

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 4. ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Định nghĩa
- Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
- Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

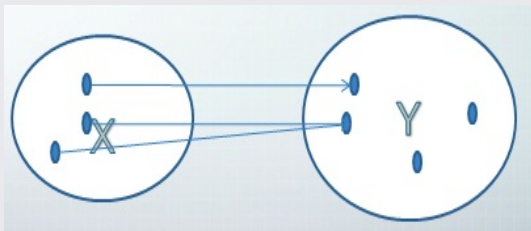
4.1. Định nghĩa

- ① Ánh xạ
- ② Ánh xạ tuyến tính

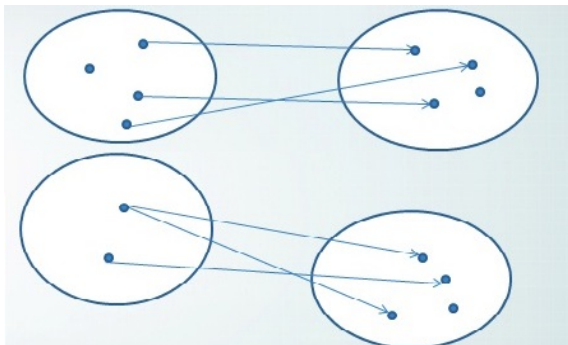
4.1.1. Ánh xạ

Định nghĩa. Một **ánh xạ** f từ tập X vào tập Y là một phép liên kết từ X vào Y sao cho mỗi phần tử x của X được liên kết **duy nhất một phần tử** y của Y , ký hiệu: $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$



Khi đó X được gọi là **tập nguồn**, Y được gọi là **tập đích**.



Không là ánh xạ

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$ là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $h(\frac{m}{n}) = m$ **không** là ánh xạ.

4.1.2. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên \mathbb{R} . Ta nói ánh xạ $f : V \longrightarrow W$ là một **ánh xạ tuyến tính** nếu thỏa hai điều kiện sau:

- i) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;
- ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu.

- $L(V, W)$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W .
- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một **toán tử tuyến tính** trên V .
Viết tắt $f \in L(V)$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chúng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Với mọi $u = (x_1, y_1, z_1)$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$ được kiểm tra tương tự.

Ví dụ.(tự làm) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y, y - 3z).$$

Chúng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề. Cho $f : V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- ii) Với mọi $u \in V$, ta có $f(-u) = -f(u)$;
- iii) Với mọi $u_1, \dots, u_m \in V$ và với mọi $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, ta có
$$f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_m f(u_m).$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ và

$$f(1, 2, 1) = (2, 1); f(-1, 2, 3) = (4, -3).$$

Tính $f(5, 2, -3)$.

Giải. Ta có $(5, 2, -3) = 3(1, 2, 1) - 2(-1, 2, 3)$. Suy ra

$$f(5, 2, -3) = 3(2, 1) - 2(4, -3) = (-2, 9).$$

Định lý. Cho V và W là hai không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là cơ sở của V . Khi đó, nếu $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một tập con của W thì **tồn tại duy nhất** một ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ sao cho

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ thì

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_n f(u_n).$$

Ví dụ. Trong không gian \mathbb{R}^3 cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

Ⓐ Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .

Ⓑ Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Giải.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra \mathcal{B} độc lập tuyến tính. Vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của \mathcal{B} nên \mathcal{B} là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta sẽ tìm $[u]_{\mathcal{B}}$. Lập ma trận mở rộng

$$\left(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array} \right).$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + y - z \\ -x + z \end{pmatrix}$. Suy ra

$$u = (x - y - z)u_1 + (2x + y - z)u_2 + (-x + z)u_3.$$

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - y - z)f(u_1) + (2x + y - z)f(u_2) + (-x + z)f(u_3) \\ &= (x - y - z)(2, 1, -2) + (2x + y - z)(1, 2, -2) \\ &\quad + (-x + z)(3, 5, -7) \\ &= (x - y, y + 2z, x - 3z). \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho

$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 2); u_2 = (-2, 5, -4); u_3 = (0, -1, 1))$ là một cơ sở của \mathbb{R}^3 . Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ thỏa

$$f(u_1) = (1, 1, -2); f(u_2) = (1, -2, 1); f(u_3) = (1, 2, -1).$$

Đáp án. $f(x, y, z) = (-x + 3y + 4z, -3x + 2z, -3y - 4z)$.

Mệnh đề. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Khi đó f là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ma trận $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = uA$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y, y - 3z, 2x - y + 5z).$$

Chúng ta chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Ta xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó với $u = (x, y, z)$ ta có $f(u) = uA$. Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ.(tự làm) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (-x + 5y + 2z, -2x + 5z, x - 3y - 4z).$$

Chúng ta chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

4.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

- ❶ Không gian nhân
- ❷ Không gian ảnh

4.2.1. Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathbf{Ker}f = \{u \in V \mid f(u) = \mathbf{0}\}$$

Khi đó $\mathbf{Ker}f$ là không gian con của V , ta gọi $\mathbf{Ker}f$ là *không gian nhân* của f .

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa, ta được

$$u \in \mathbf{Ker}f \Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0}.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbf{Ker}f$.

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Giải. Gọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2, -1, 1)$.

Vậy, $\text{Ker } f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, x + 3y + 3z - t, 2x + 3y + 6z + 7t).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Ker } f$.

Hướng dẫn. Xét hệ phương trình thuần nhất với ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z, t) = (-3a - 8b, 3b, a, b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (-3, 0, 1, 0)$ và $u_2 = (-8, 3, 0, 1)$.

Vậy, $\text{Ker } f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (-3, 0, 1, 0); u_2 = (-8, 3, 0, 1)\}$.

4.2.1. Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in V\}.$$

Khi đó $\operatorname{Im} f$ là không gian con của W , ta gọi $\operatorname{Im} f$ là *không gian ảnh* của f .

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa, ta được

$$v \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \text{tồn tại } u \in V \text{ sao cho } f(u) = v.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + 5y, 3x + 4y)$$

và $u = (1, 5, 3)$. Hỏi $u \in \operatorname{Im} f$ không? Tại sao?

Giải. $u \in \text{Im} f \Leftrightarrow f(x, y) = (1, 5, 3)$ có nghiệm. Ta xét

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 5 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$

Ta có hệ phương trình vô nghiệm. Suy ra $u \notin \text{Im} f$.

Định lý. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\text{Im} f$.

Nhận xét. Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở $\text{Im} f$, ta chọn một tập sinh S của V (để đơn giản ta nên chọn cơ sở chính tắc). Khi đó $\text{Im} f$ sinh bởi tập ảnh của S .

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 . Ta có

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, 3),$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 3, 5),$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1).$$

Khi đó $\text{Im} f$ sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó $\text{Im} f$ có cơ sở là $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}.$

Ví dụ. (tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 3x + 2y, 2x + 2y - z, 4x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$.

Định lý. Cho $f : V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính và V hữu hạn chiều. Khi đó

$$\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim V.$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^7)$. Biết số chiều của $\text{Im} f$ là 5, hãy tìm số chiều của $\text{Ker} f$.

Đáp án. 3.

4.3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là cơ sở của V , $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ là cơ sở của W và $f \in L(V, W)$. Ta đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{C}}).$$

Khi đó ma trận P được gọi là **ma trận biểu diễn** của ánh xạ f theo cặp cơ sở \mathcal{B}, \mathcal{C} , ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$).

Nhận xét. Khi $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, ta có phương pháp tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ như sau:

- Tính $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$.
- Đặt $M = (v_1^\top \ v_2^\top \ \dots \ v_m^\top \mid f(u_1)^\top \ f(u_2)^\top \ \dots \ f(u_n)^\top)$.
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan, đưa M về dạng $(I_m \mid P)$
- Khi đó $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P$.

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$,
 $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Giải. Ta có

$$f(u_1) = (0, 3),$$

$$f(u_2) = (-1, 3),$$

$$f(u_3) = (0, 4).$$

Lập

$$\left(v_1^\top \ v_2^\top \mid f(u_1)^\top \ f(u_2)^\top \ f(u_3)^\top \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -6 & -4 \end{array} \right).$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. (tự làm) Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, -y + 2z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$
 $\mathcal{C} = \{u'_1 = (1, 2), u'_2 = (3, 5)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -18 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là cơ sở của V và $f \in L(V)$. Khi đó ma trận $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ được gọi là **ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính** f , ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$. Rõ ràng

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{B}})$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x - 4y + 3z, 2x - y - z)$$

và \mathcal{B}_0 là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 . Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$.

Đáp án.

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong không gian \mathbb{R}^3 cho các vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

- a Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- b Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Định lý. Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở của V và W . Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ ta có

$$\textcircled{i} \quad \forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

$$\textcircled{ii} \quad [f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = (\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C})[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$$

Hệ quả. Cho \mathcal{B} và \mathcal{B}' là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V . Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có

$$\textcircled{i} \quad \forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

$$\textcircled{ii} \quad [f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$$

Ví dụ. Trong không gian \mathbb{R}^3 cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z). \text{ Tìm } [f]_{\mathcal{B}}.$$

Giải. Gọi \mathcal{B}_0 là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 , ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta được

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}} &= (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) \\&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1); v_2 = (2, 1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f .

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

● $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.

● $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.

● $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

$$\text{Lập } (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x + y + z \\ 0 & 1 & 0 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & x - z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y \\ x - z \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned}f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\&= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\&= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z).\end{aligned}$$

Cách 2. Gọi \mathcal{B}_0 và \mathcal{C}_0 lần lượt là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 và \mathbb{R}^2 . Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0).$$

Ta có

$$\begin{aligned}\bullet (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} &= (\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}) = (v_1^\top \ v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ \bullet (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) &= (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa } (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Ví dụ.(tự làm) Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian \mathbb{R}^3 được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3).$$

- a Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .
- b Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$