

第四章 线性系统的根轨迹分析

4-1 根轨迹法的基本概念

4-2 根轨迹绘制的基本法则

4-3 广义根轨迹

4-4 系统性能的分析 (自学)

4-1 根轨迹法的基本概念

一. 根轨迹概念及应用

- 系统的参数发生变化，其特征方程式的根的值改变。
- 当系统参数连续变化时（如从 $0 \rightarrow \infty$ ），其特征方程的根在根平面上留下的轨迹，叫根轨迹。
- 根轨迹与系统性能密切相关。

为什么要研究根轨迹



高阶系统求根困难，难以分析参数变化对系统特征根的影响！



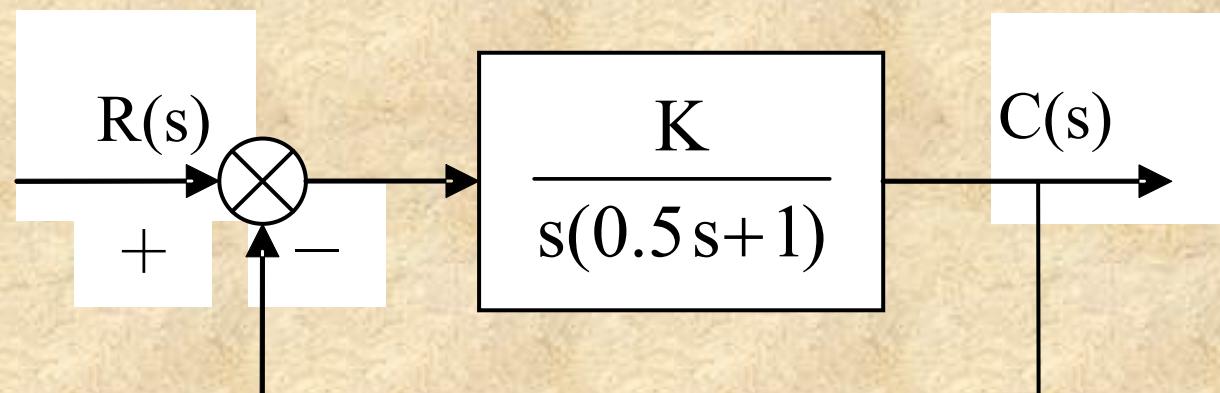
图解方法，
简单易行

□研究根轨迹的目的：分析系统的各种性能
(稳定性、稳态性能、动态性能)

例:已知单位负反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) H(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$$

试分析闭环系统的特征根随系统参数 K 的变化在 s 平面上的分布情况。



解：系统的闭环传递函数

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2s + 2K = 0$$

特征方程的根是

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$

设 K 的变化范围是 $(0, \infty)$, $K \rightarrow \infty$

当 $K = 0$ 时, $s_1 = 0, s_2 = -2$;

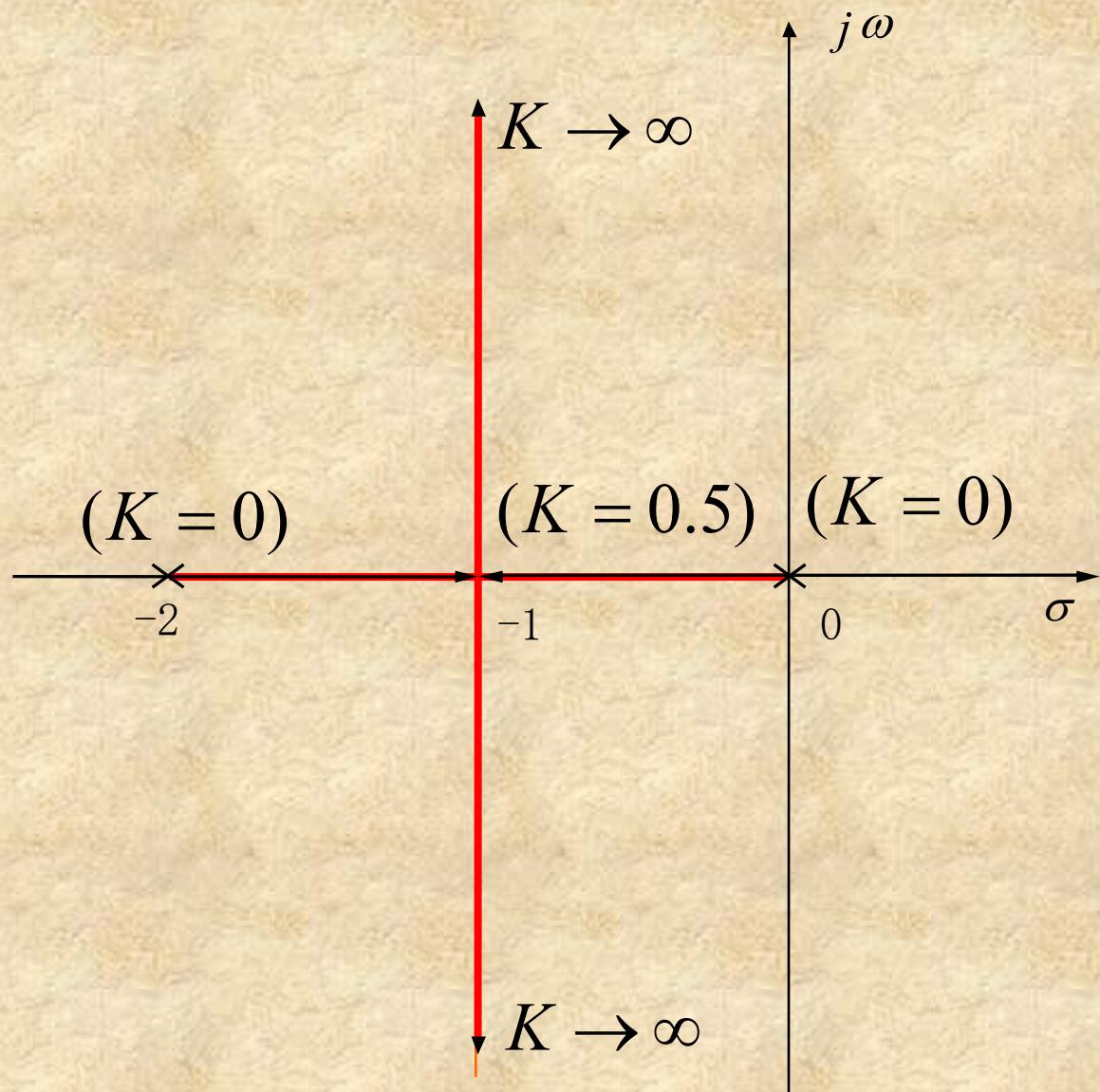
当 $0 < K < 0.5$ 时, s_1 与 s_2 为不等的两个负实根:

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$

当 $K = 0.5$ 时, $s_1 = s_2 = -1$ 为等实根

当 $K > 0.5$ 时, $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2K-1}$ 为共轭复根;

当 $K \rightarrow \infty$ 时, 根的实部都等于 -1, 是常数,
虚部趋向无穷远处



系统的根轨迹

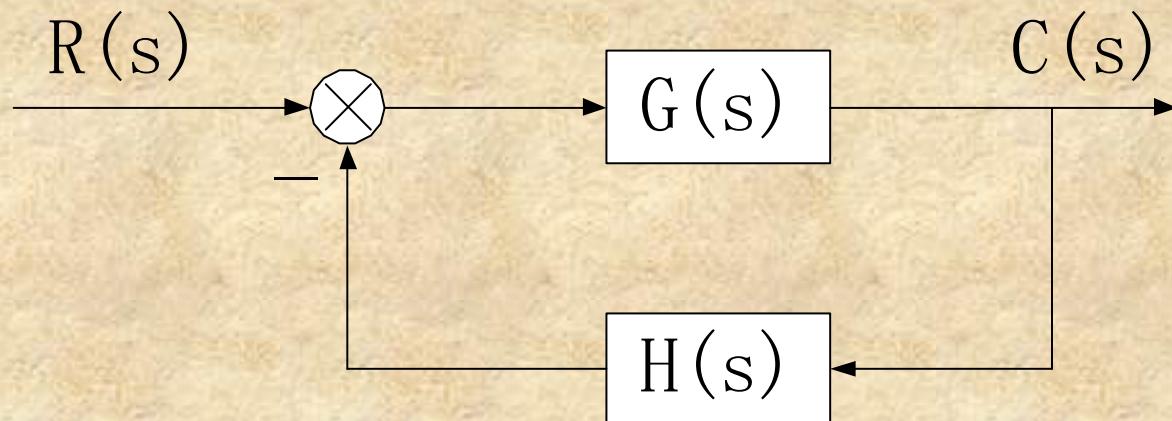
根轨迹变化与系统性能的关系

根轨迹			稳定性	动态性能
K	s_1	s_2		
0	0	-2	系统稳定	过阻尼系统
0.5	-1	-1		临界阻尼系统
1	$-1+j$	$-1-j$		欠阻尼系统
...		
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$		无阻尼系统

- 用根轨迹图来分析自动控制系统十分方便。
- 对于高阶系统，求解特征方程的根非常困难。
- 如果要研究系统参数的变化对闭环系统特征方程根的影响，就需要大量反复的计算。
- 1948年伊万斯（W·R·EVANS）解决了这个问题，提出了**根轨迹法**。
- 根轨迹方法不~~需要~~求解**闭环系统的特征方程**，只需依据**开环传函**便可绘制系统的根轨迹图。

二. 根轨迹方程

- 通常，系统的开环零、极点已知，因此建立**开环零、极点**与闭环极点之间的关系，有助于**闭环系统根轨迹**的绘制。



$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

前向通路传递函数 $G(s)$ 和反馈通路传递函数 $H(s)$
可分别表示成因式相乘的形式：

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{i=1}^f (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^q (T_j s + 1)} = K_G^* \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_i)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

前向通路根
轨迹增益

$$H(s) = K_H^* \frac{\prod_{i=1}^l (s - z_i)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

反馈通路根
轨迹增益

开环系统根轨迹增益

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^f (s - z_i)}{\prod_{j=1}^h (s - p_j)}$$

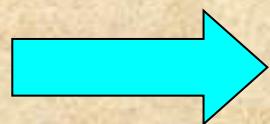


开环零点

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

开环极点

$$\frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 = e^{j(2k+1)\pi}$$



$$\frac{K^* \prod_{j=1}^m |s - z_j| e^{j\angle(s - z_j)}}{\prod_{i=1}^n |s - p_i| e^{j\angle(s - p_i)}} = e^{j(2k+1)\pi}$$

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

相角条件

$$\frac{K^* \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{j=1}^m |(s - z_j)|}$$

模值条件

- 凡是满足相角条件的点一定是根轨迹上的点（相角条件是确定根轨迹的充要条件），而其对应的值由幅值条件求出。

例:已知单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

试画出根轨迹。

解：将开环传函进行变换后得到：

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K_g(s + z_1)}{s(s + p_1)(s + p_2)}$$

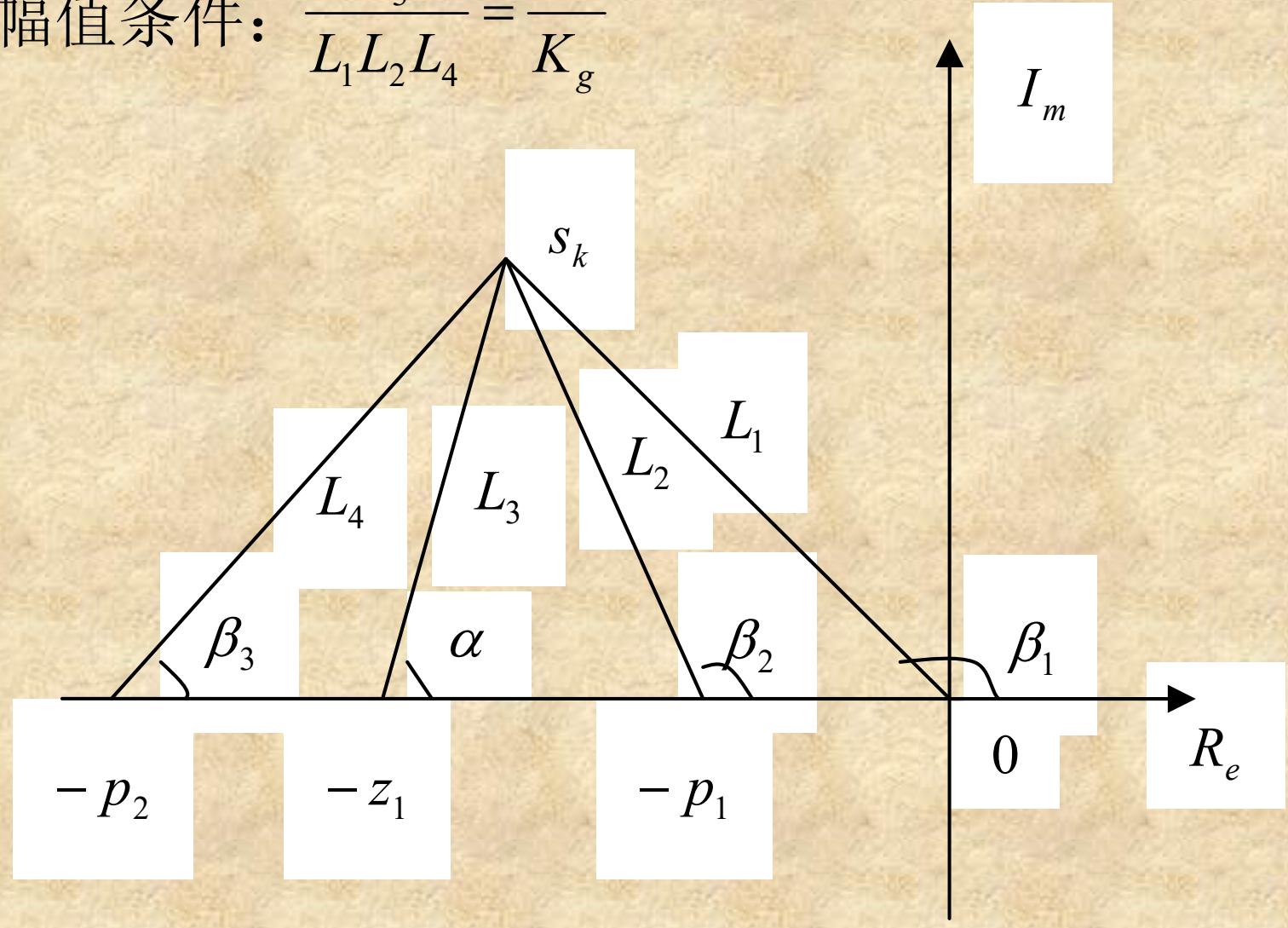
其中，

$$K = \frac{K\tau}{T_1 T_2} \quad z_1 = \frac{1}{\tau}$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1} \quad p_2 = \frac{1}{T_2} \quad p_3 = 0$$

相角条件: $\alpha - \beta_1 - \beta_2 - \beta = \pm 180^\circ (1 + 2\mu)$

幅值条件: $\frac{L_3}{L_1 L_2 L_4} = \frac{1}{K_g}$



4-2 根轨迹绘制的基本法则

一. 绘制根轨迹的基本法则

法则一. 根轨迹的起点和终点

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

当 $K^* = 0$ 时, $s = p_j$, 根轨迹起于开环极点。

另一方面

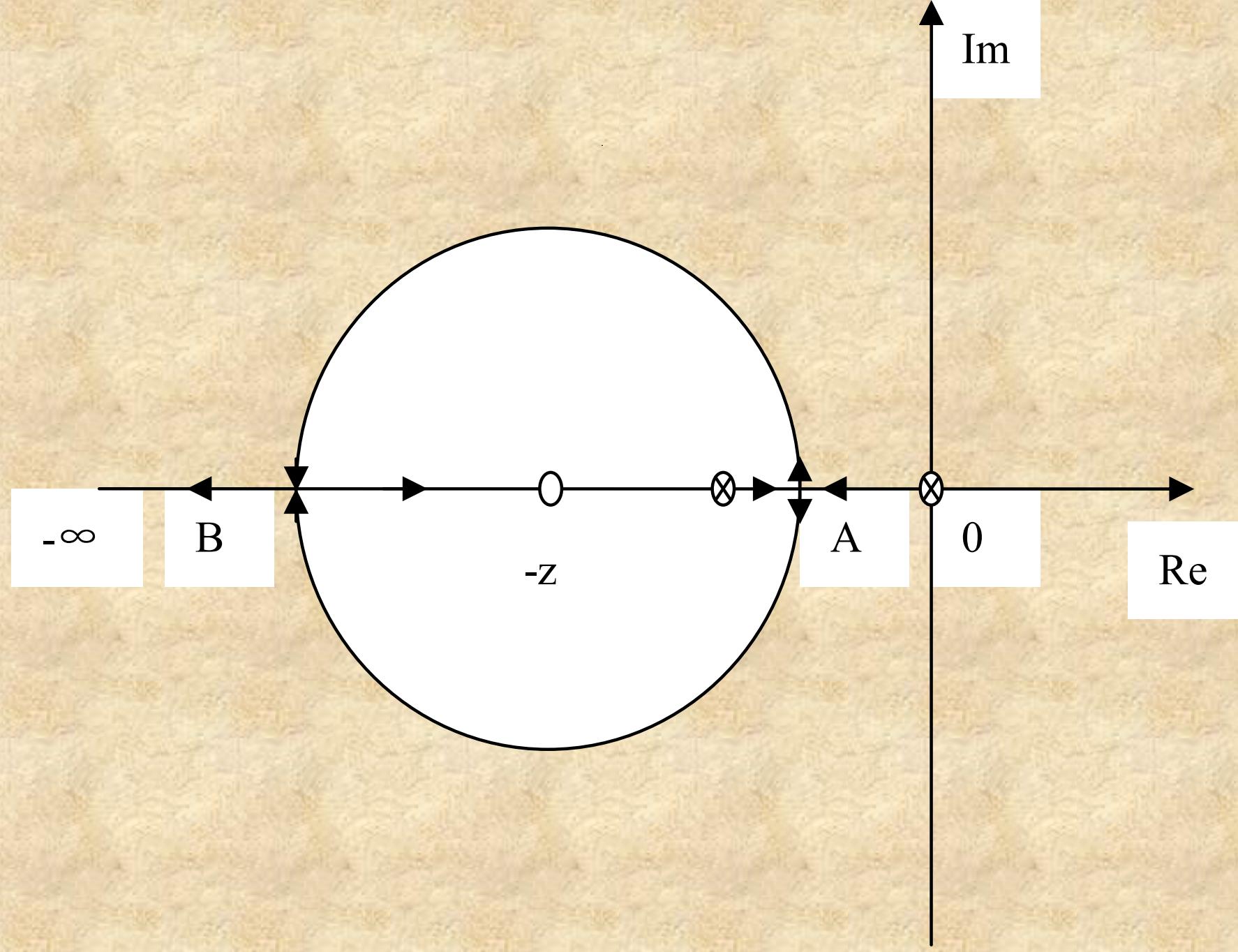
$$\frac{K^* \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \quad \xrightarrow{\text{cyan arrow}} \quad \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{K^*}$$

当 $K^* \rightarrow \infty$ 时，右边 $\rightarrow 0$



$s \rightarrow z_j$ 或者 $s \rightarrow \infty$

$\begin{cases} s = -z_i, \text{ 有 } m \text{ 条根轨迹终止在开环传递函数的零点。} \\ s \rightarrow \infty, \text{ 有 } (n-m) \text{ 条根轨迹终止在无穷远处。} \end{cases}$



法则二. 根轨迹的分支数、对称性和连续性

- 分支数等于系统的闭环极点数，与开环有限零极点数目中的大者相同。
- 因为特征方程式的系数为实数，根据韦达定理，其根一定是实根或共轭复根，所以，根轨迹对称于实轴。
- 当根轨迹增益由零到无穷大连续变化时，系统特征方程的根在复平面上也是连续变化的，因此，根轨迹是连续曲线。

法则三. 根轨迹的渐近性

- 当开环极点数n大于开环零点数m时，系统有 $n-m$ 条根轨迹终止于S平面的无穷远处，这 $n-m$ 条根轨迹变化趋向的直线叫做根轨迹的渐近线，因此，渐近线也有 $n-m$ 条，且它们交于实轴上的一点。
- 确定渐近线：

由两个因素决定 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{渐近线与实轴间夹角 } \varphi_a \\ 2) \text{渐近线与实轴交点 } \sigma_a \end{array} \right.$

夹角 φ_a 计算：

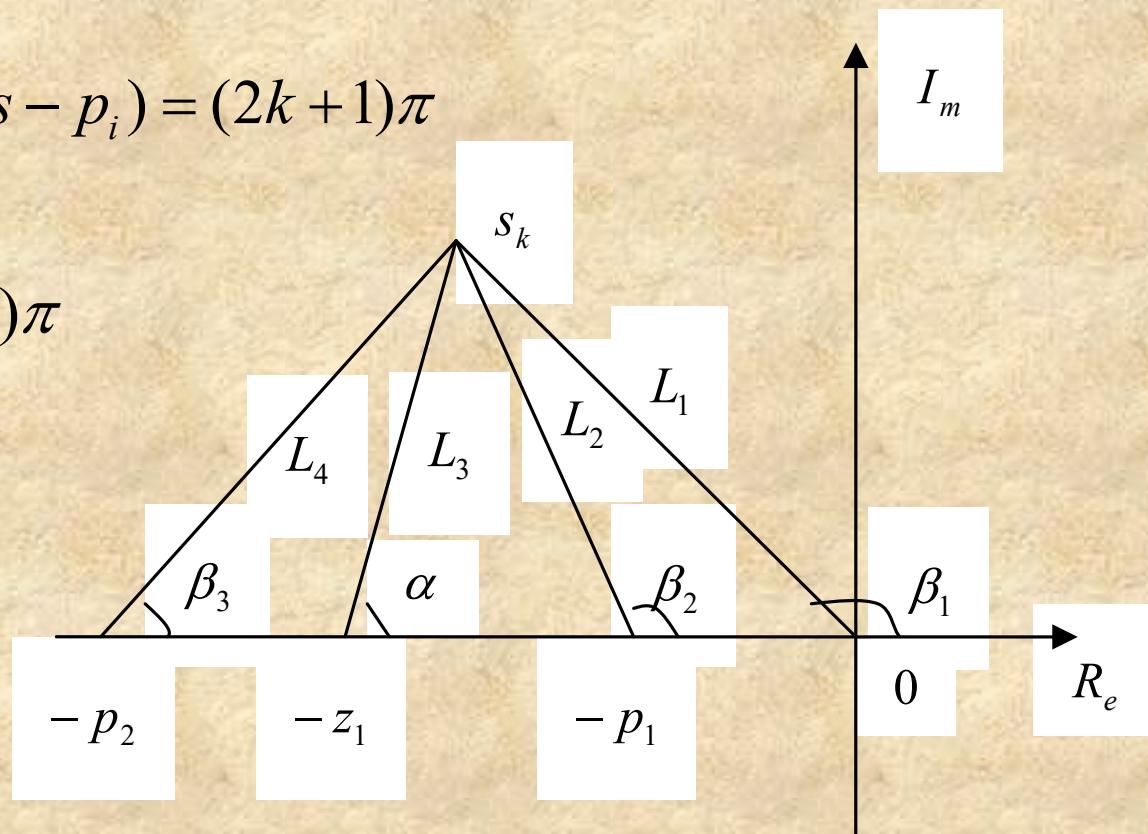
设试探点 s_k 在无穷远处的根轨迹上，所以，渐近线与实轴交角 φ_a 与到各零极点的幅角均相等。

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

$$m\varphi_a - n\varphi_a = (2k + 1)\pi$$

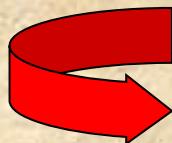


$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$

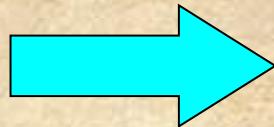


计算渐近线与实轴交点 σ_a

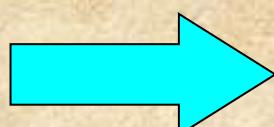
设渐近线过 σ_a , s_k 位于根轨迹的无穷远处



$$|s_k - \sigma_a| = |s_k - p_j| = |s_k - z_i|$$



$$K^* = \frac{\prod_{j=1}^n |(s_k - p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s_k - z_i)|} \approx \left| \frac{\prod_{j=1}^n (s_k - \sigma_a)}{\prod_{i=1}^m (s_k - \sigma_a)} \right| = \left| (s_k - \sigma_a)^{n-m} \right|$$



$$K^* \approx \left| (s_k - \sigma_a)^{n-m} \right| = \left| s_k^{n-m} - (n-m)\sigma_a s_k^{n-m-1} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^n (s_k - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s_k - z_i)} \right| = \left| \frac{s_k^n - \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) s_k^{n-1} + \dots}{s_k^m - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{m-1} + \dots} \right| = \left| \frac{s_k^n}{s_k^m - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{m-1} + \dots} - \frac{\left(\sum_{j=1}^n p_j \right) s_k^{n-1}}{s_k^m - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{m-1} + \dots} + \dots \right|$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{1-x} \rightarrow 1+x$ $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1+x$

忽略分母中的高阶无穷小



$$\frac{s_k^n}{s_k^m - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{m-1} + \dots} \approx \frac{s_k^{n-m}}{1 - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{-1}} \approx s_k^{n-m} \left[1 + \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{-1} \right] = s_k^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{n-m-1}$$

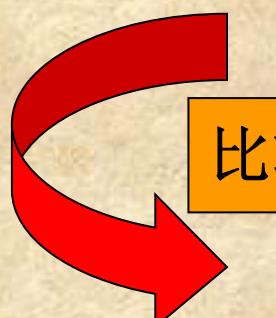
$$\frac{\left(\sum_{j=1}^n p_j \right) s_k^{n-1}}{s_k^m - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{m-1} + \dots} \approx \frac{\left(\sum_{j=1}^n p_j \right) s_k^{n-m-1}}{1 - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{-1}} \approx \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) s_k^{n-m-1} \left[1 + \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{-1} \right]$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^n (s_k - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s_k - z_i)} \right| \approx \left| s_k^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{n-m-1} - \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \left[s_k^{n-m-1} + \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) s_k^{n-m-2} \right] + \dots \right|$$

$$\approx \left| s_k^{n-m} - \left[\left(\sum_{j=1}^n p_j \right) - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) \right] s_k^{n-m-1} + \dots \right|$$

另一方面

$$\frac{\prod_{j=1}^n |(s_k - p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s_k - z_i)|} \approx \left| s_k^{n-m} - (n-m)\sigma_a s_k^{n-m-1} + \dots \right|$$



比较多项式系数

$$(n-m)\sigma_k = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

法则三. 根轨迹的渐近性

$$\begin{cases} \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \\ \sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \end{cases}$$

例：已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

试画出该系统根轨迹的渐近线。

解：对于该系统有 $n=4$, $m=1$, $n-m=3$; 三条渐近线与实轴交点位置为

$$\sigma_a = \frac{-1 - 4 + 2}{3} = -1$$

它们与实轴正方向的交角分别是

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3}: \pi, \pm \frac{\pi}{3}$$

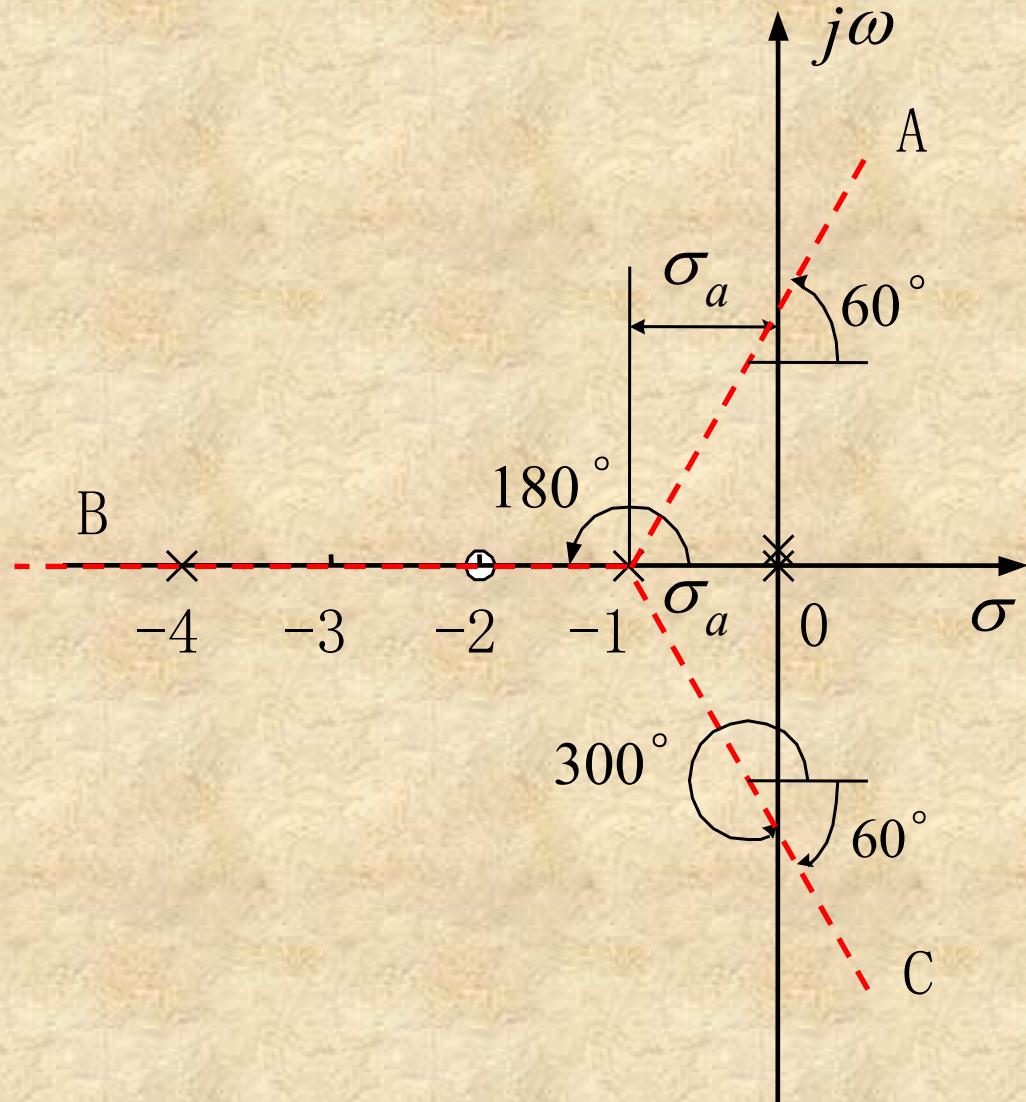
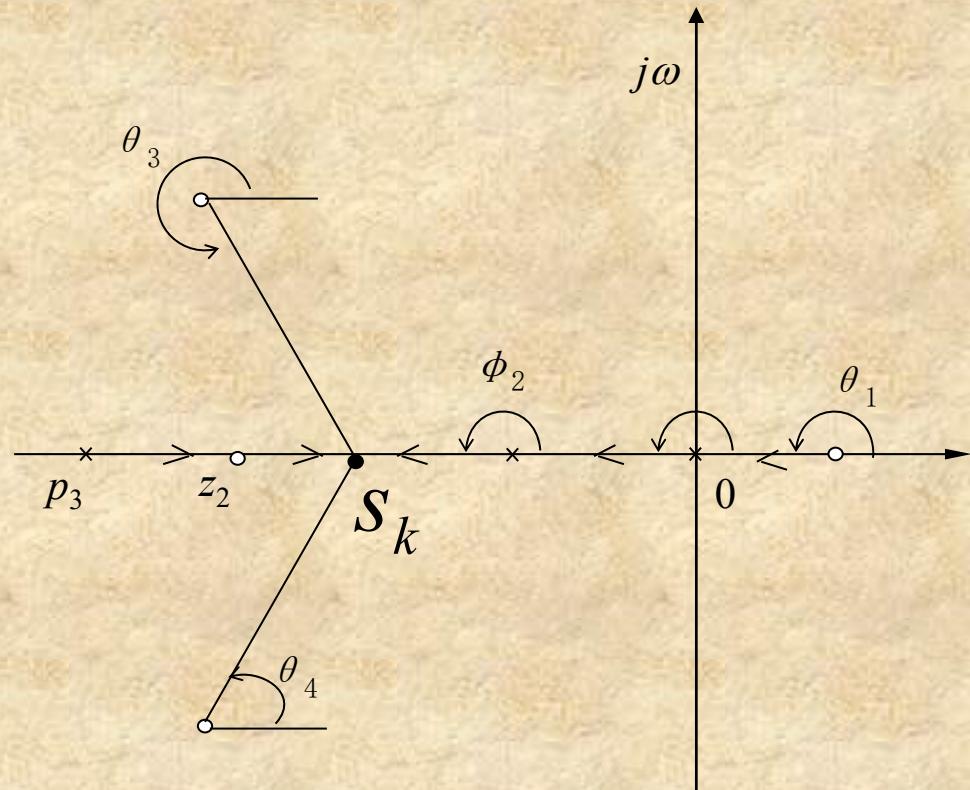


图 根轨迹的渐近线

法则四. 实轴上根轨迹

令 s_k 为实轴上的试探点

- ✓ 左侧开环零极点构成的向量夹角均为零度；
- ✓ 右侧开环零极点构成的向量夹角均为 π ；
- ✓ 一对共轭零点或极点的向量夹角之和为 2π 。



法则四. 实轴上根轨迹

考虑幅角条件: $\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$

只有当 s_k 点右侧实轴上的开环极点和开环零点的个数之和为奇数时，才满足相角条件。

怎么之差变成之和了呢？

结论: 实轴上的右边开环零极点个数之和为奇数时，则此线段为实轴上的根轨迹。

法则五. 分离点/会合点与分离角

- 定义

分离点：根轨迹随着值的增加，从实轴上进入复平面时所对应的点为分离点。

会合点：根轨迹在实轴上会合的那一点。

- 特点：分离点与会合点对应的闭环极点是重根。
- 通常计算位于实轴上的分离点，复平面上的分离点表明系统特征方程的根中至少有两对相等的共轭复根存在。

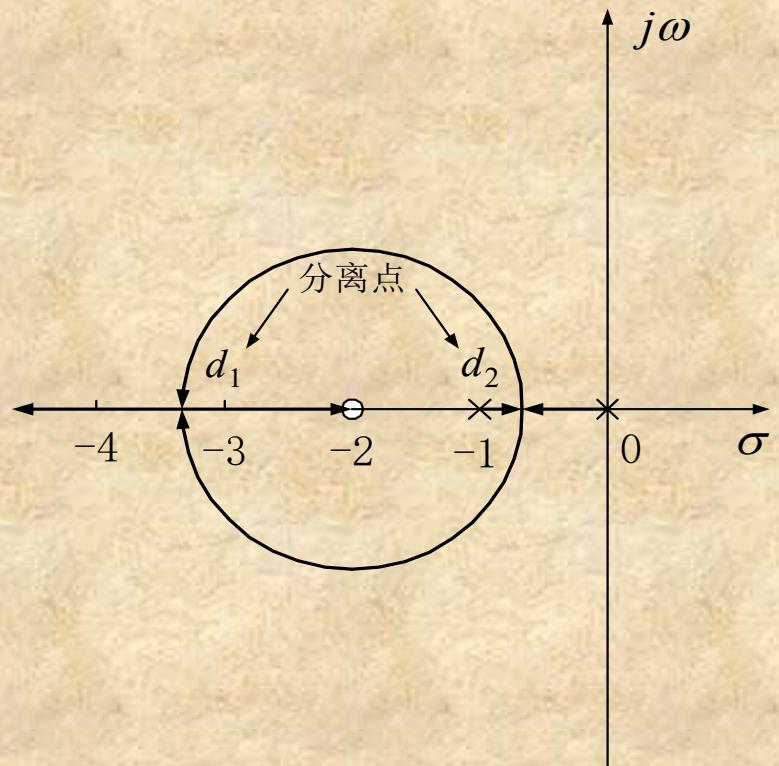


图 实轴上根轨迹的分离点

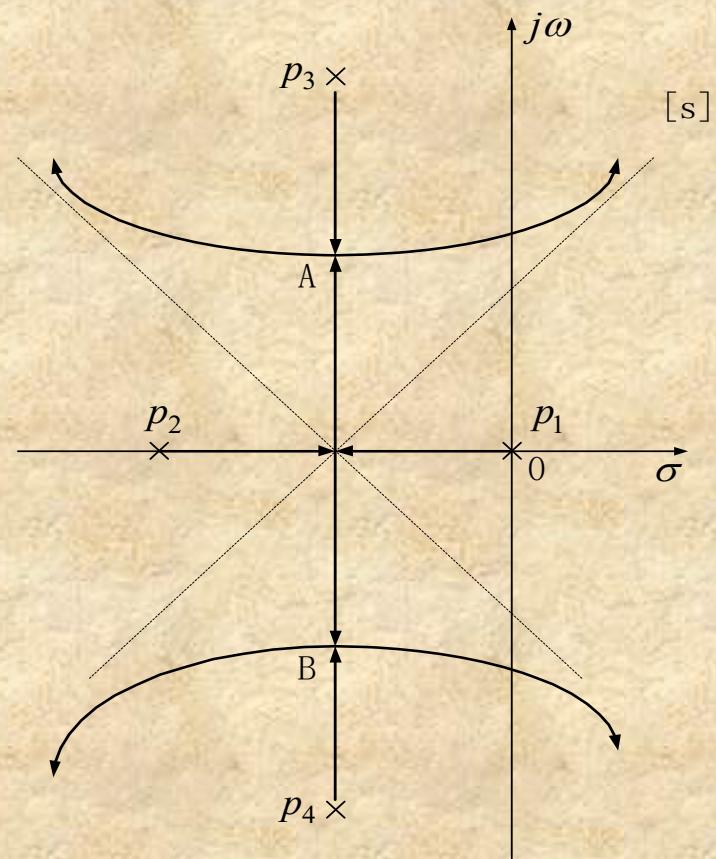


图 复平面上的分离点

分离点的计算

特征方程如下：

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

在分离点上， $D(s) = 0$ ，且 $\dot{D}(s) = 0$



$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) = -K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

$$\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s - p_j) = -K^* \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

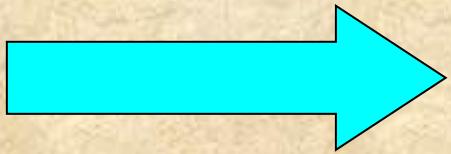
两式相除得到：

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}$$


$$\frac{d \left[\ln \prod_{j=1}^n (s - p_j) \right]}{ds} = \frac{d \left[\ln \prod_{i=1}^m (s - z_i) \right]}{ds}$$

另一方面

$$\ln \prod_{j=1}^n (s - p_j) = \sum_{j=1}^n [\ln(s - p_j)] \quad \ln \prod_{i=1}^m (s - z_i) = \sum_{i=1}^m [\ln(s - z_i)]$$



$$\sum_{j=1}^n \frac{d \ln(s - p_j)}{ds} = \sum_{i=1}^m \frac{d \ln(s - z_i)}{ds}$$



$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i}$$

计算分离点

$$\frac{(2k+1)\pi}{l}$$

计算分离角

例 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

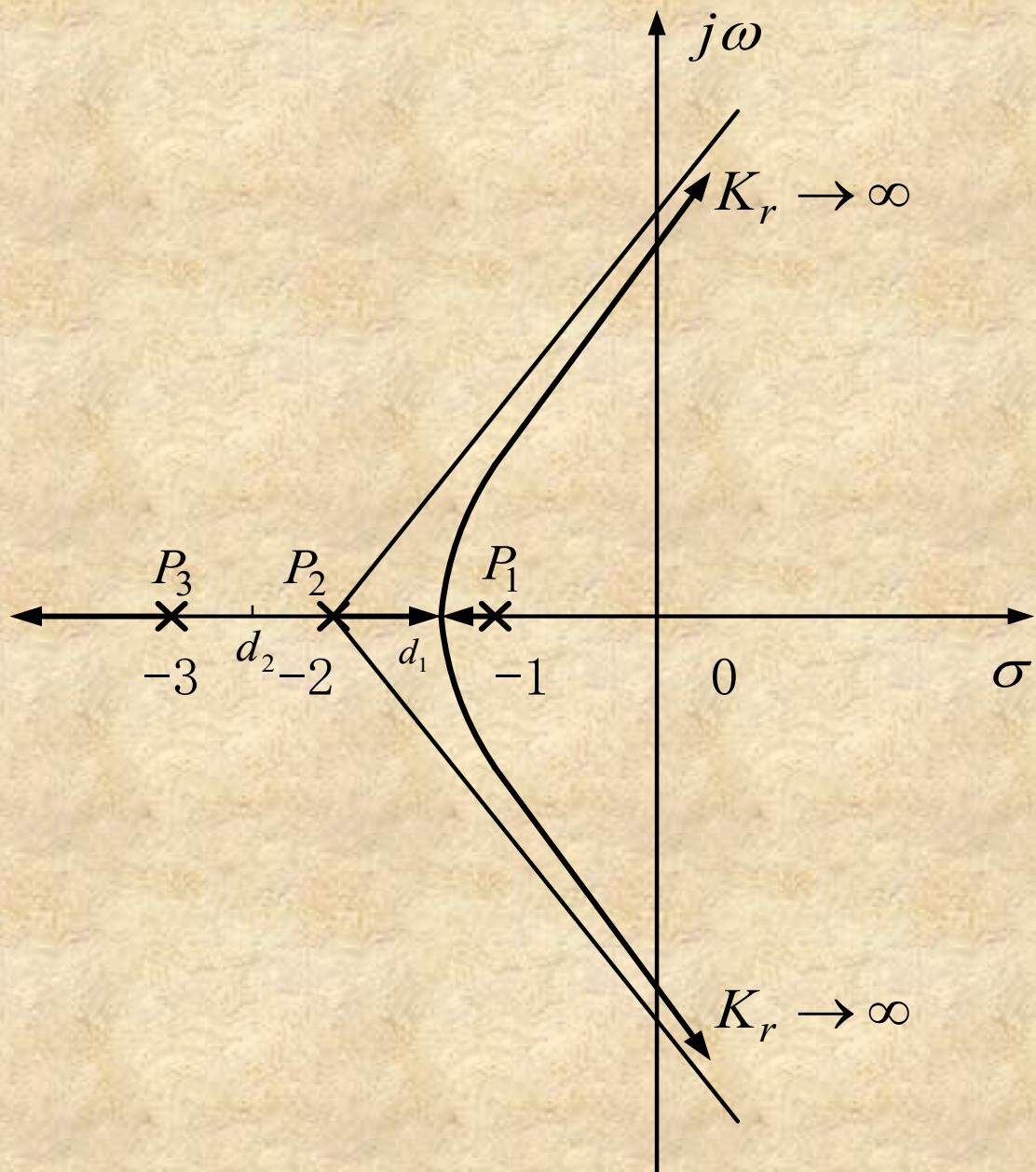
试求出系统根轨迹与实轴的分离点。

解 本系统无有限开环零点，因此

$$\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = 0$$

解出 $d_1 = -1.42$ 和 $d_2 = -2.58$ (舍去)

实轴上的根轨迹为-1到-2线段和-3到 $-\infty$ 线段，
所以 $d_1 = -1.42$ 是根轨迹在实轴上的分离点。



法则六. 起始角与终止角

- 定义

起始角（出射角）：根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角，以 θ_{p_i} 表示。

终止角（入射角）：根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角，以 φ_{z_i} 表示。

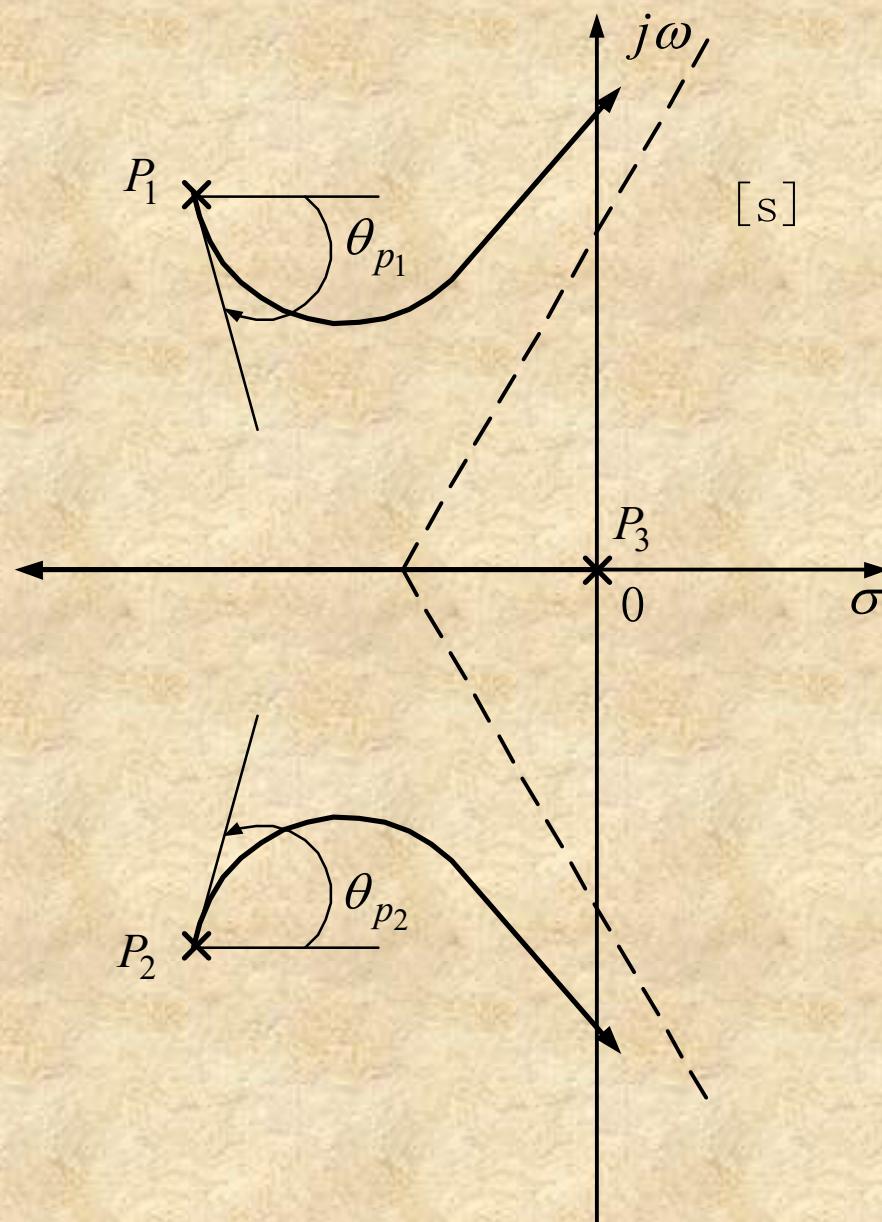


图. 根轨迹的起始角

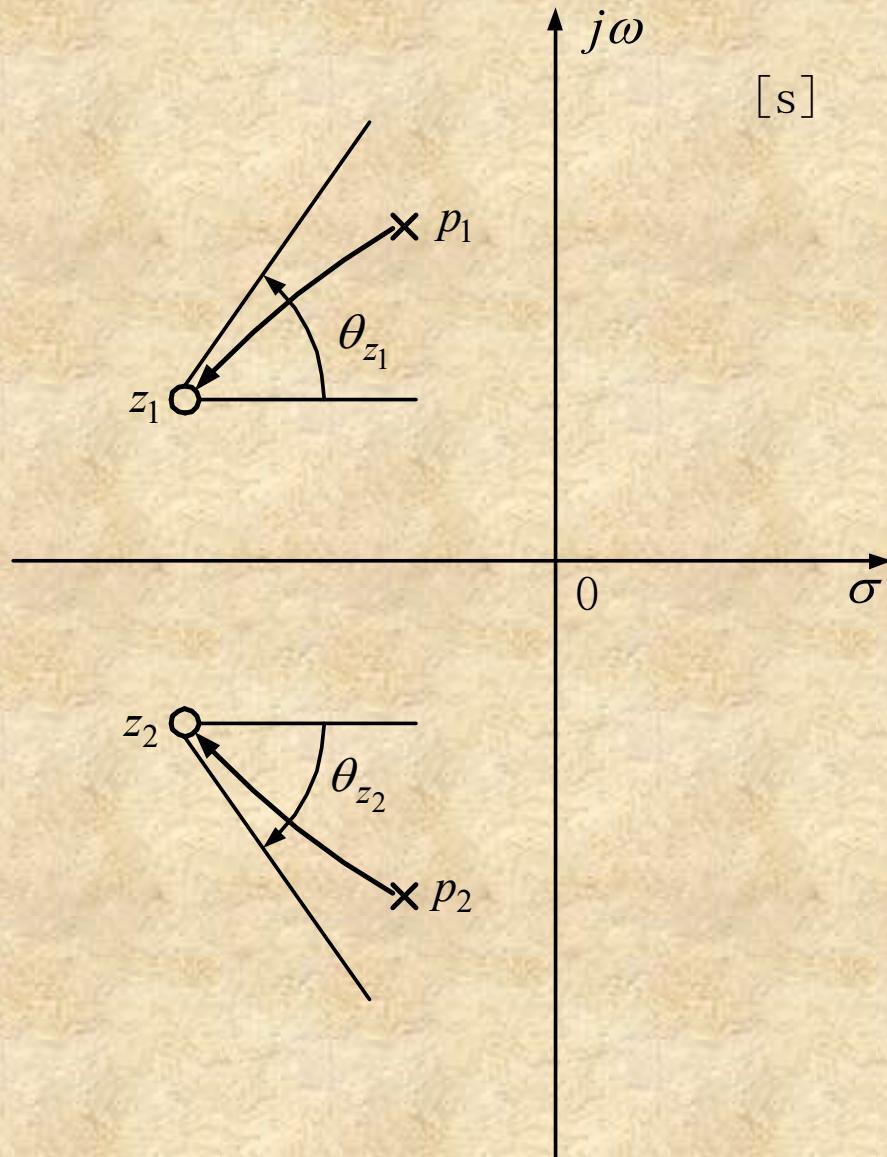


图. 根轨迹的终止角

对于根轨迹上无限靠近 p_1 的点A，由相角条件可得

$$\angle(A - z_1) - \angle(A - p_2) - \angle(A - p_3) - \angle(A - p_1) = \pm 180^\circ$$

由于A点无限靠近 p_1 点，

$$\angle(A - p_1) = \theta_{p_1}$$



$$\theta_{p_1} = \mp 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3)$$

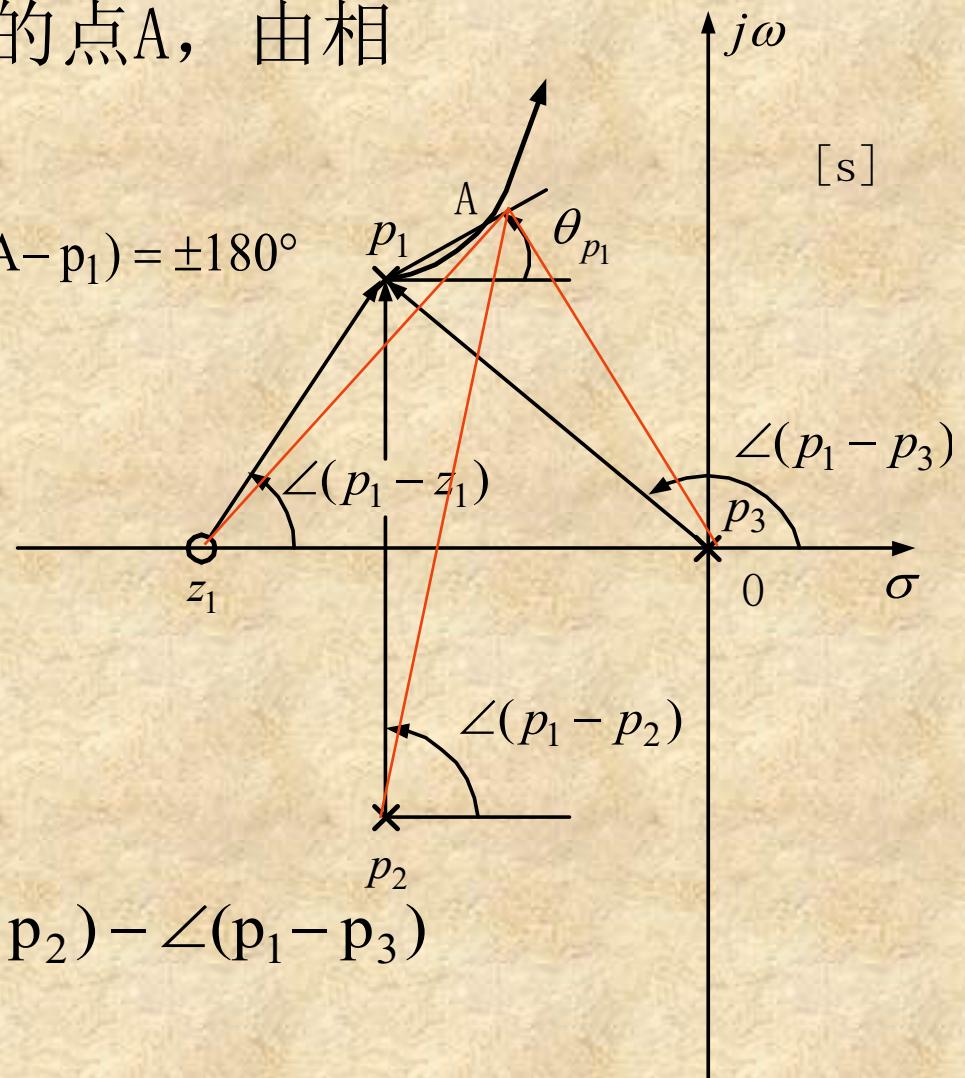


图 起始角 θ_{p_1} 的求取

计算起始角与终止角

起始角：

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_{p_j p_i}$$

$\varphi_{z_j p_i}$ ：各零点到所求出射角的极点的幅角；

$\theta_{p_j p_i}$ ：其它极点到所求入射角的零点的幅角。

终止角：

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi + \sum_{j=1}^n \theta_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_{z_j z_i}$$

法则七. 根轨迹在虚轴上的交点

若根轨迹与虚轴相交，则交点上的值可用劳思判据确定。

说明：若根轨迹与虚轴相交，则表示闭环系统存在纯虚根，因此此时系统处于临界稳定状态，可以利用劳思判据进行计算。

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$



$$I_m [1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$R_e [1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

例：对于单位负反馈系统: $G(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

试求根轨迹与虚轴的交点及相应的增益值。

解：系统的特征方程是

$$s^3 + 6s^2 + 11s + K_r + 6 = 0$$

令 $s = j\omega$ 并代入特征方程得

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + j11\omega + K_r + 6 = 0$$

其虚部和实部方程分别为:

$$\begin{cases} 11\omega - \omega^3 = 0 \\ K_r + 6 - 6\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解虚部方程得

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_c = \pm\sqrt{11}$$

由于 $\omega_1 = 0$ 不是根轨迹上的点，应舍去。

将其代入实部方程便可求出： $K_{rc} = 60$ 。

当系统的阶次较高时，解特征方程将会遇到困难，此时可用劳斯判据求出系统开环根轨迹增益的临界值 ω_c 和根轨迹与虚轴的交点 K_{rc} 。

列劳斯表得：

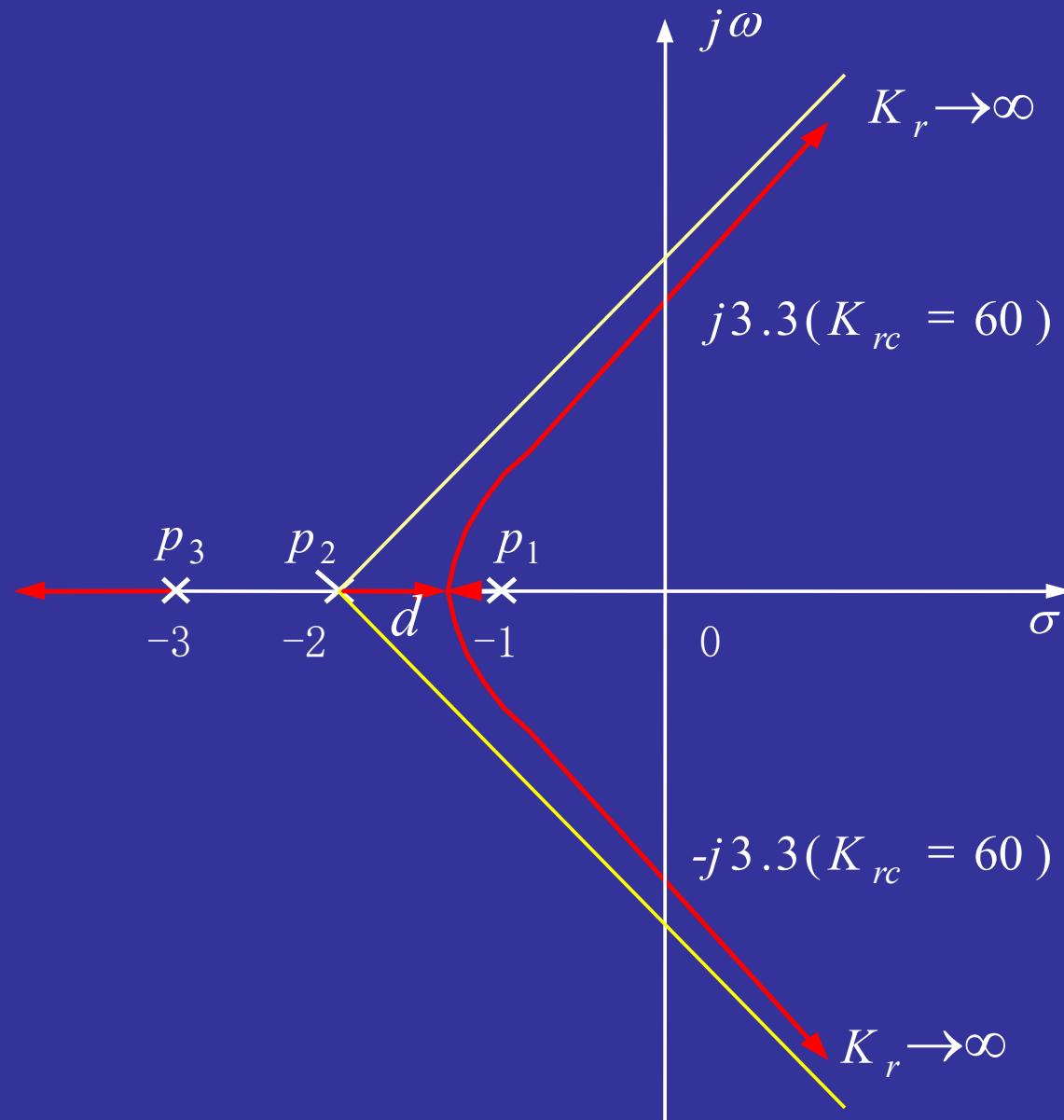
$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & K_r + 6 \\ s^1 & 10 - \frac{K_r}{6} & 0 \\ s^0 & K_r + 6 & \end{array}$$

取全零行，则：

$$10 - \frac{K_r}{6} = 0 \rightarrow K_r = 60$$

由辅助多项式得：

$$6s^2 + (K_r + 6) = 0 \xrightarrow{K_r = 60} s = \pm j\sqrt{11}$$



法则八. 根之和规则

系统的闭环特征方程可以表示为不同的形式：

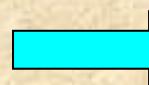
$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

闭环极点

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + \left(-\sum_{i=1}^n s_i\right) s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n (-s_i)$$



当 $n-m \geq 2$ 时



$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^n p_j = -a_1$$

二. 应用规则绘制系统根轨迹

例：已知单位负反馈系统开环传递函数为：

$$W_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹。

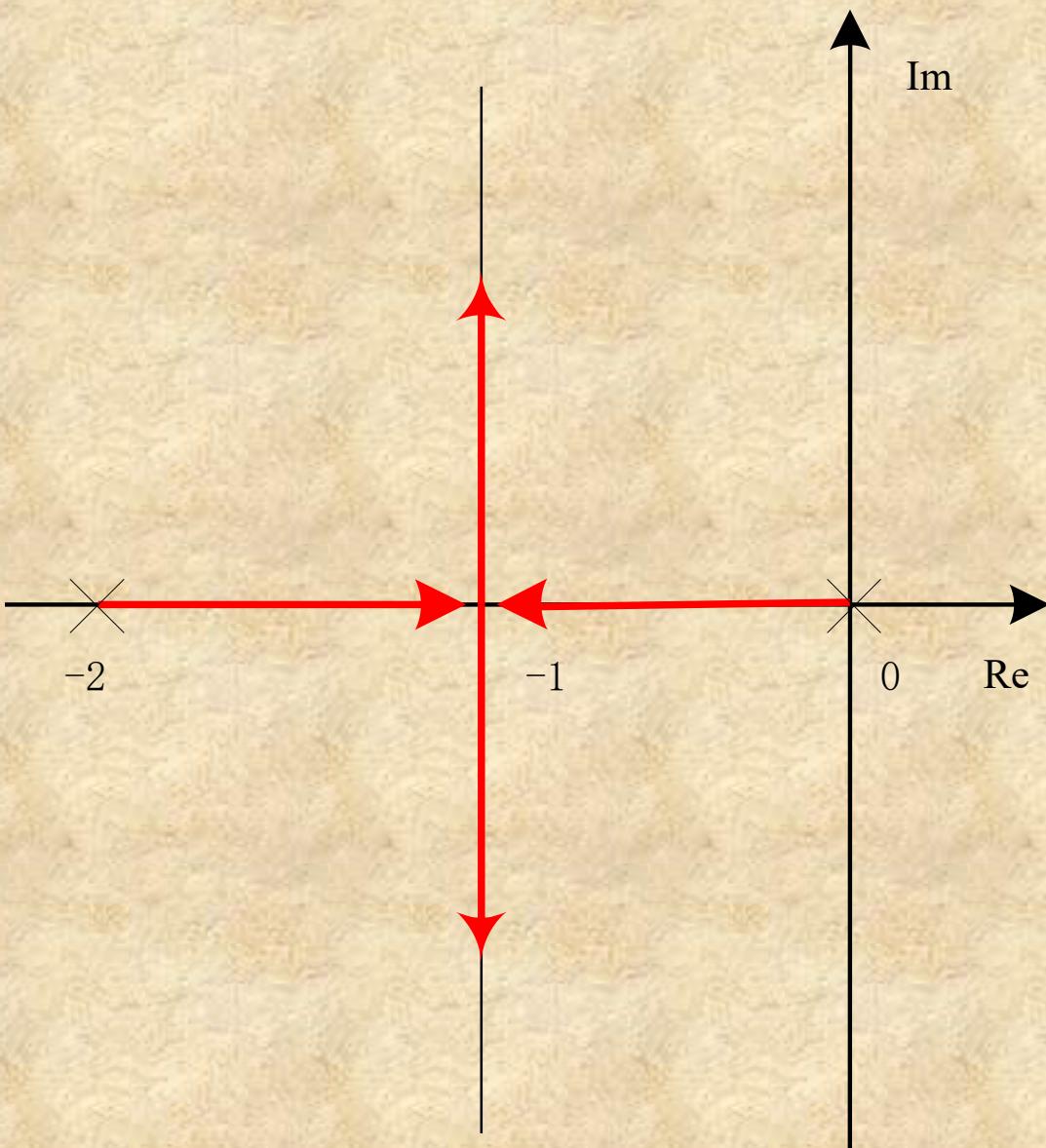
解：1) 根轨迹条数：2

2) 起点：0, -2; 终点：都是 ∞ 。

3) 实轴上根轨迹：[-2, 0]

4) 渐近线： $\varphi = \frac{\mp 180^\circ (1 + 2\mu)}{n - m} = \frac{\mp 180^\circ}{2} = \mp 90^\circ$ $\sigma = \frac{0 - 2}{2} = -1$

5) 分离点： $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = 0 \Rightarrow d = -1$



例：已知单位反馈系统开环传递函数为：

$$W_k(s) = \frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制其根轨迹。

解：根据规则分析如下：

1) 根轨迹条数： 4

2) 起点: $p_1 = 0, p_2 = -3, p_{3,4} = -1 \pm j$;

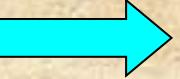
终点: $z_1 = -2$, 其它终止于无穷远处。

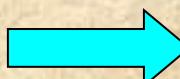
3) 实轴上根轨迹: $[0, -2], [-\infty, -3]$

4) 漸近线:

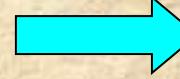
$$\varphi_a = \frac{(1+2k)\pi}{n-m} = \frac{(1+2k)\pi}{3} = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{3}, & k=0,-1 \\ \pi, & k=1 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-3+(-1+j)+(-1-j)+2}{3} = -1$$

5) 虚轴交点: $1 + W_k(s) = 0$ 

$$s(s+3)(s^2 + 2s + 2) + K_g(s+2) = 0 \quad \text{}$$

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6 + K_g)s + 2K_g = 0 \quad \text{}$$

$$\omega^4 - 5j\omega^3 - 8\omega^2 + j(6 + K_g)\omega + 2K_g = 0 \quad \text{}$$

$$\begin{cases} \omega^4 - 8\omega^2 + 2K_g = 0 \\ -5\omega^3 + (6 + K_g)\omega = 0 \end{cases} \quad \text{} \quad \begin{cases} \omega = \pm 1.61 \\ K_g = 7 \end{cases}$$

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6 + K_g)s + 2K_g = 0$$

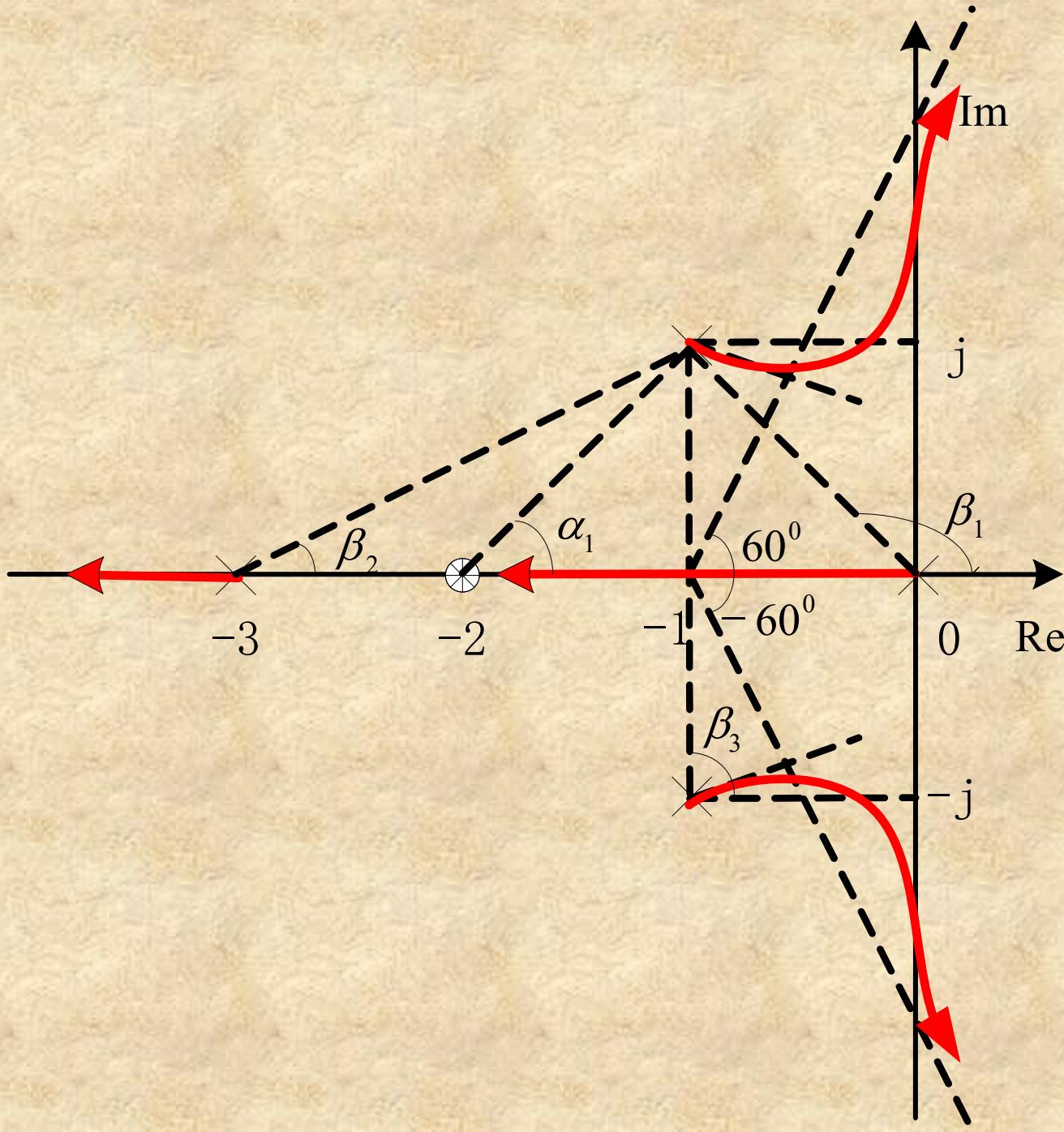
列劳斯表得：

s^4	1	8	$2K_g$
s^3	5	$6 + K_g$	
s^2	$\frac{34 - K_g}{5}$	$2K_g$	
s^1	$6 + K_g - \frac{50K_g}{34 - K_g}$	0	
s^0	$2K_g$		

取全零，则：

$$6 + K_g - \frac{50K_g}{34 - K_g} = 0 \rightarrow K_g^2 + 22K_g - 204 = 0 \rightarrow K_g \approx 7$$

由辅助多项式得： $\frac{34 - K_g}{5}s^2 + 2K_g = 0 \rightarrow s = \pm 1.61j$



例：已知单位反馈系统开环传递函数为：

$$W_K(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，计算主导极点 $\xi = 0.5$ 时所有的闭环极点值，并分析系统的性能指标。

解：根据规则分析如下：

1) 根轨迹条数：3

2) 起点：0, -1, -2;

终点：3条轨迹都终止于无穷远处。

3) 实轴上根轨迹：[-1, 0], [-∞, -2]

4) 漸近線:

$$\varphi_a = \frac{(1+2k)\pi}{n-m} = \frac{(1+2k)\pi}{3} = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{3}, & k=0,-1 \\ \pi, & k=1 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

5) 分離點計算:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$d_1 = -0.42, \quad d_2 = -1.58 \text{ (舍去)}$$

6) 与虚轴交点

特征式:

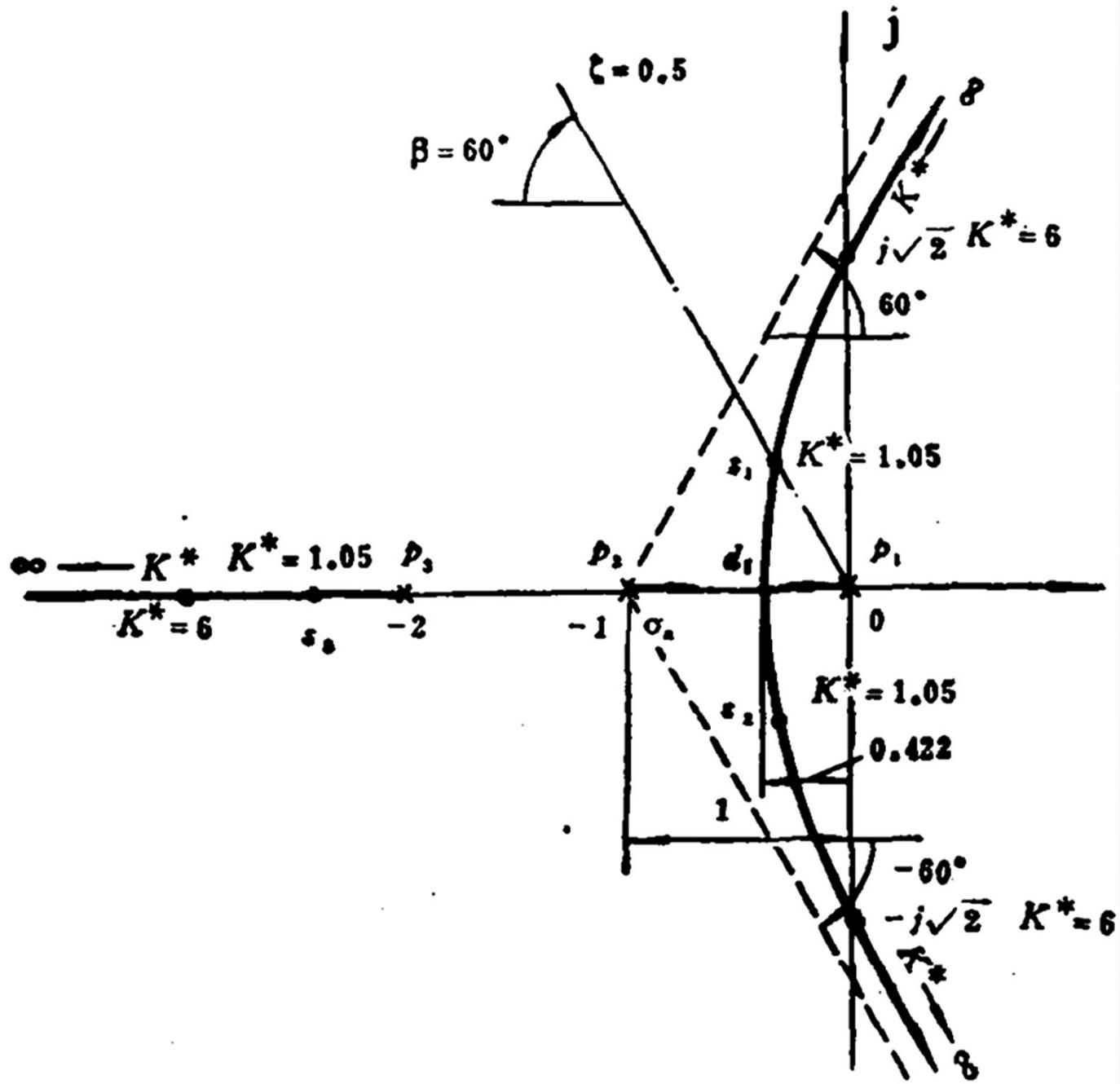
$$\Delta(s) = s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \end{array} \xrightarrow{\quad} 2 - \frac{K}{3} = 0 \Rightarrow K = 6$$

$$s^1 \quad 2-K/3 \quad 0$$

$$s^0 \quad K$$

$$3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}j$$



计算主导极点 $\xi = 0.5$ 时系统性能指标

$$\xi = \cos \beta = 0.5 \quad \rightarrow \quad \beta = 60^\circ$$

做 60° 等阻尼线，与根轨迹相交于 a、b 两点：

$$s_{a,b} = -0.33 \pm j0.58$$



$$K = |s| |s+1| |s+2| = L_1 L_2 L_3 = 1.05$$

计算另一个闭环极点：

$$s_3 = (-1 - 2) - (-0.33 * 2) = -2.34$$

以 $s_{a,b} = -0.33 \pm j0.58$ 为主导极点，则有：

$$\omega_n = \sqrt{0.33^2 + 0.58^2} = 0.66$$



$$W_B(s) = \frac{0.66^2}{s^2 + 2 \times 0.5 \times 0.66s + 0.66^2} = \frac{0.43}{s^2 + 0.66s + 0.43}$$



$$\sigma \% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100\% = 16.5\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 9s$$

4-3 广义根轨迹

一. 参数根轨迹

参数根轨迹：以非开环增益为可变参数绘制的根轨迹。

例：已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

试绘制以时间常数 T 为可变参数的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

T在分母中，如何处理？

$$1 + \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(Ts + 1)(s + 1) + 2 = 0$$

目标：当T变化时，上述方程根的轨迹！可否采用根轨迹规则？

原来根轨迹

$$1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \quad \rightarrow \quad D(s) + KN(s) = 0$$

$$s(Ts + 1)(s + 1) + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (s^2 + s + 2) + T(s^3 + s^2) = 0$$

$$\rightarrow 1 + T \frac{s^3 + s^2}{s^2 + s + 2} = 0$$

采用等效开环传
函进行绘制

绘制方法：等效单位反馈系统，等效传递函数

$$1 + G(s)H(s) = 0 \longrightarrow AP(s) + Q(s) = 0 \longrightarrow$$

$$A \frac{P(s)}{Q(s)} = -1 \longrightarrow G_1(s)H_1(s) = A \frac{P(s)}{Q(s)}$$

等效单位反馈系统：闭环极点相同，**闭环零点一般不同。**

例：已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

试绘制以时间常数 T 为可变参数的根轨迹。

解：系统的特征方程

$$s(Ts + 1)(s + 1) + 2 = 0$$

或 $Ts^2(s + 1) + s^2 + s + 2 = 0$

用 $s^2 + s + 2$ 除等式两边得

$$1 + \frac{Ts^2(s + 1)}{s^2 + s + 2} = 0$$

令 $G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$

则有 $1 + G'(s)H'(s) = 0$

一般称 $G'(s)H'(s)$ 为系统的**等效开环传递函数**。在等效开环传递函数中，除时间常数 T 取代了普通根轨迹中开环根轨迹增益 K_r 的位置外，其形式与绘制普通根轨迹的开环传递函数完全一致，这样便可根据绘制普通根轨迹的七基本规则来绘制参数根轨迹。

系统特征方程的最高阶次是3，由规则一和规则二知，该系统有三条连续且对称于实轴的根轨迹，根轨迹的终点($T=\infty$)是等效开环传递函数的三个零点，即 $z_1 = z_2 = 0, z_3 = -1$ ；本例中，系统的等效开环传递函数的零点数 $m=3$, 极点数 $n=2$ ，即 $m > n$ 。在前面已经指出，这种情况在实际物理系统中一般不会出现，然而在绘制参数根轨迹时，其等效开环传递函数却常常出现这种情况。

与 $n > m$ 情况类似，这时可认为有 $m-n$ 条根轨迹起始于 S 平面的无穷远处（无限极点）。因此，本例的三条根轨迹的起点 ($T=0$) 分别为 $p_1 = -0.5 + j0.866$ $p_2 = -0.5 - j0.866$ ，和无穷远处（无限极点）。

由规则三知，实轴上的根轨迹是实轴上 -1 至 $-\infty$ 线段。

由规则六可求出两个起始角分别为

$$\theta_{p_1} = \mp 180^\circ + 60^\circ + 120^\circ + 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -\theta_{p_1} = -30^\circ$$

由规则七可求出根轨迹与虚轴的两个交点，
用 $s = j\omega$ 代入特征方程得

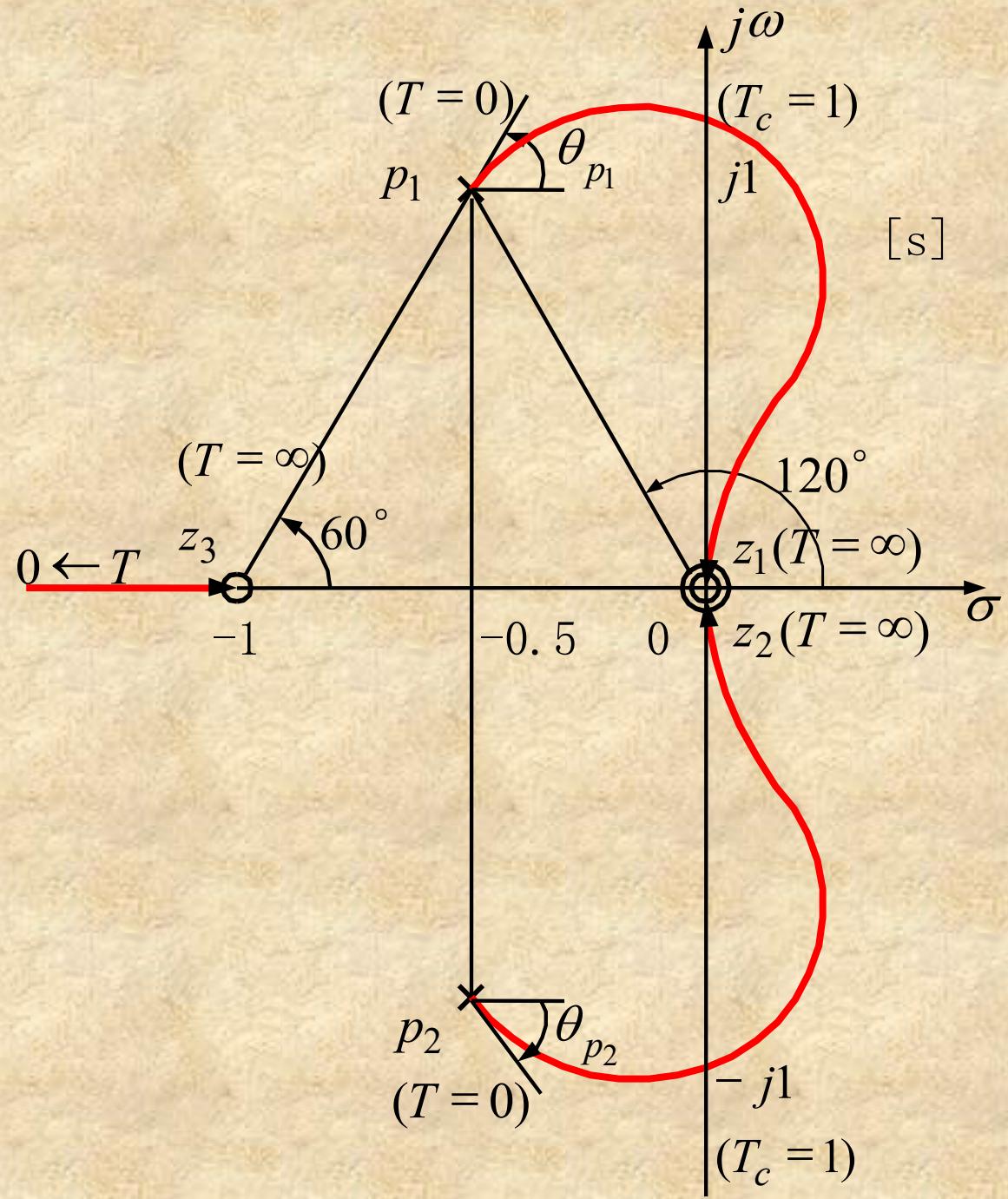
$$-jT\omega^3 - (T + 1)\omega^2 + j\omega + 2 = 0$$

由此得到虚部方程和实部方程分别为

$$\begin{cases} \omega - T\omega^3 = 0 \\ 2 - (T + 1)\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解虚部方程得 ω 的合理值为 $\omega_c = \pm\sqrt{\frac{1}{T}}$ ，

代入实部方程求得 $T_c = 1$ 秒，所以 $\omega_c = \pm 1$ 为根
轨迹与虚轴的两个交点。



二. 零度根轨迹

零度根轨迹：相角遵循 $2k\pi$ 条件的系统，主要有非最小相位系统，正反馈系统。

$$1 - G(s)H(s) = 0 \longrightarrow G(s)H(s) = 1$$

通常的根轨迹称为 180° 根轨迹，两种根轨迹的幅值条件相同。

由于相角条件不同，须对与相角条件有关的三条规则作相应修改。

渐近线：

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m}$$

实轴上的根轨迹：实轴上的右边开环传递函数零极点个数为偶数时，则此线段位于根轨迹上。

出射角（起始角）与入射角（终止角）：

$$\theta_{p_i} = 2k\pi + \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_{p_j p_i} \quad \varphi_{z_i} = 2k\pi + \sum_{j=1}^n \theta_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_{z_j z_i}$$

例:已知正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制该系统的根轨迹图。

解: 由修改后的规则三知，实轴上的根轨迹是由0至 $+\infty$ 线段和由-1至-2线段。

由修改后的规则四知，渐近线与实轴正方向的夹角分别是 0° ($k = 0$) 、 120° ($k = 1$) 和 -120° ($k = 2$) 。

本系统无有限开环零点，因此

$$\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d} = 0$$

解出 $d_1 = -1.58$ 和 $d_2 = -0.42$ (舍去)

三条根轨迹中，有一条从起点到终点全部位于 S 平面右半部，这就意味着无论增益为何值，系统都存在 S 平面右半部的闭环极点，该正反馈系统总是不稳定的。

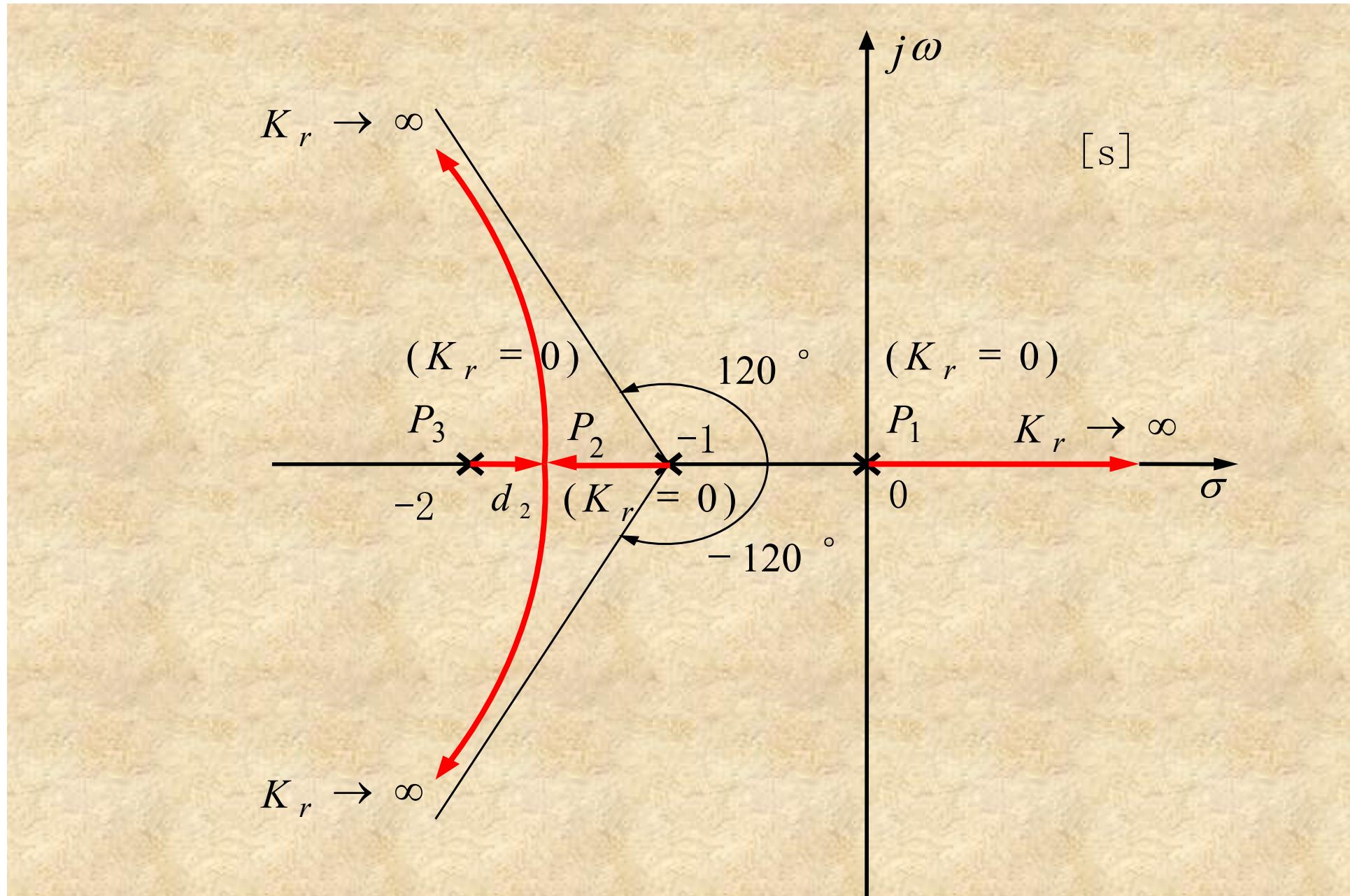
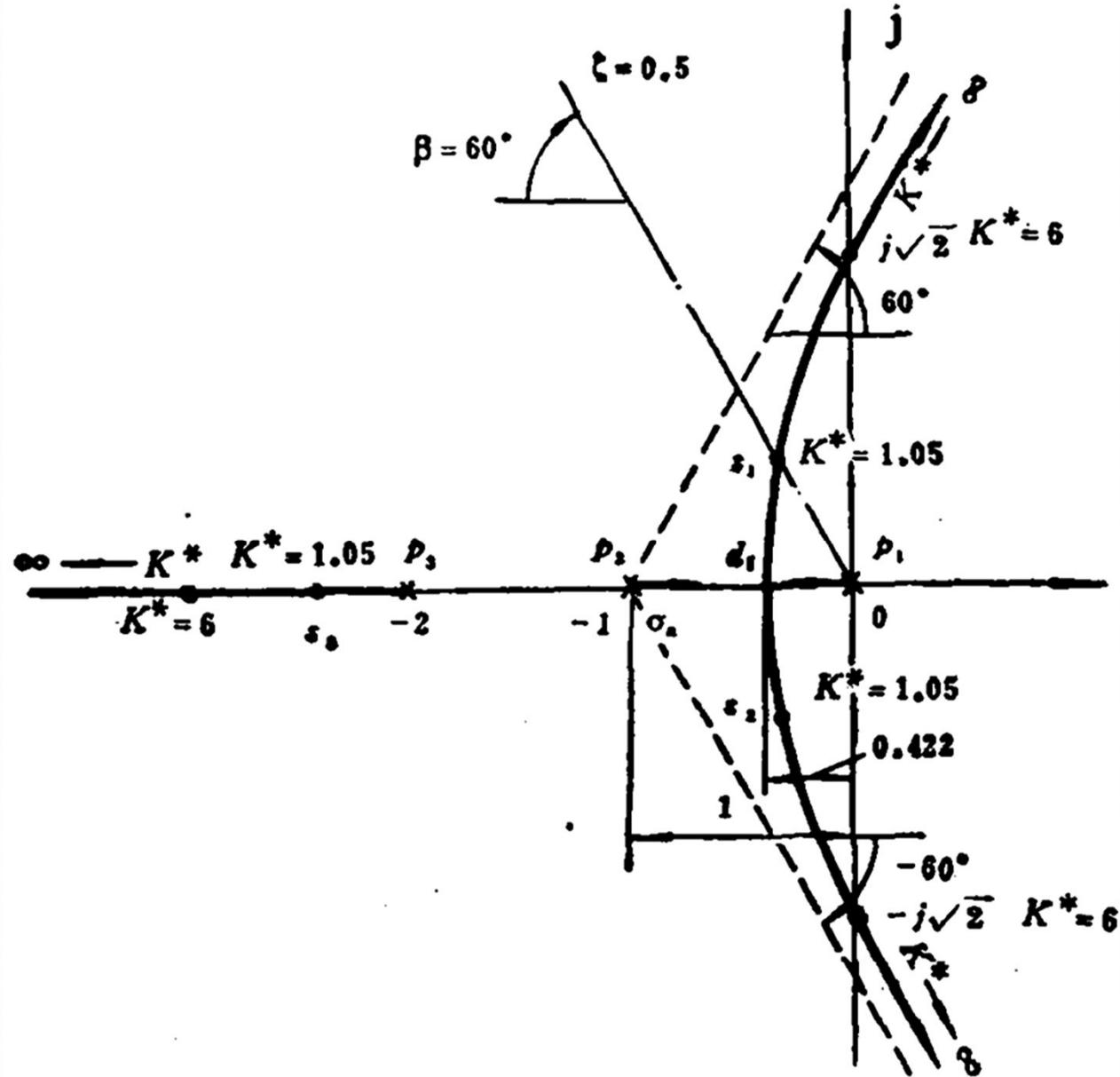


图 正反馈系统的根轨迹



对应负反馈系统的根轨迹

4-4 系统性能的分析（自学）

利用主导极点估算系统的动态性能指标

基本思想：化高阶系统为一、二阶系统。

基本方法：利用主导极点对高阶系统进行近似分析（主导极点法）。

主导极点：最接近虚轴，又不十分接近闭环零点的闭环极点。（3~6倍）

偶极子：一对相距很近的闭环零极点

对本章内容有疑问？

