第三章 控制系统的时域分析

3-1 系统的时域性能指标

3-2 一阶系统时域分析

3-3 二阶系统时域分析

3-4 高阶系统时域分析(自学)

3-5 线性系统的稳定性分析

3-6 线性系统的稳态误差

- 总学时数：10学时
- 基本内容：典型输入信号，简单低阶控制系统的动态过渡过程，控制系统的稳定性及其ROUTH分析方法，动态和静态性能指标的定量计算与定性分析。
- 基本要求：时域响应的计算方法，性能指标的含义与计算，系统性能的定性和定量结合分析。

学习重点

- 典型信号和系统时域指标的定义；
- 一阶和二阶系统分析与性能指标计算；
- 系统参数与响应之间的对应关系；
- 线性控制系统稳定的条件，劳斯判据；
- 稳态误差的概念及其实际计算。

3-1 控制系统的时域性能指标

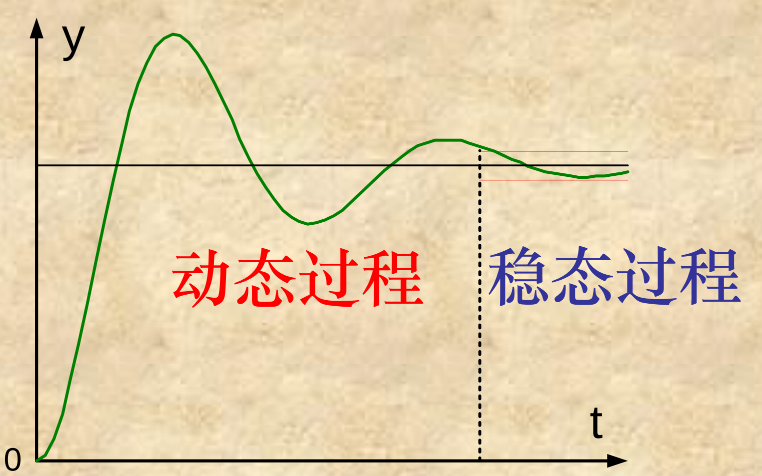
一. 典型输入信号

函数形式	时域表达式	复域表达式
单位脉冲	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$1(t)$	$1/s$
单位斜坡	t	$1/s^2$
单位加速度	$0.5t^2$	$1/s^3$
正弦函数	$A\sin\omega t$	$A\omega/(s^2+\omega^2)$

- 为了评价线性系统时间响应的性能,需要研究系统在典型输入信号下的响应。
- 输入信号的选择：
  - 一般系统：选择（与工作信号比）“最不利”的信号作为系统的典型输入信号
  - 线性系统：选择阶跃信号作为典型输入

二. 动态过程与稳态过程

- 时间响应包括两部分：
  - 动态过程
  - 稳态过程



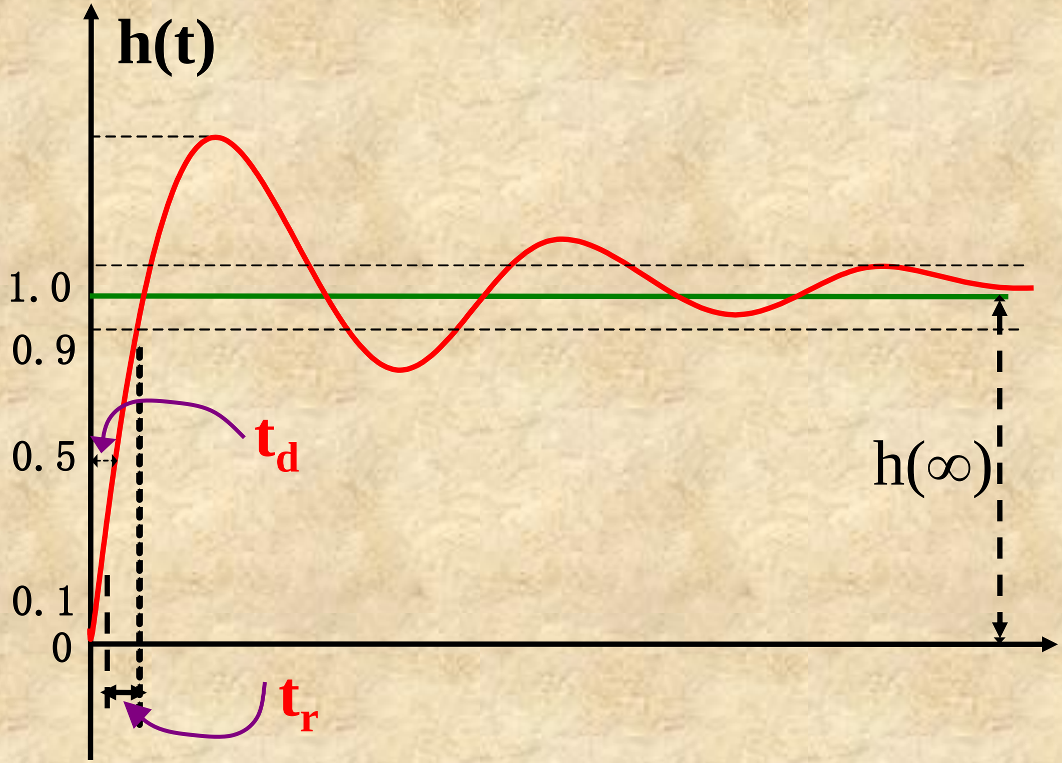
- 动态过程：输出量从初始状态到最终状态的响应过程

- 稳态过程：当 $t \to \infty$ 时，系统输出的表现形式，表征系统输出复现输入的程度。

三. 动态性能指标

- **延迟时间**：响应曲线第一次达到其终值一半所需时间。

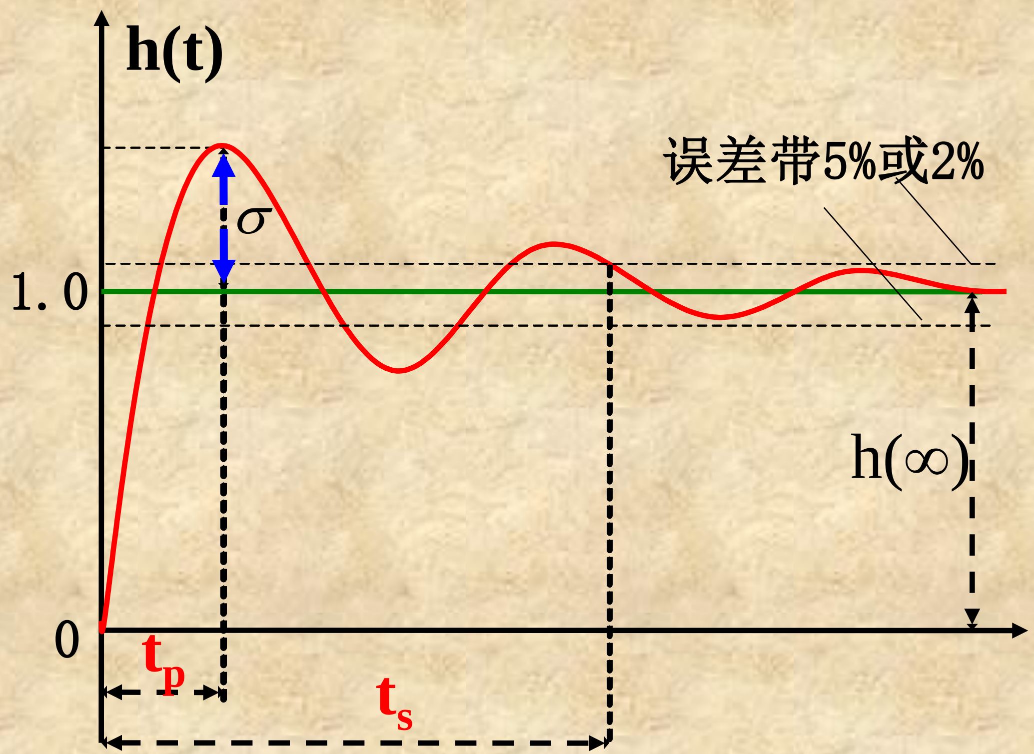
- **上升时间**：输出量从***10%***到***90%***终值所需要的时间（表明变化的快慢）。



- **峰值时间**：达到第一个最大值对应的时间。
- **超调量**：

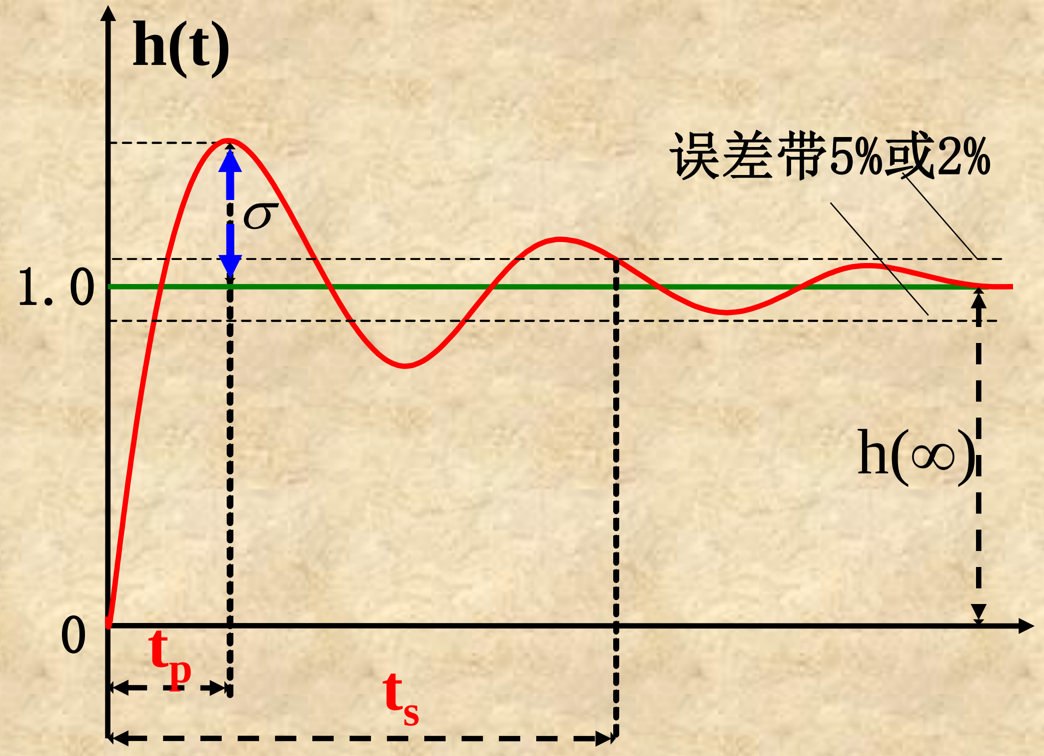
$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$$

- **调整时间**：到达并保持在终值 5%所需要的时间。



四. 稳态性能指标

稳态误差： 当 $t \to \infty$时，若系统输出量不等于输入量或者输入量的确定函数，则系统存在稳态误差。



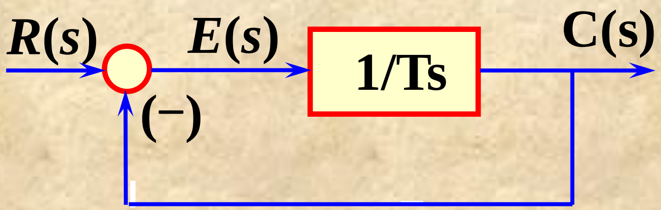
3-2 一阶系统时域分析

一. 一阶系统的数学模型

传递函数：

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{1+Ts}$$

结构图：



❑一般地，将传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$ 的系统叫做一阶系统。

二. 一阶系统的单位阶跃响应*h(t)*

系统输入：$r_1(t)=1(t)$ $\longrightarrow$ $R_1(s)=\dfrac{1}{s}$

$$H(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/T} \longrightarrow h(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$

$$\longrightarrow \dot{h}(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$$

暂态分量为负指数、单调衰减，系统稳定

无稳态误差：

$$e(t)\Big|_{t\to\infty}=r(t)\Big|_{t\to\infty}-h(t)\Big|_{t\to\infty}=0$$

曲线与T的关系：

$$h(T)=0.632 \qquad h(2T)=0.865 \qquad h(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$

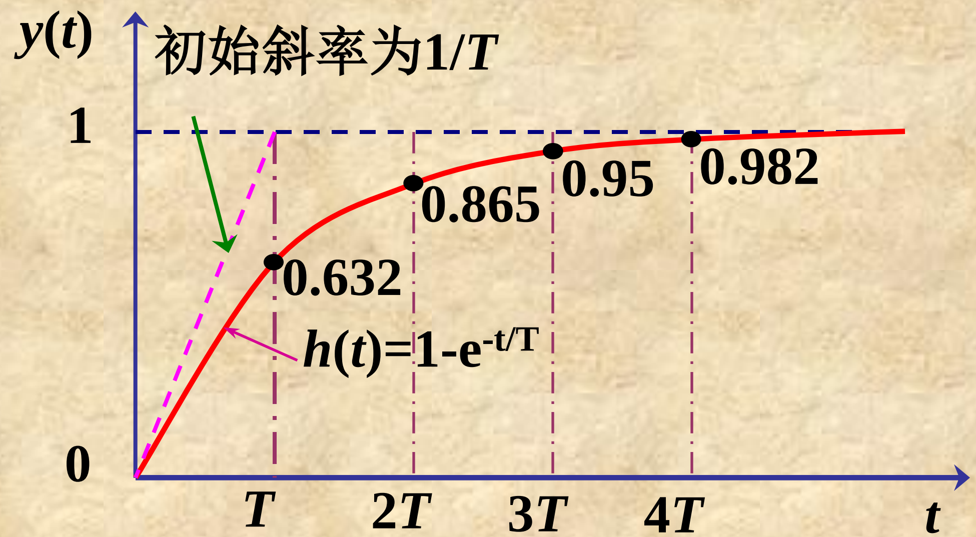
速率与T的关系：

$$\left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{T} \qquad \left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=T}=0.368\frac{1}{T}$$

性能指标与T的关系：

$$t_d=0.69T \qquad t_r=2.20T$$

$$t_s=3T$$



单位阶跃响应曲线

结论：T越大 ⇒ 惯性越大 ⇒ 响应越慢

三. 线性定常系统的性质

问题: 对于系统 $G(s)$，在输入 $r_1(t)$ 作用下，零初始条件响应为 $c_1(t)$，则对于输入 $r_2(t)=\dot{r}_1(t)$，零初始条件响应 $c_2(t)=?$

分析: $r_2(t)=\dot{r}_1(t) \Rightarrow R_2(s)=sR_1(s) \Rightarrow$

$$C_2(s)=G(s)R_2(s)=G(s)\left[sR_1(s)\right]=s\left[G(s)R_1(s)\right]=sC_1(s)$$

$$\Rightarrow c_2(t)=\dot{c}_1(t)$$

结论:对于线性定常系统，系统在输入**导数信号**作用下的响应，就等于系统在该输入信号下的**响应的导数**。同样，系统对输入信号积分的响应，就等于系统在该输入信号作用下的响应的积分，而积分常数由零输出初始条件来确定。

有何用处？

可以给计算系统的响应带来方便！

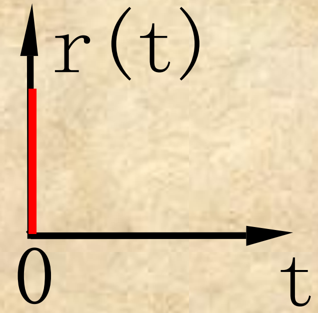
四. 一阶系统的单位脉冲响应

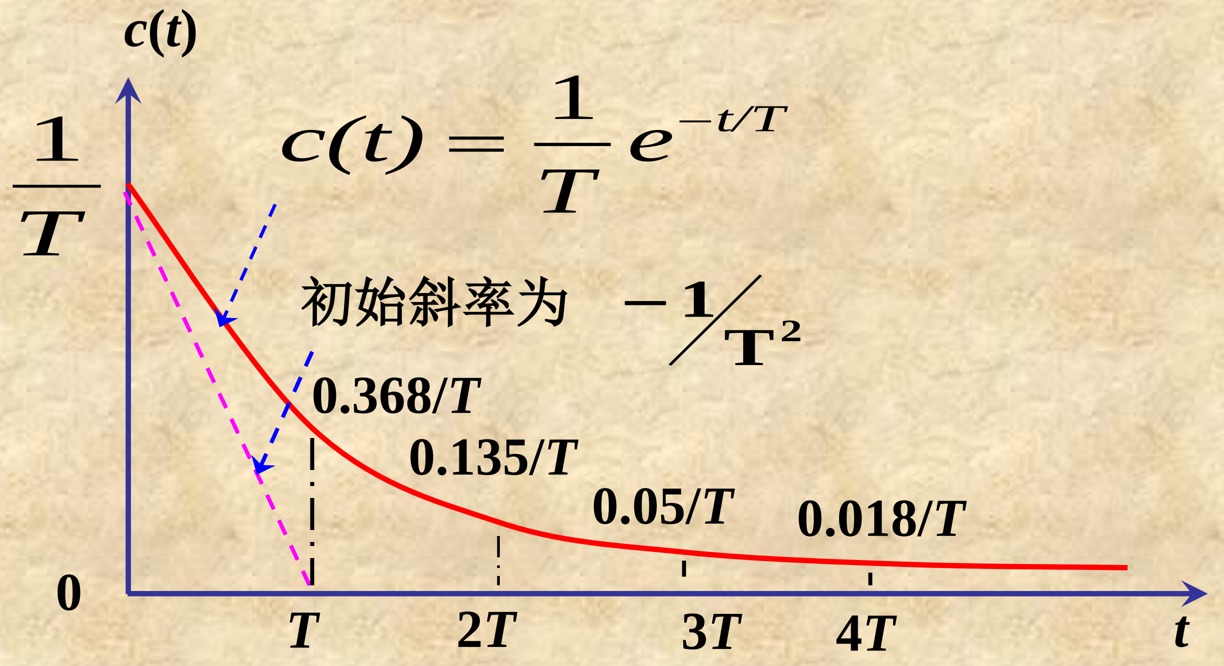
系统输入： $r_2(t)=\delta(t) \Rightarrow r_2(t)=\dot{r}_1(t)$

$$c(t)=\frac{d}{dt}h(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t} \Rightarrow \dot{c}(t)=\frac{1}{T^2}e^{-\frac{1}{T}t}$$

通常以单位脉冲输入信号作用于系统，根据单位脉冲响应求闭环传递函数。

工程上，理想单位脉冲函数不易得到，常用一定脉宽和有限幅度的矩形脉动函数来代替。





单位脉冲响应曲线

特点： 1) 可以用时间常数度量系统输出量；

2) 初始斜率为-1/T^2；

3) 无超调；稳态误差e_{ss}=0 。

五. 一阶系统的单位斜坡响应

系统输入： $r_3(t) = t$ $\longrightarrow$ $c(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$$

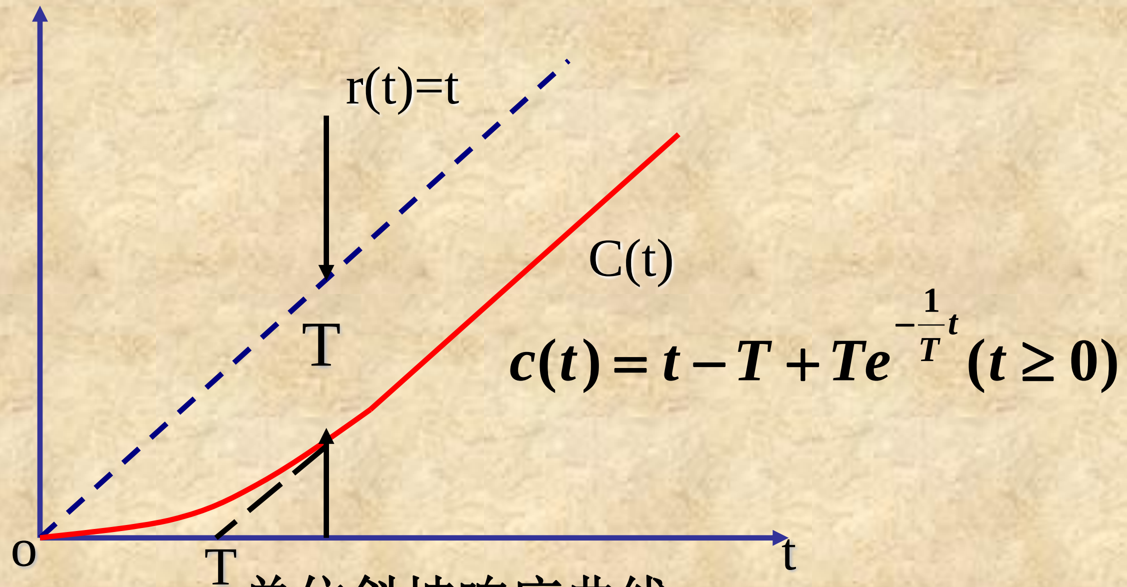
$$\boldsymbol{c(t) = t - T + Te^{-\frac{1}{T}t} \quad (t \geq 0)}$$

系统跟踪误差：

$$e(t) = r(t) - c(t) = t - \left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \right) = T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

系统可以跟上单位斜坡信号，但存在稳态误差：

$$e_{ss} = T$$



单位斜坡响应曲线

- 位置误差随时间增加而趋于最大值T。T越小，惯性越小，系统跟踪准确度越高；
- 初始斜率：$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0}=1-\left.e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0}=0$，初始位置＝0；
- 初始状态下，输出和输入速度之间误差最大。

六. 一阶系统的单位加速度响应

系统输入： $r_4(t)=0.5t^2 \Longrightarrow r(t)=\int_0^t \tau d\tau$

$$\boldsymbol{c(t)=t-T+Te^{-\frac{1}{T}t}\ (t\geq 0)}$$

单位斜坡响应

$$c(t)=\left(\frac{1}{2}t^2-Tt\right)+T^2\left(1-e^{-\frac{1}{T}\tau}\right)$$

系统跟踪误差：

$$e(t)=r(t)-c(t)=\frac{1}{2}t^2-\left[\left(\frac{1}{2}t^2-Tt\right)+T^2\left(1-e^{-\frac{1}{T}\tau}\right)\right]=Tt-T^2\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

一阶系统不能跟踪单位加速度信号！

七. 一阶系统在典型输入信号作用下的响应

输入信号	输出响应	跟踪误差
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$	稳态误差为 0
$1(t)$	$1-e^{-\frac{1}{T}t}$	$e^{-\frac{1}{T}t}$
t	$t-T+Te^{-\frac{1}{T}t}$	$T-Te^{-\frac{1}{T}t}$
$0.5t^2$	$\left(\frac{1}{2}t^2-Tt\right)+T^2\left(1-e^{-\frac{1}{T}\tau}\right)$	$Tt-T^2\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$

3-3 二阶系统时域分析

一. 二阶系统的数学模型

传递函数:

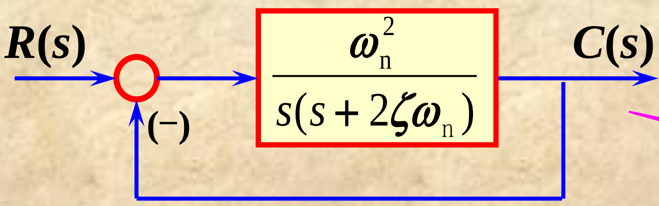
标准形式

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

参数：ω_n 一自然角频率

ξ 一阻尼比（或相对阻尼系数）

结构图:



标准形式

问题：非标准形式的二阶系统如何处理？

注意：对于实际系统，其传递函数为有理真分式！

更一般形式

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{as^2+bs+c}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=a+\frac{b_1 s+c_1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=a+\frac{b_1}{c_1}s\left(\frac{c_1}{\omega_n^2}\Phi(s)\right)+\frac{c_1}{\omega_n^2}\Phi(s)$$

相当于三个环节的叠加，分别代表什么？

第一个环节是简单的比例，第二个环节的响应是第三个环节响应导数的 $\frac{b_1}{c_1}$ 倍，所以关键是计算第三个环节的响应！

特征方程为：$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

特征根为：

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\left|-\zeta\omega_n\right| = \left|\omega_n\sqrt{\zeta^2}\right| > \left|\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right|$$

若$\xi < 0$，二阶系统具有两个右半平面的特征根，系统动态过程不稳定（振荡或单调发散）；

若$\xi = 0$，二阶系统具有一对纯虚特征根，系统处于临界状态；

若 $\xi > 0$，二阶系统具有两个左半平面的特征根，系统处于稳定状态（振荡或单调收敛）。

二. 二阶系统的单位阶跃响应

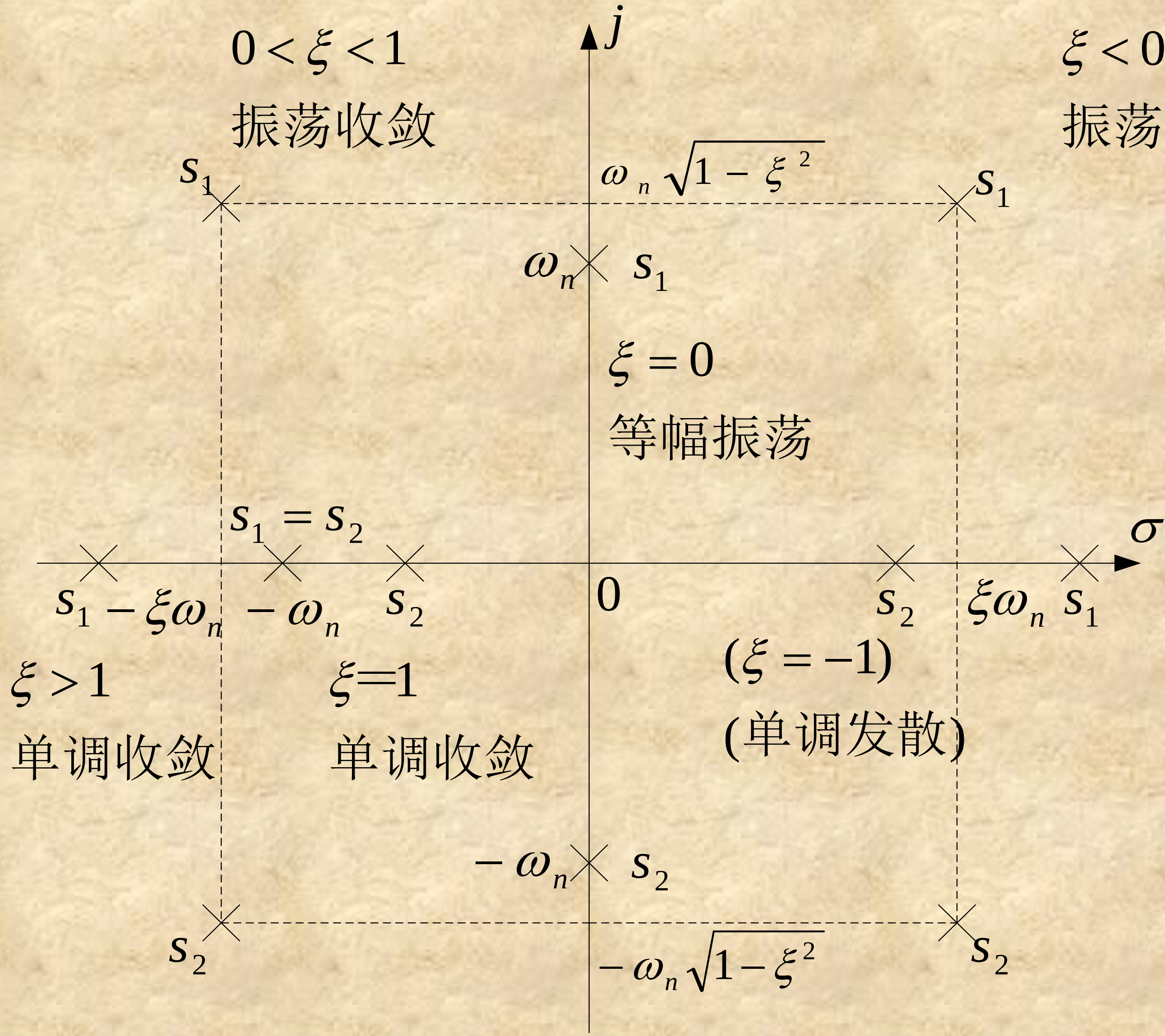
特征方程为： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

特征根为：

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{\left(2\zeta\omega_n\right)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

注意：当 ζ 不同时，极点有不同的形式，其阶跃响应的形式也不同。它的阶跃响应有振荡和非振荡两种情况。

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



1. 当 $\zeta=0$ 时，特征方程有一对共轭的虚根，称为**零(无)阻尼系统**，系统的阶跃响应为持续的等幅振荡。

2. 当 $0<\zeta<1$ 时，特征方程有一对实部为负的共轭复根，称为**欠阻尼**系统，系统的阶跃响应为衰减的振荡过程。

3. 当 $\zeta=1$ 时，特征方程有一对相等的实根，称为**临界阻尼**系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。

4. 当 $\zeta>1$ 时，特征方程有一对不等的实根，称为**过阻尼**系统，系统的阶跃响应为非振荡过程。

计算零初始条件下，二阶系统的单位阶跃响应

当输入为单位阶跃函数时，$\boldsymbol{R(s)=\frac{1}{s}}$，有：

$$C(s)=\Phi(s)\times\frac{1}{s},$$

$$c(t)=L^{-1}[\Phi(s)\times\frac{1}{s}]$$

[分析]：

- 当 $\zeta=0$ 时，**极点为**：$s=\pm j\omega_n$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(\omega_n^2+s^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$\therefore c(t)=1-\cos\omega_n t, t\geq 0$$

此时输出将以频率 ω_n 做等幅振荡，所以，ω_n 称为无阻尼振荡圆频率。

$\xi = 0$ 时. (无阻尼情况)

$$C(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{w_n^2}{s(s^2 + w_n^2)} = \frac{w_n^2}{s(s + jw_n)(s - jw_n)}$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{b}{s + jw_n} + \frac{c}{s - jw_n}$$

$$a = \frac{w_n^2}{jw_n \cdot (-jw_n)} = 1$$

$$b = \frac{w_n^2}{(-jw_n)(-jw_n - jw_n)} = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{w_n^2}{jw_n \cdot (jw_n + jw_n)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + jw_n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - jw_n}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-jw_n t} - \frac{1}{2} e^{jw_n t}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[e^{-jw_n t} + e^{jw_n t}\right] \quad (e^{jx} = \cos x + j\sin x)$$

$$= 1 - \cos w_n t$$

➢当 $0<\zeta<1$ 时，**极点为：** $s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

系统的阶跃响应为：

$$C(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}-\frac{\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

系统的时域输出为：

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}),\quad t\geq 0$$

当 $0<\xi<1$ 时

$$C(s)=G(s)R(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

其中，$a=\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}=1$.

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{s}+\frac{bs+c}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{(b+1)s^2+(c+2\xi\omega_n)s+\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow b=-1,\quad c=-2\xi\omega_n$$

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{s}+\frac{-s-2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{(s+\xi\omega_n)+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}$$

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{s}-\frac{(s+\xi\omega_n)}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}$$

利用拉氏变换的性质，以及常用函数拉氏变换 $\Rightarrow$

$$c(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)$$

即：$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\sin\beta}\cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t)+\underbrace{\xi}_{\cos\beta}\cdot\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t)\right]$$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\beta)$$

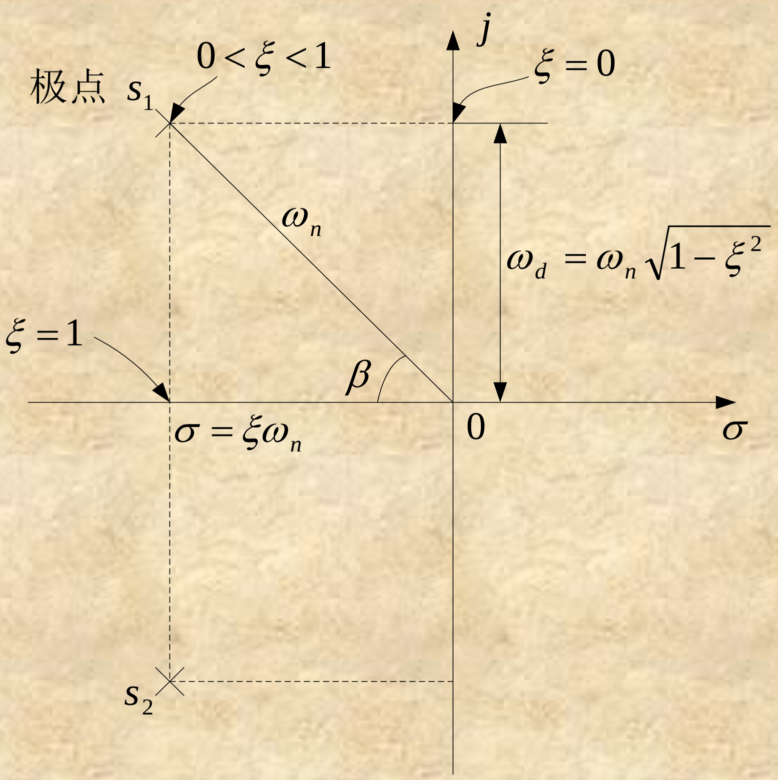
其中，$\sin\beta=\sqrt{1-\xi^2}$，$\cos\beta=\xi$

令 $\sigma=\zeta\omega_n$ ，称为衰减系数。$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ，称为阻尼振荡圆频率。

$$\text{则}\quad c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\sigma t}\sin\left(\omega_d t+\beta\right)$$

其中 $\beta=arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$ ，或 $\beta=\arccos(\zeta)$，称为阻尼角

各变量之间关系：



➢当 $\zeta=1$时，**极点为：**$s_{1,2}=-\omega_n$

系统的阶跃响应为：

$$C(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

系统的时域输出为：

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

$$C(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{w_n^2}{s^2+2w_n s+w_n^2}=\frac{w_n^2}{s(s+w_n)^2}$$

$$=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+w_n}+\frac{c}{(s+w_n)^2}$$

其中. $a=\frac{w_n^2}{w_n^2}=1$

$$c=\frac{w_n^2}{-w_n}=-w_n$$

为了确定b、考虑到等式右边通分时分子含s^2的项为：as^2+bs^2，而等式左边不含s^2项$\Rightarrow$

$a+b=0 \Rightarrow b=-a=-1$

$$\Rightarrow\ C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+w_n}-\frac{w_n}{(s+w_n)^2}$$

$$\Rightarrow\ c(t)=1-e^{-w_n t}-w_n t\cdot e^{-w_n t}$$

即：$c(t)=1-e^{-w_n t}(1+w_n t)$

➢当 $\zeta>1$ 时，**极点为：** $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

令：$T_1=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$ $T_2=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$ $T_1>T_2$

则：$s_1=-\dfrac{1}{T_1}$ $s_2=-\dfrac{1}{T_2}$ 且：$s_1s_2=\dfrac{1}{T_1T_2}=\omega_n^2$

系统的阶跃响应为：

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{[s+\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})][s+\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s[s+\frac{1}{T_1}][s+\frac{1}{T_2}]}=\frac{1}{s}+\frac{T_1}{T_2-T_1}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_1})}+\frac{T_2}{T_1-T_2}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_2})}$$

系统的时域响应为： $c(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$

[问题]： $c(t)$ 的曲线如何？

[分析]： $c(t)=1-\frac{1}{T_1-T_2}(T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}})$ 令： $f(t)=T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}$

$T_1>T_2 \longrightarrow -\frac{1}{T_1}>\frac{1}{T_2} \longrightarrow e^{-\frac{t}{T_1}}>e^{-\frac{t}{T_2}}$

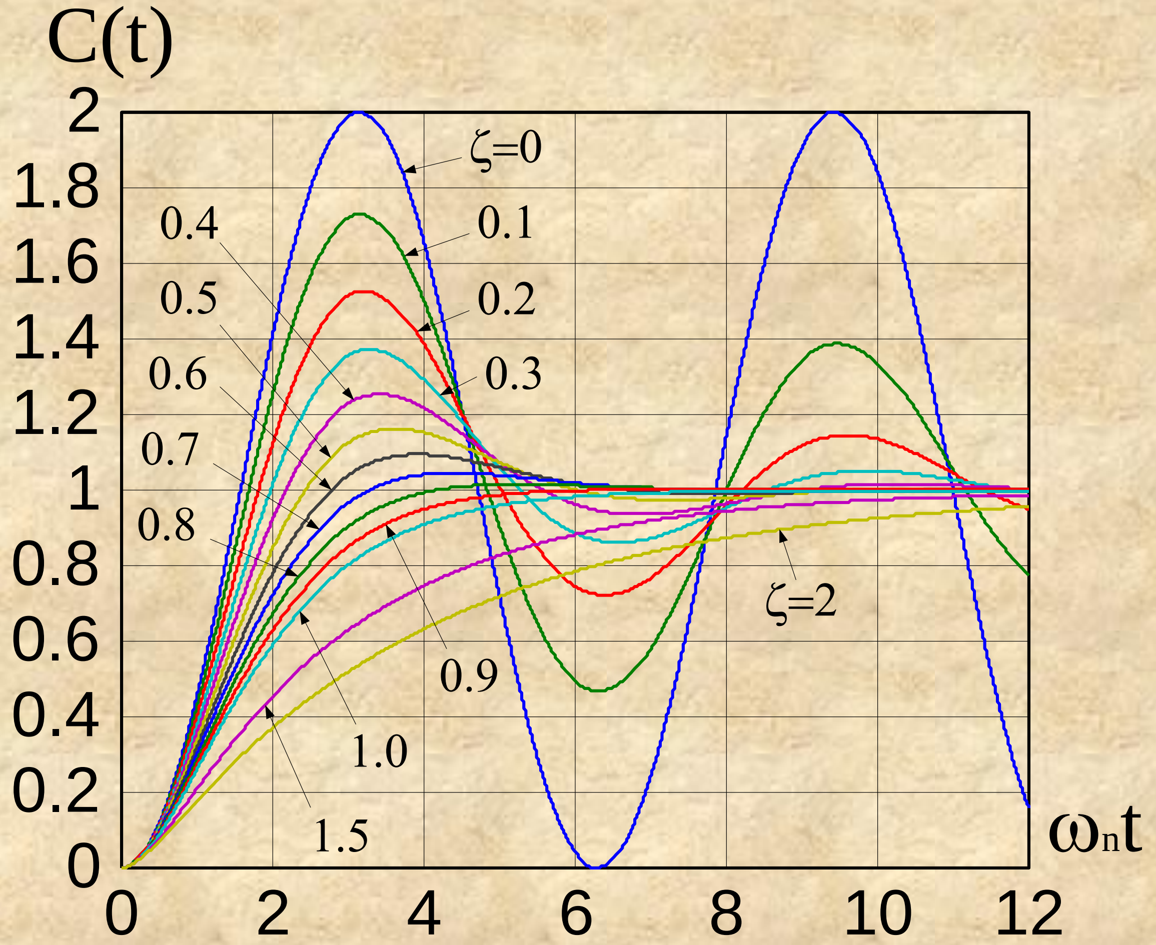
$f(t)>0$ $\quad f(0)=T_1-T_2$ $\quad \dot{f}(t)=-e^{-\frac{t}{T_1}}+e^{-\frac{t}{T_2}}<0$

$f(t)$ 单调递减，有极限 $f(t)\to 0$

$c(t)$ 单调递增， $c(0)=0$ ，$c(t)<1$

上述四种情况分别称为二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统。其阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应如下表所示：

阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta=0$,无阻尼	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$o<\zeta<1$,欠阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta=1$，临界阻尼	$s_{1,2}=-\omega_n$(重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta>1$，过阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\mp\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升



可以看出：随着 ζ 的增加，$c(t)$ 将从无衰减的周期运动变为有衰减的正弦运动，当 $\zeta \geq 1$ 时 $c(t)$ 呈现单调上升运动(无振荡)。可见 ζ 反映实际系统的阻尼情况，故称为阻尼系数。

三. 欠阻尼二阶系统的动态过程分析

衰减振荡瞬态过程 ：$(0 < \zeta < 1)$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \beta), \quad t \geq 0$$

1. 延迟时间

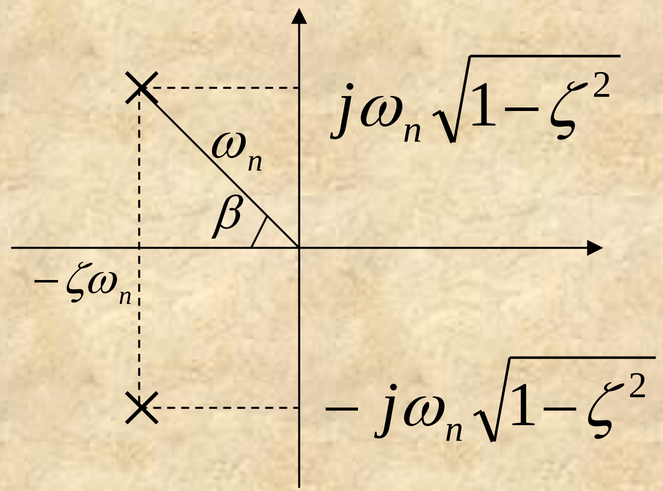
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_d + \beta) = 0.5$$

$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}$$

2 上升时间 t_r：根据定义，当 $t=t_r$时，$c(t_r)=1$ 。

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_r+\beta)=1$$

$$\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t_r+\beta)=0$$



$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$

3 峰值时间 t_p： 当 $t=t_p$时， $\dot{c}(t_p)=0$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta),\quad t\geq 0 \qquad \text{其中} \quad \beta=tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$c'(t)=-\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t_p+\beta)-\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

$$\zeta\omega_n\sin(\omega_d t_p+\beta)-\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0 \qquad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

整理得：$tg(\omega_d t_p+\beta)=\dfrac{\omega_d}{\zeta\omega_n}=\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=tg\beta$

$$\omega_d t_p+\beta=n\pi+\beta,(n=0,1,2,\ldots)$$

由于t_p出现在第一次峰值时间，取n=1，有：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi}{\omega_d}$

4 超调量　$\sigma\%$

$$\omega_d t_p + \beta = n\pi + \beta, (n = 0,1,2,...)$$

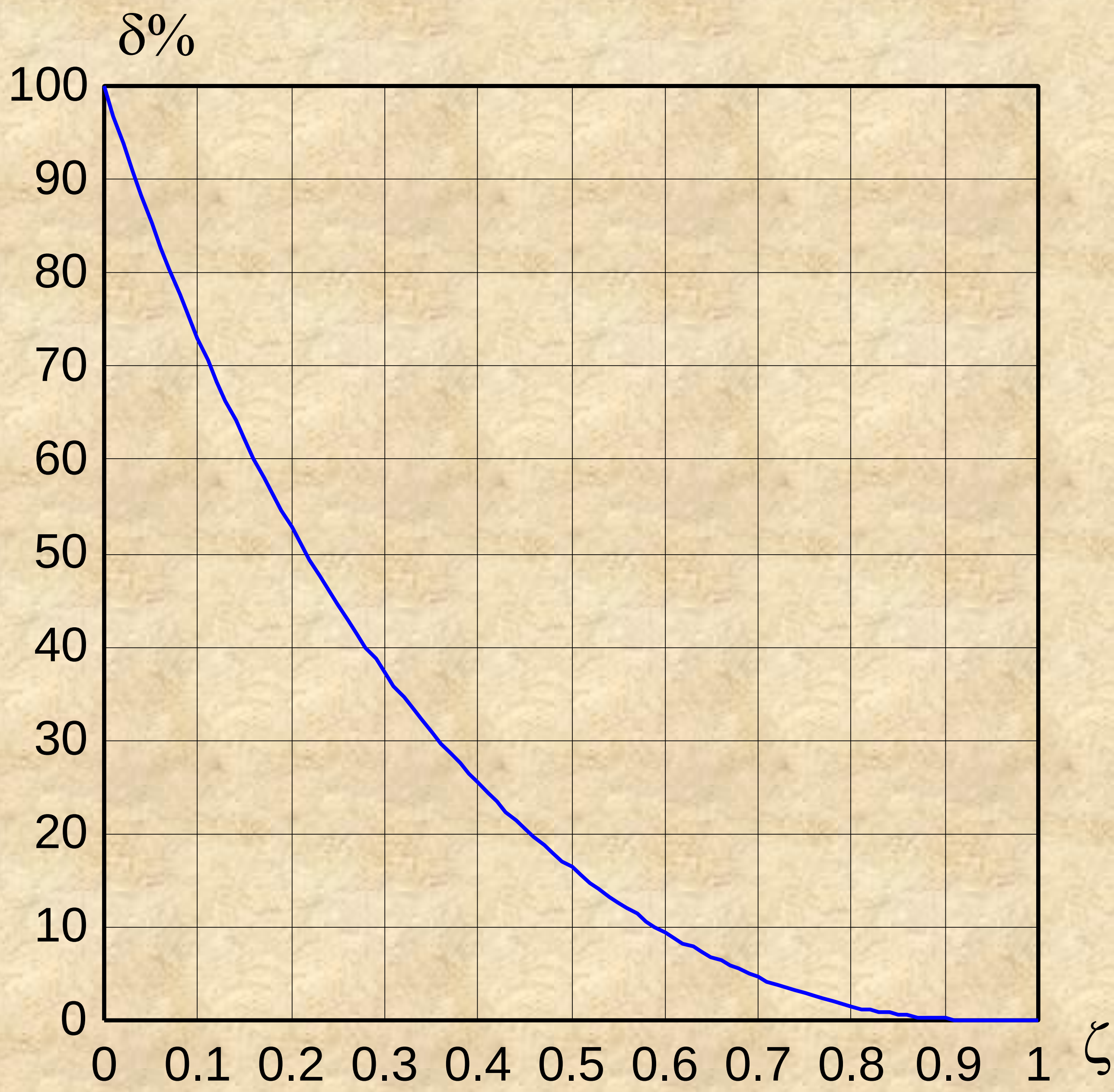
将峰值时间 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 代入 $c(t)$得$c(t_p) = c_{\max}$

$$c_{\max} = c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_p + \beta)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi + \beta) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \times 100\%$$

故:　$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$


δ%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ

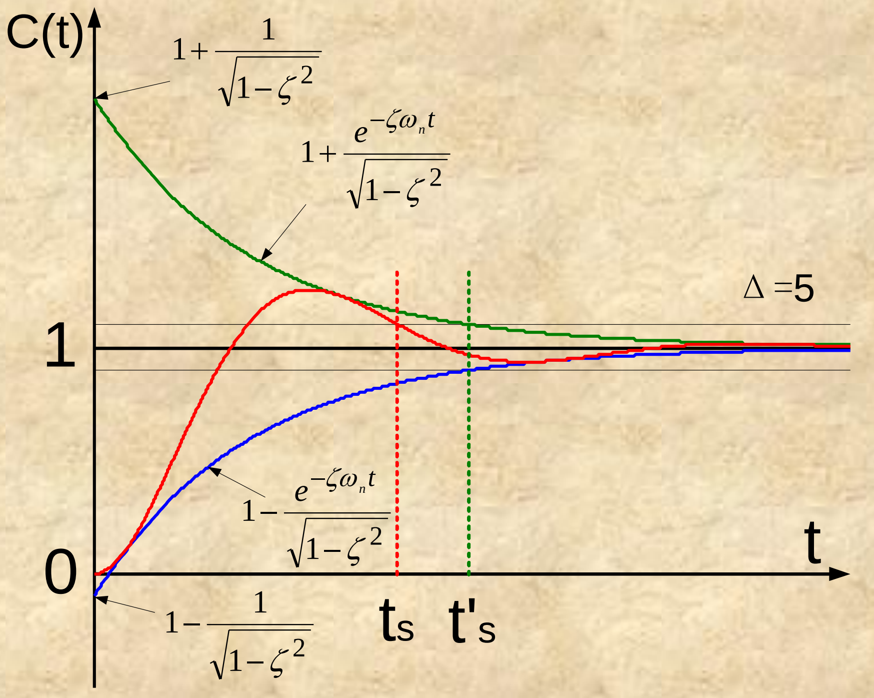
5 调节时间 t_s：

根据调节时间的定义，当t≥ts时 |c(t)-c(∞)|≤ c(∞) ×Δ%。

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})\right|\le\Delta\%$$

可见，写出调节时间的表达式是困难的。由右图可知响应曲线总在一对包络线之内。包络线为

$$1\pm\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

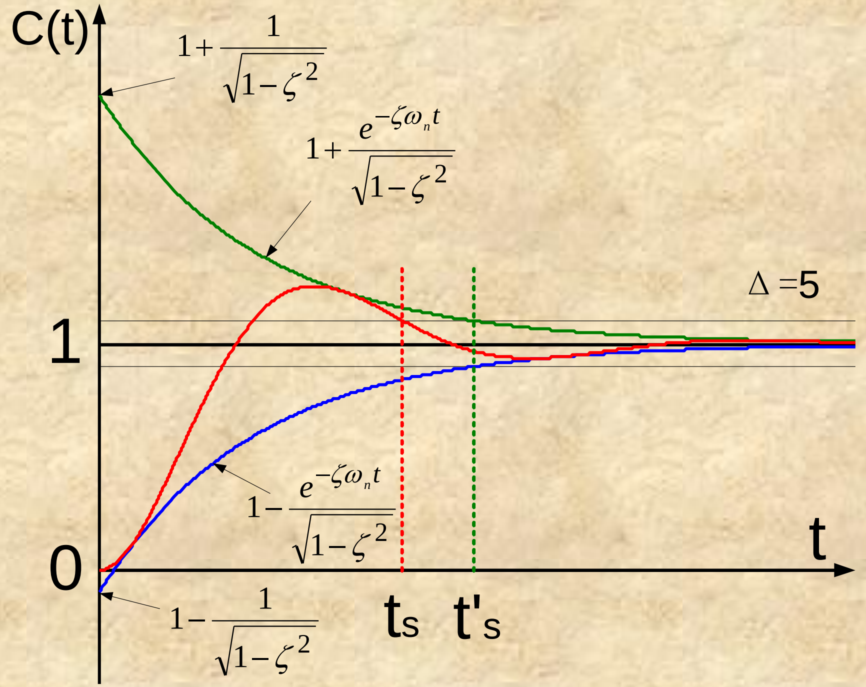


由于实际响应曲线的收敛速度比包络线的收敛速度要快因此可用包络线代替实际响应来估算调节时间。即认为响应曲线的包络线进入误差带时，调整过程结束。

当t=t'$_s$时，有：

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta\%$$

$$\therefore t_s = -\frac{\ln(\sqrt{1-\zeta^2}\times\Delta\%)}{\zeta\omega_n}$$



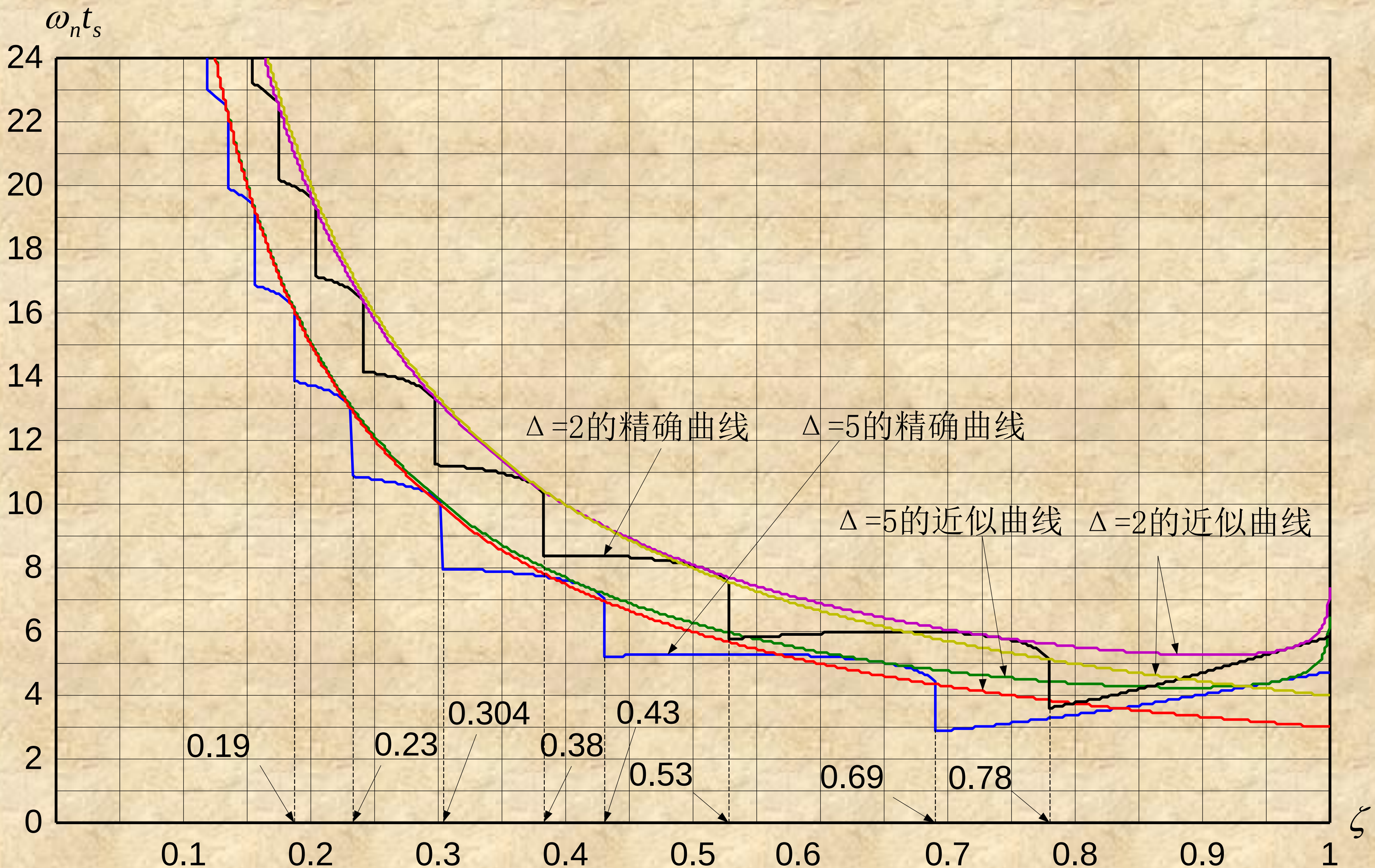
当ζ较小时，近似取：$\sqrt{1-\zeta^2}\approx 1$，且

$$\ln(0.02)\approx -3.912\approx -4$$

$$\ln(0.05)\approx -2.996\approx -3$$

所以

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 2时 \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 5时 \end{cases}$$

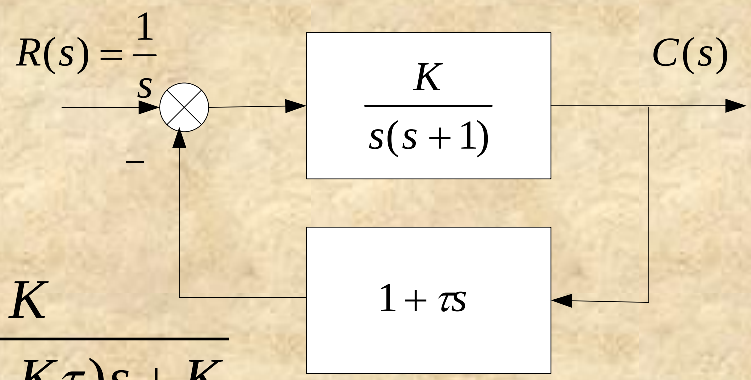


$\omega_n t_s$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ
Δ =2的精确曲线
Δ =5的精确曲线
Δ =5的近似曲线
Δ =2的近似曲线
0.19
0.23
0.304
0.38
0.43
0.53
0.69
0.78

由分析知，在$\zeta = 0.4 \sim 0.8$之间，调节时间和超调量都较小。工程上常取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 作为设计依据，称为最佳阻尼常数。

[例]：系统动态结构图如图所示，已知 $\sigma\% = 20\%$ $t_p = 1s$

试确定 τ（微分时间常数）和 K（开环增益）的值，并计算 t_r、t_s。



[解]：系统闭环传递函数为：

$$G_B(s) = \frac{\dfrac{K}{s(s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(s+1)}\cdot(1+\tau s)} = \frac{K}{s^2+(1+K\tau)s+K}$$

与标准形式比较得：

$$\begin{cases} \omega_n^2 = K \\ 2\zeta\omega_n = 1+K\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{K} \\ \zeta = \dfrac{1+K\tau}{2\sqrt{K}} \end{cases}$$

由 $\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}100\% = 0.20$ 求得 $\zeta = 0.46$

由 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$ 求得 $\omega_n = \dfrac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53(r/s)$

$$\therefore K = \omega_n^2 = 12.5$$

$$\tau = (2\zeta\omega_n - 1)/K = 0.18(s)$$

$t_r = \dfrac{\pi - \phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.65(s)$ $\phi = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 2.17(s)$$

四. 过阻尼二阶系统性能指标分析

在低增益、大惯性的（温度）控制系统中常采用过阻尼系统。

由于$\zeta > 1$时，系统的输出是一个超越方程，利用曲线拟合的方法求ζ、ω_n与性能指标 t_d、t_r、t_s 的近似关系。

$$c(t) = 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

1、延迟时间t_d

$$t_d = \frac{1 + 0.6\zeta + 0.2\zeta^2}{\omega_n}$$

2、上升时间 t_r

$$t_r = \frac{1+1.5\zeta + \zeta^2}{\omega_n}$$

3、调节时间 t_s

$$\zeta = 1 \quad t_s = 4.75T_1 = \frac{4.75}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$\zeta > 1, T_1 \geq 4T_2 \qquad t_s = 3T_1 = \frac{3}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

当$\zeta >> 1$时，极点$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$远离虚轴，且c(t)中包含极点$s_2$的衰减项的系数小，所以由极点$s_2$引起的指数项衰减得很快，因此，在瞬态过程中可以忽略s_2的影响，把二阶系统近似为一阶系统。

当$\zeta = 1$时，系统也具有单调非振荡的瞬间过程，是单调非振荡的临界状态。在非振荡过程中，它的t_s最小。

通常，都希望控制系统有较快的响应时间，即希望希统的阻尼系数在0~1之间。而不希望处于过阻尼情况$(\zeta > 1)$，因为调节时间过长。但对于一些特殊的系统不希望出现超调系统（如液位控制）和大惯性系统（如加热装置），则可以处于$(\zeta > 1)$情况。

[总结]

- 阻尼系数ζ是二阶系统的一个重要参数，用它可以间接地判断一个二阶系统的瞬态品质。在$\zeta > 1$的情况下瞬态特性为单调变化曲线，无超调和振荡，但t_s长。当$\zeta \le 0$时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

- 在欠阻尼$(0 < \zeta < 1)$情况下工作时，若ζ过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，瞬态控制品质差。

注意到$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$只与$\zeta$有关，所以一般根据$\delta\%$来选择$\zeta$。

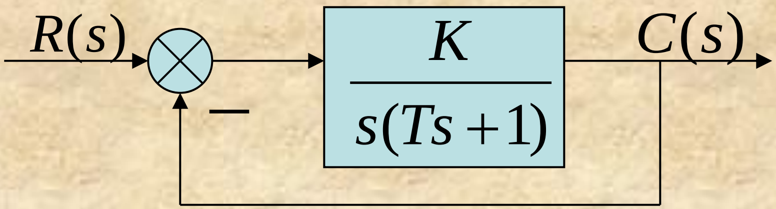
- $\because t_s = \dfrac{4}{\omega_n \zeta}$(或$\dfrac{3}{\omega_n \zeta}$)$, \therefore \omega_n$越大，$t_s \downarrow$ (当ζ一定时)

- 为了限制超调量，并使t_s较小，ζ一般取0.4~0.8，则超调量在25%~1.5%之间。

阻尼系数、阻尼角与最大超调量的关系

ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	$\sigma\%$	ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	$\sigma\%$
0.1	84.26°	72.9	0.69		5
0.2	78.46°	52.7	0.7	45. 57°	4.6
0.3	72.54°	37.23	0.707	45°	4.3
0.4	66.42°	25.38	0.78		2
0.5	60°	16.3	0.8	36.87°	1.5
0.6	53.13°	9.48	0.9	25.84°	0.15

[例]：求系统的特征参数ζ,ω_n并分析与性能指标的关系：



[解]：闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{K}{Ts^2+s+K}=\dfrac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

$$\therefore\begin{cases}\omega_n^{\ 2}=\dfrac{K}{T}\\ 2\zeta\omega_n=\dfrac{1}{T}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}\\ \zeta=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}\end{cases}$$

下面分析瞬态性能指标和系统参数之间的关系：（假设 $0<\zeta<1$）

- $K\uparrow$时， $\zeta\downarrow,\sigma\%\uparrow$，快速性好，振荡加剧；
- $T\uparrow$时， $\zeta\downarrow,\sigma\%\uparrow,\omega_n\downarrow,t_s(\dfrac{4}{\omega_n\zeta}=2T)\uparrow$

五.　二阶系统的单位斜坡响应

系统输入：

$$r(t)=t\rightarrow R(s)=\frac{1}{s^2}$$

系统输出：

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}}{s}+\frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}(s+\zeta\omega_n)+(2\zeta^2-1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

定义：

系统响应误差：$e(t)=r(t)-c(t)$

系统稳态误差：$e_{ss}=e(t)\big|_{t\rightarrow\infty}=\left[r(t)-c(t)\right]_{t\rightarrow\infty}$

1、欠阻尼系统（ $0<\zeta<1$ ）单位斜坡响应

系统时域输出： $c(t)=t-\dfrac{2\zeta}{\omega_n}+\dfrac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+2\phi)\quad (t\ge 0)$

输出由稳态分量 $c_{ss}=t-\dfrac{2\zeta}{\omega_n}$ ，和暂态分量

$c_{tt}=\dfrac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+2\phi)$ 两部分组成。

系统稳态误差： $e_{ss}=\left[r(t)-c(t)\right]\Big|_{t\to\infty}=\dfrac{2\zeta}{\omega_n}$

系统误差响应：

$$e(t)=r(t)-c(t)=\frac{2\zeta}{\omega_n}-\frac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+2\phi)$$

单位斜坡作用下二阶系统的性能指标： *（自学）*

2、临界阻尼系统（$\zeta = 1$）单位斜坡响应（系统没有超调和峰值）（自学）

3、过阻尼系统（$\zeta > 1$）单位斜坡响应（系统没有超调和峰值）（自学）

[例]：（参见教材 p.95例3-3）

六. 具有零点的二阶系统分析（欠阻尼情况）

具有零点的二阶系统比典型的二阶系统多一个零点，(ω_n 和 ζ 不变)。

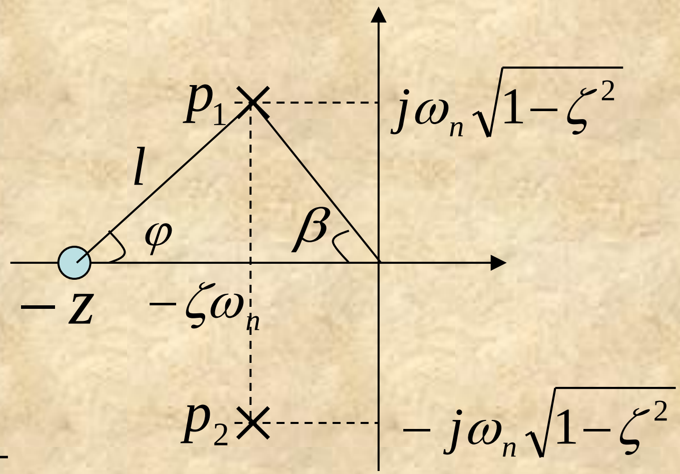
其闭环传递函数为: $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$ ，零点为: $-z=-\dfrac{1}{\tau}$

具有零点的二阶系统 $(0<\zeta<1)$ 的单位阶跃响应为:

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}+\frac{\omega_n^2\tau}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=C_1(s)+C_2(s)$$



零极点分布图

具有零点的二阶系统阶跃响应为：

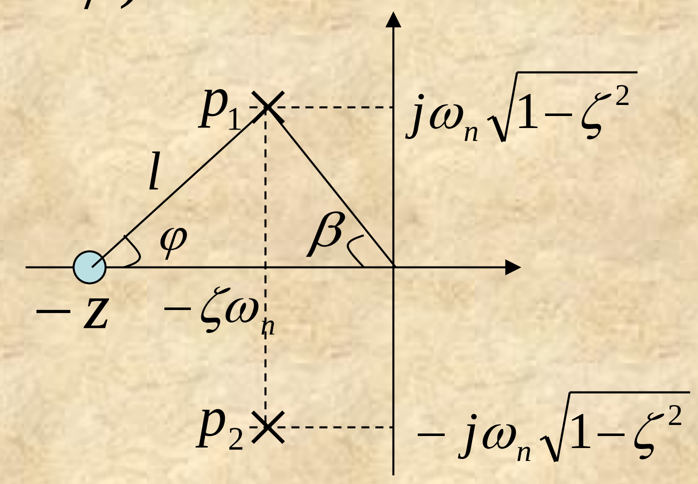
$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]+\frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$$

$$c(t)=1-\sqrt{1+\frac{(\zeta-\tau\omega_n)^2}{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-\tau\omega_n})$$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{l}{z}\cdot\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\beta+\varphi)$$

式中：$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ ，$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}$

$$l=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}$$



零极点分布图

根据上式可以得出主要性能指标如下：

$$t_p=\frac{1}{\omega_d}(\pi-tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n})=\frac{1}{\omega_d}(\pi-\varphi)$$

$$\sigma\%=\frac{\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}}{z}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n})}=\frac{l}{z}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-\phi)}$$

$$t_s\approx\begin{cases}\frac{1}{\zeta\omega_n}(4+\ln\frac{l}{z}) & \text{当}\ \Delta=2\text{时}\\ \frac{1}{\zeta\omega_n}(3+\ln\frac{l}{z}) & \text{当}\ \Delta=5\text{时}\end{cases}$$

$$t_r=\frac{\pi-(\beta+\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

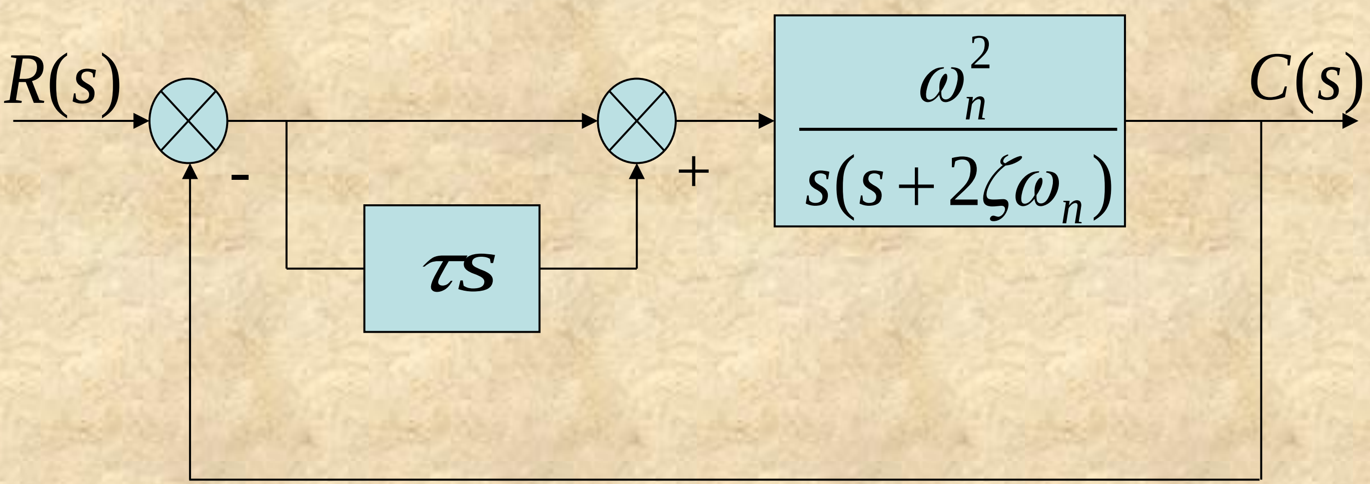
式中：$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$　　$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}$　　$l=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}$

七. 二阶系统性能的改善

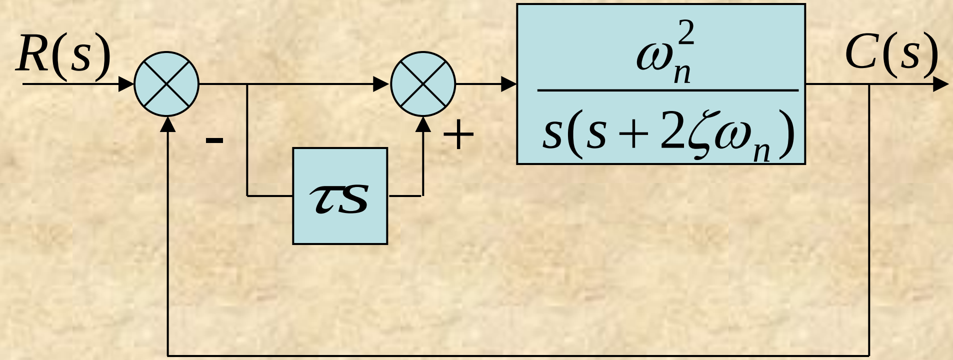
为了改善系统性能而改变系统的结构、参数或附加具有一定功能的环节的方法称为对系统进行校正。附加环节称为校正环节。

a. 比例+微分控制

以误差信号e(t)与误差信号的微分信号e’(t)的和产生控制作用。简称PD控制。又称微分顺馈



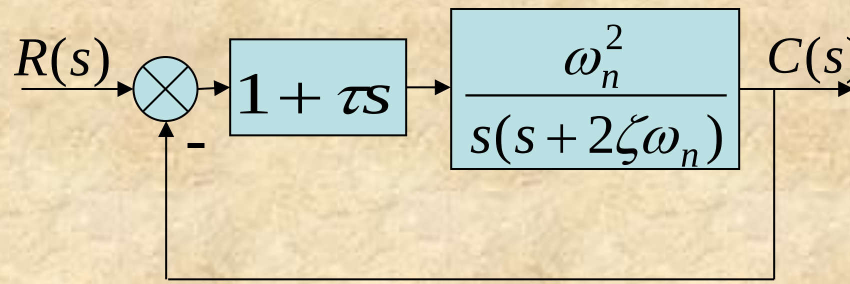
a. 比例+微分控制



$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{\ 2}}$$

与典型二阶系统的标准形式

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



比较

1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n
2. 等效阻尼系数为 $\zeta_d=\zeta+\dfrac{\tau}{2}\omega_n$

由于 $\zeta_d>\zeta$，即等效阻尼系数加大，将使超调量和调节时间t_s变小。

3. 闭环传递函数有零点 $z=-\dfrac{1}{\tau}$，将会给系统带来影响。
4. 对噪声有放大作用。

4. 对噪声有放大作用，为什么?

取值足够小

微分计算:

$$\dot{C}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}$$

实际上是通过测量值 $C'(t)$ 来计算，而测量值必然会带有误差:

$$C'(t+\Delta t)=C(t+\Delta t)+n(t+\Delta t)$$

$$C'(t)=C(t)+n(t)$$

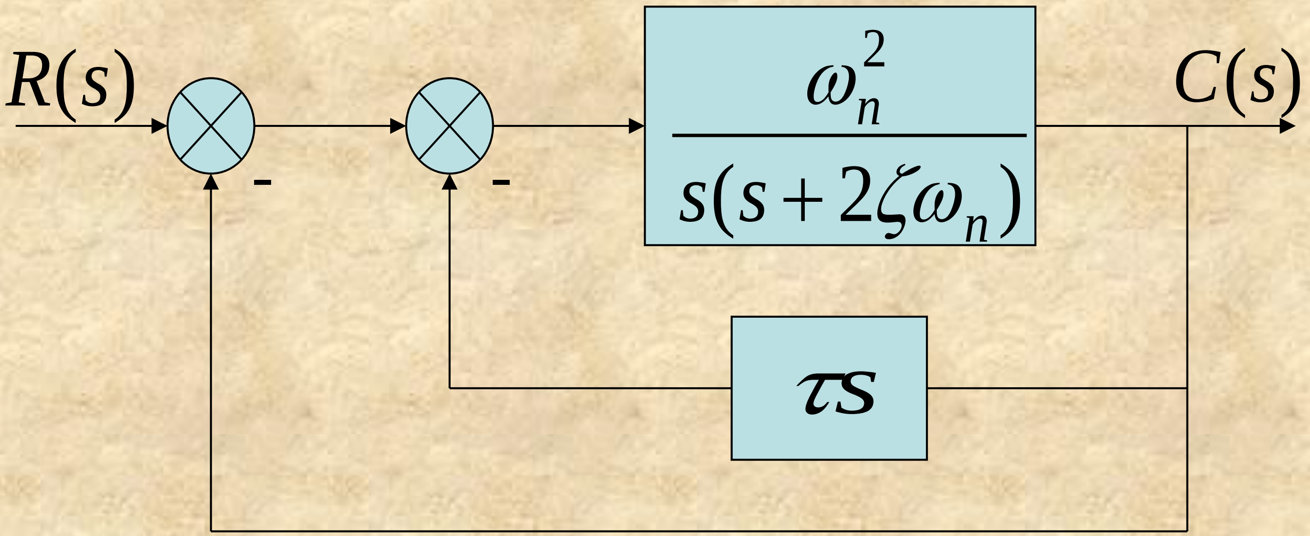
测量误差

$$\dot{C}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{n(t+\Delta t)}{\Delta t}-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{n(t)}{\Delta t}$$

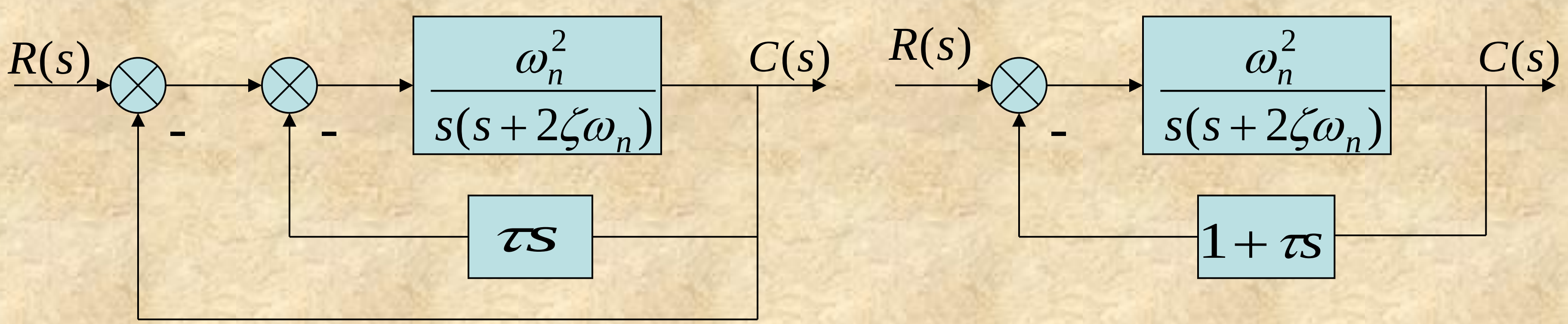
在上式中，$n(t+\Delta t)$ 和 $n(t)$ 都很小，但是 Δt 取值极小!

b. 测速反馈控制

将输出量的速度信号c’(t)采用负反馈形式反馈到输入端并与误差信号e(t)比较，构成一个内反馈回路。简称速度反馈。



b. 测速反馈控制



$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}\Bigg/\left(1+\frac{\omega_n^{2}(1+\tau s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}\right)=\frac{\omega_n^{2}}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{2}}$$

与典型二阶系统的标准形式 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 比较

1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n

2. 等效阻尼系数为 $\zeta_t=\zeta+\dfrac{\tau}{2}\omega_n$

由于 $\zeta_t>\zeta$，即等效阻尼系数加大，将使超调量和调节时间变小。

3-4 高阶系统时域分析

自 学

3-5 线性系统的稳定性分析

一. 稳定的定义与稳定条件

- 定义：

当系统受到扰动作用后，其输出量会产生偏差，在t从0到∞时，系统的状态能够达到一个新的稳定状态，或恢复到原来状态，此时称系统渐进稳定，简称稳定。

➢判断系统稳定的条件

充要条件：系统特征方程式的根均在根平面左半面，即系统闭环传递函数的极点严格分布在 s 平面左半面。

系统闭环传递函数的所有零、极点都分布在 s 平面的左半面，称为最小相位系统。

否则，称为非最小相位系统。

必要条件：特征多项式的系数全部为正或者全部为负。

设系统的特征多项式为：$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n$

因式分解得

$$D(s)=a_0\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)=a_0(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)$$

$$\therefore a_1=a_0\sum_{i=1}^{n}p_j,a_2=a_0\sum_{i\neq j}\left(p_ip_j\right),\ldots$$

要使系统稳定，极点必须在左半平面，因此所有的系数必须全部为正或者全部为负。

二. 代数稳定判据 — 赫尔维茨(Hurwitz)判据

对于一般形式的系统：

$$G_B(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{K_n\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2)}$$

Hurwitz矩阵为：

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

系统稳定的充要条件是：Δ_n 的顺序主子式及主行列式全部为正。即：

$$\Delta_1 = |a_1| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

1. 一阶系统稳定条件

特征方程式：$a_0 s + a_1 = 0$

通常情况下，$a_0 > 0$，极点 $s = -\dfrac{a_1}{a_0}$

稳定条件：$a_0 > 0$，$a_1 > 0$

2. 二阶系统的稳定条件

特征方程式： $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ $\quad H = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$

极点：

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

设 $a_0 > 0$，若使系统稳定，则

$$a_1 > 0\ ,\ \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} < a_1$$

$$\therefore a_2 > 0$$

稳定条件：全部系数均大于零。

3. 三阶系统的稳定条件

特征方程式： $a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

稳定条件：

① 全部系数大于零；

② 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$ 中， $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$

4.　四阶系统

特征方程式：$a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4=0$

$$H=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

稳定条件：

① 全部系数大于零；

②多项式 $a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_0a_3^2>0$。

（即行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 中 a_4 余子式的行列式为正。）

三. 劳斯(Routh)稳定判据

1. 列劳斯表

闭环系统特征方程式： $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

2. 劳斯表中第一列元素全不为零

稳定条件是第一列各元素同号。如果有不同符号，则系统不稳定，且变号次数等于在右半平面根的个数。

[例]：特征方程式：$s^5+2s^4+s^3+3s^2+4s+5=0$

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 1 & 4 \\
s^4 & 2 & 3 & 5 \\
s^3 & -\frac{1}{2}(-1) & \frac{3}{2}(3) & 0(0) \\
s^2 & 9 & 5 & 0 \\
s^1 & \frac{32}{9} & 0 & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

各行同乘一个数，对判定无影响

因为变号两次，所以系统不稳定，且在右半平面有两个极点。

3. 劳斯表中第一列有为零的元素

处理办法：用 ε 代替零，使 $\varepsilon \to 0^+$，再用上述原则判断系统稳定性。

[例]：特征方程为 $s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$

[解]：列出劳斯表：

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & 0 \\
s^2 & \varepsilon & 1 & 0 \\
s^1 & 2-\frac{2}{\varepsilon} & 0 & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

$$\because \lim_{\varepsilon \to 0}(2-\frac{2}{\varepsilon})<0$$

变号两次，系统不稳定

4. 劳斯表中某一行各元素全为零

对应的系统不稳定，且有正实根，或具有正实部的共轭复根。

[例]：特征方程为：

$$s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$$

[解]：

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	2	12	16	0
s^3	0(4)	0(12)	0(0)	0
s^2	6	16	0	
s^1				
s^0				

作辅助方程

用辅助方程导数的系数来填充零行

辅助方程（偶次系数）：用元素为零行的前一行作辅助方程。

辅助方程如下： $2s^4 + 12s^2 + 16 = 0$

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

$$\therefore s_{3,4} = \pm j2 \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$$

辅助方程根的意义：对应虚轴（座标轴）上的成对极点。— 系统临界状态极点

5. 劳斯表的应用 — 求系统稳定时的 K_k 值

[例]：$s^4+2s^3+3s^2+2s+K_k=0$

[解]：列出劳斯表：

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & K_k \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & 2 & K_k & \\ s^1 & 2-K_k & & \\ s^0 & K_k & & \end{array}$$

按劳斯判据，系统稳定条件为：$\begin{cases} K_k>0 \\ 2-K_k>0 \end{cases} \longrightarrow \quad 0<K<2$

若$K_k=2$，则 s^1行为零，$2s^2+2=0$（K 的上限对应虚轴上的特征根）

$\therefore s_{1,2}=\pm j$ 系统处于临界状态，不稳定。

5. 劳斯表的应用 — 求系统稳定时的 K_k 值

$$\mathrm{Re}(s) < -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(s) + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\underbrace{s+1}_{s_1}) < 0.$$

令 $s_1 = s+1$，则

$$s = s_1 - 1$$

代入 $\Delta(s) \Rightarrow \Delta_1(s_1)$

可用劳斯判据！

5. 劳斯表的应用 — 求系统稳定时的 K_k 值

例3-11 设比例-积分(PI)控制系统如图3-33 所示。其中，K_1 为与积分器时间常数有关的待定参数。已知参数$\zeta=0.2$ 及$\omega_n=86.6$，试用劳斯稳定判据确定使闭环系统稳定的K_1 取值范围。如果要求闭环系统的极点全部位于$s=-1$ 垂线之左，问K_1 值范围又应取多大？

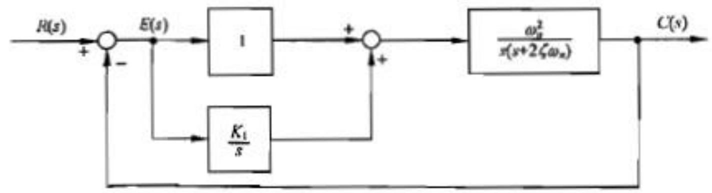


图 3-33 比例-积分控制系统

解 根据图 3-33 可写出系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2(s+K_1)}{s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2}$$

因而，闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2=0$$

代入已知的ζ 与 ω_n，得

$$D(s)=s^3+34.6s^2+7500s+7500K_1=0$$

列出相应的劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 7500 \\
s^2 & 34.6 & 7500K_1 \\
s^1 & \dfrac{34.6\times7500-7500K_1}{34.6} & 0 \\
s^0 & 7500K_1 &
\end{array}$$

根据劳斯稳定判据，令劳斯表中第一列各元为正，求得 K_1 的取值范围为

$$0<K_1<34.6$$

当要求闭环极点全部位于$s=-1$ 垂线之左时，可令$s=s_1-1$，代入原特征方程，得到如下新特征方程：

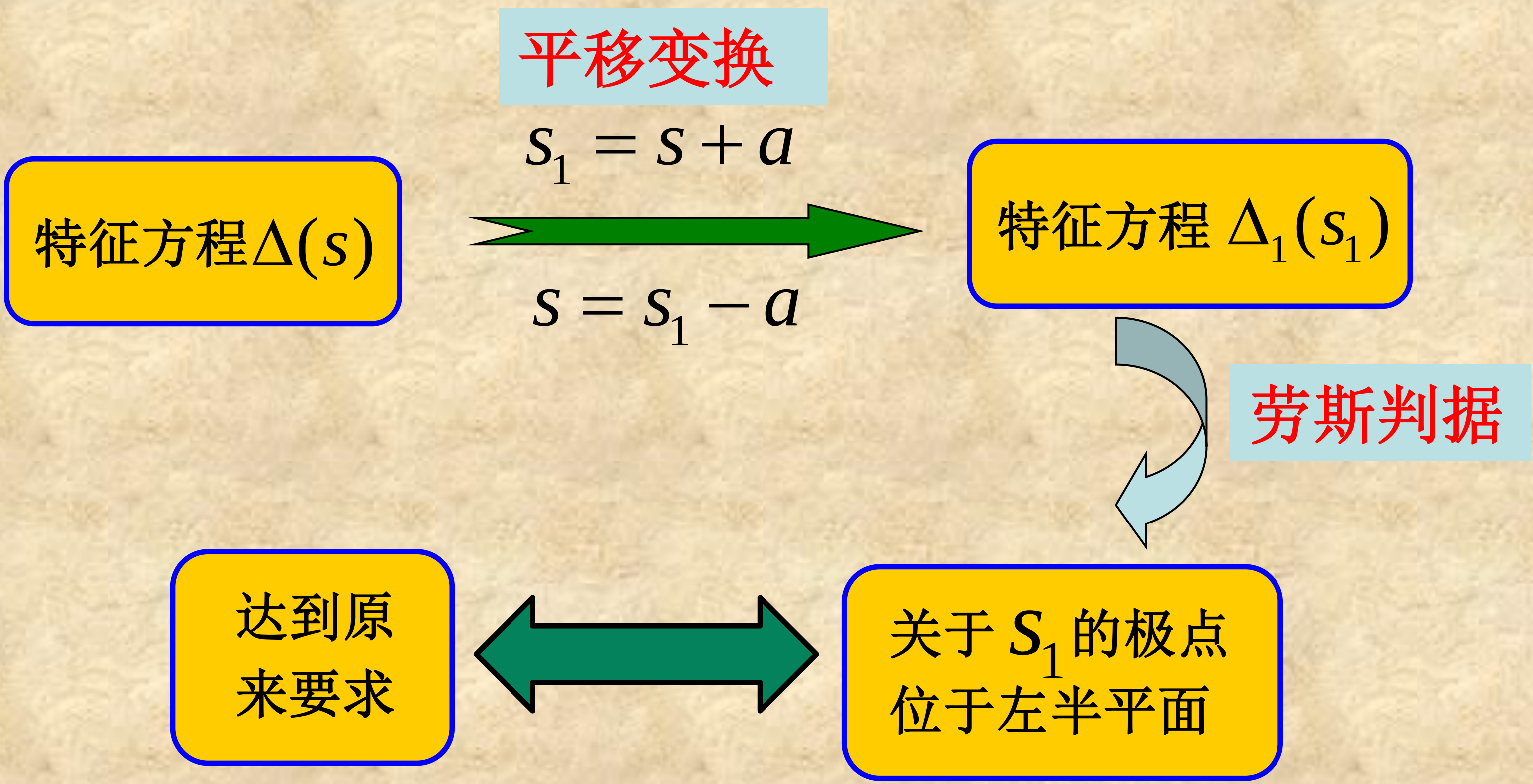
$$(s_1-1)^3+34.6(s_1-1)^2+7500(s_1-1)+7500K_1=0$$

整理得

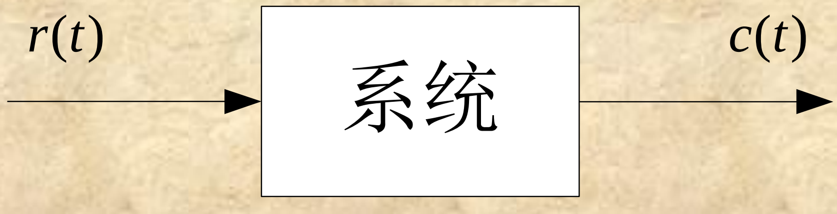
$$s_1^3+31.6s_1^2+7433.8s_1+(7500K_1-7466.4)=0$$

[例]：参见教材p. 106 例3-11

考虑到稳定裕度等方面的要求，通常要求闭环极点位于垂线 $s=-a$ 的左边，如何处理？



3-6 线性系统的稳态误差

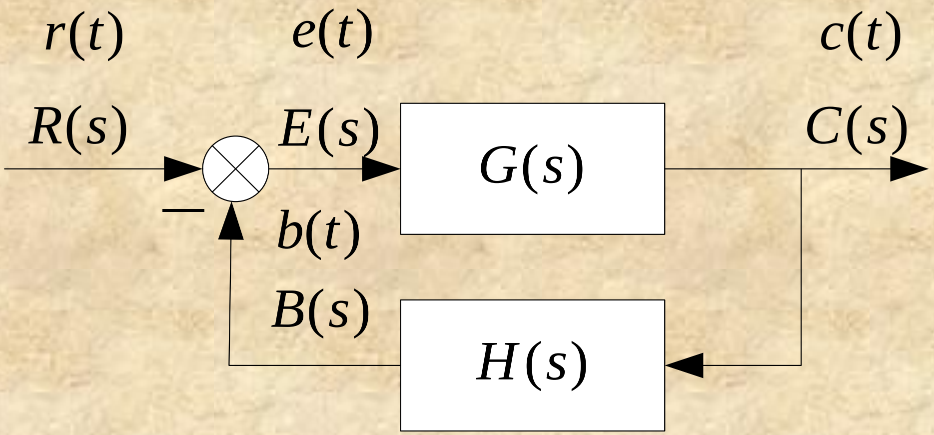


$c(t)$ 是由稳态分量和暂态分量组成的，暂态分量在 $t\to\infty$ 时，对于稳定系统趋于零。

稳态误差所研究的问题：当 $t\to\infty$ 时，系统的状态（输出量）情况，反映系统的控制精度。

一. 稳态误差的定义

1. 从输入端定义稳态误差（给定误差）



定义：$e(t)=r(t)-b(t)$ ，$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)C(s)$

（$H(s)$是检测元件传函，通常 $H(s)=\dfrac{\alpha}{\tau s+1}$ ，在稳态时，$\lim\limits_{s\to 0}H(s)=\alpha$ ，$H(s)=$常数 ）

误差传函： $G_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_K(s)}$ ， $G_K(s)=G(s)H(s)$

$$E(s)=\frac{1}{1+G_K(s)}\cdot R(s)$$

拉氏变换
终值定理

稳态误差： $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)$

稳态误差求法： $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{1}{1+G_k(s)}\cdot R(s)$

条件：

$E(s)$的极点都在 s 平面左半平面；（对于稳定的系统）

2. 从输出端定义稳态误差（扰动误差）

$$e(t) = \text{期望值} - \text{实际值} = c(t)_d - c(t)$$

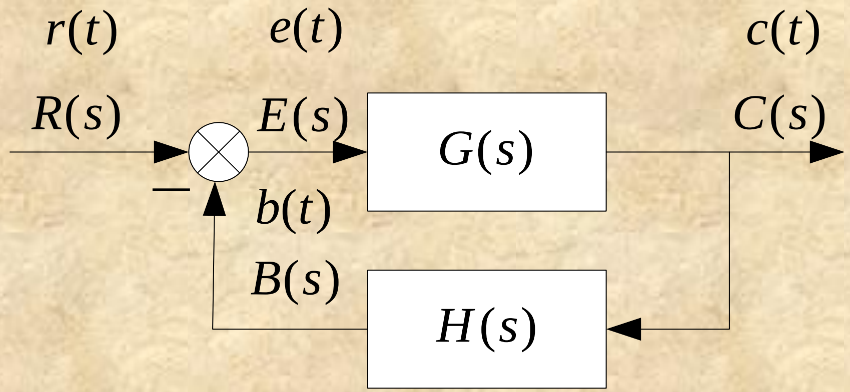
$$E'(s) = C_d(s) - C(s)$$

输出端误差与输入端误差之间的关系如何?

$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$$

单位反馈控制系统上述两种误差定义方法一致。

输入端/输出端稳态误差的补充说明：



控制目标： 输出量（即转速）达到期望值 $C_d(s)$

具体设计： 选择设定值满足：$R(s)=H(s)C_d(s)$

输出端：$E'(s)=C_d(s)-C(s)$

输入端：$E(s)=R(s)-B(s)=H(s)C_d(s)-H(s)C(s)$

$$E'(s)=\frac{E(s)}{H(s)}$$

3. 稳态误差计算公式

计算公式：如果有理函数 $sE(s)$ 除在原点有唯一的极点外，在 s 右半平面及虚轴上**解析**，即 $sE(s)$ 的极点均位于左半平面，则可根据拉氏变换的终值定理来计算系统的稳态误差：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G_K(s)=G(s)H(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G_K(s)}R(s)$$

二. 系统类型

在工程上，通常把 $G_K(s)$ 写成：

$$G_K(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots}{s^\nu(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^\nu\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

（其中，s^ν 代表系统具有的积分环节）

定义：

$$\begin{cases}\nu=0 & \text{的系统称“零”型系统}\\ \nu=1 & \text{的系统称“I”型系统}\\ \nu=2 & \text{的系统称“II”型系统}\end{cases}$$

注意： 系统的类型由其开环传递函数所包含的积分环节的个数来决定。

三. 各种输入信号下的稳态误差

$$G_K(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

1. $r(t)=1(t)$ ， $R(s)=\dfrac{1}{s}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_k(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_K(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$ ——位置误差

其中， $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)$ ——稳态位置误差系数

“0”型系统： $K_p=K_k$， $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_k}$

“I”型系统：

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_k(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K_k(\tau_1 s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)\cdots}=\infty,\quad e_{ss}=0$$

同理可求“II”型系统： $e_{ss}=0$

2. $r(t)=t$ ，$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_k(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG_k(s)}=\frac{1}{K_v}$$

——速度误差

其中，$K_v=\lim\limits_{s\to 0} sG_k(s)$ ——稳态速度误差系数

$$G_K(s)=\frac{K\prod\limits_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod\limits_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

“0”型系统：$K_v=0$ ，$e_{ss}=\infty$

“I”型系统：

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_k(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K_k(\tau_1 s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)\cdots}=K_k\ ,\quad e_{ss}=\frac{1}{K_k}$$

“II”型系统：$K_v=\lim\limits_{s\to 0} sG_k(s)=\infty$ ，$e_{ss}=0$

$$G_K(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

3. $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ ， $R(s)=\frac{1}{s^3}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_k(s)}\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G_k(s)}=\frac{1}{K_a}$$

——加速度误差

其中，$K_a=\lim_{s\to 0} s^2G_k(s)$——稳态加速度误差系数

“0”型系统：$K_a=\lim_{s\to 0} s^2G_k(s)=0$，$e_{ss}=\infty$

“I”型系统：$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K_k(\tau_1 s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)\cdots}=0$，$e_{ss}=\infty$

“II”型系统：$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{K_k(\tau_1 s+1)\cdots}{s^2(T_1 s+1)\cdots}=K_k$，$e_{ss}=\frac{1}{K_k}$

各型系统的e_{ss}表：

	$1(t)$	t	$\frac{1}{2}t^2$
"0"	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
"I"	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
"II"	0	0	$\frac{1}{K_a}$

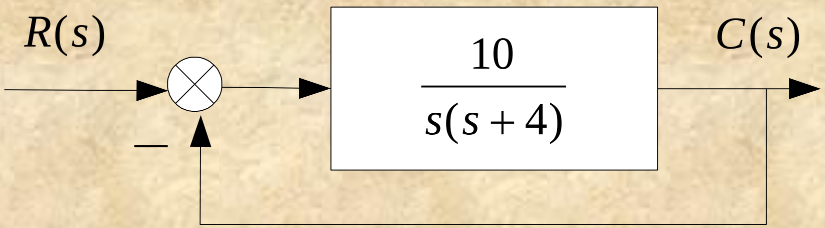
结论：

①积分环节数目越多，稳态误差 e_{ss} 越小；

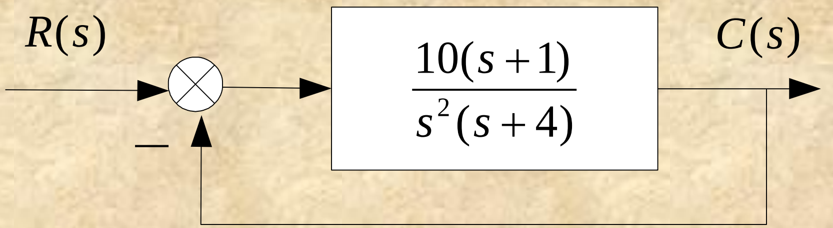
②开环放大倍数（开环增益K_k）越大，e_{ss} 越小；

③系统的型别是根据具有特定结构的系统定义的，对于不具有该结构的系统，可以通过构建等效系统来进行分析。

[例]：系统动态结构图分别如图（1）和图（2）所示，输入信号为：$r(t)=4+6t+6t^2$, 求系统的稳态误差。



图（1）



图（2）

[解]: **经分析，闭环系统稳定，这是计算稳态误差的前提！**

对图（1）：$e_{ss}=4\cdot 0+\dfrac{1}{\frac{10}{4}}\cdot 6+\infty=\infty$

对图（2）：$e_{ss}=4\cdot 0+6\cdot 0+12\cdot\dfrac{1}{\frac{10}{4}}=4.8$

例：

已知某单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K\left(0.5s+1\right)}{s\left(s+1\right)(3s+1)}$$

要使闭环系统在单位斜坡信号作用下，稳态误差

$$e_{ss}<0.5$$

求放大系数K的取值范围。

$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)/s(s+1)(3s+1)}{1+\dfrac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(3s+1)}} = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(3s+1)+K(0.5s+1)}$$

$$\Delta(s) = s(s+1)(3s+1)+K(0.5s+1)$$
$$= 3s^3 + 4s^2 + (1+0.5K)s + K$$

s^3	3	$1+0.5K$
s^2	4	K
s^1	$1-\frac{K}{4}$	0
s^0	K	

$\Rightarrow 0 < K < 4$

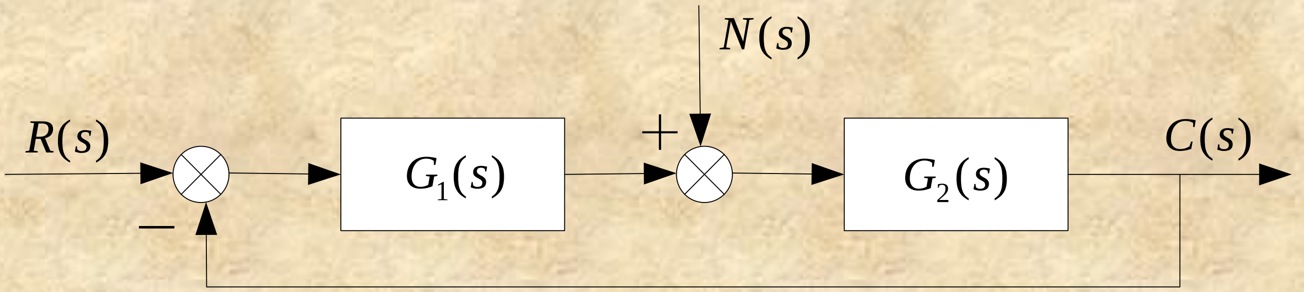
另外. $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K$

$e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.5 \Rightarrow K > 2$

所以: $2 < K < 4$

四. 动态误差系数（自学）

五. 输出量对扰动信号的稳态分析



定义:

系统扰动误差: $E_N(s)=$ 期望值－由扰动引起的实际值＝$-C_N(s)$

$C_N(s)$: 由扰动信号引起的输出。

（扰动引起的）稳态误差:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot E_N(s)=\lim_{s\to 0} -sC_N(s)=-\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$

通常 $n(t)=1(t)$，则

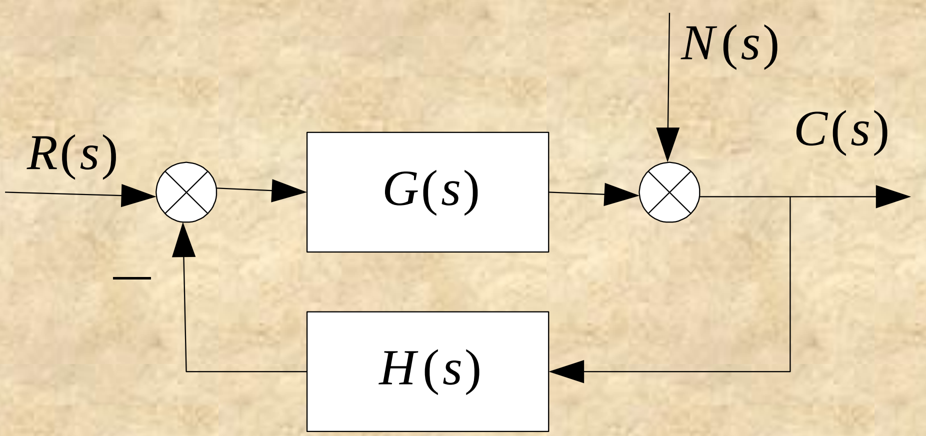
$$e_{ss}=-\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot\frac{1}{s}=-\lim_{s\to 0}\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

说明：

①负号表示扰动量和输出量 $c_N(t)$ 的作用相反；

②上式并非通用形式，因为 $N(s)$ 和 $C_N(s)$ 的位置可以不同。

如：



$$C_N(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot N(s)$$

六. 减小稳态误差的办法

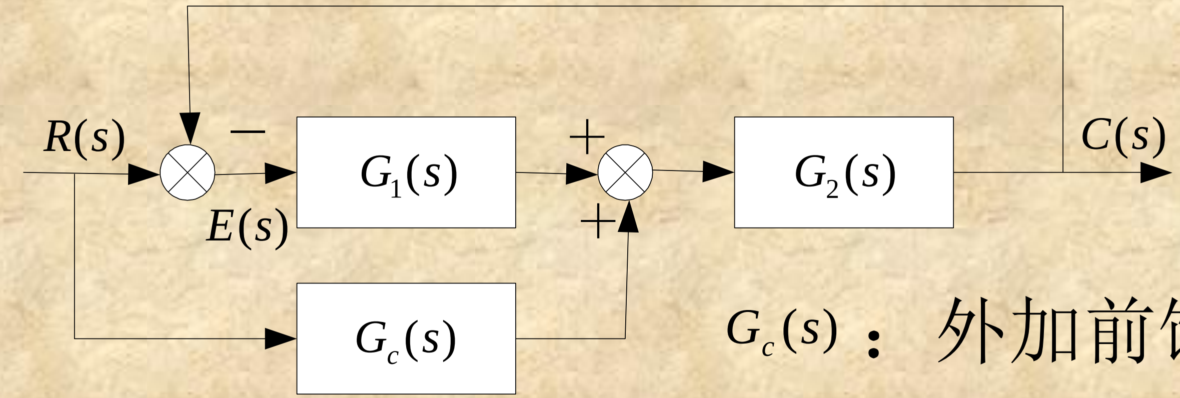
1. 增加开环放大系数 K_k；（容易使系统不稳定 — 减小了增益裕度 h）

2. 增加积分环节；（容易使系统不稳定 — 减小了相位稳定裕度 $\gamma(\omega_c)$）

3. 采用串级控制抑制内回路扰动；

4. 加前馈补偿，系统变为复合控制系统。

a）对给定量进行补偿（如图所示）



$G_c(s)$：外加前馈补偿环节

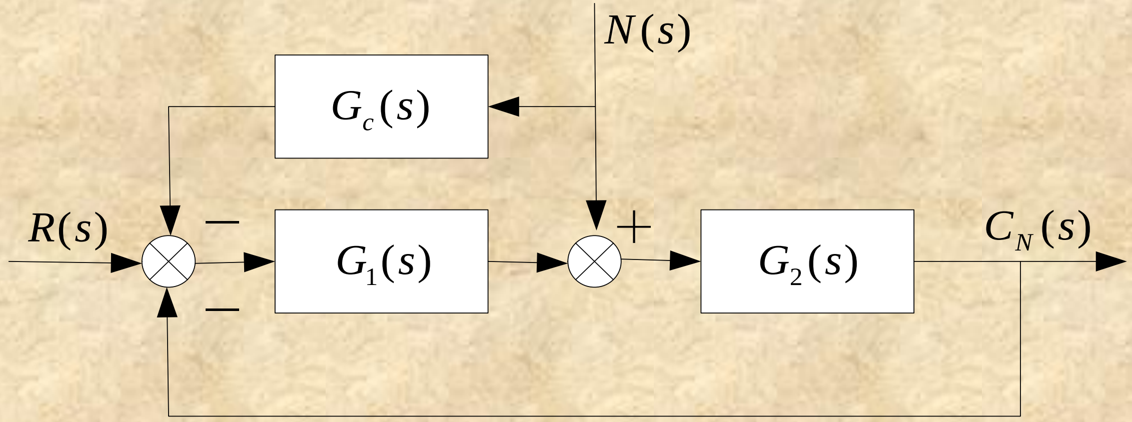
[解]： $G_B(s)=\dfrac{G_1(s)G_2(s)+G_c(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$ （利用梅森公式）

误差： $E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-\dfrac{G_1(s)G_2(s)+G_c(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)$

$$=R(s)\left(1-\frac{G_1(s)G_2(s)+G_c(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\right)=R(s)\frac{1-G_c(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

只要取 $G_c(s)=G_2^{-1}(s)$， 则 $E(s)=0$

b）对扰动量的补偿（如图所示）



（将 $R(s)$ 看成“0”。）

由叠加原理列出：

$$C_N(s) = G_2(s)N(s) - G_c(s)G_1(s)G_2(s)N(s) - C_N(s)G_1(s)G_2(s)$$

$$C_N(s) = \frac{\left(G_2(s) - G_1(s)G_2(s)G_c(s)\right)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

∴取 $G_c(s) = \dfrac{1}{G_1(s)}$ ，则 $C_N(s) = 0$

对本章内容有疑问？