>0 \longrightarrow R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$$C(S)=\frac{2}{s^2+3s+2}R(s)=\frac{2}{s^2\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}$$

$$C(S)=\frac{2}{s^2(s+1)(s+2)}=\boxed{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s+2}$$

$\Longrightarrow$ **B=1, C=2, D=-1/2** **A=?**

右边通分，分子最高次的系数：A+C+D=0

例： 已知某二阶系统的微分方程为：

$$a_0\ddot{c}(t)+a_1\dot{c}(t)+a_2c(t)=b_0\dot{r}(t)+b_1r(t)$$

当初始条件为零时，试计算系统分别在输入信号

$r(t)=1,t>0$ 和 $r(t)=t,t>0$ 作用下的响应。

解： 当初始条件为零时，对系统微分方程求拉氏变换得到：

$$\left[a_0s^2+a_1s+a_2\right]C(S)=\left[b_0s+b_1\right]R(s)$$

整理后得到：

$$C(S)=\frac{b_0s+b_1}{a_0s^2+a_1s+a_2}R(s)$$

然后可以代入输入信号的拉氏变换来求响应。

更一般地，对于 *n* 阶系统：

$$a_0\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n c(t)$$

$$=b_0\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_m r(t)$$

在零初始条件下，取拉氏变换可以得到：

$$C(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n}R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\text{确定的分式}$$

事实：零初始条件下，对于线性系统而言，$\dfrac{C(s)}{R(s)}$ 为确定的函数！

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \text{确定的分式}$$

计算响应有何便利？

对于不同的输入，**避免重复**对微分方程取拉氏变换来进行求解。

传递函数定义：一个系统或环节在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，称为该系统或环节的传递函数：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

例：对于电机系统，其微分方程为：

$$T_a T_M \frac{d^2 n}{dt^2}+T_M \frac{dn}{dt}+n=\frac{u_d(t)}{C_e \phi}$$

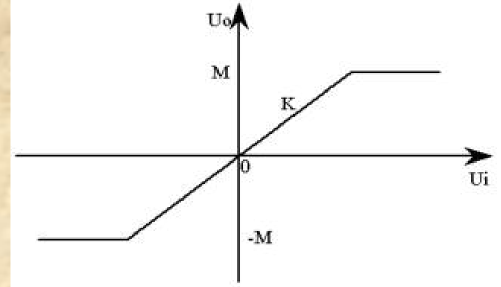
对其求拉氏变换可以得到传递函数

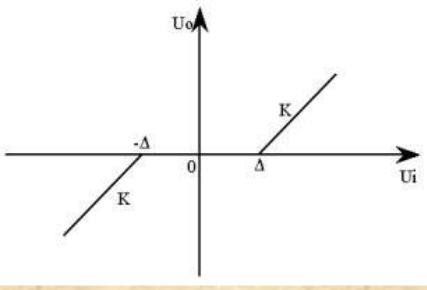
$$G(s)=\frac{N(s)}{U_d(s)}=\frac{1}{C_e \phi\left(T_a T_M s^2+T_M s+1\right)}$$

传递函数的性质：

- 传递函数是对系统输入-输出特性的描述。不同物理系统可用同类型的传函表示；
- 传递函数只反映系统自身特性，它决定于系统的结构与参数，而与输入量无关；
- 传递函数是线性系统的特性。对于非线性系统，通常不定义传递函数！为什么?

非线性系统不满足叠加原理，因此对于不同的输入信号，其比值不一样。





传递函数的性质：

- 传递函数与微分方程有相通性；
- 传递函数是在零初始条件下定义的！如果计算非零初始条件响应，必须还原出微分方程来进行计算！
- 传递函数是复变量*s*的有理**真分式**，具有复变函数的所有性质；

如果是假分式，则存在：$G(s)=G_1(s)+G_2(s)$。设 $G_1(s)=s$

则对于输入信号$r(t)=1(t)$ $\Longrightarrow$ $c(t)=\delta(t)+\ldots$

传递函数的另一种求法：

定义： 若输入为 $\delta(t)$，则输出 $g(t)$ 称为单位脉冲响应。

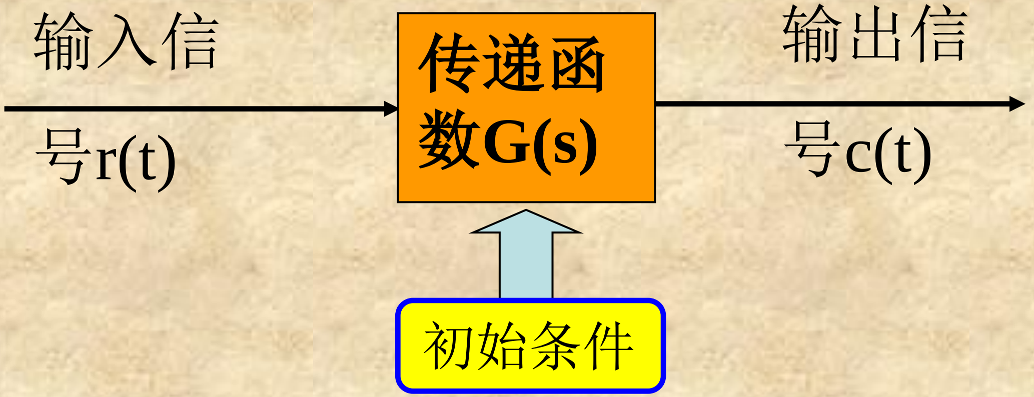
已知系统的单位脉冲响应 $g(t)$，则系统传递函数为 $G(s)$，即：$G(s)=L[g(t)]$

对输入信号：$R(s)=L(\delta(t))=1$，则有：

$$C(s)=G(s)\cdot R(s)=G(s)$$

$$G(s)=L[g(t)]$$

二. 应用传递函数计算系统响应



- 零初始条件响应
- 非零初始条件时，响应计算

零初始条件下响应计算：

计算过程：Step 1. 计算 $R(s)=L(r(t))$;

Step 2. $C(s)=G(s)R(s)$ ；

Step 3. 输出信号：$c(t)=L^{-1}(C(s))$

部分分式和

例：已知某系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

且初始条件为零，试计算单位阶跃下的响应。

解：对于输入 $r(t)=1(t)$，有 $R(s)=1/s$，则:

$$C(s)=G(s)R(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

其中：

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}\cdot s=1;B=\lim_{s\to -1}\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+1)=-2$$

$$C=\lim_{s\to -2}\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+2)=1$$

所以，

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$c(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t},t\geq 0$$

非零初始条件下响应计算：

计算过程：

Step 1.通过传递函数得到系统的微分方程;

Step 2.考虑初始条件，用拉氏变换方法求解微分方程来得到系统的输出响应。

例： 已知某系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

且初始条件为$c(0)=-1, \dot{c}(0)=0$，试计算单位阶跃下的响应。

解： 根据系统的传递函数得到：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

即：

$$C(s)\left(s^2+3s+2\right)=2R(s)$$

$$C(s)\left(s^2+3s+2\right)=2R(s)$$

还原得到微分方程如下：

$$\ddot{c}(t)+3\dot{c}(t)+2c(t)=2r(t)$$

对上式求拉氏变换后得到：

$$\left[s^2C(s)-sc(0)-\dot{c}(0)\right]+3\left[sC(s)-c(0)\right]+2C(s)=2R(s)$$

整理后得到：

$$C(s)=\frac{2R(s)}{\left[s^2+3s+2\right]}+\frac{\left[(s+3)c(0)+\dot{c}(0)\right]}{\left[s^2+3s+2\right]}$$

代入初始条件和 $R(s)=\dfrac{1}{s}$，并整理后得到：

$$C(s)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}-\frac{\left(s+3\right)}{s^2+3s+2}=\frac{-s^2-3s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}$$

其中，

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{-s^2-3s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)}s=1$$

$$B=\lim_{s\to -1}\frac{-s^2-3s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)}\cdot\left(s+1\right)=-4$$

$$C=\lim_{s\to -2}\frac{-s^2-3s+2}{s\left(s^2+3s+2\right)}\cdot\left(s+2\right)=2$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{2}{s+2} \qquad c(t)=1-4e^{-t}+2e^{-2t},t\geq 0$$

三. 传递函数的零极点及其对输出的影响

系统的传递函数：

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}(n>m)$$

分子分母改写成因式相乘的形式:

$$G(s)=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

零点

传递系数/
根轨迹增益

极点

传递函数的零极点对输出的影响:

- 传递函数的极点是微分方程的特征根，它们决定所描述系统自由运动的模态。
- 传递函数的零点不形成自由运动的模态，但它们影响各模态响应中所占的比重，因而也影响响应曲线的形状。

规律：距离原点较近，且离极点较远的零点对系统相应影响大（超调增大，响应加快）。

四. 典型环节的传递函数

① 比例环节：

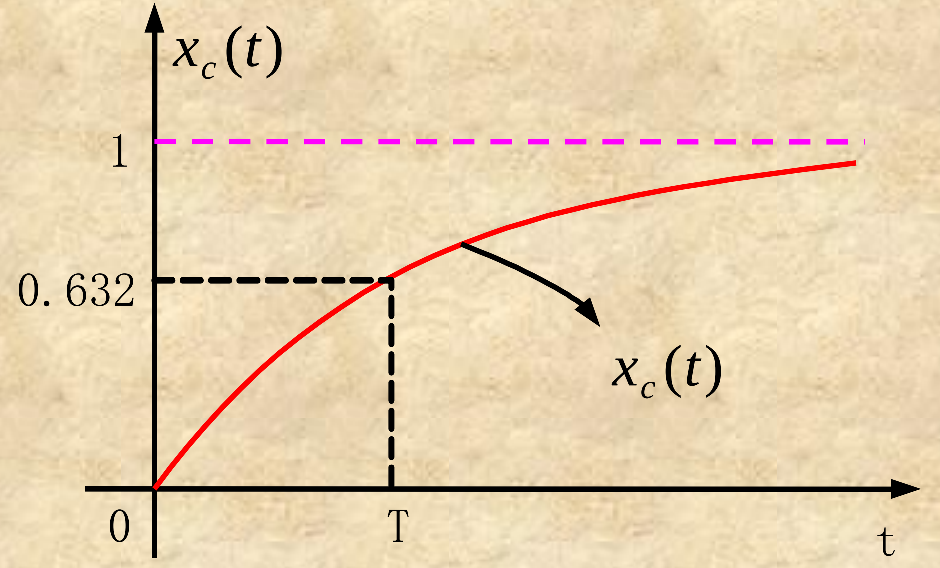
$$x_c(t) = Kx_r(t) \Longrightarrow G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = K$$

② 惯性环节：

$$T\frac{dx_c(t)}{dt}+x_c(t)=x_r(t) \Longrightarrow G(s)=\frac{X_c(s)}{X_r(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

$$x_r(t)=1(t)$$

$$x_c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

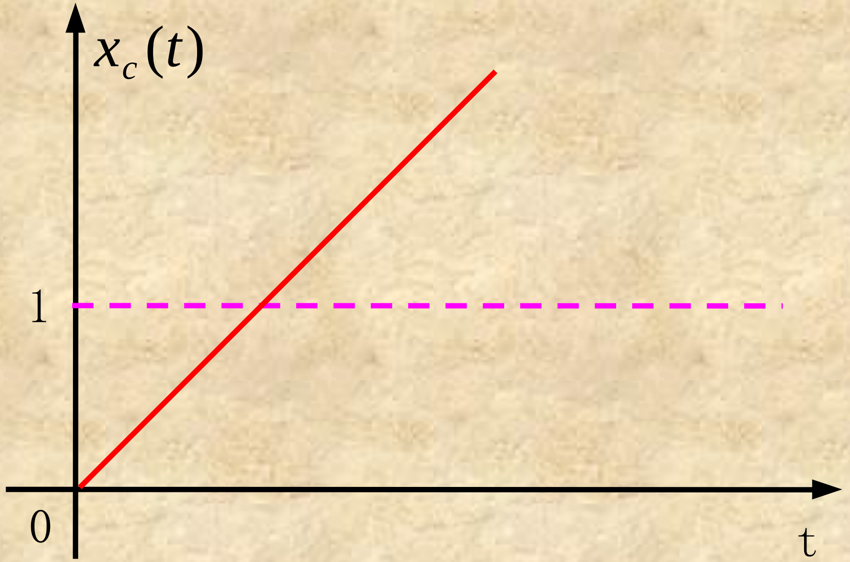


③ 积分环节：

$$x_c(t) = k\int x_r(t)dt \Rightarrow G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = \frac{k}{s}$$

$$x_r(t) = 1(t)$$

$$x_c(t) = t, t \geq 0$$



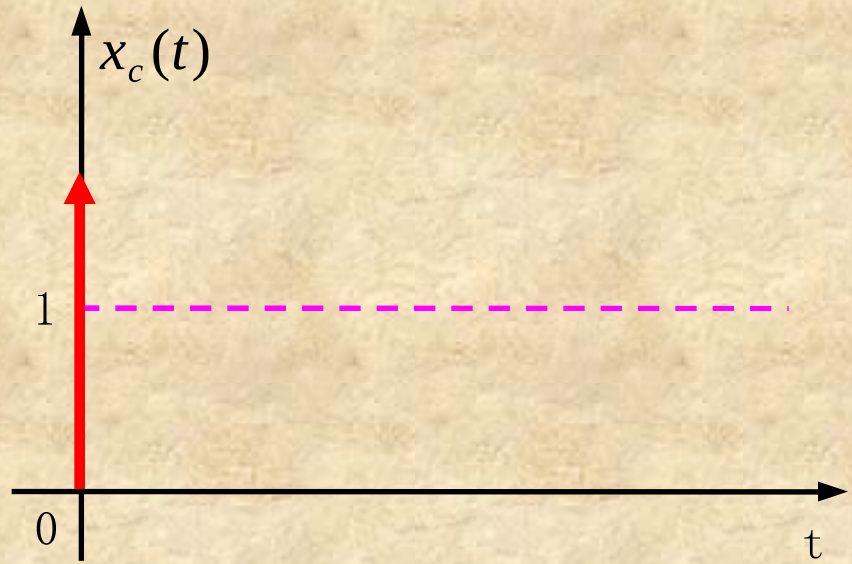
④ 微分环节：

$$x_c(t) = k\frac{dx_r(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = ks$$

$$x_r(t) = 1(t)$$

$$x_c(t) = \delta\left(t\right)$$

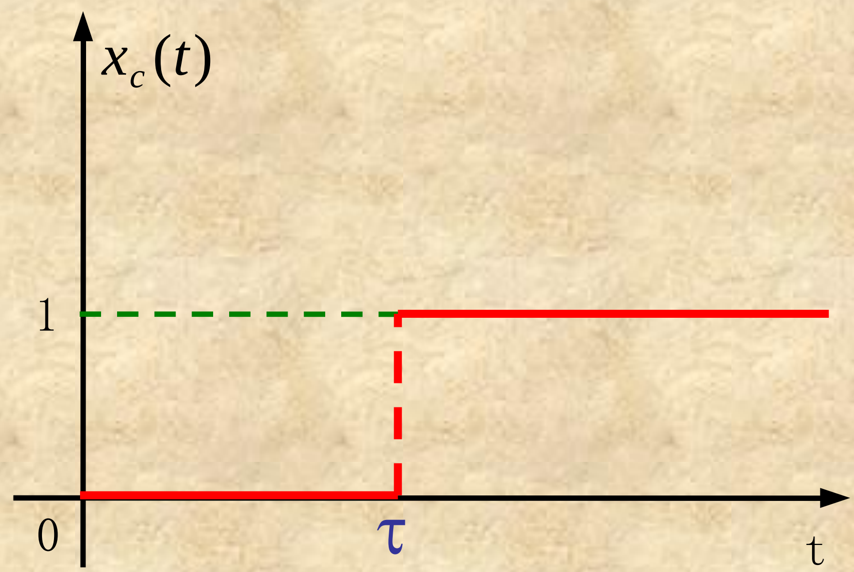


⑤ 滞后环节：

$$x_c(t) = x_r(t-\tau)$$

$$X_c(s) = X_r(s)e^{-\tau s}$$

$$G(s) = \frac{X_c(s)}{X_r(s)} = e^{-\tau s}$$



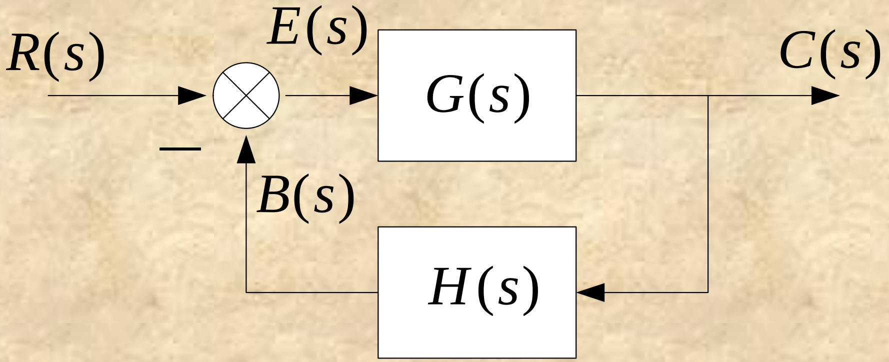
2-3 结构图与信号流图

- 系统结构图的绘制和简化
- 信号流图的绘制
- 利用Mason公式计算传递函数
- 系统的传递函数

一．结构图的等效变换和简化

结构图（方框图）/ 信号流图：描述系统内信号传递的数学图形。

例：一个简单系统的结构图



结构图的基本组成：信号线、引出点（测量点）、比较点（综合点）、方框（环节）

动态结构图绘制步骤：

1）把一个系统分解成若干环节；

2）写出每个环节的传递函数，即输入和输出的传递关系；

3）把每个环节的传递函数连接起来后，得系统动态结构图。

结构图的等效变换和简化:

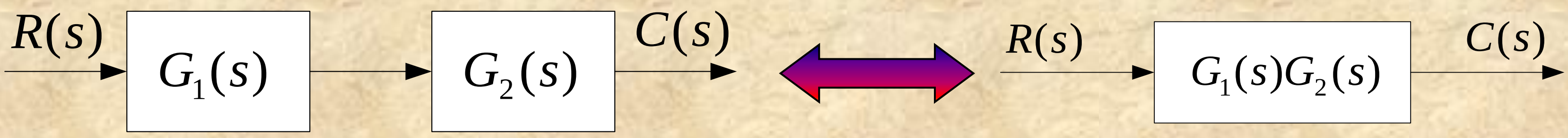
目标: 消去中间变量, 求取系统的传递函数或者输出响应。

简化原则: 变换前后变量关系维持等效

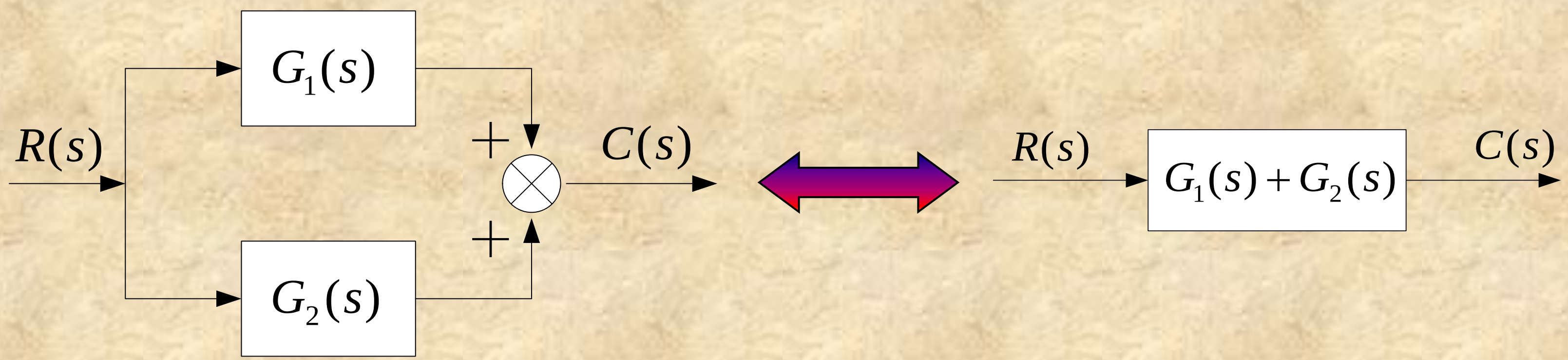
- ✓ 变换前后前向通路中传递函数的乘积保持不变;
- ✓ 回路中传递函数的乘积保持不变。

典型环节的连接：

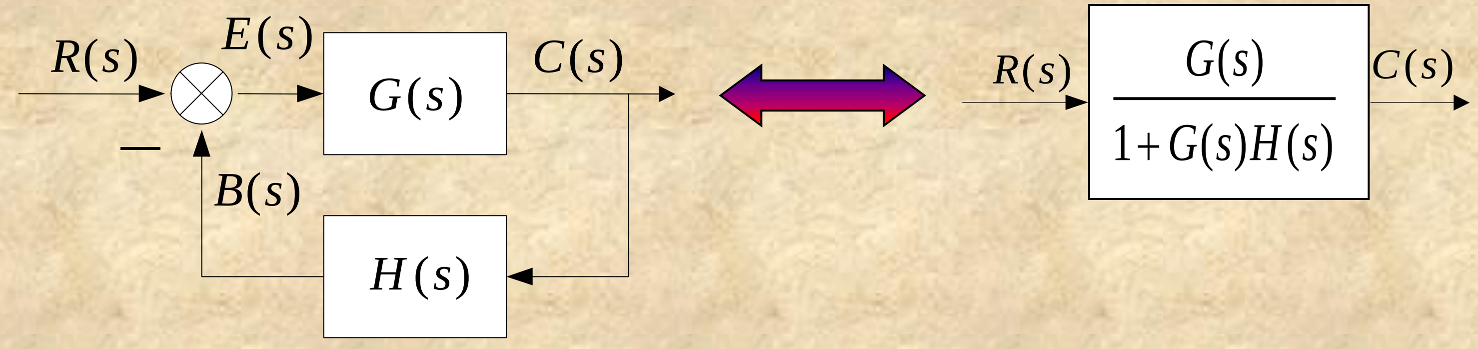
① 串联环节



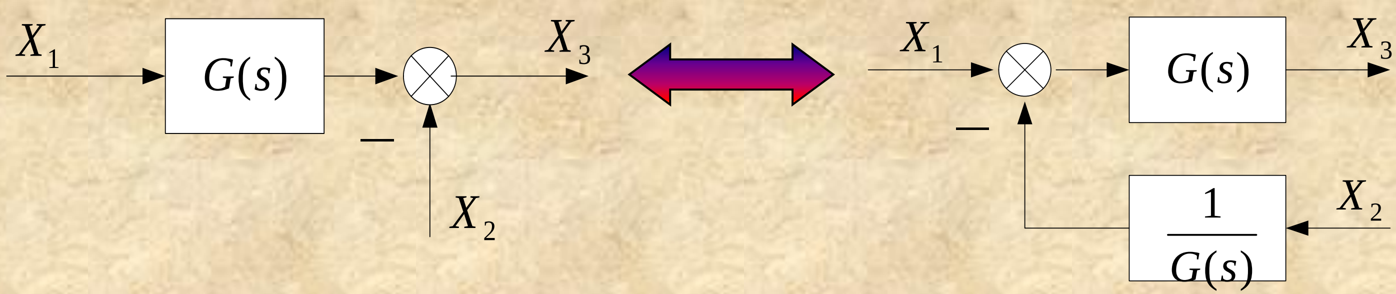
② 并联环节



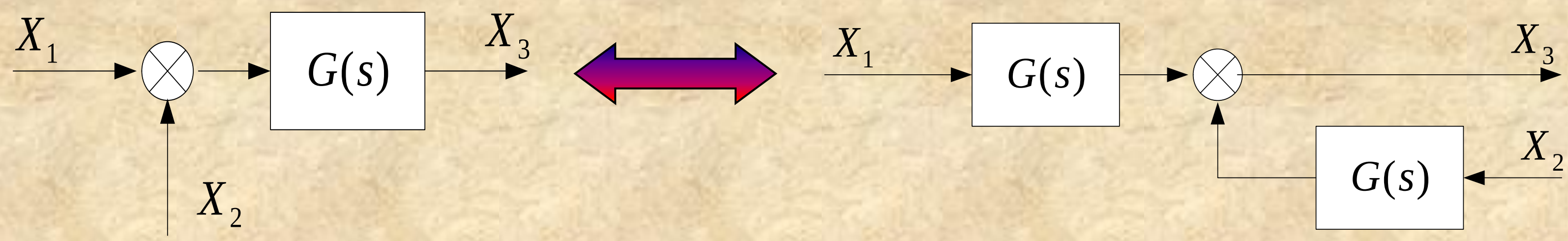
③ 反馈连接



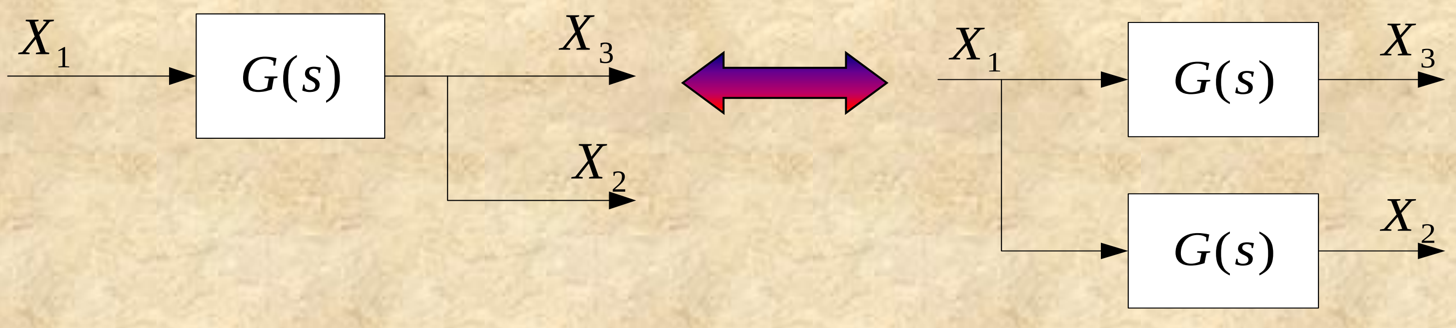
④ 比较点前移



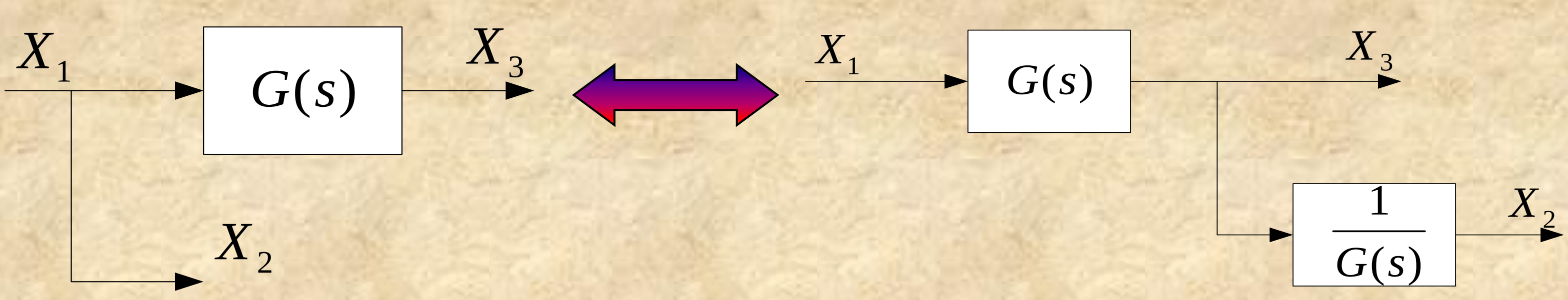
⑤ 比较点后移



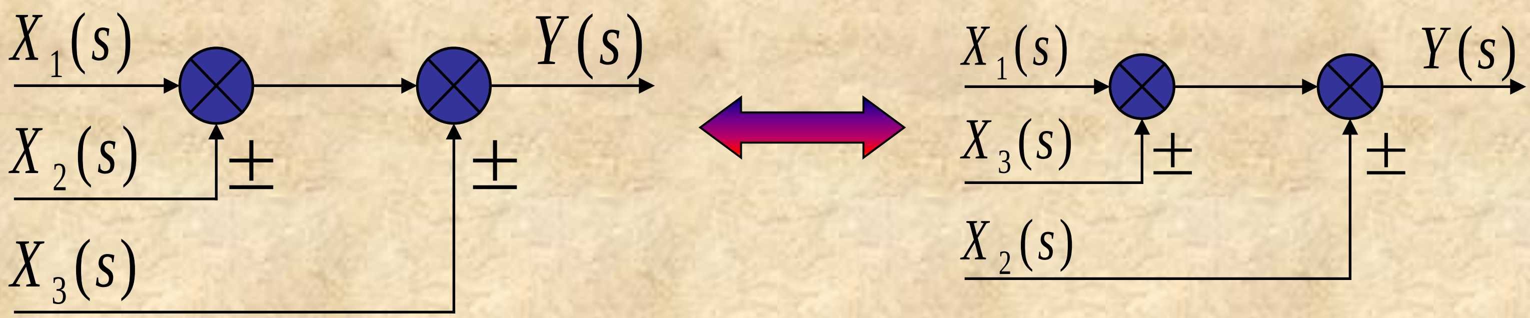
⑥ 引出点前移



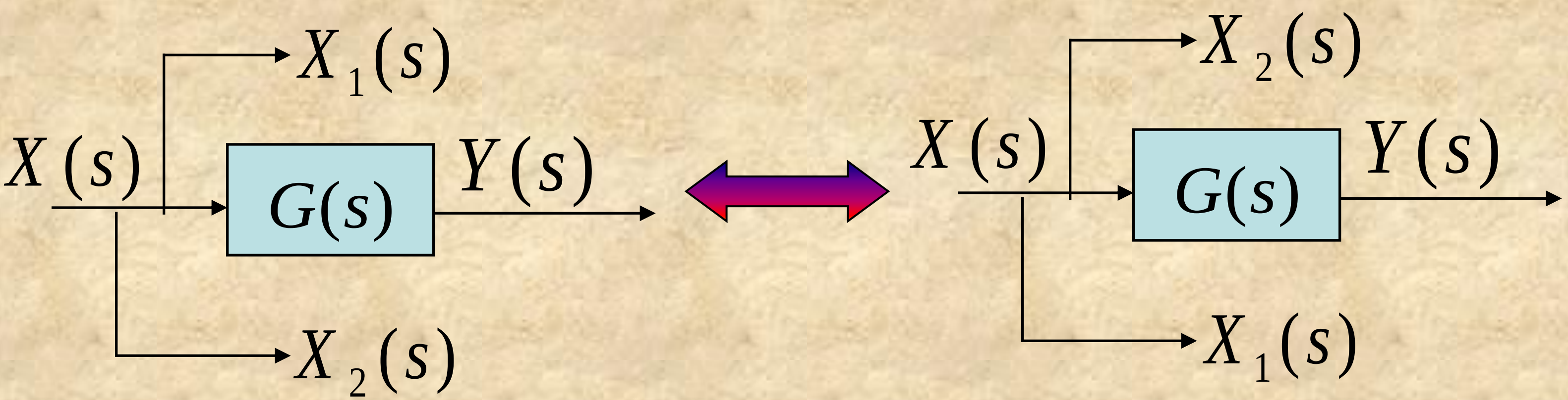
⑦ 引出点后移



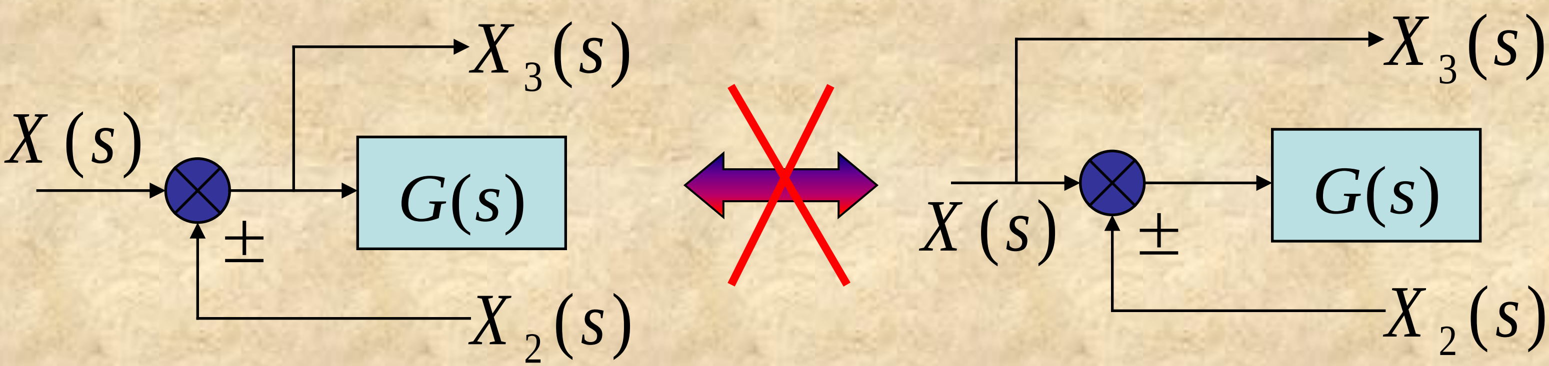
⑧ 相邻的信号相加点位置可以互换



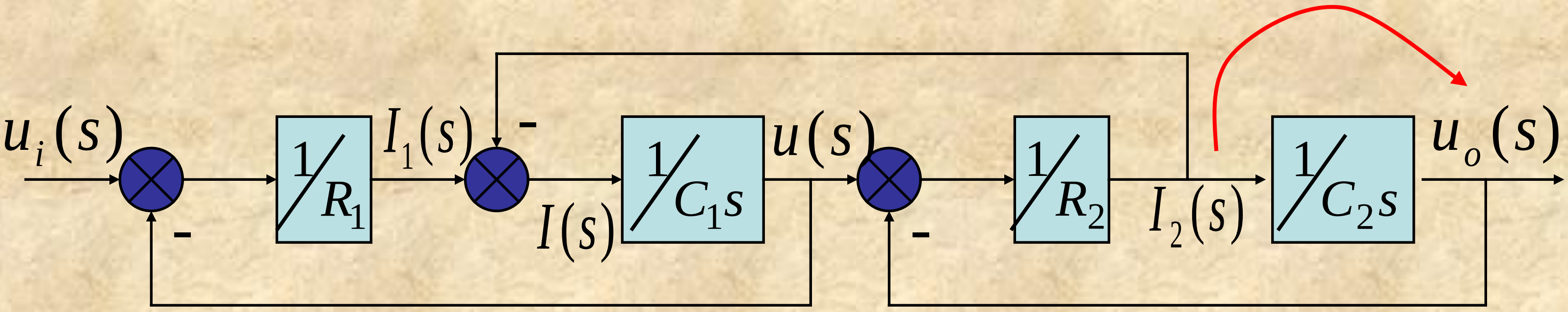
⑨ 同一信号的分支点位置可以互换

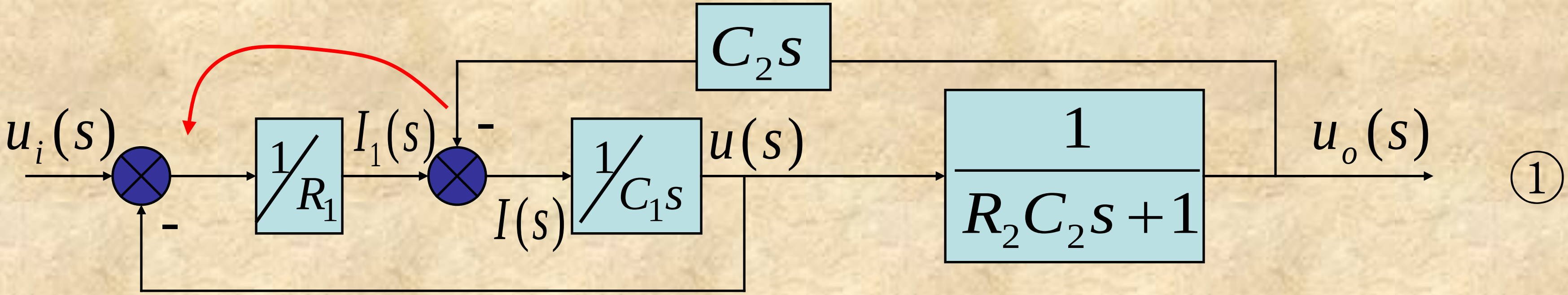


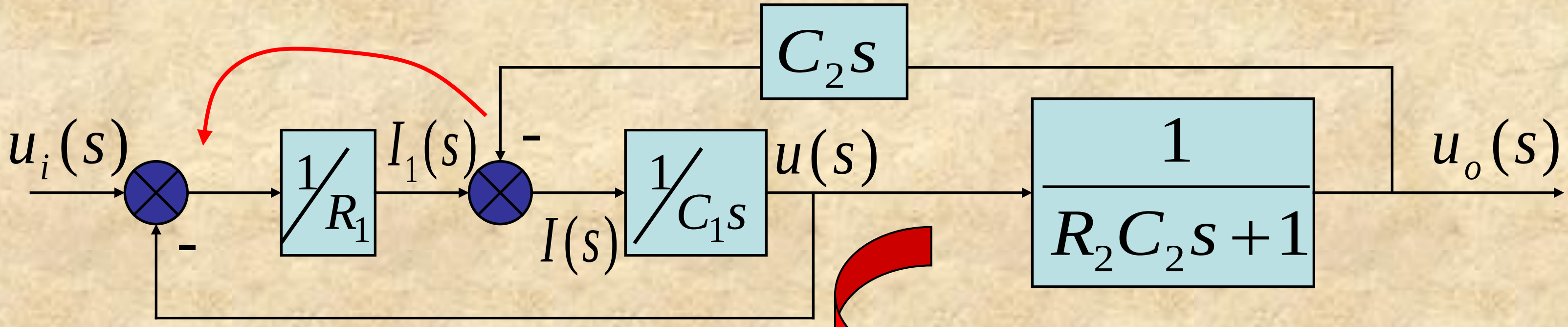
⑩相加点和分支点在一般情况下，不能互换



例：已知某系统结构图如下，试求其传递函数。

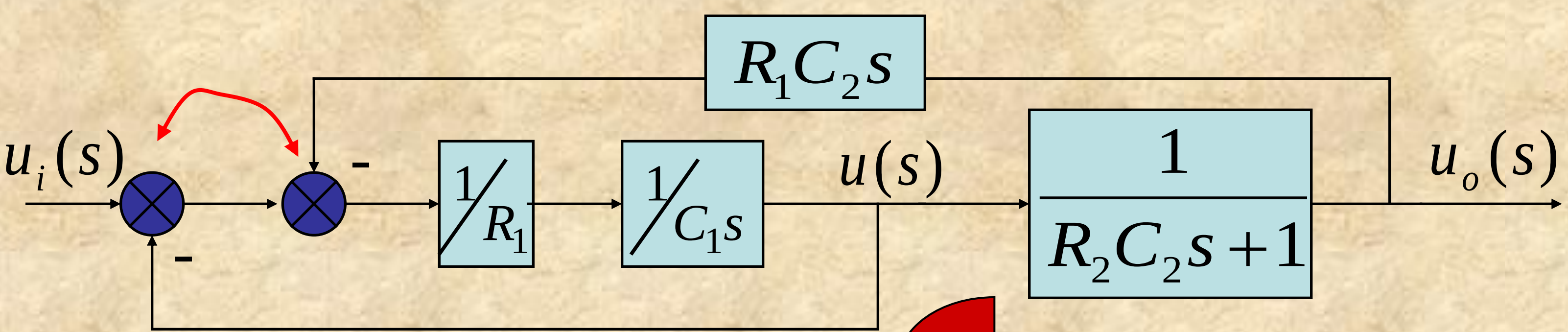






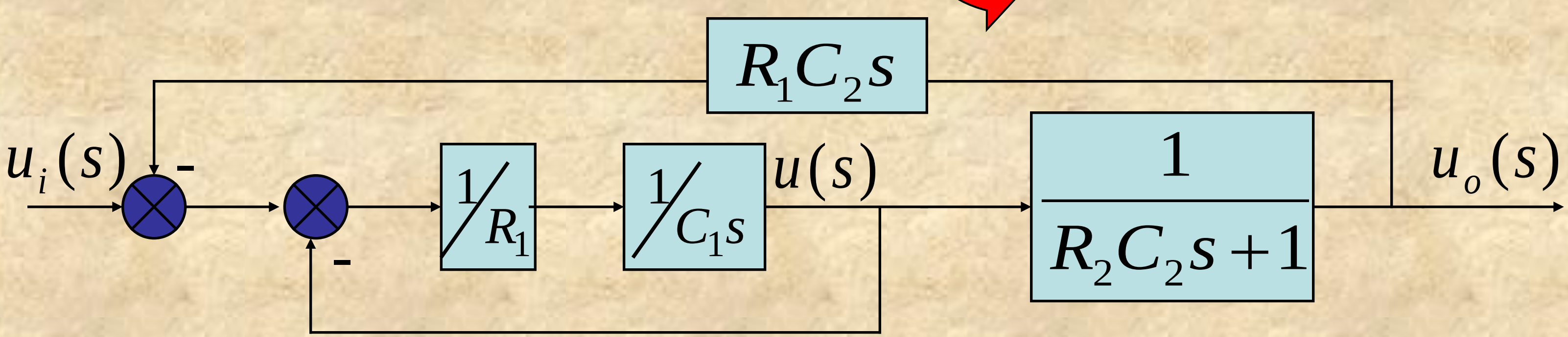
$C_2 s$
$u_i(s)$
$1/R_1$
$I_1(s)$
$I(s)$
$1/C_1 s$
$u(s)$
$\frac{1}{R_2C_2s+1}$
$u_o(s)$
-
-

①



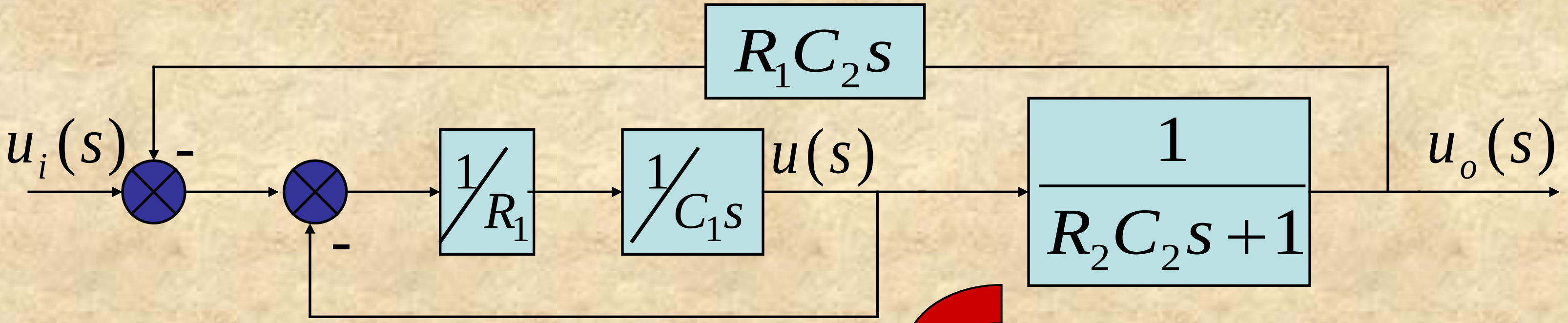
$R_1C_2 s$
$u_i(s)$
$1/R_1$
$1/C_1 s$
$u(s)$
$\frac{1}{R_2C_2s+1}$
$u_o(s)$
-
-

②

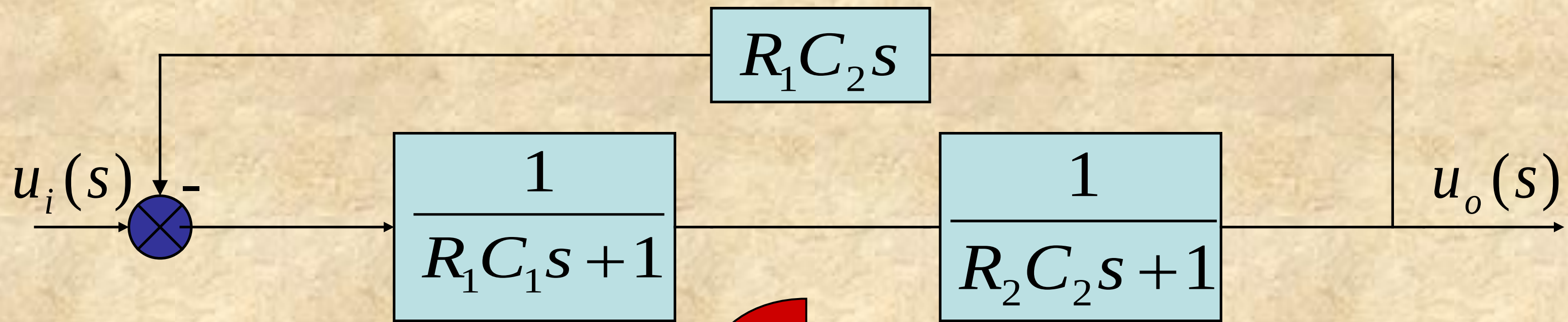


$R_1C_2 s$
$u_i(s)$
$1/R_1$
$1/C_1 s$
$u(s)$
$\frac{1}{R_2C_2s+1}$
$u_o(s)$
-
-

③



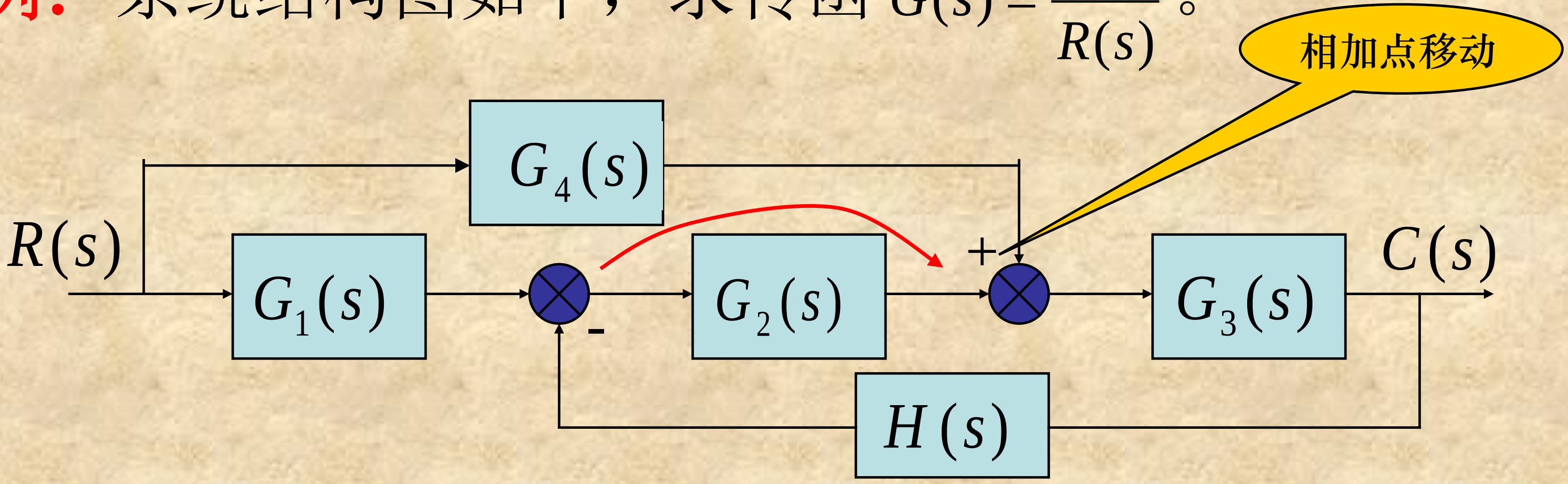
③



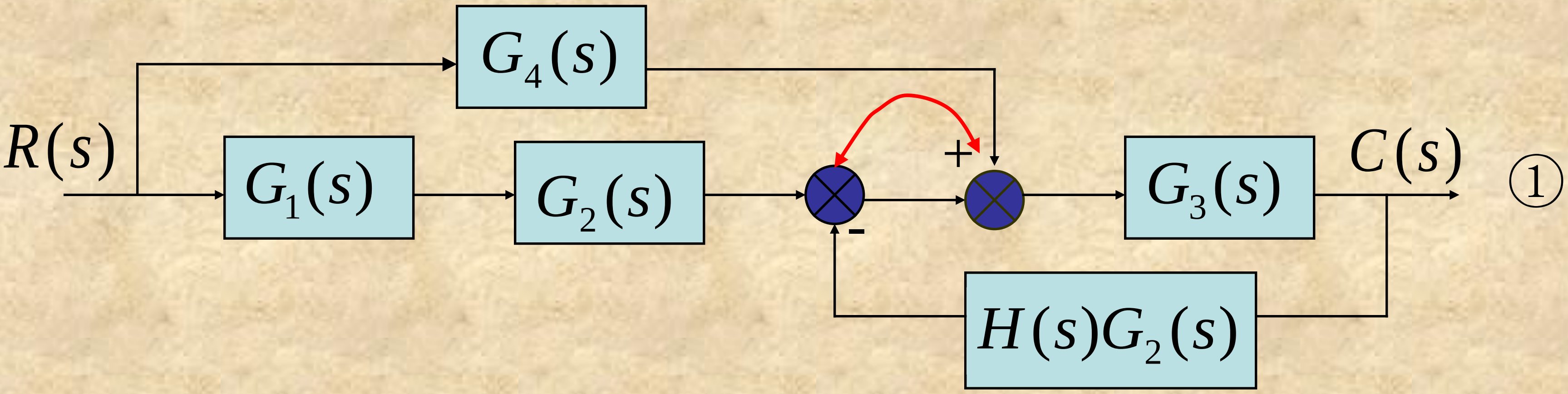
④

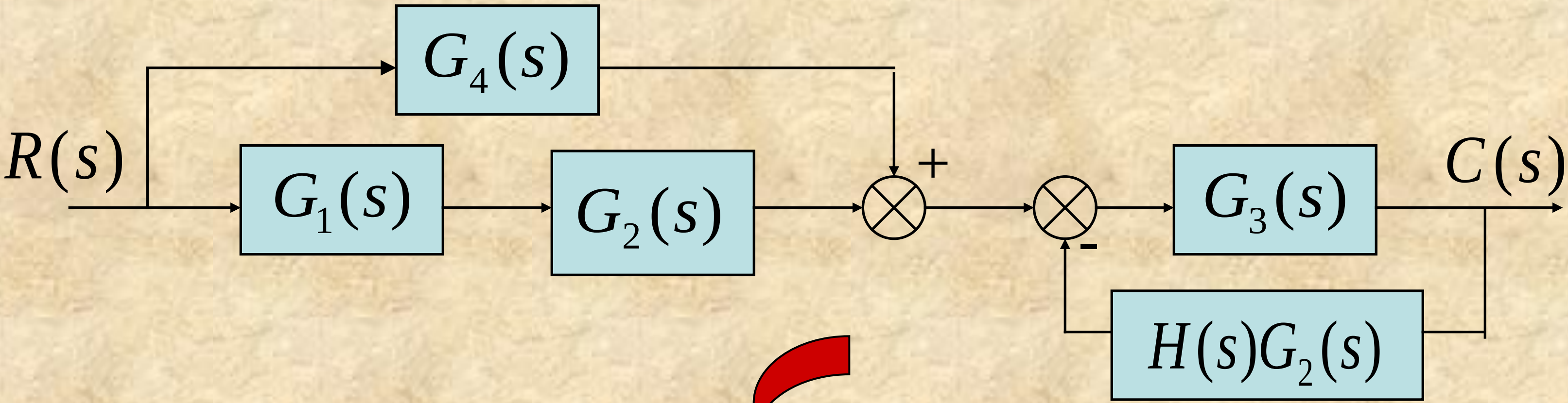
$$G(s)=\frac{u_o(s)}{u_i(s)}=\frac{\dfrac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}}{1+\dfrac{R_1C_2s}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}}=\frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

例： 系统结构图如下，求传函 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。

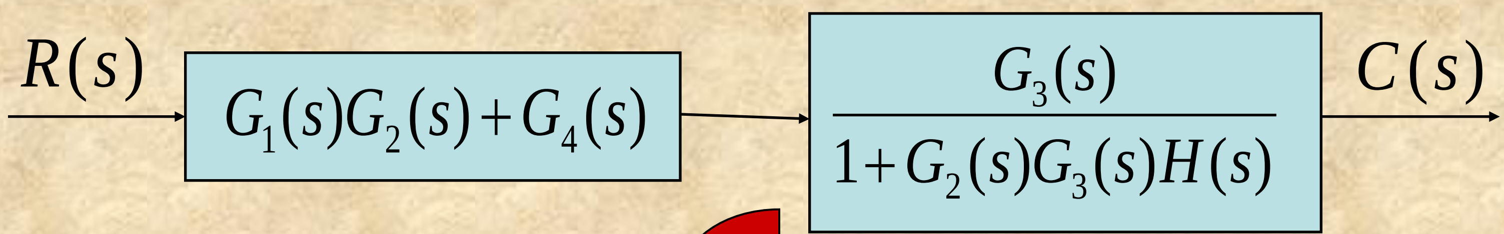


解： 结构图等效变换如下：





②



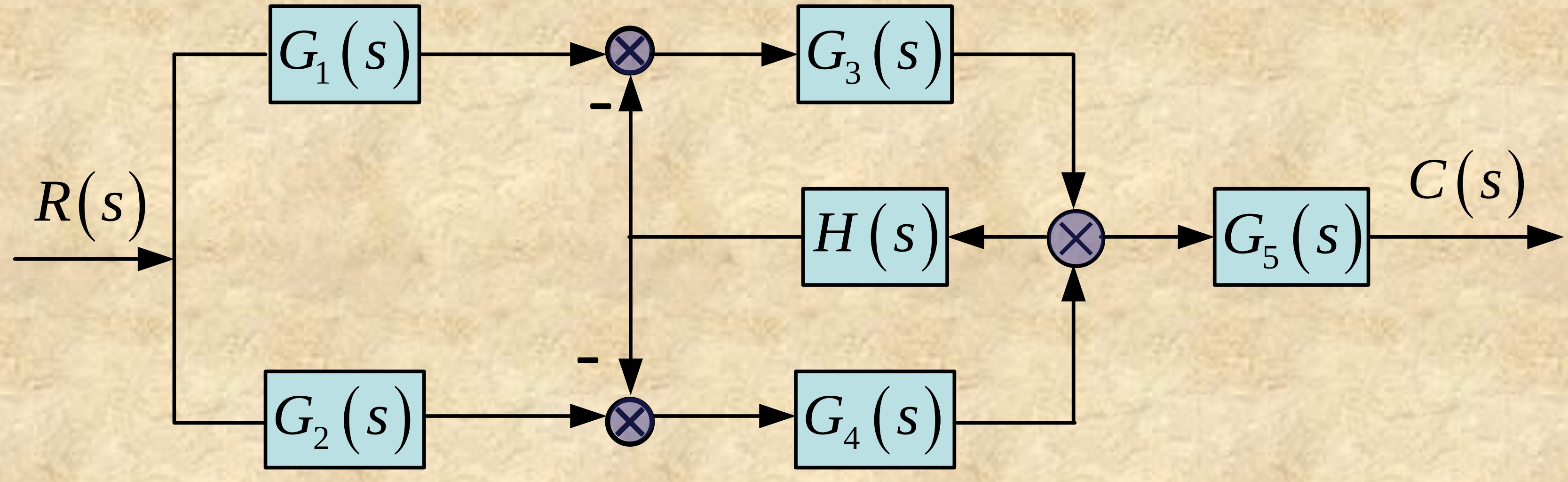
$$G(s)=\frac{G_3(s)(G_1(s)G_2(s)+G_4(s))}{1+G_2(s)G_3(s)H(s)}$$

例：2-14,2-15,2-16

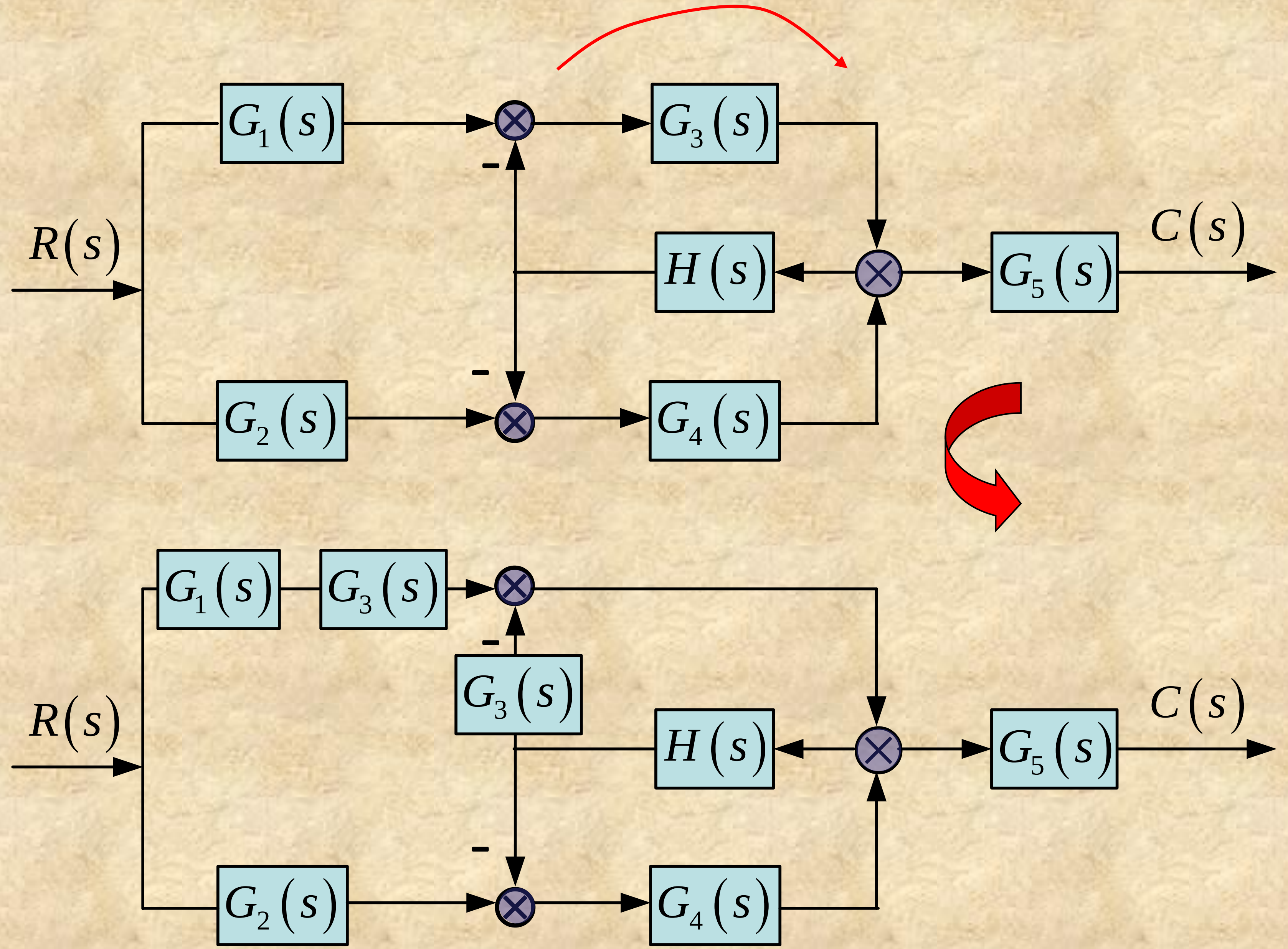
作业：**2-17, 2-18, 2-21, 2-22**，下周交

下周开始做实验。

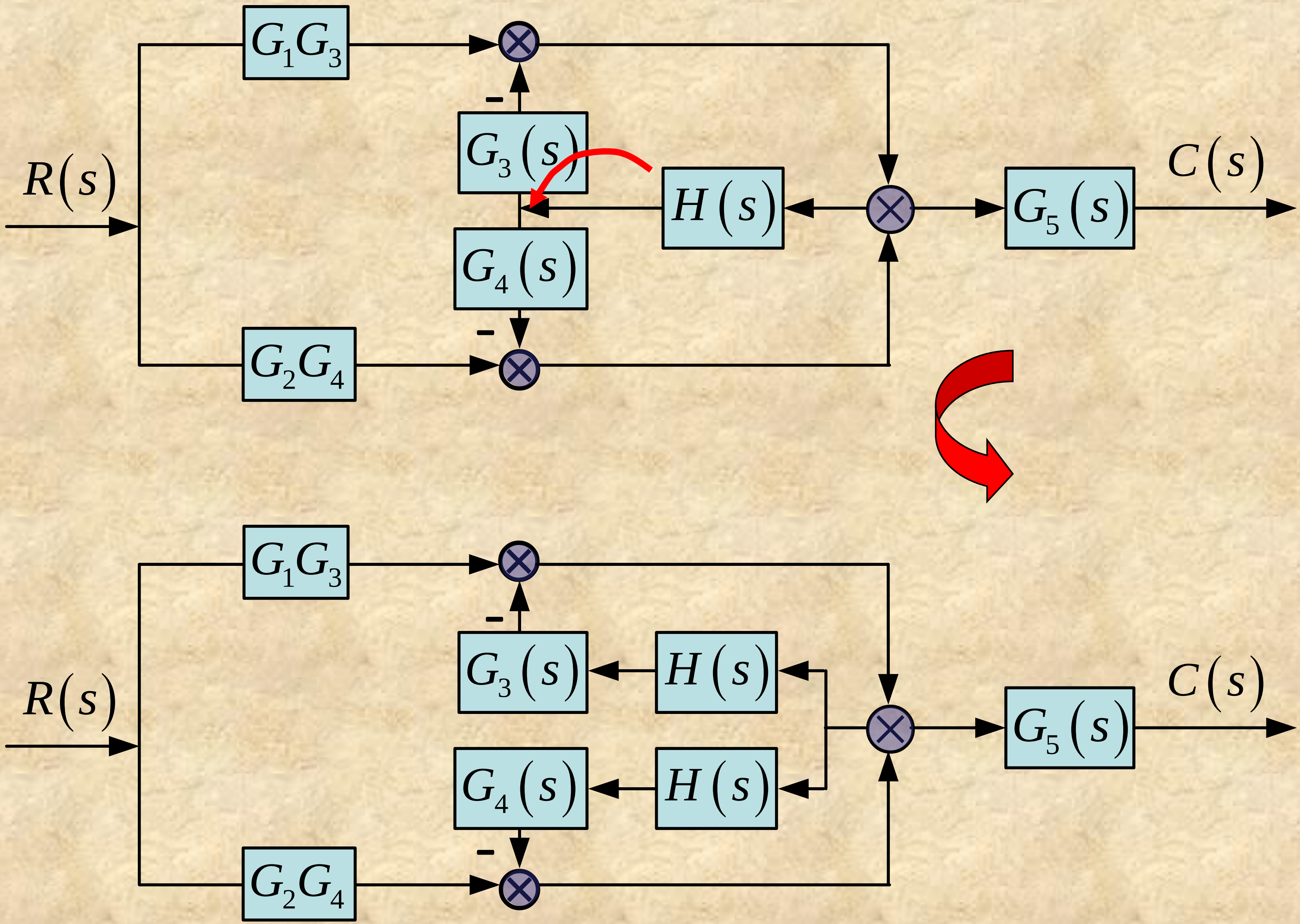
例： 系统结构图如下，求传函$G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$。



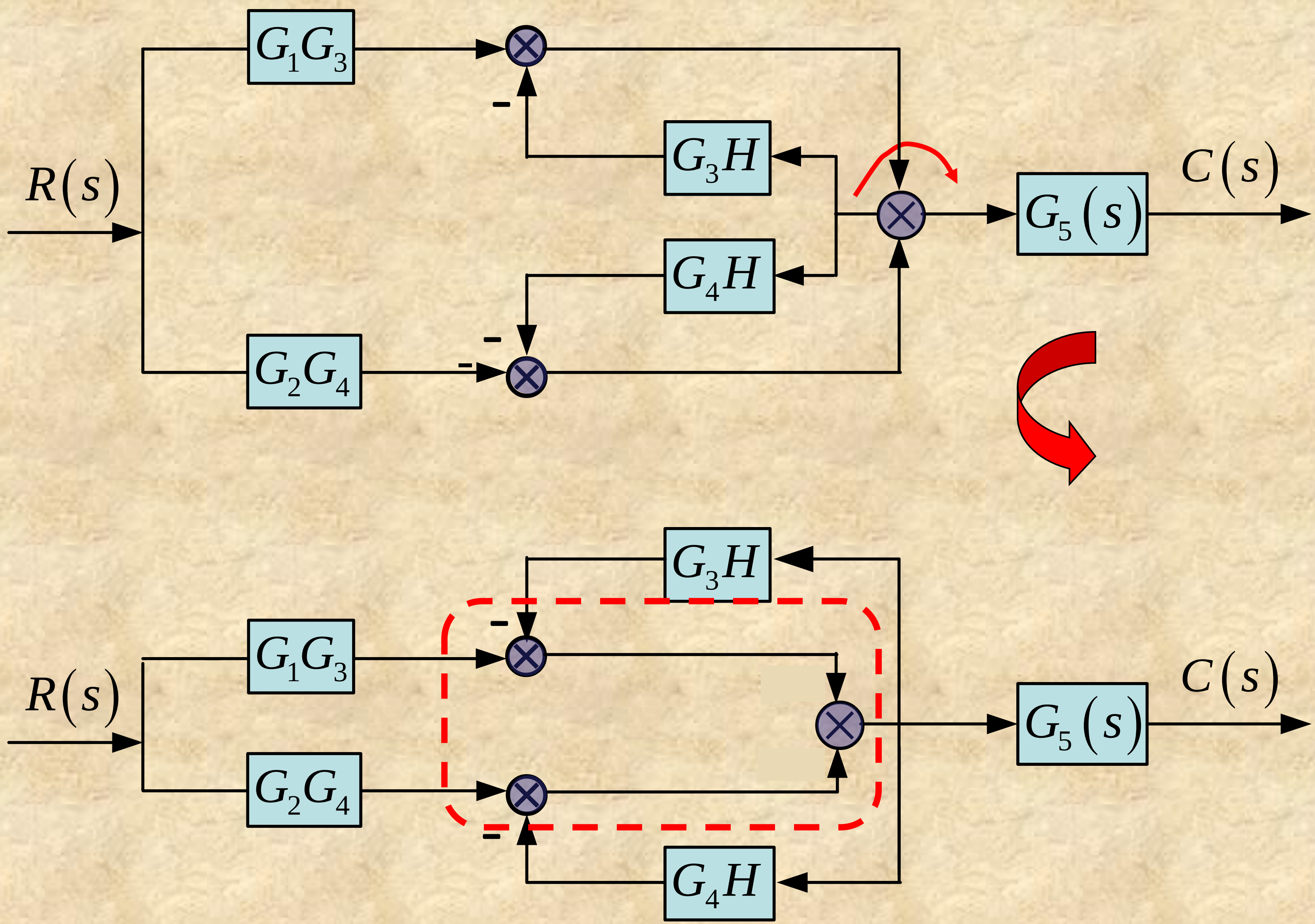
问题： 上下前向和中间的反馈可否通过标准反馈化简？

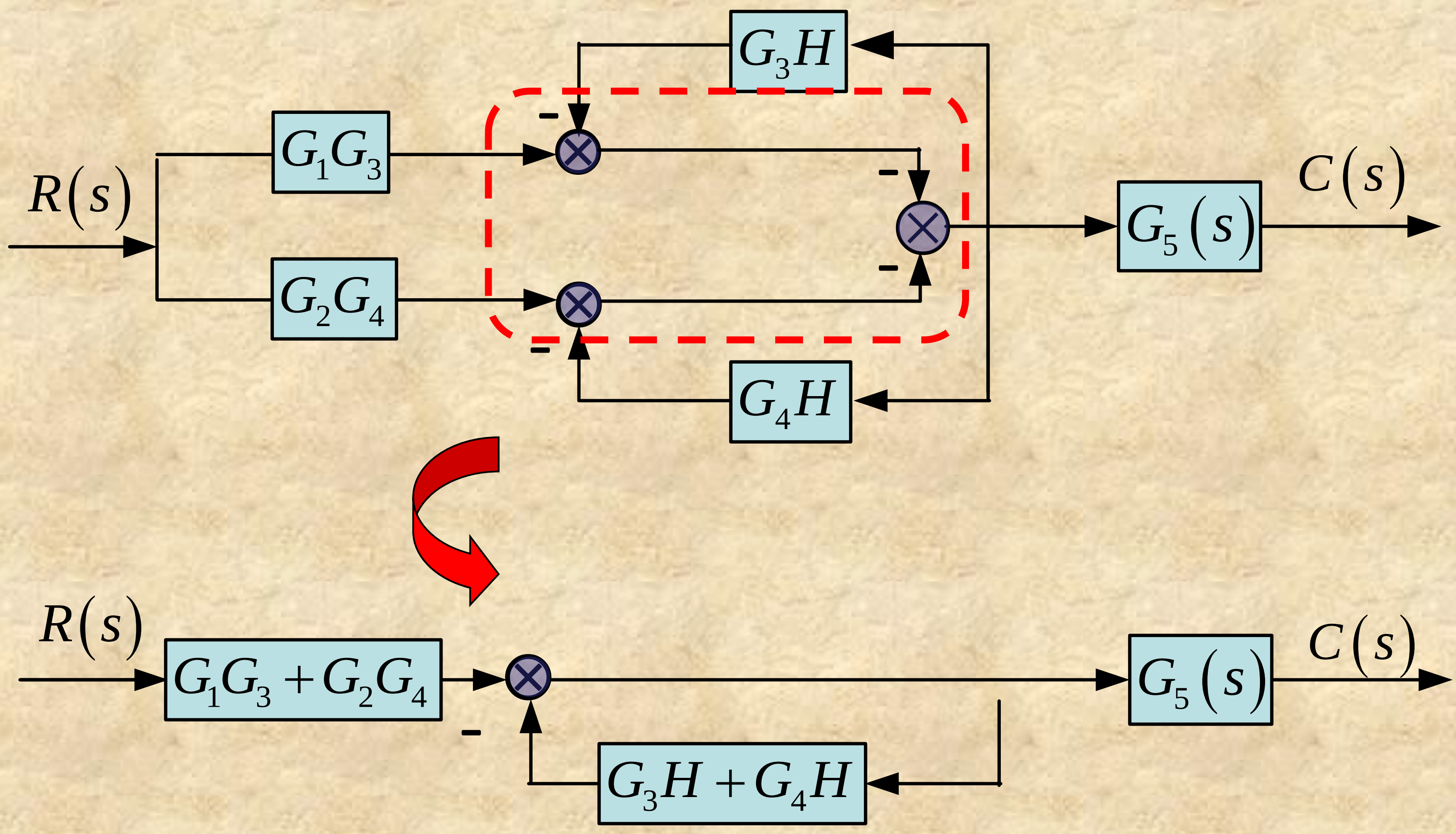


R(s)
G1(s)
G2(s)
G3(s)
G4(s)
G5(s)
H(s)
C(s)
R(s)
G1(s)
G3(s)
G3(s)
H(s)
G2(s)
G4(s)
G5(s)
C(s)

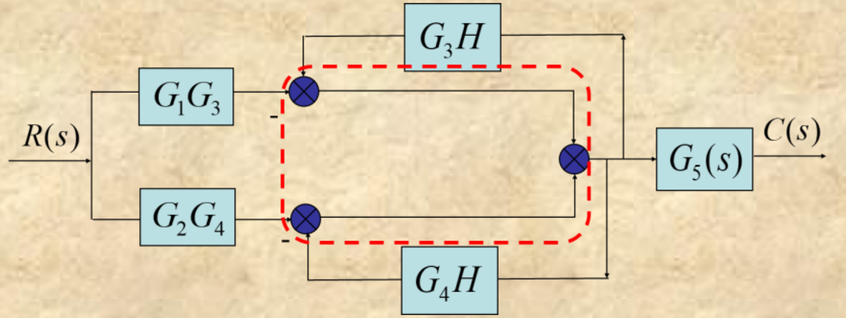


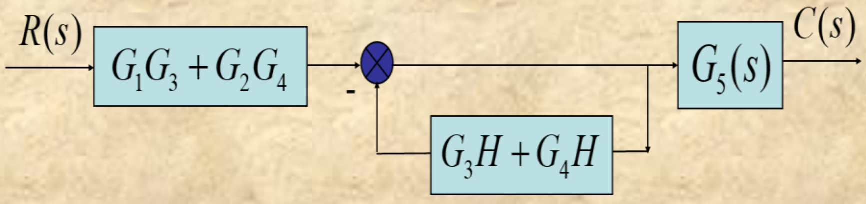
R(s)
G1G3
G2G4
G3(s)
G4(s)
H(s)
G5(s)
C(s)
−
−
R(s)
G1G3
G2G4
G3(s)
G4(s)
H(s)
H(s)
G5(s)
C(s)
−
−

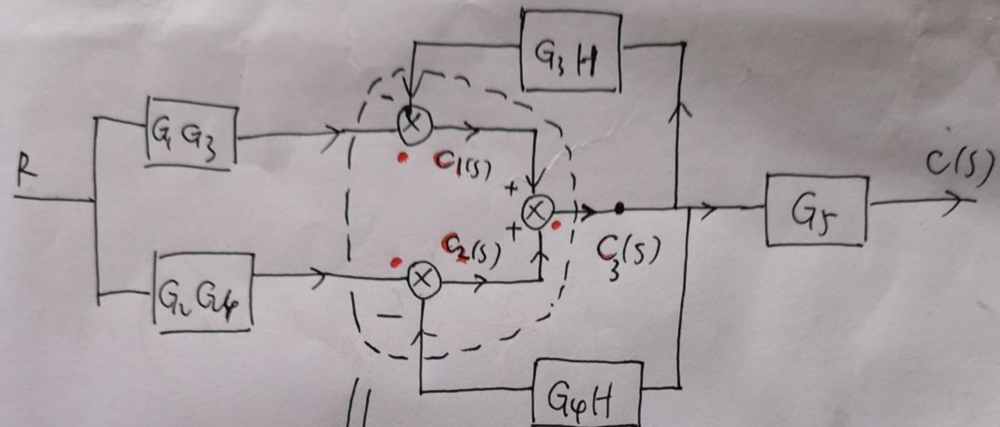

R(s)
G1G3
G2G4
G3H
G4H
G5(s)
C(s)
-
-
-
R(s)
G3H
G1G3
G2G4
G4H
G5(s)
C(s)
-
-



$$G(s)=\left[G_1(s)G_3(s)+G_2(s)G_4(s)\right]\frac{G_5(s)}{1+G_3(s)H(s)+G_4(s)H(s)}$$







把这三个差合在一起

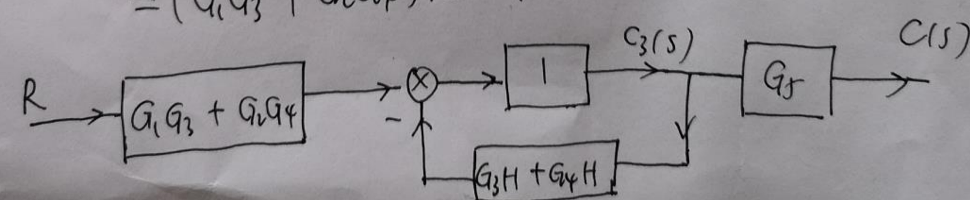
$C_3(s) = C_1(s) + C_2(s)$

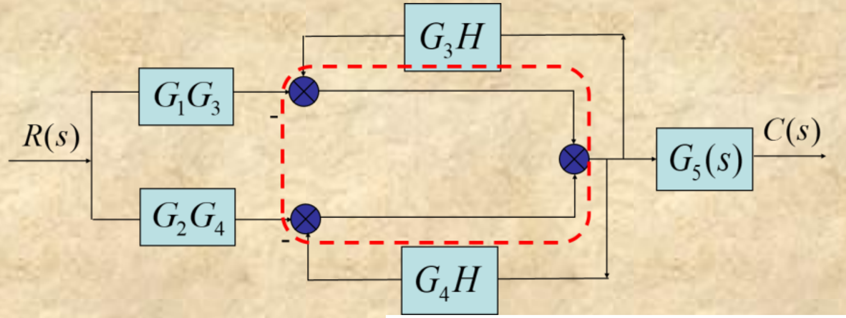
而 $C_1(s) = G_1G_3R - G_3H\cdot C_3(s)$, $C_2(s) = G_2G_4R - G_4H\cdot C_3(s)$

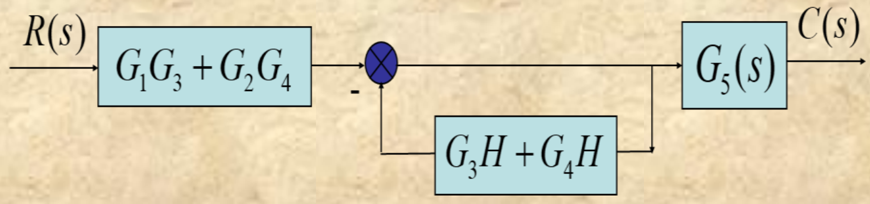
$\Rightarrow C_3(s) = G_1G_3R - G_3H\cdot C_3(s) + G_2G_4R - G_4H\cdot C_3(s)$

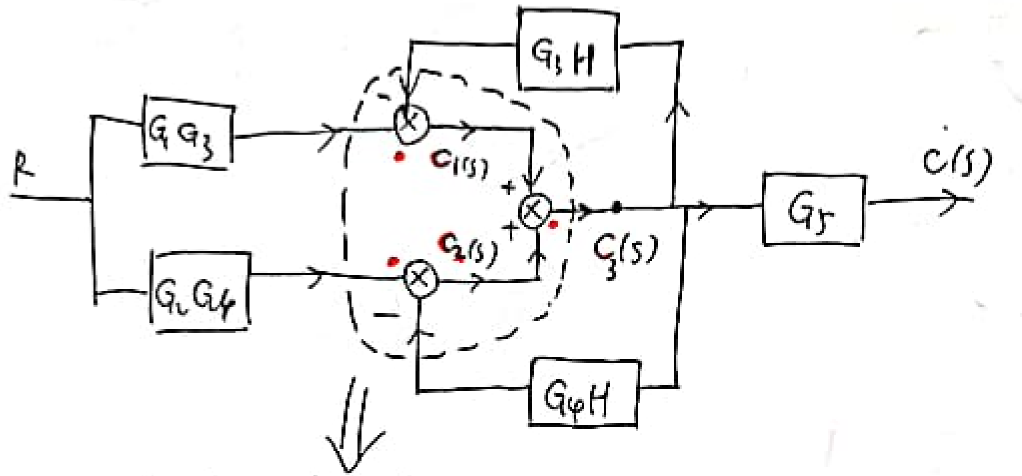
$= (G_1G_3 + G_2G_4)R - (G_3H + G_4H)\cdot C_3(s)$

$\Rightarrow$









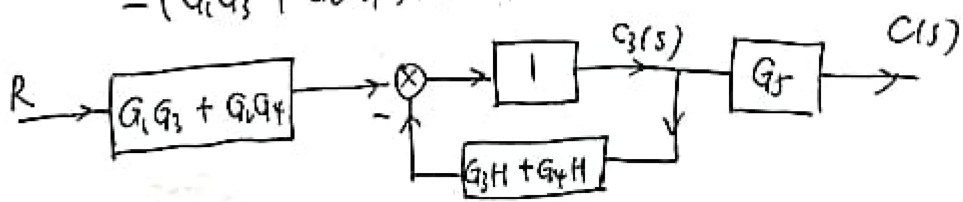
把这三个差合在一起

$C_3(s) = C_1(s) + C_2(s)$

而 $C_1(s) = G_1G_3R - G_3H\cdot C_3(s)$, $C_2(s) = G_2G_4R - G_4H\cdot C_3(s)$

$\Rightarrow C_3(s) = G_1G_3R - G_3H\cdot C_3(s) + G_2G_4R - G_4H\cdot C_3(s)$

$= (G_1G_3 + G_2G_4)R - (G_3H + G_4H)\cdot C_3(s)$

$\Rightarrow$ 

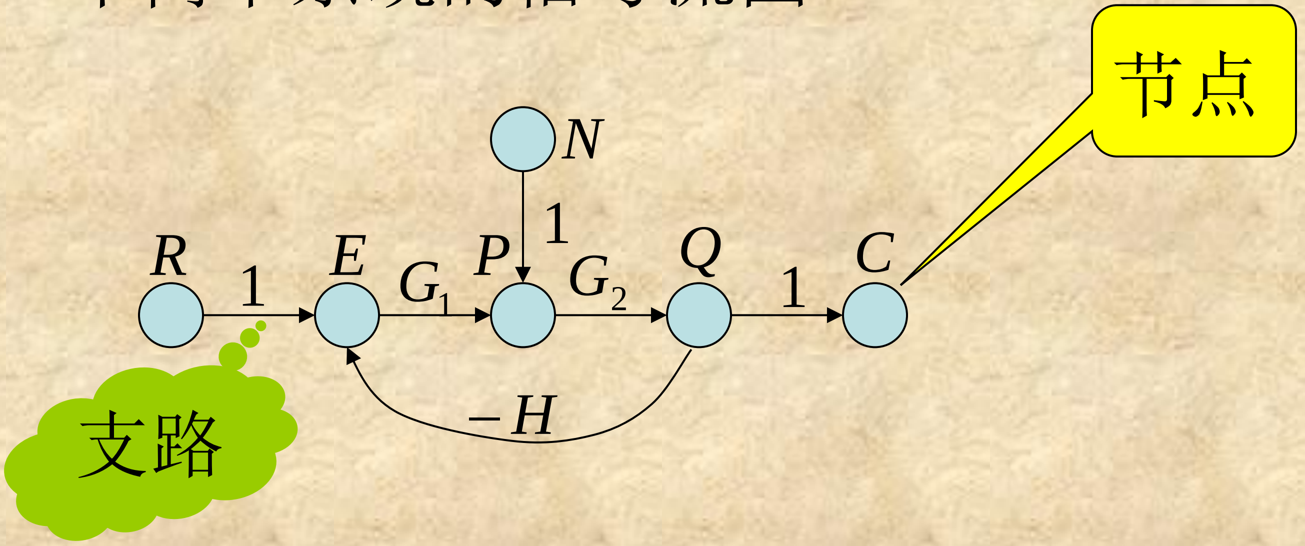
二. 信号流图的组成及绘制

信号流图：表示系统的结构和变量传递关系。

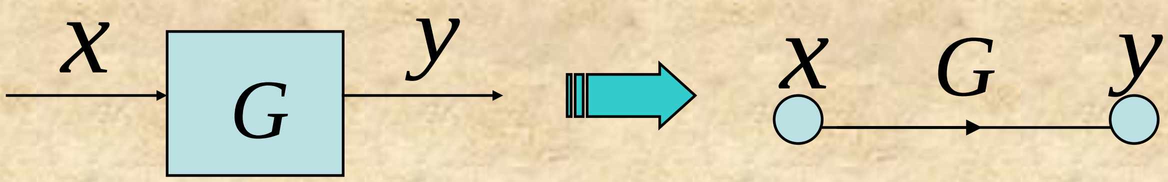
在求**复杂系统**的传递函数时较方便。

信号流图的组成：由节点和支路组成

例：一个简单系统的信号流图



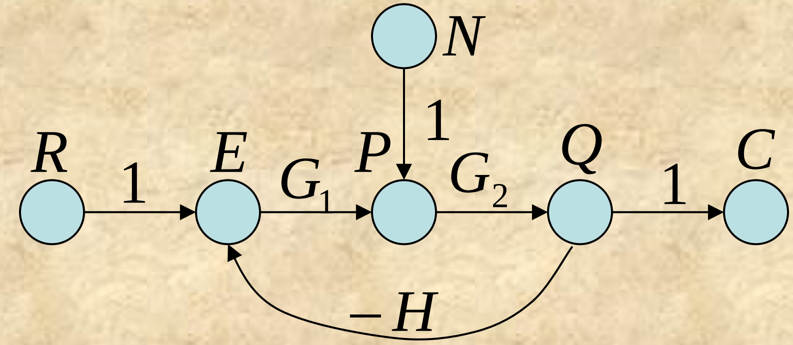
- 节点：节点表示变量。以小圆圈表示。
- 支路：连接节点之间的有向线段。支路上箭头方向表示信号传送方向，传递函数标在支路上箭头的旁边，称支路传输。



上图中， 两者都具有关系：$y(s)=G(s)x(s)$。支路对节点x来说是输出支路，对输出节点y来说是输入支路。

[有关术语]:

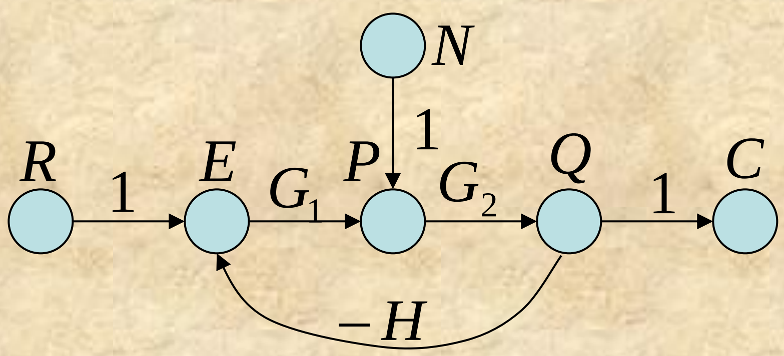
- **输入节点(源点)**
- **输出节点(阱点)**
- **混合节点：**既有输入支路又有输出支路的节点
- **前向通路：**从输入到输出，每个节点至多经过一次的通路。



- **回路：** 起点和终点在同一节点，而且信号通过每一节点至多一次的闭合通路。

- **回路增益：** 所有支路增益之乘积

- **不接触回路：** 回路之间没有公共节点



信号流图的性质

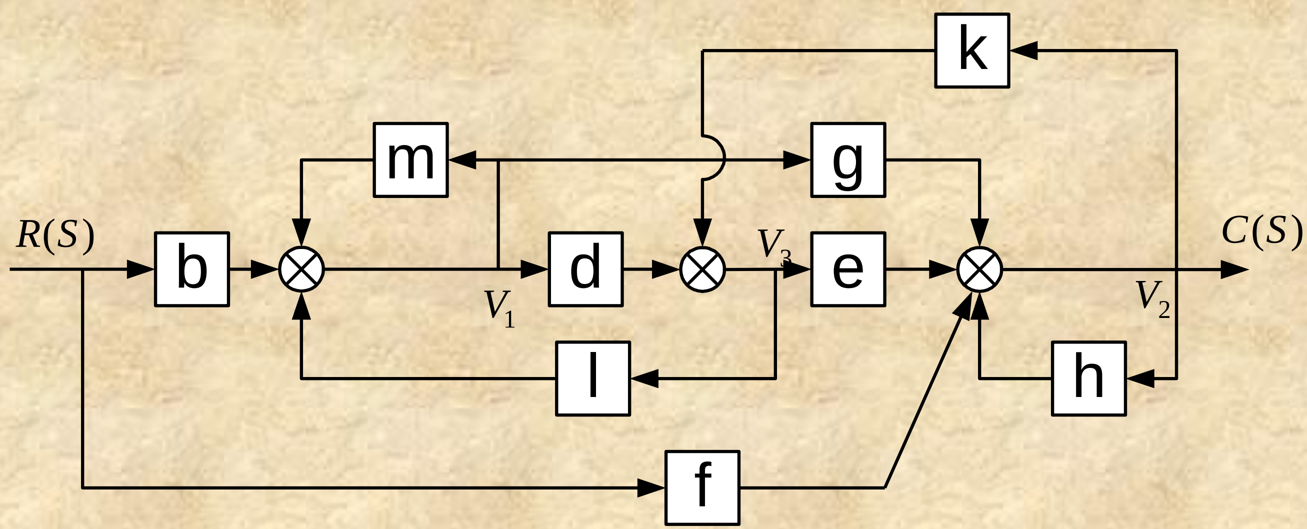
- 每个节点标志的变量是所有流向该节点的信号之代数和，而从同一节点流向各支路的信号均用该节点的变量表示。
- 支路相当于乘法器，信号在支路上单向传递。

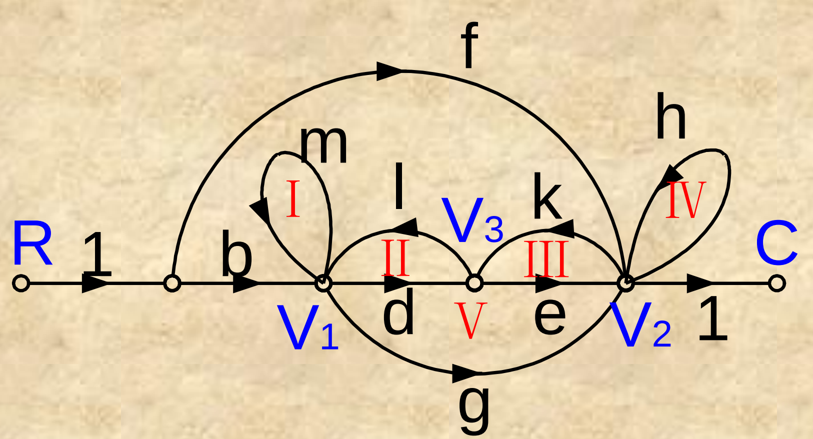
由系统结构图绘制信号流图

- 小圆圈标志出信号：节点
- 标有传递函数的线段代替方框：支路

例： 已知系统结构图如下，试画出其信号流图。

解： 在结构图上标出节点，然后画出信号流图。



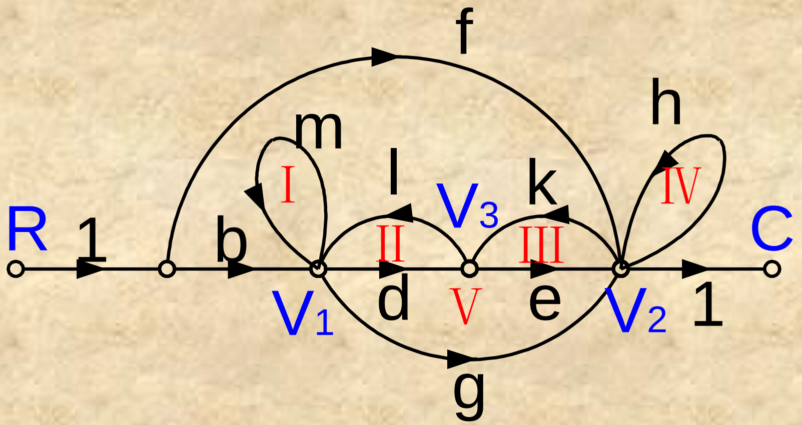


按**微分方程**拉氏变换后的代数方程所表示的变量间数学关系可以绘制信号流图。

例： 已知系统微分方程如下，绘制其信号流图。

$$V_1 = mV_1 + lV_3 + bR$$
$$C = V_2 = gV_1 + hV_2 + eV_3 + fR$$
$$V_3 = dV_1 + kV_2$$

解： 按方程可绘制信号流图为：



三. 利用Mason公式计算系统的传递函数

Mason公式：直接求传函，来源于克莱姆法则

$$P=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

Δ：特征式：

$$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_R\cdots$$

P_k：第k条从输入端到输出端前向通道传函

Δ_k：在Δ中，把与第k条前向通道相接触的回路所在项去掉后余下部分，称为余子式。

Δ：特征式的计算：

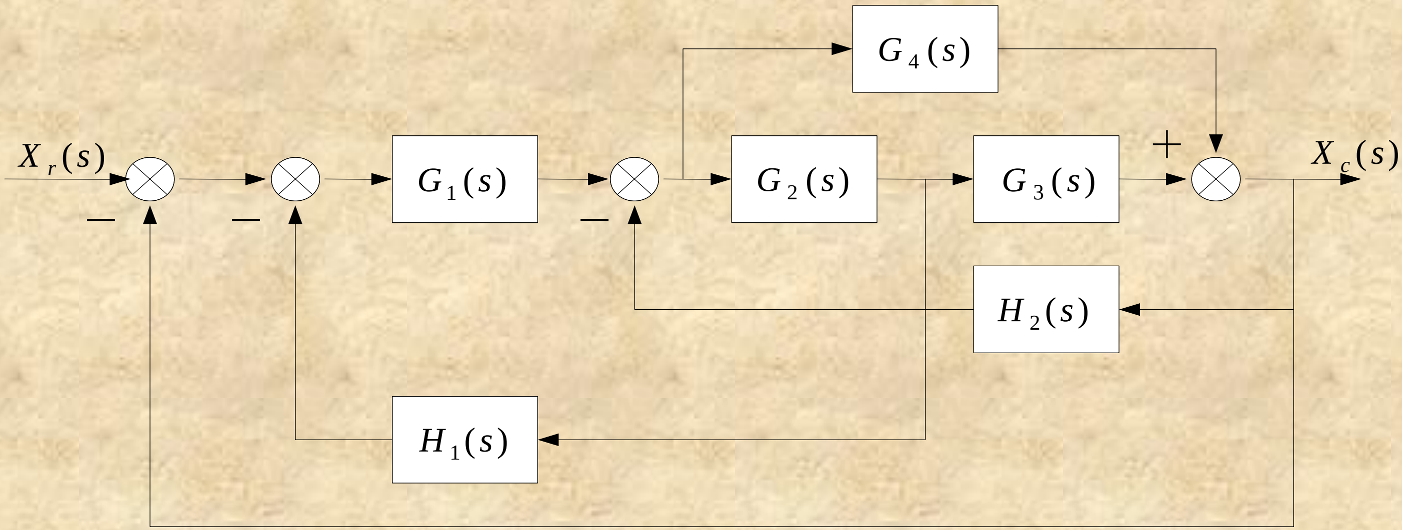
$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_R \cdots$$

$\sum L_i$：各个回路的回路传递函数之和，且带符号；

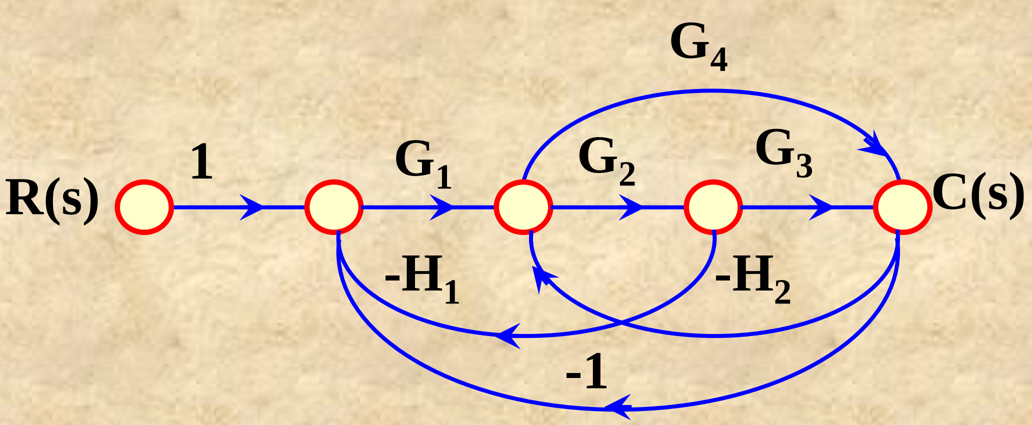
$\sum L_i L_j$：两两互不接触的回路传递函数乘积之和；

$\sum L_i L_j L_k$：所有三个互不接触回路传函乘积之和

例： 试求如下系统的传递函数。



解： 在结构图上标出节点，然后画出信号流图。



前向通道：$P_1 = G_1G_2G_3 \quad P_2 = G_1G_4$

五个回路：$L_1 = -G_1G_2G_3 \quad L_2 = -G_1G_4 \quad L_3 = -G_1G_2H_1$

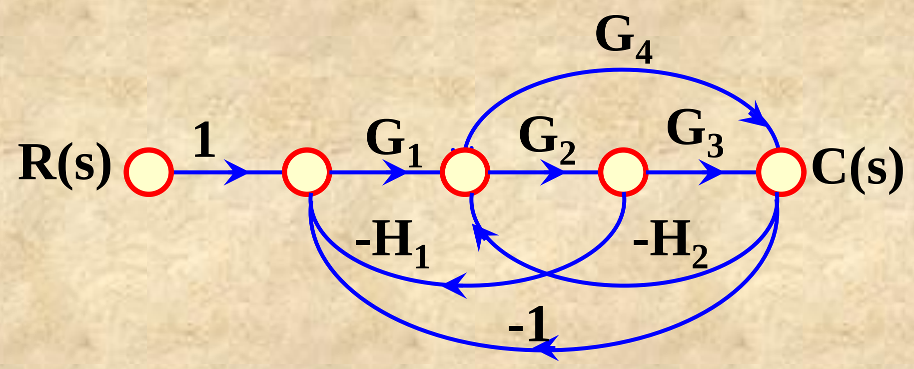
$L_4 = -G_2G_3H_2 \quad L_5 = -G_4H_2$

无不接触回路，所以：

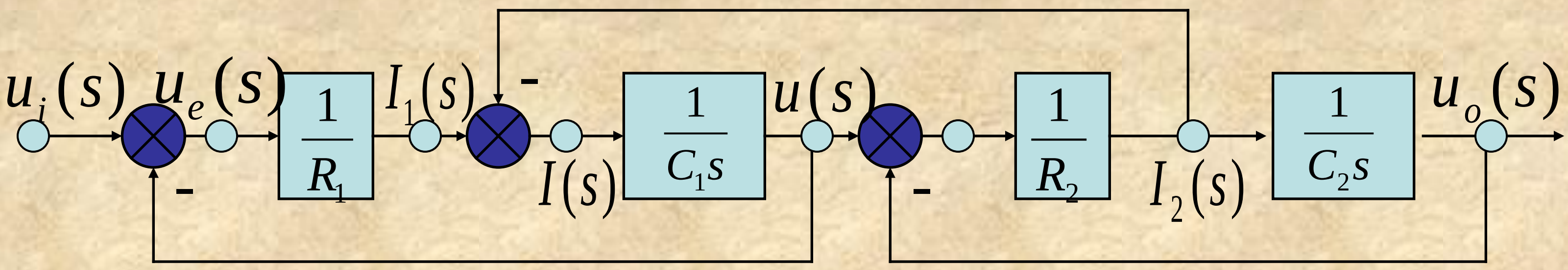
$$\Delta = 1 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2$$

余因子式：$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$

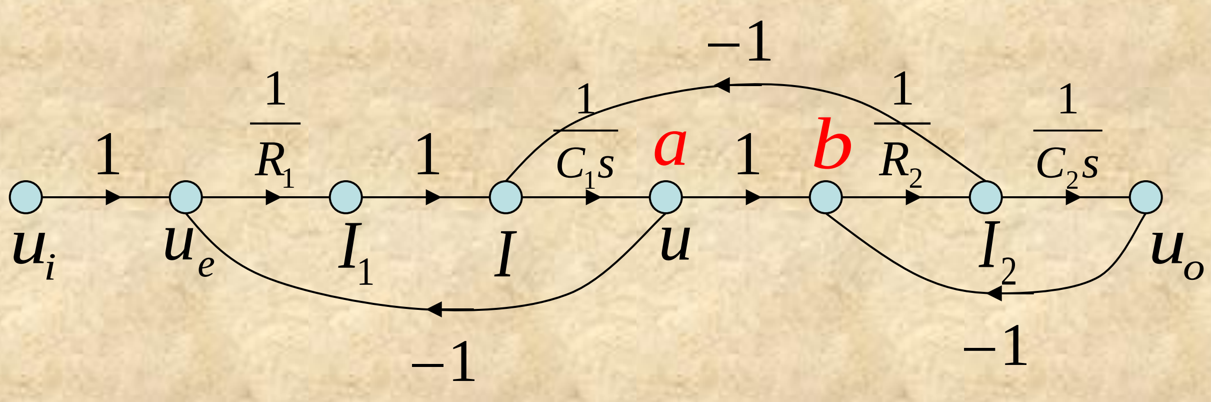
$$G_B(s) = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{\Delta}$$

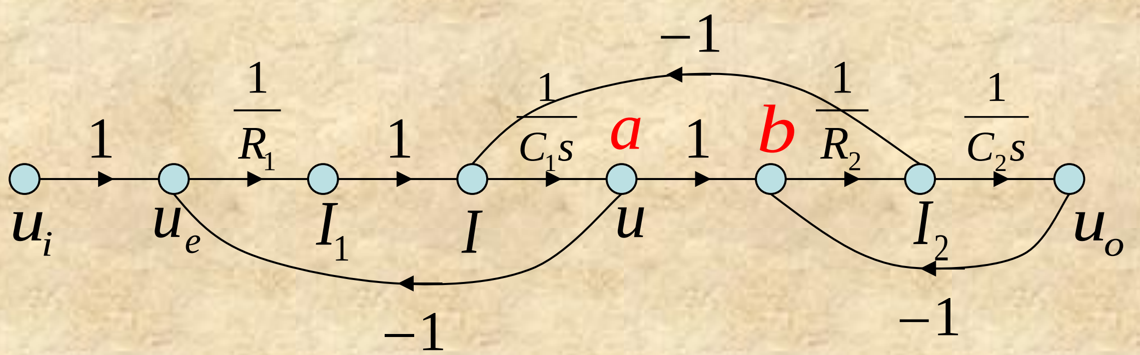


例： 绘出下列系统的信号流图并计算传递函数。



解： 先在结构图上标出节点，再根据逻辑关系画出信号流图如下：





回路：

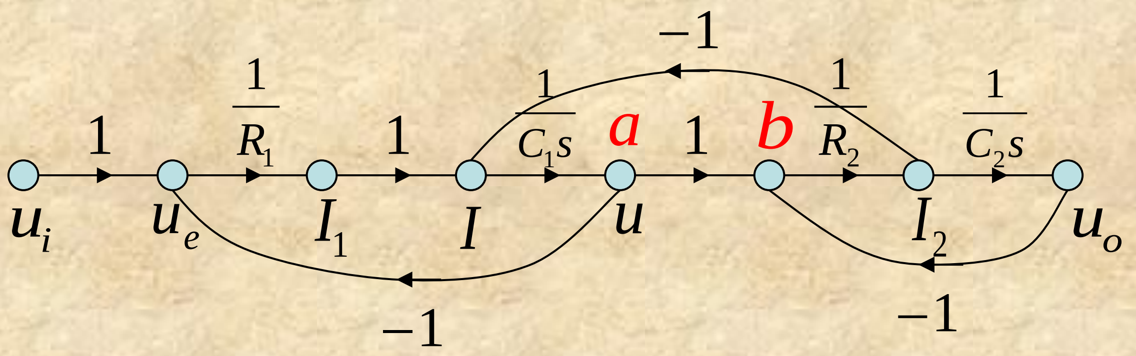
$$\sum L_a = \frac{-1}{R_1C_1s} + \frac{-1}{R_2C_2s} + \frac{-1}{R_2C_1s}$$

两两不接触回路：

$$\sum L_bL_c = \frac{-1}{R_1C_1s} \times \frac{-1}{R_2C_2s} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$

无三三不接触回路

$$\Delta = 1 + \frac{1}{R_1C_1s} + \frac{1}{R_2C_2s} + \frac{1}{R_2C_1s} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$



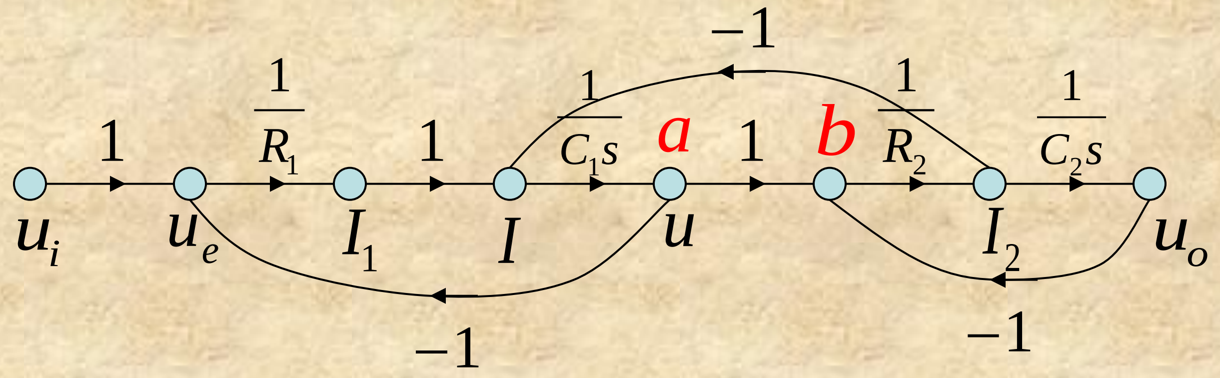
前向通道：

$$P_1 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

三个回路都与前向通道接触 $\Rightarrow$ $\Delta_i = 1$

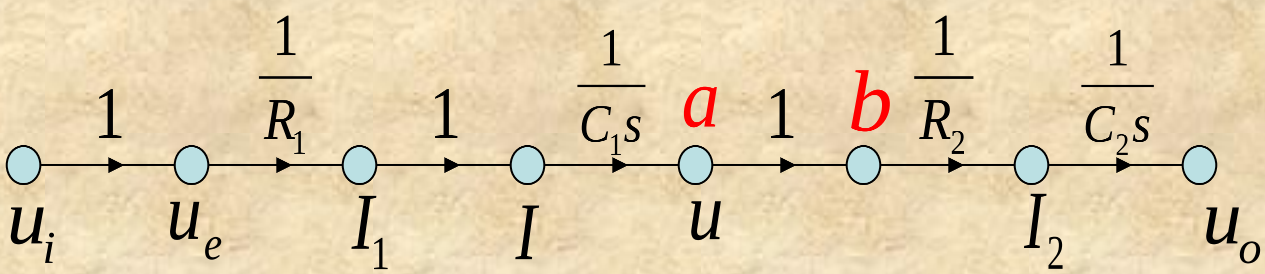
所以传递函数为：

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{1} P_k \Delta_k = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$



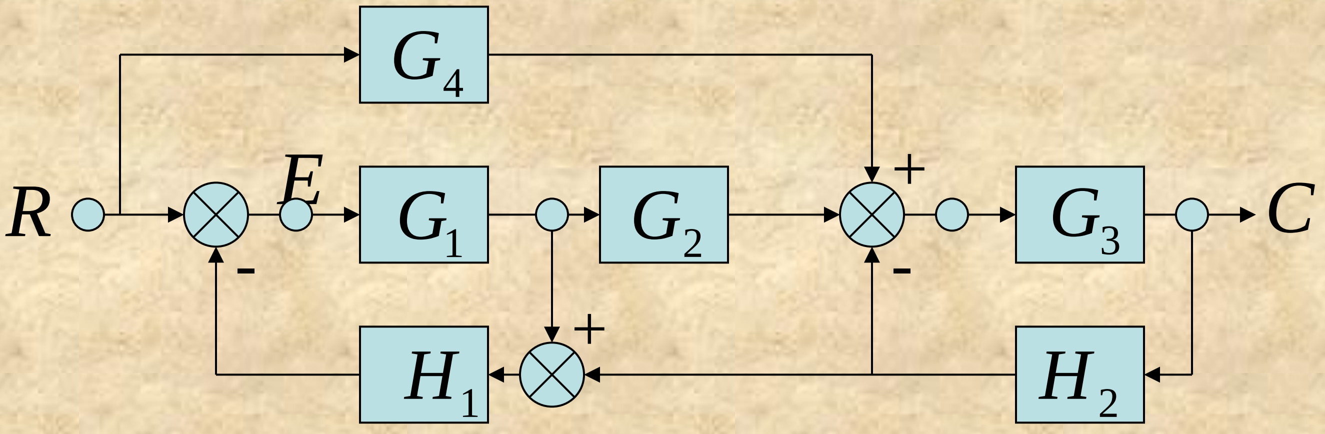
讨论：信号流图中，a点和b点之间的传输为1，是否可以将该两点合并？

不能合并！因为a、b两点的信号值不一样。

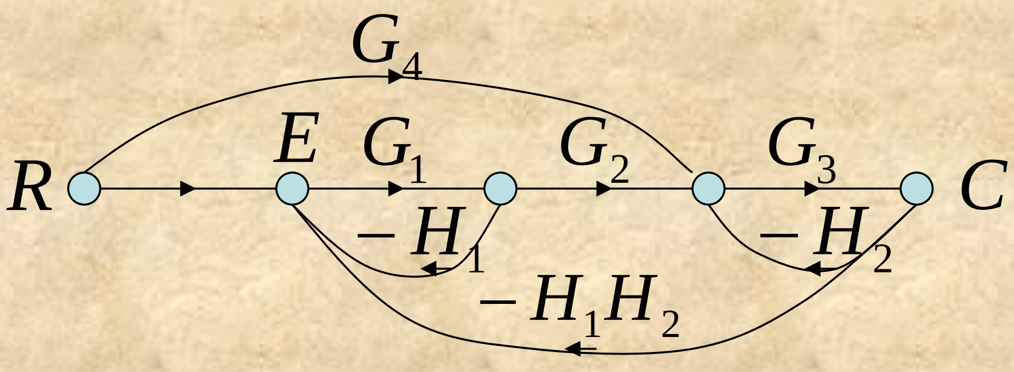


上图中，u_i和u_e，I_1和I可以合并吗？为什么？

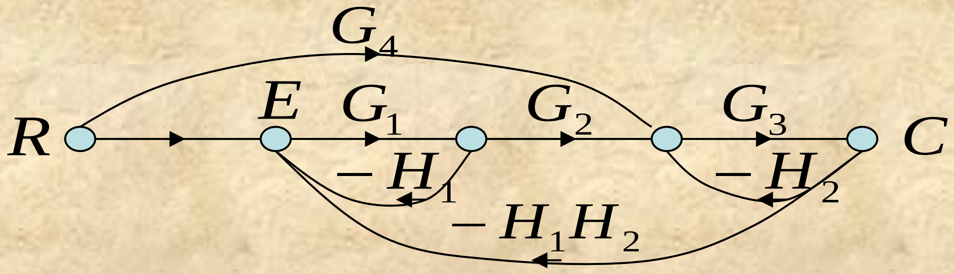
例：计算下述结构图的传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)},\dfrac{E(s)}{R(s)}$



解：在结构图上标出节点，然后绘制信号流图：



◈求 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$



前向通道为:

$$P_1 = G_1G_2G_3, \quad P_2 = G_3G_4$$

回路分别为: $-G_1H_1, -G_3H_2, -G_1G_2G_3H_1H_2$

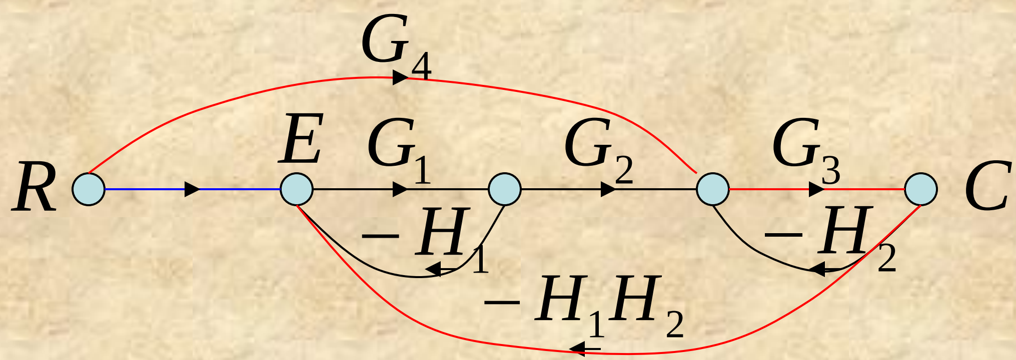
两两不接触回路: $(-G_1H_1)(-G_3H_2)$

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_bL_c = 1 + G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_3H_1H_2$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1 + G_1H_1$$

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3 + G_3G_4 + G_1G_3G_4H_1}{1 + G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_3H_1H_2}$$

◆求 $\dfrac{E(s)}{R(s)}$



Δ不变

$P_1=1, \Delta_1=1+G_3H_2$

（蓝线表示）

$P_2=-G_3G_4H_1H_2, \Delta_2=1$

（红线表示）

$$P=\frac{1+G_3H_2-G_3G_4H_1H_2}{\Delta}$$

注意：对于一个给定的系统，特征表达式Δ总是不变的，可以试着求一下。

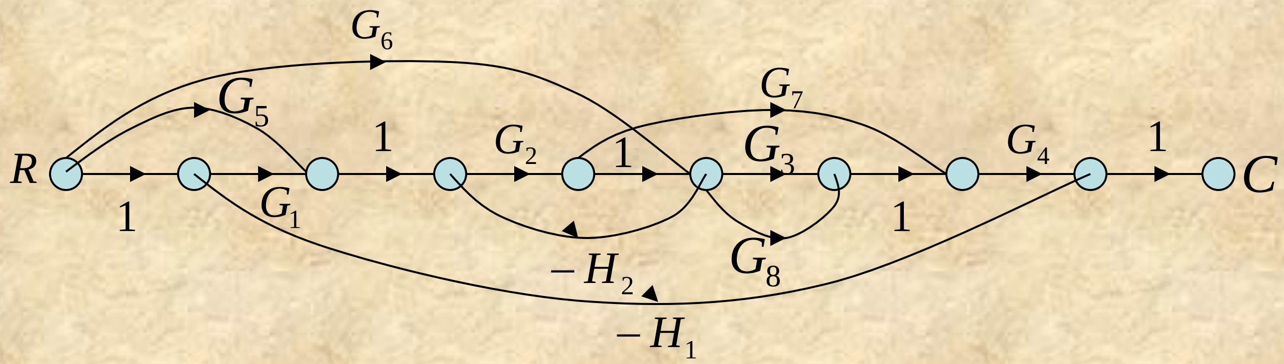
注意：梅森公式只能求系统的总增益，即输出对输入的增益。而输出对混合节点（中间变量）的增益就不能直接应用梅森公式。

对此问题有两种方法求其传递函数：

一、把该混合节点的所有输入支路去掉，然后再用梅森公式

二、分别用梅森公式求取输出节点及该节点对输入节点的传递函数，然后把它们的结果相比，即可得到输出对该混合节点的传递函数

例： 试统计以下信号流图有几个回路和前向通道。



- 回路：

$$-G_2H_2, -G_1G_2G_3G_4H_1, -G_1G_2G_7G_4H_1, -G_1G_2G_8G_4H_1$$

$$\therefore \Delta = 1 + G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_7G_4H_1 + G_1G_2G_8G_4H_1$$

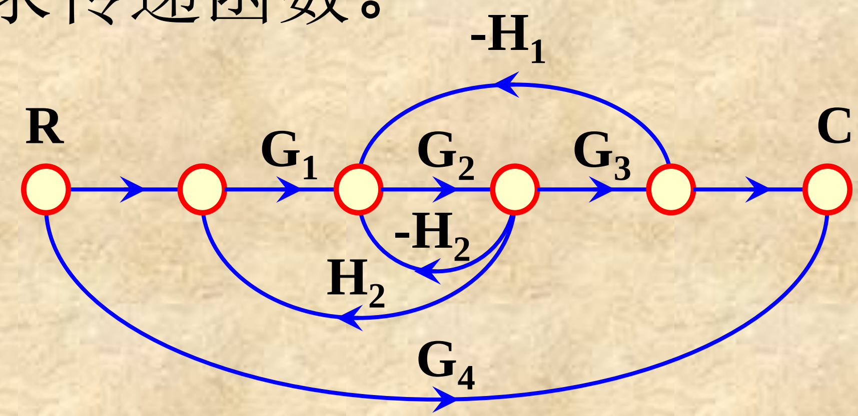
- 有九条前向通道，分别是：

$P_1 = G_1G_2G_3G_4$ $P_4 = G_5G_2G_3G_4$ $P_7 = G_6G_3G_4$

$P_2 = G_1G_2G_7G_4$ $P_5 = G_5G_2G_7G_4$ $P_8 = G_6G_8G_4$

$P_3 = G_1G_2G_8G_4$ $P_6 = G_5G_2G_8G_4$ $P_9 = -G_6H_2G_2G_7G_4$

例：已知系统信号流图，求传递函数。



解：回路：$L_1 = -G_2H_2$

$L_2 = G_1G_2H_2 \quad L_3 = -G_2G_3H_1$

回路均相互接触，则：

$$\Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2$$

前向通路：

$P_1 = G_1G_2G_3$，没有与之不接触的回路：$\Delta_1 = 1$

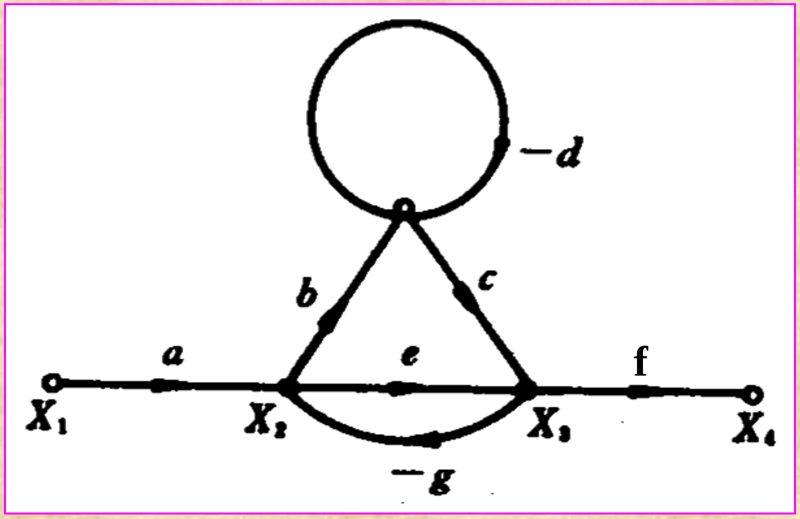
$P_2 = G_4$ ，与所有回路不接触：$\Delta_2 = \Delta$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2} + G_4$$

例： 已知系统信号流图，求传递函数 X_4/X_1及 X_2/X_1。

解： 回路:

$$\sum L_a = -d - eg - bcg$$



两两互不接触回路:

$$\sum L_b L_c = \text{deg}$$

则 $\Delta = 1 + d + eg + bcg + \text{deg}$

1. $X_1 \to X_4, p_1 = aef, p_2 = abcf$

$\Delta_1 = 1 + d, \Delta_2 = 1$

$$\frac{X_4}{X_1} = \frac{1}{\Delta}(p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2) = \frac{aef(1+d) + abcf}{1 + d + eg + bcg + \text{deg}}$$

2. $X_1 \to X_2, p_1 = a, \Delta_1 = 1 + d$

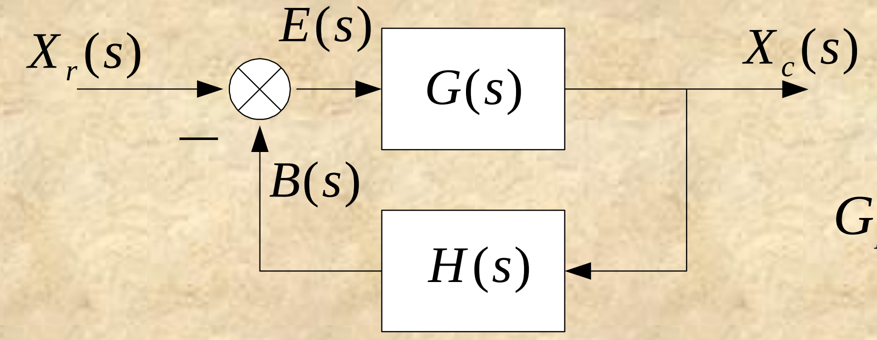
$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1}{\Delta} p_1\Delta_1 = \frac{a(1+d)}{1 + d + eg + bcg + \text{deg}}$$

四. 系统的传递函数

基本概念：开环传递函数 vs 闭环传递函数

开环传递函数：把主反馈断开后，从输入信号到反馈信号之间的传递函数。

闭环传递函数：输出信号与输入信号的拉氏变换之比。



$$G_k(s) = G(s)H(s)$$

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+G_k(s)}$$

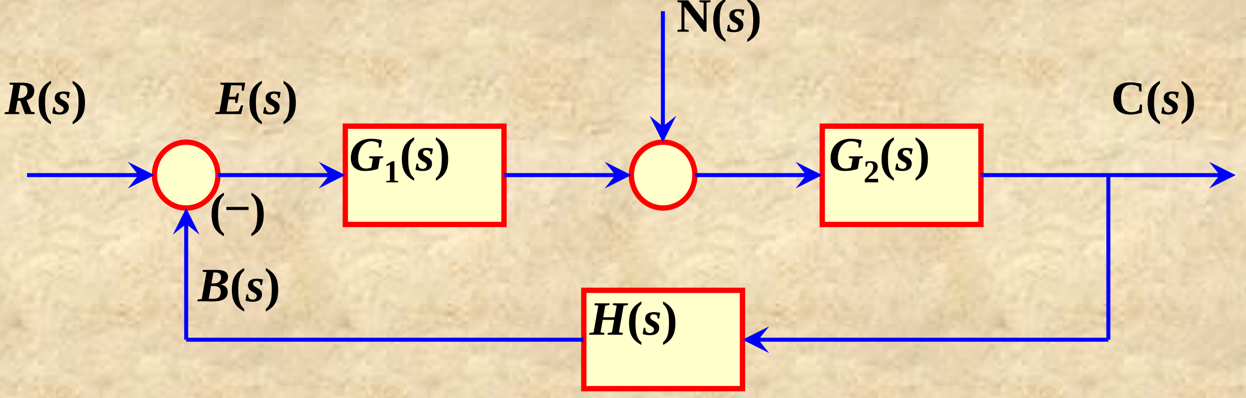
输出量对给定量和扰动量的传函

- 对给定量传函：（$N(s)=0$）

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 对扰动量传函：（$R(s)=0$）

$$\Phi_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$$



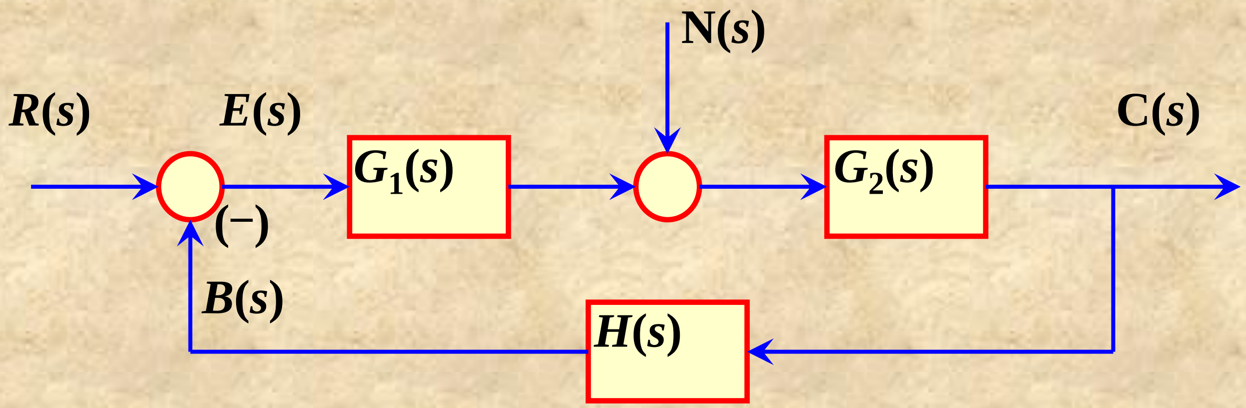
误差传递函数

- 对给定量传函：（$N(s)=0$）

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{1}{1+G_k(s)}$$

- 对扰动量传函：（$R(s)=0$）

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-G_2H}{1+G_1G_2H}$$



2-4 数学模型的实验测定

自　学

对本章内容有疑问？