算法第六章作业

第(1)题

(a) 对于权值序列 2, 3, 2，应用该算法无法找出总权最大的独立集

(b) 对于权值序列 3, 1, 2, 3，应用该算法无法找出总权最大的独立集

(c) 定义 S_i 为点集 $\{v_1 \cdots v_i\}$ 上的一组独立集，定义 X_i 表示 S_i 的权值和

易得 $X_0=0$，$X_1=w_1$，当 $i>1$ 时，v_i 可以分为两类(属于 S_i 或不属于 S_i)

若 $w_i \in S_i$，则 $w_{i-1} \notin S_i$，此时 $X_i = w_i + X_{i-2}$

若 $w_i \notin S_i$，此时 $X_i = X_{i-1}$

∴ 给出 X_i 递推公式 $X_i = \max\{X_{i-1}, w_i + X_{i-2}\}$

记录每次递推公式的选择，跟据上文的讨论，可以求出 S_i 的构成

第(5)题

易得若 $\{y_1, y_2 \cdots y_n\}$ 为 y 的最优划分，那么 $\{y_1, y_2 \cdots y_{n-1}\}$ 一定为 y 中去除 y_n 的前缀构成的字符串的最优划分

所以设 $Opt(i)$ 为字符串 y 前 i 个字符组成的前缀的最优划分得分

于是有递推公式 $Opt(i) = \max\limits_{j \le i}\{Opt(j-1) + Quality(j \cdots i)\}$

$Quality(\alpha \cdots \beta)$ 表示开始于 α 终止于 β 的子串的划分质量得分，已知 $Opt(0)=0$

调用 $Opt(n)$ 可在 $O(n^2)$ 时间复杂度内得出最优解

第(27)题

因为订购油的总花费对于不同的订购策略始终相等，因此不计算入 $Opt(n)$

假设两次订购油的时间为第 a, b 天 $(a<b)$，那么最佳订油量为 $\sum_{j=a}^{b} g_j$，期间储存油的花销为 $\sum_{j=a}^{b}(j-a)g_j$，将其定义为 $save(a, b-1)$，同时有限制 $\sum_{j=a}^{b} g_j \le L$

∴ 定义 $Opt(a)$ 为从第 a 到第 n 天的燃油运费和存储费用和

于是有 $$Opt(a) = P + \min_{\substack{a<b\le n,\\ \sum_{j=a}^{b-1} g_j \le L}} \left(S(a, b-1) + Opt(b)\right)$$

给定 $Opt(n)=0$

调用 $Opt(1)$ 可以在 $O(n^2)$ 时间复杂度内得到最优解，记录每次选择的 b 就可以知道最佳购油策略

第(28)题

(a) 依照贪心算法章节中讲解的内容，容易证得计算最优解 J 应使用贪心算法，是按截止时间由早到晚依次选取所有可选的事件，因此 J 中的事件一定是按截止时间递增排列

(b) 定义最优结构 $OPT(m, d)$ 表示按照截止时间升序排列的事件集 $\{1, \cdots, m\}$ 中在截止时间 d 内可以容纳的最多事件数目

若 m 可以放入最佳策略，则 $OPT(m, d) = OPT(m-1, d-t_m) + 1$

否则 $OPT(m, d) = OPT(m-1, d)$

定义 $OPT(0, d) = OPT(m, 0) = 0$，记录每次递归的选择，可以得到最优调度序列