Econometria II

Lecture 2: Modelos ARMA

Prof.: Ricardo Masini

FGV EESP
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

Graduação em Economia
2º Semestre de 2017

Ruído Branco (White Noise)

- Ruído branco é uma série fracamente estacionária, com média zero, que não apresenta correlação serial
- A série $\{Y_t\}$ é um ruído branco, e denotaremos por $Y_t \sim \text{wn}(0, \sigma^2)$, se

$$\mathbb{E}(Y_t) = 0; \quad \mathbb{E}(Y_t, Y_{t-j}) = \begin{cases} \sigma^2 & j \neq 0 \\ 0 & j = 0 \end{cases}$$

- É a série temporal mais simples. Exceto, talvez, por sua versão iid onde além da não-correlação, temos independência. É chamada de ruído branco independente e denotado por $Y_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$
- Como vamos ver, constitui o *building block* de vários processos que vamos estudar...

Processos Média móvel

O caso mais simples deste tipo de processo é a média móvel de ordem 1, MA(1), definido como:

$$Y_t = c + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}; \quad \epsilon \sim \mathsf{wn}(0, \sigma^2),$$

onde c e θ são constantes quaisquer

Momentos de um MA(1)

A esperança de um MA(1) é dada por

$$\mu \equiv \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(c + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}) = c$$

Usando a primeira relação, podemos reescrever o MA(1) como

$$(Y_t - \mu) = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$$

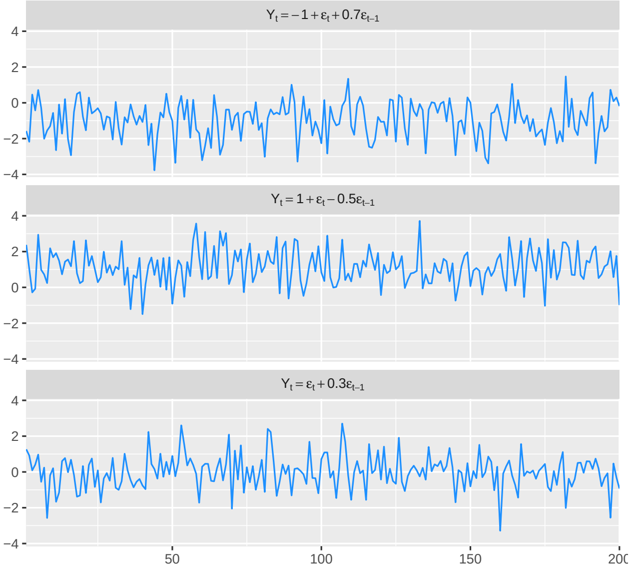
Multiplicando ambos os lados por $(Y_{t-j} - \mu)$ temos

$$\begin{aligned}(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) &= (\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-j} + \theta\epsilon_{t-j-1}) \\ &= \epsilon_t\epsilon_{t-j} + \theta\epsilon_t\epsilon_{t-j-1} + \theta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-j} + \theta^2\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-j-1}\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando esperança em ambos os lados

$$\gamma_j \equiv \mathbb{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & j = 0 \\ \theta\sigma^2 & j = \pm 1 \\ 0 & |j| > 1 \end{cases}$$

Exemplos de MA(1)



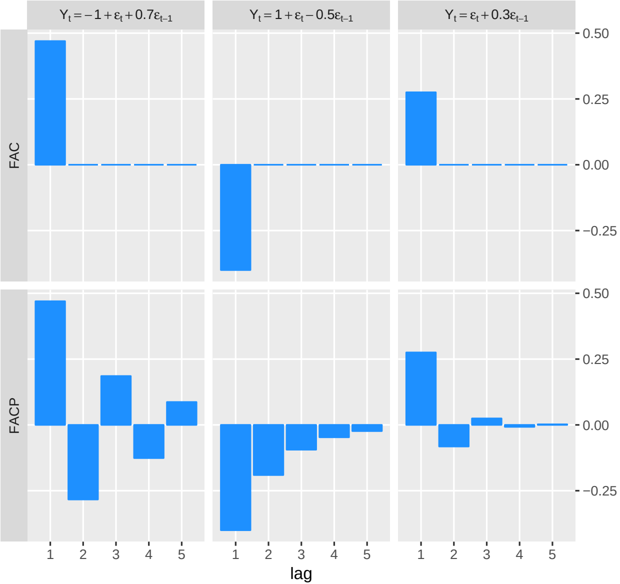
FAC de um MA (1)

- Pela expressão anterior é fácil ver que um MA(1) é um processo fracamente estacionário (por que?)
- Além disso, lembre-se que a função de autocorrelação é simplesmente uma normalização da função autocovariância

$$\rho_j \equiv \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & j = \pm 1 \\ 0 & |j| > 1 \end{cases}$$

- Portanto, a FAC de um MA(1) é truncada em zero para lags maiores que 1

FAC/FACP de MA(1)



MA(q)

A generalização de um MA(1) é um processo média móvel de ordem q, MA(q), definido como

$$Y_t = c + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}; \quad \epsilon \sim \text{wn}(0, \sigma^2),$$

onde $c, \theta_1, \ldots, \theta_q$ são constantes reais e q um inteiro positivo

Momentos de um MA(q)

A esperança de um MA(q) é dada por

$$\mu \equiv \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(c + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}) = c$$

Usando a primeira relação, podemos reescrever o MA(q) como

$$(Y_t - \mu) = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

Multiplicando ambos os lados por $(Y_{t-j} - \mu)$, temos

$$\begin{aligned}(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) &= \left(\sum_{k=0}^{q} \theta_k \epsilon_{t-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{q} \theta_k \epsilon_{t-j-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{q} \sum_{\ell=0}^{q} \theta_k \theta_\ell \epsilon_{t-k} \epsilon_{t-j-\ell}\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando esperança em ambos os lados

$$\gamma_j = \begin{cases} (\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q \theta_{q-j})\sigma^2 & |j| = 0, 1, \ldots, q \\ 0 & |j| > q \end{cases}$$

FAC de um MA(q)

Pela expressão anterior é fácil ver que um MA(q) é um processo fracamente estacionário. Além disso, a função de autocorrelação é dada por

$$\rho_j \equiv \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-j}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} & |j| = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & |j| > q \end{cases}$$

Portanto, a FAC de um MA(q) é truncada em zero para lags maiores que q

Processos MA(∞)

Considere o caso de um MA(q) onde $q \to \infty$. Neste caso temos uma média móvel infinita, MA(∞) dado por

$$Y_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \epsilon_{t-i} \quad \epsilon \sim \mathsf{wn}(0, \sigma^2),$$

onde $c, \theta_1, \dots, \theta_q$ são constantes reais e $\theta_0 = 1$
Neste caso, temos $\mu = c$ como no caso finito e

$$\gamma_j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \theta_{j+i} \theta_i \right) \sigma^2$$

Quais condições garantem que um MA(∞) seja fracamente estacionário?

Resultado Importante

Motiva toda a modelagem ARMA. Informalmente pode-se dizer que "qualquer processo estacionário tem representação MA(∞)", formalmente
Decomposição de Wold: Qualquer processo $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ estacionário puramente não determinístico pode ser escrito como

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$$

onde $\epsilon_t = \pi(Y_t | 1, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$

Processos Autorregressivos

O caso mais simples é o processo autorregressivo de ordem 1, AR(1), que é definido como

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon \sim \mathsf{wn}(0, \sigma^2)$$

onde c e ϕ são constantes quaisquer

Momentos de um AR(1)

Se assumirmos estacionariedade fraca, então, aplicado o operador esperança e variância de ambos os lados, temos

$$\mu = c + \phi\mu \iff \mu \equiv \mathbb{E}(Y_t) = \frac{c}{1-\phi}$$

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma^2 \iff \gamma_0 \equiv \mathbb{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

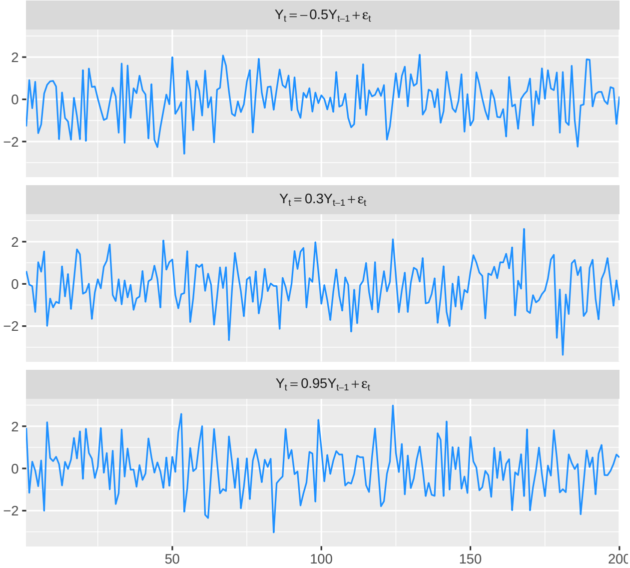
Usando a primeira relação, podemos reescrever o AR(p) como

$$(Y_t - \mu) = \phi(Y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$$

Multiplicando ambos os lados por $(Y_{t-j} - \mu)$ e tomando a esperança

$$\gamma_j = \phi\gamma_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Exemplos de AR(1)



FAC de um AR(1)

É fácil ver que a função de autocovariância será dada por

$$\gamma_j = \phi^{|j|}\gamma_0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a função de autocorrelação é simplesmente

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi^{|j|}$$

Note que Y_t e Y_{t-2} são correlacionados, mas poderíamos nos perguntar qual a correlação entre Y_t e Y_{t-2} já descontando a influência de Y_{t-1}? Ou em outras palavras dado Y_{t-1}?

$$\text{Cor}\left(Y_t, Y_{t-2} | Y_{t-1}\right) = \text{Cor}\left(c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, Y_{t-2} | Y_{t-1}\right) = 0$$

Função de Autocorrelação Parcial (FACP)

Esse conceito pode ser generalizado para qualquer distância entre as variáveis definindo-se a FACP como

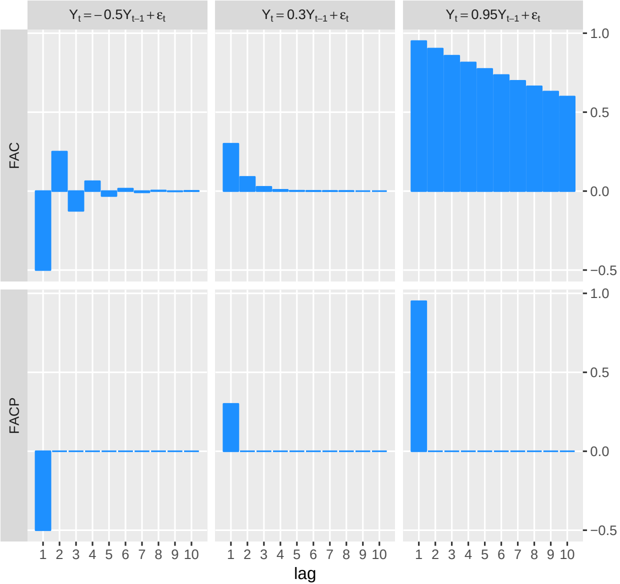
$$\alpha_j = \begin{cases} \text{Cor}\,(Y_t, Y_{t-1}) \equiv \rho_1 & j = 1 \\ \text{Cor}\,(Y_t - \pi(Y_t), Y_{t-j} - \pi(Y_{t-j})) & j \geq 2, \end{cases}$$

onde $\pi(\cdot)$ é a melhor projeção linear em $(Y_{t-j+1}, \ldots, Y_{t-1})$
O que nós dá uma maneira fácil de estimar a FACP, basta estimar por MQO o modelo abaixo para CADA j

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_j Y_{t-j} + u_t$$

e o último coeficiente de CADA regressão $\widehat{\alpha}_j$ é um estimador consistente para α_j

FAC/FACP de AR(1)



Estacionariedade de um AR(1)

Afinal, qual a condição para garantir a estacionariedade fraca de um AR(1). Fazendo substituições recursivas, temos

$$
\begin{aligned}
Y_t &= c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \\
&= c + \phi(c + \phi Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon \\
&= c + \phi(c + \phi(c + \phi Y_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\
&\ \vdots \\
&= c \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j + \phi^k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \epsilon_{t-j}
\end{aligned}
$$

Assim se $|\phi| < 1$ e tomando-se o limite $k \to \infty$, temos

$$
Y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}
$$

onde o segundo termo é finito

Processo AR(p)

O processo autorregressivo de ordem p, AR(p), é a generalização do AR(1), ou seja, para $p \geq 1$:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon \sim \text{wn}(0, \sigma^2)$$

Qual condições em $\phi_1, \ldots, \phi_p$ precisamos para garantir a estacionariedade? Poderíamos adotar a estratégia de substituição, mas fica muito complicado algebricamente...

Momentos de um AR(p)

Novamente, se assumirmos estacionariedade fraca podemos aplicar o operador esperança de ambos os lados, temos

$$\mu = c + \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu \iff \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

Usando esta relação podemos reescrever o AR(p) como

$$(Y_t - \mu) = \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p (Y_{t-p} - \mu) + \epsilon_t$$

Multiplicando ambos os lados por $(Y_{t-j} - \mu)$ e tomando a esperança

$$\gamma_j = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{j-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{j-p} & j = 1, 2, \ldots \\ \phi_1 \gamma_1 + \cdots + \phi_p \gamma_p & j = 0 \end{cases}$$

Operador Lag (Defasagem)

O operador lag, L, é definido como

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{L}\,Y_t = Y_{t-1} \\
&\mathsf{L}^2\,Y(t) = \mathsf{L}(\mathsf{L}\,Y_t) = \mathsf{L}(Y_{t-1}) = Y_{t-2} \\
&\vdots \\
&L^j\,Y(t) = \mathsf{L}(\mathsf{L}(\mathsf{L}\ldots\mathsf{L}\,Y_t) = Y_{t-j}
\end{aligned}
$$

Além disso, o operador e a multiplicação são comutativos, e o operador lag é distributivo com relação a adição, ou seja:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{L}(c\,Y_t) = c(\mathsf{L}\,Y_t) \\
&\mathsf{L}(Y_t + X_t) = \mathsf{L}\,Y_t + \mathsf{L}X_t
\end{aligned}
$$

Polinômio no Operador Lag

Usando L podemos reescrever um AR(p) de média zero como

$$(1 - \phi_1 \mathsf{L} - \phi_2 \mathsf{L}^2 - \cdots - \phi_p \mathsf{L}^p)\, Y_t = \epsilon_t$$

Note que o termo que "multiplica" Y_t é apenas um polinômio em L, assim usamos a notação

$$\Phi_p(\mathsf{L})\, Y_t = \epsilon_t$$

Da mesma maneira podemos reescrever um MA(q) como

$$\begin{aligned} Y_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \\ &= (1 + \theta_1 \mathsf{L} + \theta_2 \mathsf{L}^2 + \cdots + \theta_q \mathsf{L}^q)\epsilon_t \\ &\equiv \Theta_q(\mathsf{L})\epsilon_t \end{aligned}$$

O inverso de um Polinômio no Operador Lag

Gostaríamos de definir um operador $(1 - \phi \mathsf{L})^{-1}$, tal que

$$(1 - \phi \mathsf{L})^{-1}(1 - \phi \mathsf{L}) = 1$$

Na verdade já o que encontramos quando fizemos a substituição recursiva no AR(1). Ele é definido para $|\phi| < 1$, como

$$(1 - \phi \mathsf{L})^{-1} = 1 + \phi \mathsf{L} + \phi^2 \mathsf{L}^2 + \phi^3 \mathsf{L}^3 + \dots$$

Assim, podemos reescrever o AR(1) em representação MA(∞) como

$$Y_t = (1 - \phi \mathsf{L})^{-1} \epsilon_t$$

O operador $(1 - \phi \mathsf{L})^{-1}$ nos será muito útil para transformar AR em MA e vice-versa, além de nos ajudar a entender as condições que fazem um processo ser ou não estacionário

Estacionariedade de um AR(p)

Podemos fatorar o polinômio de um AR(p) como

$$1 - \phi_1 \mathsf{L} - \cdots - \phi_p \mathsf{L}^p = (1 - \lambda_1 \mathsf{L}) \dots (1 - \lambda_p \mathsf{L})$$

onde $\lambda_j = \frac{1}{a_j}$ para todo $j = 1, \dots, p$ e $a_1, \dots, a_p$ são as p raízes (reais ou complexas, distintas ou com multiplicidade) de um polinômio de grau p. Assim, podemos reescrever o AR(p) como

$$(1 - \lambda_1 \mathsf{L}) \dots (1 - \lambda_p \mathsf{L}) \, Y_t = \epsilon_t$$

Se $|\phi_j| < 1$ (ou equivalentemente $|a_j| > 1$), então o polinômio inverso existe e podemos escrever o AR(p) para um MA(∞)

$$\begin{aligned} Y_t &= (1 - \lambda_1 \mathsf{L})^{-1} \dots (1 - \lambda_p \mathsf{L})^{-1} \epsilon_t \\ &\equiv (1 + \psi_1 \mathsf{L} + \psi_2 \mathsf{L}^2 + \dots) \epsilon_t \\ &\equiv \Psi_\infty(\mathsf{L}) \epsilon_t \end{aligned}$$

Processo ARMA(p,q)

A junção de um AR(p) com um MA(q) dá origem a um processo autorregressivo-média móvel, ARMA(p,q):

$$
\begin{aligned}
Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \\
+ \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}; \quad \epsilon \sim \mathsf{wn}(0, \sigma^2),
\end{aligned}
$$

onde $c, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ são constantes reais; p e q são inteiros positivos. Usando o operador lag

$$
\begin{aligned}
(1 - \phi_1 \mathsf{L} - \cdots - \phi_p \mathsf{L}^p) Y_t = c + (1 - \theta_1 \mathsf{L} - \cdots - \theta_q \mathsf{L}^q) \epsilon_t \\
\Phi_p(\mathsf{L}) Y_t = c + \Theta_q(\mathsf{L}) \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Estacionariedade e Invertibilidade de um ARMA(p,q)

Estacionariedade: Função apenas da parte AR do processo (Por quê?). Basta verificar se as raízes do polinômio estão fora do círculo unitário

$$1 - \phi_1 \mathsf{L} - \phi_2 \mathsf{L}^2 - \cdots - \phi_p \mathsf{L}^p$$

Invertibilidade: Função apenas da parte MA do processo (Por quê?). Basta verificar se as raízes do polinômio estão fora do círculo unitário

$$1 - \theta_1 \mathsf{L} - \theta_2 \mathsf{L}^2 - \cdots - \theta_q \mathsf{L}^q$$

A primeira nos garante uma representação MA(∞), a segunda um AR(∞). Ambas importantes para estimação dos parâmetros.

Momentos de um ARMA(p,q)

Se o processo é estacionário $\Phi^{-1}(\mathsf{L})$ existe e podemos reescrever em seu formato MA(∞):

$$Y_t = \mu + \Psi(\mathsf{L})\epsilon_t$$

onde

$$\mu \equiv \frac{c}{\Phi(1)}; \quad \Psi(\mathsf{L}) \equiv \Phi(\mathsf{L})^{-1}\Theta(\mathsf{L})$$

Dos resultados que obtivemos para o MA(q) temos para $q = \infty$

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mu$$

$$\gamma_j = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|j|},$$

onde $\psi_0 = 1$

FAC de ARMA(p,q)

Para processos AR(p) é possível mostrar que a FAC decai a uma taxa geométrica com base igual ao inverso do menor valor em módulo de suas raízes. Mostramos isso para o AR(1), ou seja

$$\rho_j = \left(\frac{1}{\min_i |a_i|}\right)^j$$

Isso também é verdade para um processo ARMA(p,q) em geral pois, após o lag q, a autocorrelação vem apenas da parte AR, uma vez que a FAC da parte MA é truncada em q

FAC de ARMA(p,q)

- Em geral, é fácil identificar AR(p) ou MA(q) visualmente usando a FAC/FACP. Uma vez que a FACP do AR é truncada em p e a FAC do MA é truncada em q
- Para modelos ARMA(p,q) é mais complicado já que tanto a FAC quanto a FACP não apresentam trucamentos.
- É verdade que no caso de um ARMA(p,q), a FAC decai geometricamente após o lag q e a FACP decai geometricamente após o lag p
- Vamos aprender outras maneiras de identificar a estrutura ARMA de um processo

Resumo

Modelo	**FAC**	**FACP**
AR(p)	Decai	Truncada após lag p
MA(q)	Truncada após lag q	Decai
ARMA(p,q)	Decai após lag q	Decai após lag p