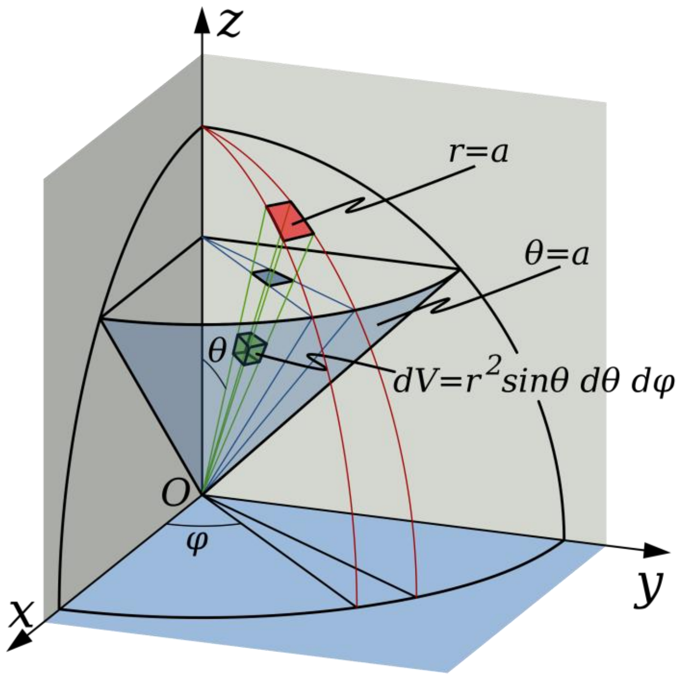
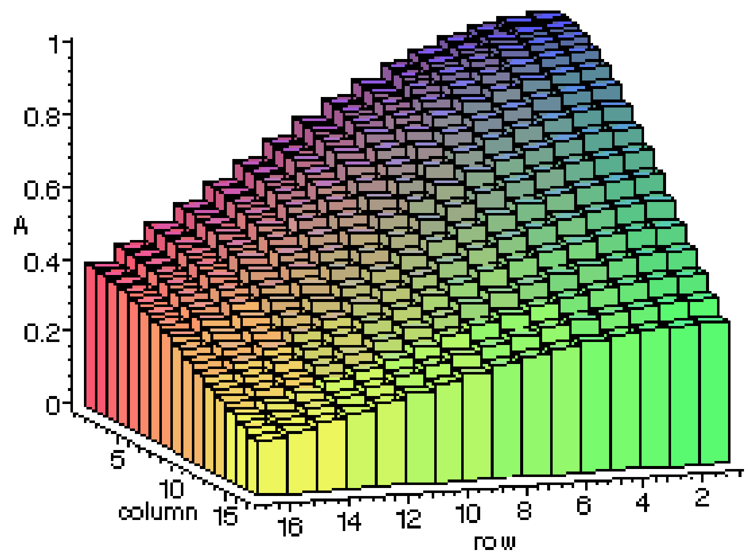
Bộ môn Giải tích, khoa Toán-Tin học, Đhkhtn tpHCM

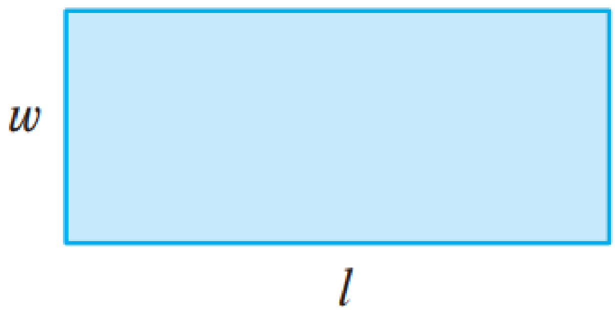
Tuần 5: Tích phân nhiều lớp (tích phân bội)



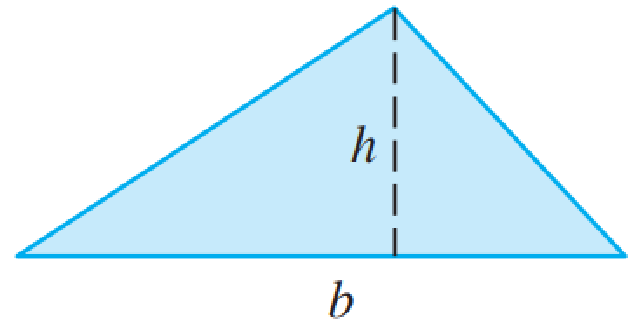


Nhắc lại khái niệm tích phân 1 lớp

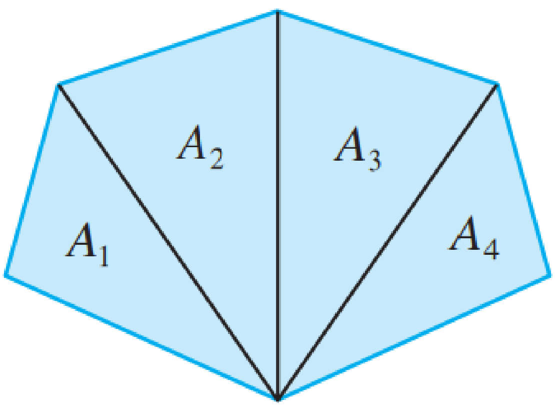
Diện tích là gì?



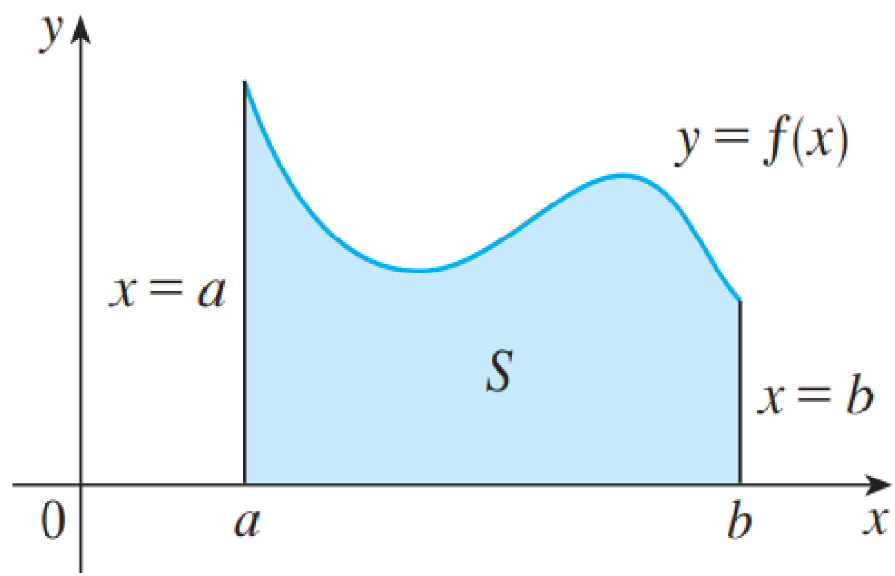
$A = lw$



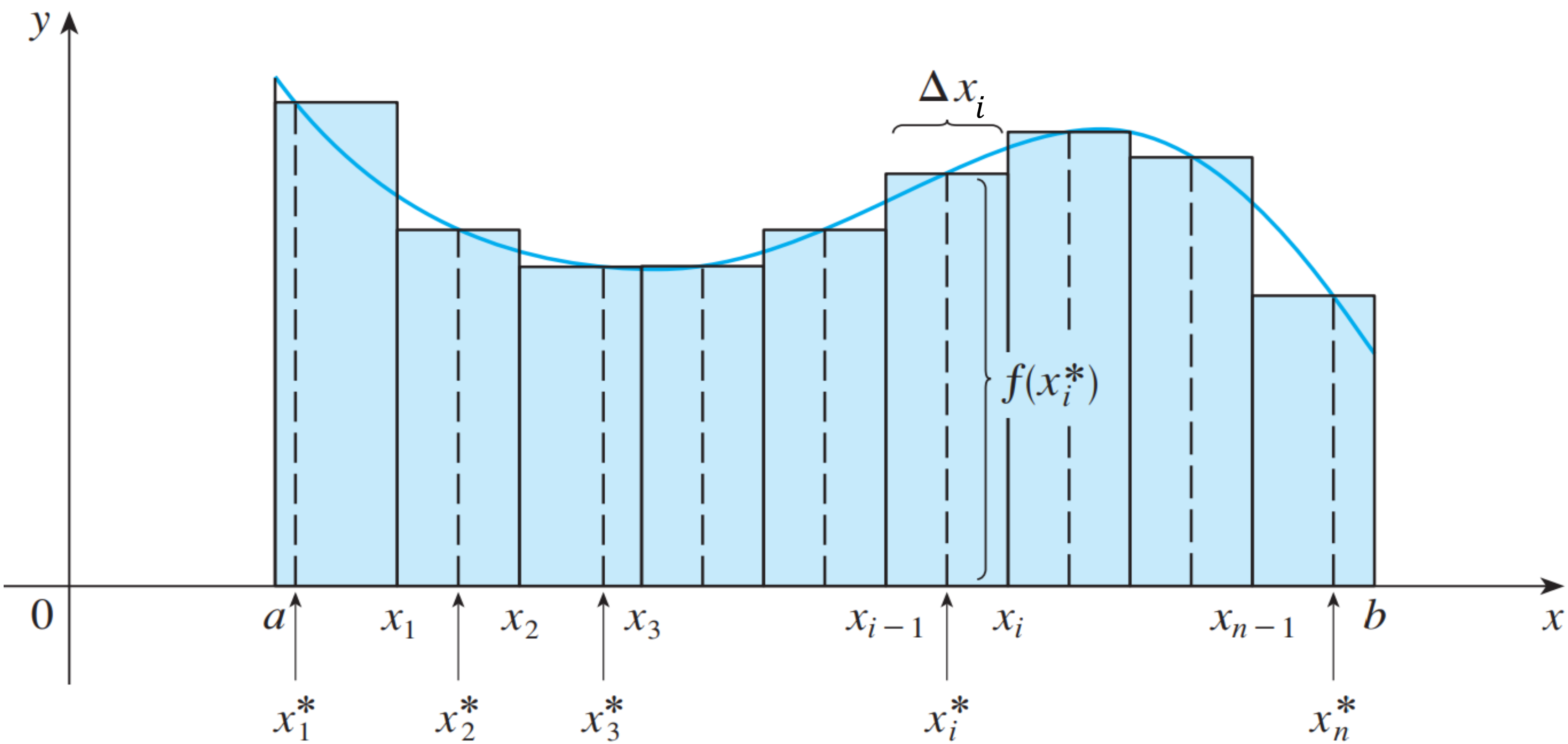
$A = \frac{1}{2}bh$



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$



Vài khái niệm để định nghĩa tích phân



Vài khái niệm để định nghĩa tích phân

- Ta nói *phân hoạch* của đoạn $[a;b]$ là các số $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn con $[x_{i-1};x_i]$, độ dài của mỗi đoạn con là $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ với $i = \overline{1,\dots,n}$.
- Ta nói *độ mịn* của phân hoạch trên là số lớn nhất trong các độ dài của các đoạn con, tức là số $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Độ mịn càng nhuyễn (nhỏ) thì số điểm chia càng nhiều, đồng thời độ dài đoạn con càng nhỏ.
- Lấy trên mỗi đoạn con một *điểm đại diện* (hay *điểm mẫu*) $x_i^* \in [x_{i-1};x_i]$ bất kỳ, thì tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

được gọi là *tổng Riemann của f* (cũng được gọi là *tổng tích phân*) trên đoạn $[a;b]$.

- Trường hợp hàm số $f \ge 0$ trên đoạn $[a;b]$ thì tổng Riemann của f là tổng diện tích các hình chữ nhật trong hình được trình bày ở trước.

Vài khái niệm để định nghĩa tích phân

- Nếu điểm đại diện là biên trái của đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$, tức là $x_i^* = x_{i-1}$, thì tổng Riemann được ký hiệu là

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i \quad \text{(chữ L ám chỉ từ "Left").}$$

- Nếu điểm đại diện là biên phải, $x_i^* = x_i$, của đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$ thì tổng Riemann tương ứng được ký hiệu là

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \text{ (chữ R ám chỉ từ "Right").}$$

- Nếu điểm đại diện là trung điểm $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ của đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$ thì tổng Riemann tương ứng được ký hiệu là

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \quad \text{(chữ M ám chỉ từ "Midpoint").}$$

Định nghĩa tích phân

Định nghĩa. Ta nói hàm số f *khả tích* trên đoạn $[a;b]$ có nghĩa tồn tại một số thực, được ký hiệu bởi $\int_a^b f$, thỏa điều sau:

Với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho nếu phân hoạch của đoạn $[a;b]$ có độ mịn nhỏ hơn δ thì

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i - \int_a^b f\right| < \varepsilon, \text{ trong đó } x_i^* \text{được chọn tùy ý.}$$

Khi đó, số $\int_a^b f$, cũng được viết là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, được gọi là *tích phân* của f trên đoạn $[a;b]$.

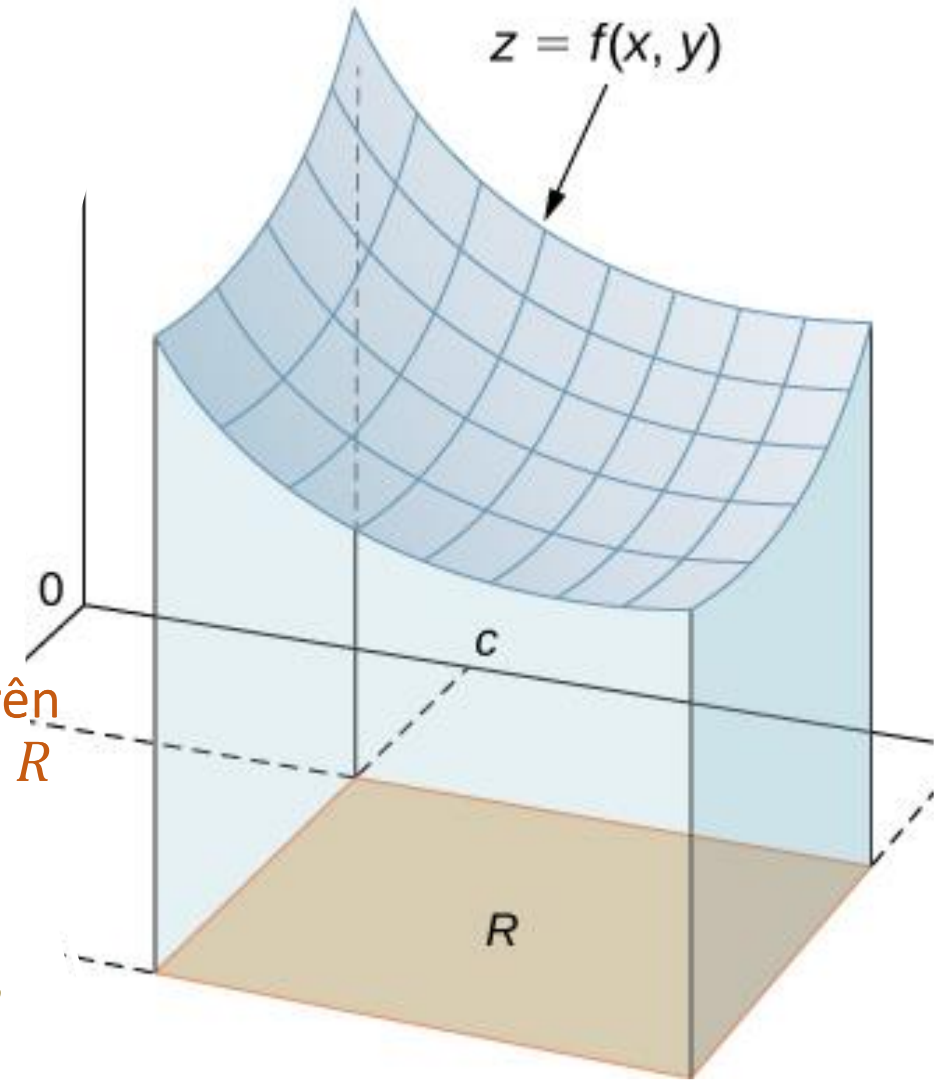
Định nghĩa tích phân

- Nói một cách vắn tắt, tích phân của f trên đoạn $[a;b]$ là một số mà tổng Riemann của f có thể gần nó tùy ý, miễn là lấy phân hoạch của đoạn $[a;b]$ đủ mịn.
- Chữ “S kéo dãn” ký hiệu cho tích phân, do Leibniz đưa ra, hàm ý rằng S là viết tắt của từ “sum”, ám chỉ tổng Riemann, sau khi cho độ mịn phân hoạch tiến về 0 thì ta được tích phân.

Tích phân kép trên hình chữ nhật

Thể tích hình khối kế bên là bao nhiêu?

Tích phân f trên hình chữ nhật R



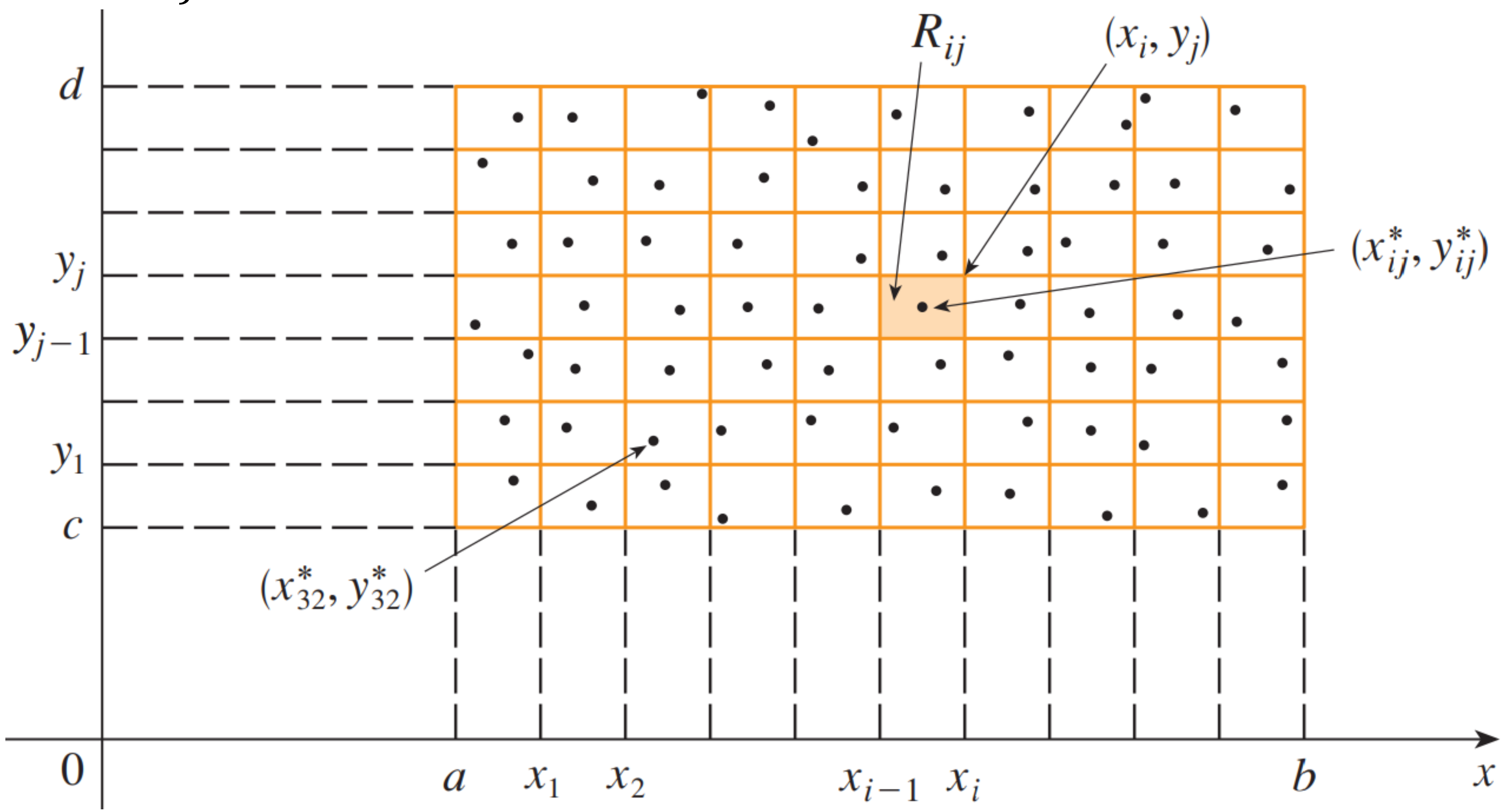
Quy ước tên tài liệu:

[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th*, tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)

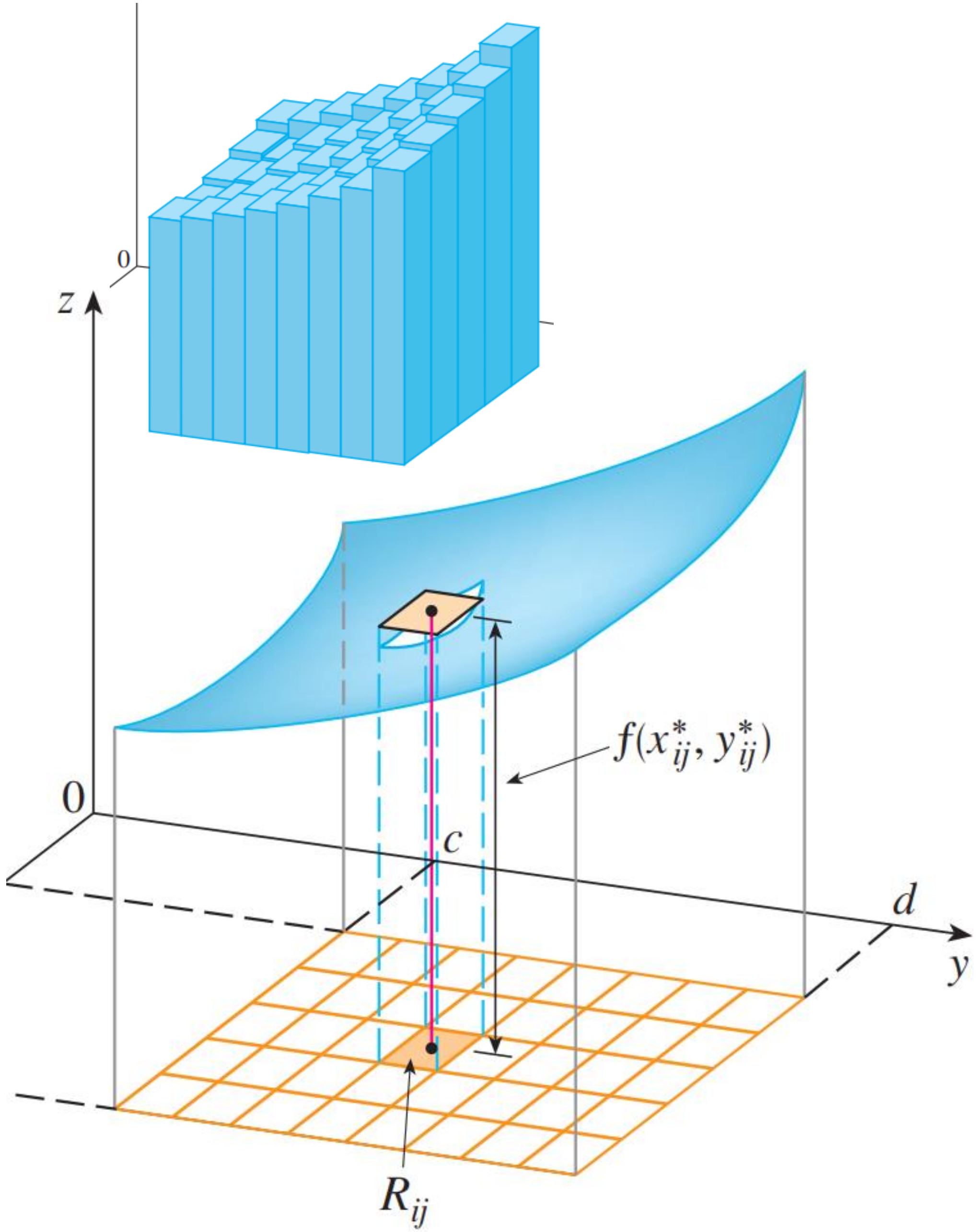
Tích phân hàm 2 biến trên hình chữ nhật

- Cho hình chữ nhật $R = [a; b] \times [c; d]$. Chia $[a; b]$ thành n đoạn con $[x_{i-1}; x_i]$ có độ dài $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, với $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Chia $[c; d]$ thành m đoạn con $[y_{j-1}; y_j]$ có độ dài $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, với $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d$. Tập $\mathcal{P} = \{(x_i; y_j) \mid i = \overline{1; n}, j = \overline{1; m}\}$, bao gồm các "nút mạng", được gọi là *phân hoạch* của R.



Tích phân hàm 2 biến trên hình chữ nhật

- Tích Descartes của các đoạn con này sẽ tạo ra mn hình chữ nhật con $R_{ij} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j]$, $i = \overline{1; n}$, $j = \overline{1; m}$.
- Diện tích của hình chữ nhật con là $|R_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$.
- Xét hàm số f xác định trên hình chữ nhật R, chọn một điểm đại diện $(x_{ij}^*; y_{ij}^*) \in R_{ij}$ tùy ý, thì tổng $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*; y_{jj}^*)|R_{ij}|$ được gọi là *tổng Riemann* của f trên hình chữ nhật R.



Tích phân hàm 2 biến trên hình chữ nhật

Định nghĩa. Ta nói f *khả tích* trên hình chữ nhật R khi có một số thực, được ký hiệu là $\int_R f$, thỏa tính chất:

Với mọi $\varepsilon > 0$, luôn có số $\delta > 0$ sao cho bất kỳ phân hoạch nào của R có độ mịn nhỏ hơn δ (độ dài nhất của các đoạn con nhỏ hơn δ),

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}^{*}; y_{jj}^{*}\right)\left|R_{ij}\right| - \int_R f\right| < \varepsilon.$$

- Khi f khả tích thì số $\int_R f$ được gọi là *tích phân* của f trên R.
- Khi f khả tích thì tổng Riemann sẽ là giá trị xấp xỉ của tích phân, vì sai lệch giữa chúng có thể nhỏ hơn số $\varepsilon > 0$ tùy ý, miễn là lấy phân hoạch đủ mịn (kích thước các hình chữ nhật con đủ nhỏ).
- Khi $f \geq 0$ và f khả tích trên R thì $\int_R f$ được xem là thể tích phần không gian phía dưới đồ thị của f và phía trên R.

Bài tập mẫu

- Một hồ nước hình chữ nhật kích thước $4\mathrm{m} \times 8\mathrm{m}$ có độ sâu không đều. Người ta đo được chiều sâu tại một số điểm trên hồ như trong bảng sau. Ví dụ trong bảng này độ sâu tại điểm cách bờ trái $5\mathrm{m}$ và bờ trên $1\mathrm{m}$ là $4{,}6\mathrm{m}$. Hãy ước lượng lượng nước trong hồ.

Vị trí	1	3	5	7
1	3,1	4,5	4,6	4,0
3	3,7	4,1	4,5	4,4

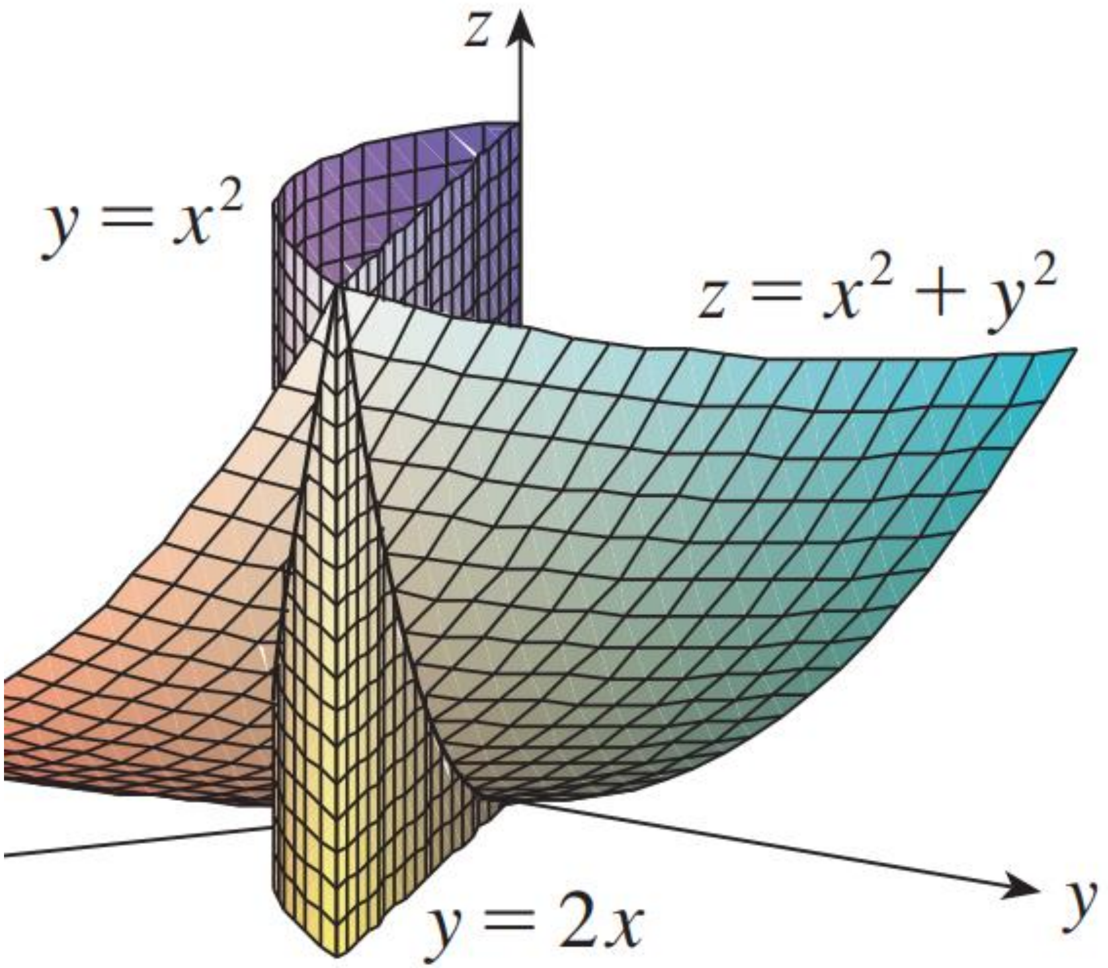
- Bài tập [1], 2.1.2.
- Tham khảo thêm bài tập trong [2], mục 15.1.
- Phác họa hình khối có thể tích cho bởi

$$\iint_{[0;1]\times[0;1]} (4 - x - 2y)\mathrm{d}A\,; \quad \iint_{[0;1]\times[0;1]} (2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}A\,.$$

- Phác họa hình khối có thể tích bằng $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\mathrm{d}A$, với $R = [0; 4] \times [0; 2]$.

Thể tích khối bị bao quanh bởi các mặt $y = x^2, y = 2x,$ $z = 0, z = x^2 + y^2$ là bao nhiêu?

Tích phân trên miền phẳng tổng quát



Tính tích phân hàm số $f(x; y) = x^2 + y^2$ trên miền phẳng bị bao bởi hai đường $y = x^2; y = 2x$, là miền không có dạng hình chữ nhật.

Tích phân hàm 2 biến trên miền phẳng tổng quát

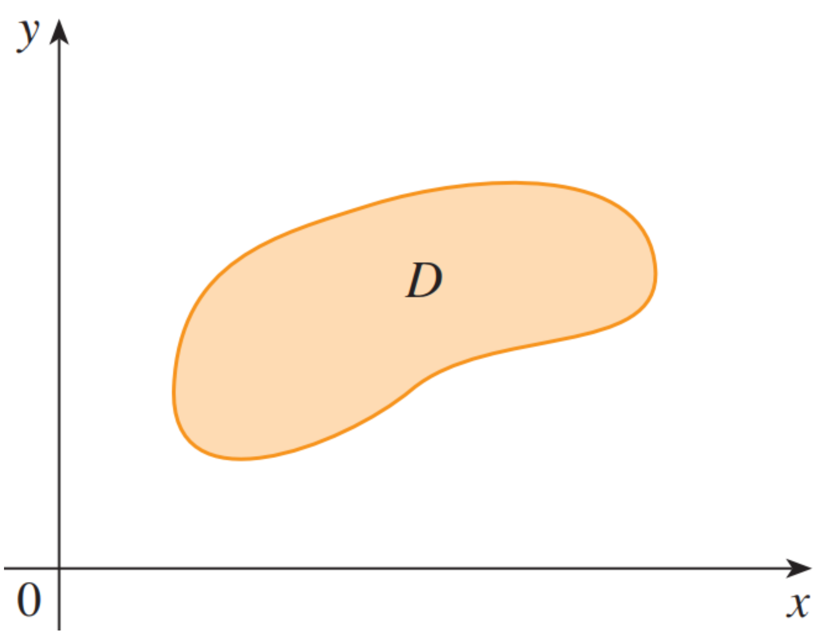
Giả sử f là hàm số hai biến xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, miền D nằm trong một hình chữ nhật R.

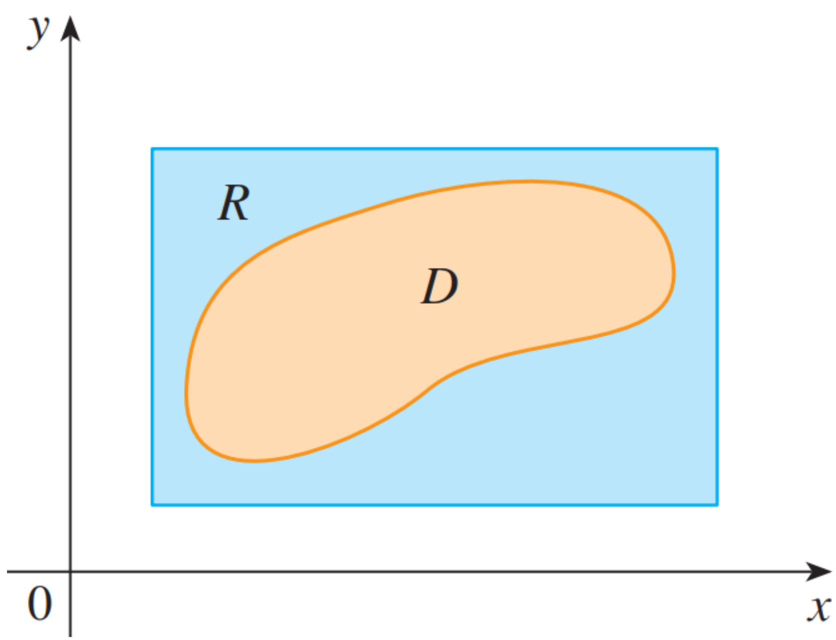
Đặt F là hàm số định bởi

$$F(x;y) = \begin{cases} f(x;y) & \text{nếu } (x;y) \in D, \\ 0 & \text{nếu } (x;y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Nếu F khả tích trên R thì ta nói f khả tích trên D và viết

$$\int_D f = \int_R F.$$





Diện tích của một miền phẳng tổng quát

- Với miền phẳng D trong $\mathbb{R}^2$, ta định nghĩa trị số diện tích của D là $|D| = \int_D 1$, *miễn là hàm hằng 1 khả tích trên D*. Khi đó ta nói tập D có diện tích. Trị số diện tích của D bằng trị số thể tích của khối nằm trên D, dưới mặt phẳng $z = 1$ (mặt cách D một độ cao bằng 1).
- Không phải miền phẳng nào cũng có thể xác định được diện tích, vì không phải lúc nào một hàm số f nói chung, hàm hằng 1 nói riêng, khả tích trên D. Việc khảo sát điều kiện để một hàm khả tích trên miền phẳng D tổng quát vượt ngoài phạm vi giáo trình này. *Các hàm cần lấy tích phân trong giáo trình này được mặc định là khả tích*.

Tập hợp có diện tích không

Trong phạm vi giáo trình này, ta chấp nhận các kết quả sau mà không chứng minh.

Định lý.

- Tập tập hợp D trong $\mathbb{R}^2$ có diện-tích-0 (còn gọi là *tập không đáng kể*) khi và chỉ khi nó có thể được phủ bởi hữu hạn các ô chữ nhật có tổng diện tích nhỏ hơn một số bất kỳ cho trước.
- Một tập trong $\mathbb{R}^2$ có diện tích khi và chỉ khi tập biên ∂D của nó có diện-tích-0.
- Nếu hàm số f xác định và bị chặn trên một tập D bị chặn và có diện tích trong $\mathbb{R}^2$, hơn nữa tập hợp các điểm gián đoạn của f là không đáng kể, thì f khả tích trên D, đồng thời đồ thị của f là tập hợp có thể tích 0 trong $\mathbb{R}^3$. (Khái niệm thể-tích-0 được nói sau.)
- Đồ thị của hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là đường cong có diện-tích-0 trong $\mathbb{R}^2$. Đồ thị của hàm số 2 biến liên tục trên hình chữ nhật là mặt cong có thể-tích-0 trong $\mathbb{R}^3$.

Tính chất của tích phân

Giả sử f và g là hai hàm số khả tích trên $D \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó

- Tổng $f + g$, hiệu $f - g$ cũng khả tích trên D và

$$\int_D (f \pm g) = \int_D f \pm \int_D g\,.$$

- Với mọi hằng số thực c thì cf cũng khả tích và

$$\int_D c = c|D|; \quad \int_D cf = c\int_D f\,.$$

- Nếu $\forall \mathbf{x} \in D \setminus D_0, f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ và D_0 có diện−tích−0 thì

$$\int_D f \leq \int_D g\,.$$

- Nếu $\forall \mathbf{x} \in D \setminus D_0, f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, D_0 có diện-tích-0 thì $\int_D f = \int_D g$.
- Nếu D_1 và D_2 là hai miền mà phần giao của chúng có diện-tích-0 thì

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f\,.$$

Bài tập mẫu

- Tính tích phân của các hàm sau

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } 0 \le x \le 1,\ x \ne \frac{1}{2} \\ 0 & \text{nếu } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $f(x;y) = \begin{cases} 4 & \text{nếu } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, (x;y) \ne (\frac{1}{2};\frac{1}{2}) \\ 5 & \text{nếu } (x;y) = (\frac{1}{2};\frac{1}{2}) \end{cases}$

- Bài tập trong [1], bài 2.1.3→2.1.6.

Tích phân của hàm nhiều biến tổng quát

- Ta xây dựng định nghĩa tích phân cho hàm nhiều biến tổng quát tương tự như tích phân của hàm 2 biến.
- Bắt đầu từ định nghĩa tích phân trên hình hộp đa chiều, ta sẽ định nghĩa tích phân trên một miền trong $\mathbb{R}^n$.

Tích phân trên hình hộp đa chiều

- Một hộp R n-chiều là tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng tích Descartes $R = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \cdots \times [a_n; b_n]$. Trong đó $[a_k; b_k]$ là đoạn ở chiều thứ k. *Thể tích n-chiều* của R là $|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.
- Đoạn ở chiều thứ k, $1 \leq k \leq n$, được chia thành m_k đoạn con với các điểm chia là $a_k = x_{k0} < x_{k1} < \cdots < x_{km_k} = b_k$. Tập $\mathcal{P}_k = \{x_{k0}; x_{k1}; \dots; x_{km_k}\}$ được gọi là *phân hoạch* của đoạn $[a_k; b_k]$.
- Tích Descartes $\mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ chứa các điểm "nút mạng" của hộp R, được gọi là *phân hoạch* của hộp R. Chúng chia R thành $m_1 m_2 \cdots m_n$ hộp con n-chiều được ký hiệu chung là $R_c \subset R$. Thể tích của các hộp con được ký hiệu là $|R_c|$.
- Chọn một điểm đại diện tùy ý trong hộp con là $\mathbf{x}_{Rc} \in R_c$. Giả sử f là hàm số n biến xác định trên hộp R thì *tổng Riemann* của f trên R là $\sum_{\forall R_c} f(\mathbf{x}_{Rc}) \cdot |R_c|$, tổng này được lấy trên tất cả các hộp con của R.

Tích phân trên hộp đa chiều

Định nghĩa. Ta nói hàm số f *khả tích* trên hình hộp R *n*-chiều khi tồn tại một số thực, được ký hiệu bởi $\int_R f$, thỏa điều sau:

Với mọi số $\varepsilon > 0$, luôn có số $\delta > 0$ sao cho khi một phân hoạch bất kỳ của R có độ mịn nhỏ hơn δ (tức là độ dài lớn nhất trong số các độ dài của các đoạn con tạo bởi phân hoạch nhỏ hơn δ), thì

$$\left|\sum_{\forall R_c} f(\mathbf{x}_{Rc}) \cdot |R_c| - \int_R f\right| < \varepsilon.$$

- Khi f khả tích thì số $\int_R f$ được gọi là *tích phân* của f trên R.
- Khi f khả tích thì tổng Riemann sẽ là giá trị xấp xỉ của tích phân, vì sai lệch giữa chúng nhỏ hơn số $\varepsilon > 0$ tùy ý, miễn là lấy phân hoạch đủ mịn (kích thước các hộp con *n*-chiều đủ nhỏ).
- Khi $n = 2$, ta hay viết $\int_R f(x;y)\mathrm{d}A$ hay $\int_R f(x;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ thay cho $\int_R f$
- Khi $n = 3$, ta hay viết $\int_R f(x;y;z)\mathrm{d}V$ hay $\int_R f(x;y;z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ thay cho $\int_R f$, được gọi là tích phân bội ba, hay ba lớp.

Tích phân trên miền đa chiều tổng quát.

- Một miền $D \subset \mathbb{R}^n$ bị giam trong hình hộp n-chiều R và f là hàm số xác định trên D. Khi đó, ta xét hàm số F định bởi

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{nếu } \mathbf{x} \in D, \\ 0 & \text{nếu } \mathbf{x} \in R \setminus D. \end{cases}$$

Nếu F khả tích trên R thì ta nói f khả tích trên D và đặt

$$\int_D f = \int_R F.$$

- *Thể tích n-chiều* của D được định nghĩa là $|D| = \int_D 1$ nếu hàm hằng 1 khả tích trên D (lúc đó D được gọi là *có thể tích*).

- Điều kiện để hàm hằng 1 khả tích trên D, hoặc một hàm f khả tích trên D, nằm ngoài phạm vi khảo sát của giáo trình này. *Các hàm số được lấy tích phân trong giáo trình này được mặc định là khả tích, miền tích phân có thể tích*.

Tập hợp có thể tích không

Trong phạm vi giáo trình này, ta chấp nhận các kết quả sau mà không chứng minh.

Định lý.

- Tập tập hợp D trong $\mathbb{R}^n$ có thể-tích-0 (còn gọi là *tập không đáng kể*) khi và chỉ khi nó có thể được phủ bởi hữu hạn các hình hộp n-chiều có tổng thể tích nhỏ hơn một số bất kỳ cho trước.
- Một tập trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích khi và chỉ khi tập biên ∂D của nó có thể-tích-0.
- Nếu hàm số f xác định và bị chặn trên một tập D bị chặn và có thể tích trong $\mathbb{R}^n$, hơn nữa tập hợp các điểm gián đoạn của f có thể tích 0, thì f khả tích trên D, đồng thời đồ thị của f là tập hợp có thể tích 0 trong $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Đồ thị của hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là đường cong có diện-tích-0 trong $\mathbb{R}^2$. Đồ thị của hàm số 2 biến liên tục trên hình chữ nhật là mặt cong có thể-tích-0 trong $\mathbb{R}^3$.

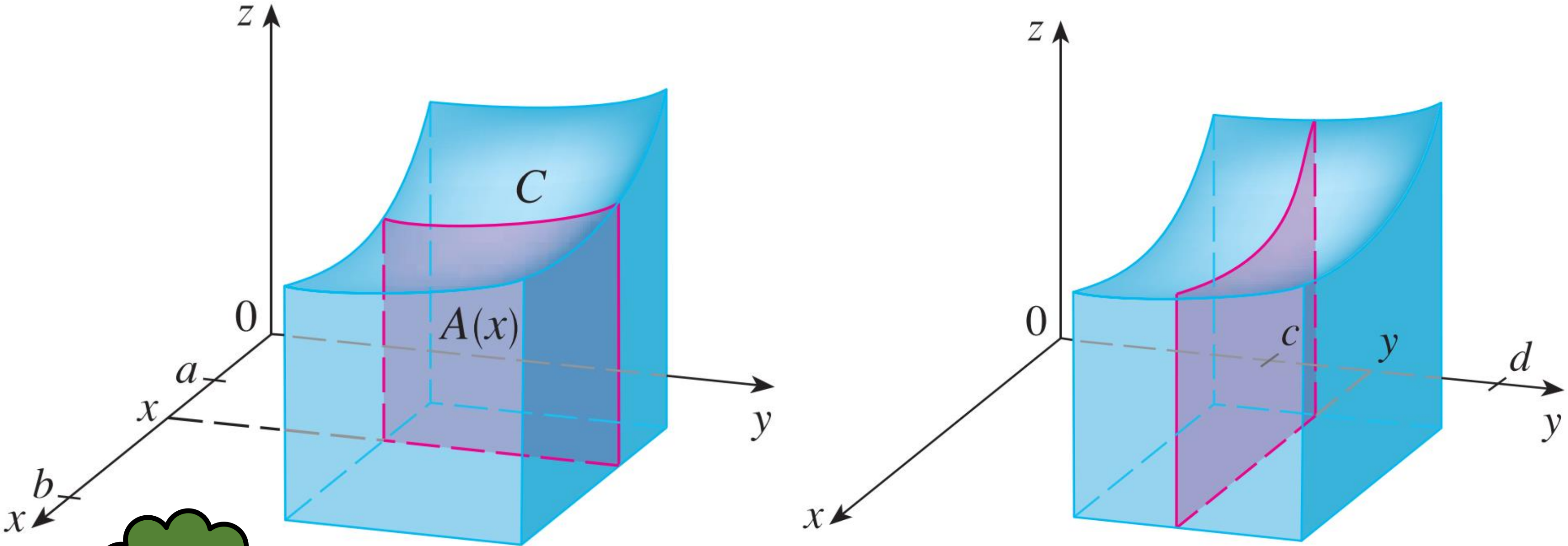
Tính chất của tích phân

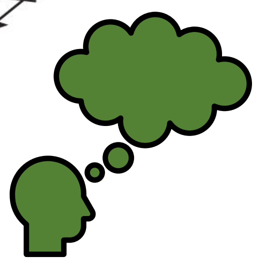
Giả sử f và g là hai hàm số khả tích trên $D \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó

- Tổng $f+g$, hiệu $f-g$ cũng khả tích trên D và
$$\int_D (f \pm g) = \int_D f \pm \int_D g\,.$$
- Với mọi hằng số thực c thì cf cũng khả tích và
$$\int_D c = c|D|; \quad \int_D cf = c\int_D f\,.$$
- Nếu $\forall \mathbf{x} \in D \setminus D_0, f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$ và D_0 có thể−tích−0 thì
$$\int_D f \le \int_D g\,.$$
- Nếu $\forall \mathbf{x} \in D \setminus D_0, f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, D_0 có thể-tích-0 thì $\int_D f = \int_D g$.
- Nếu D_1 và D_2 là hai miền mà phần giao của chúng có thể-tích-0 thì
$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f\,.$$

Bài tập mẫu

- Bài tập [1], 2.1.7→2.1.10.





Định lý Fubini

Thể tích khối nằm dưới đồ thị hàm số hai biến và nằm trên tập xác định là hình chữ nhật, có thể được tính theo kỹ thuật cắt lớp: cắt vuông góc trục Ox hoặc cắt vuông góc trục Oy, kết quả tính thể tích có khác không?

Định lý Fubini trên miền hình chữ nhật

Định lý Fubini. Giả sử f là hàm số liên tục trên hình chữ nhật $R = [a;b] \times [c;d] \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó

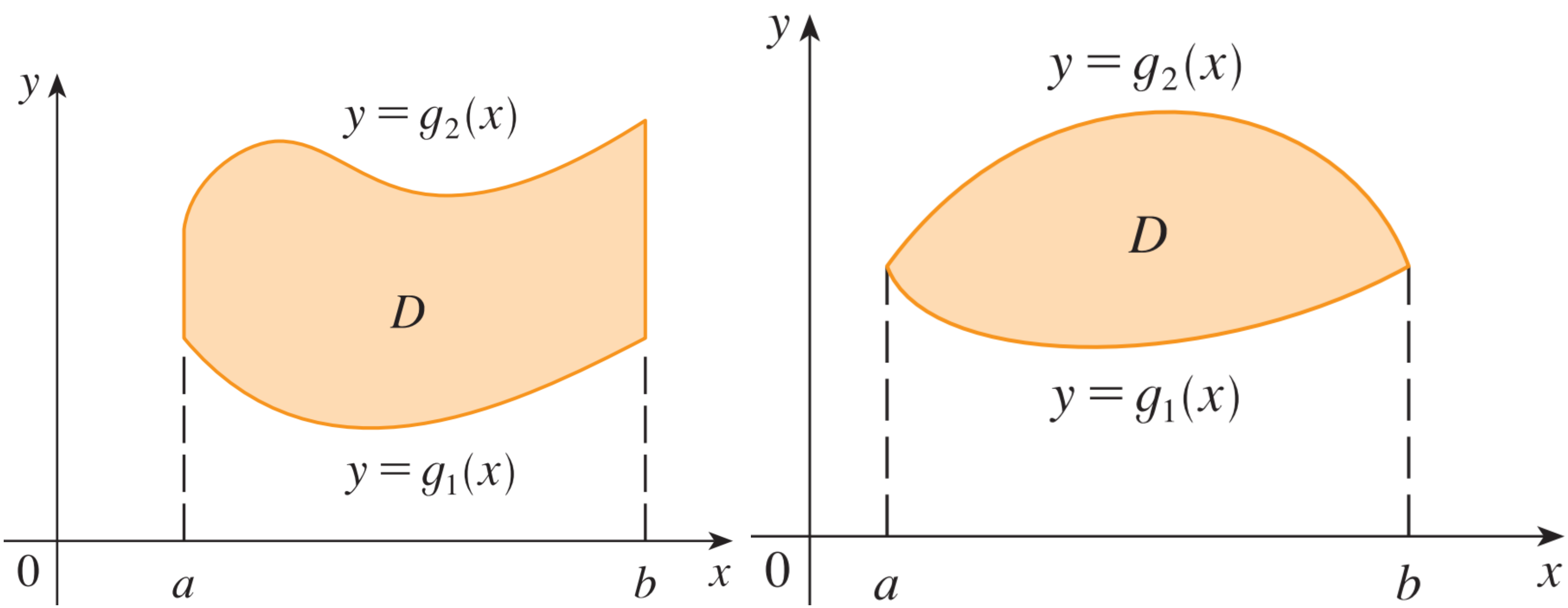
$$\int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x;y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x .$$

- Tích phân $\int_a^b f(x;y)\mathrm{d}x$ là diện tích thiết diện của khối mà thiết diện này vuông góc trục Oy tại $y \in [c;d]$ (nếu xét $f \geq 0$).
- Tích phân $\int_c^d f(x;y)\mathrm{d}y$ là diện tích thiết diện của khối mà thiết diện này vuông góc trục Ox tại $x \in [a;b]$ (nếu xét $f \geq 0$).
- Tích phân $\int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ được viết gọn là $\int_c^d \int_a^b f(x;y)\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, còn được gọi là *tích phân lặp* được lấy theo biến *x* trước, *y* sau. Tương tự cho $\int_a^b \int_c^d f(x;y)\mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.

Định lý Fubini trên miền phẳng đơn giản.

Giả sử hàm số hai biến f liên tục trên một miền *đơn giản theo phương Oy*, $D = \{(x;y) \mid x \in [a;b],\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, trong đó g_1 và g_2 là hai hàm số liên tục. Khi đó

$$\int_D f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$



Định lý Fubini trên miền phẳng đơn giản

Ví dụ. Hãy tính $\int_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}A$ với D là miền phẳng bị bao quanh bởi các đường $y = 2x$ và $y = x^2$.

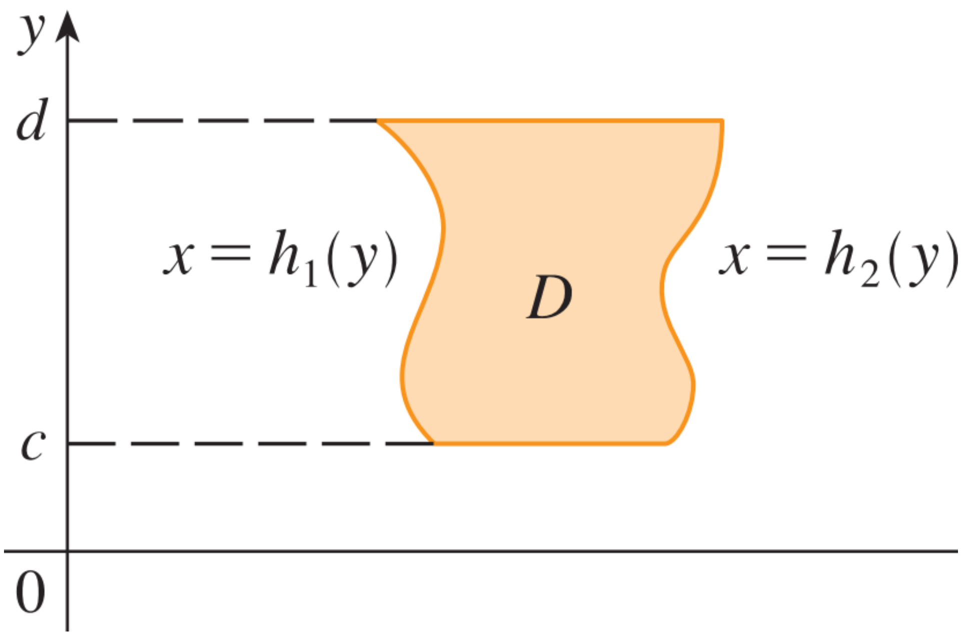
Hướng dẫn. Hãy thực hiện các bước sau tại lớp:

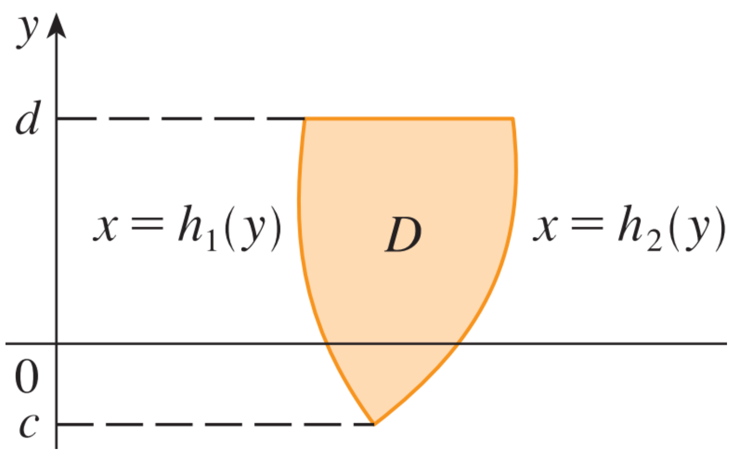
- Tìm giao điểm của hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$ và phác họa chúng.
- Để biểu diễn D là miền đơn giản theo phương Oy, hãy cố định giá trị x và vẽ đường thẳng vuông góc Ox tại x, xét xem phần đường thẳng nằm trong miền D là đoạn thẳng nào?
- Các điểm $(x; y)$ trong đoạn thẳng trên có tung độ y trong đoạn nào?
- Đưa $\int_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}A$ về tích phân lặp, lấy tích phân theo biến y trước, x sau.

Định lý Fubini trên miền phẳng đơn giản

Giả sử hàm số hai biến f liên tục trên một miền *đơn giản theo phương Ox*, $D = \{(x; y) \mid y \in [c; d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$, trong đó h_1 và h_2 là hai hàm số liên tục. Khi đó

$$\int_D f = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x; y)\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$





Định lý Fubini trên miền phẳng đơn giản

Trở lại ví dụ trước. Hãy tính $\int_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}A$ với D là miền phẳng bị bao quanh bởi các đường $y = 2x$ và $y = x^2$.

Hướng dẫn. Hãy thực hiện các bước sau tại lớp:

- Tìm giao điểm của hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$ và phác họa chúng.
- Để biểu diễn D là miền đơn giản theo phương Ox, hãy cố định giá trị y và vẽ đường thẳng vuông góc Oy tại y, xét xem phần đường thẳng nằm trong miền D là đoạn thẳng nào?
- Các điểm $(x; y)$ trong đoạn thẳng trên có hoành độ x trong đoạn nào?
- Đưa $\int_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}A$ về tích phân lặp, lấy tích phân theo biến x trước, y sau.

Bài tập mẫu

- Tính thể tích khối nằm dưới mặt hyperbolic paraboloid $z = 4 + x^2 - y^2$ và trên hình vuông $R = [-1; 1] \times [0; 2]$.
- Tính thể tích khối nằm dưới mặt eliptic paraboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ và trên hình chữ nhật $R = [-1; 1] \times [-2; 2]$.
- Tính $\iint_D x \cos y \, \mathrm{d}A$, D là miền được bao bởi các đường $y = 0$, $y = x^2$ và $x = 1$.
- Tính $\iint_D y^3 \, \mathrm{d}A$ với D là tam giác có các đỉnh $(0; 2)$, $(1; 1)$ và $(3; 2)$.
- Tính $\iint_D 2xy \mathrm{d}A$ với D là hình tam giác có các đỉnh $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 3)$.

Tính thể tích khối được mô tả như sau:

- Dưới mặt $z = 2x + y^2$ và trên miền bị bao bởi các đường $x = y^2$, $x = y^3$.
- Bị bao bởi các mặt $z = x^2 + 3y^3$, $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ và $z = 0$.

Bài tập mẫu

- Bị bao bởi các mặt $z = x^2$, $y = x^2$, $z = 0$ và $y = 4$.

Tính thể tích khối bằng hiệu hai thể tích:

- Khối bị bao bởi các mặt $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$, $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.
- Khối bị bao bởi các mặt $y = x^2$, $z = 3y$ và $z = 2 + y$.

Với f là hàm số liên tục, hãy phác họa miền lấy tích phân và đổi thứ tự trong các tích phân lặp sau:

$$a)\ \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x;y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^1 \int_{4x}^4 f(x;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$c)\ \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad d)\ \int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x;y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$e)\ \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad f)\ \int_0^1 \int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} f(x;y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Bài tập mẫu

Tính các tích phân sau:

$$a)\ \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad b)\ \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$c)\ \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad d)\ \int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

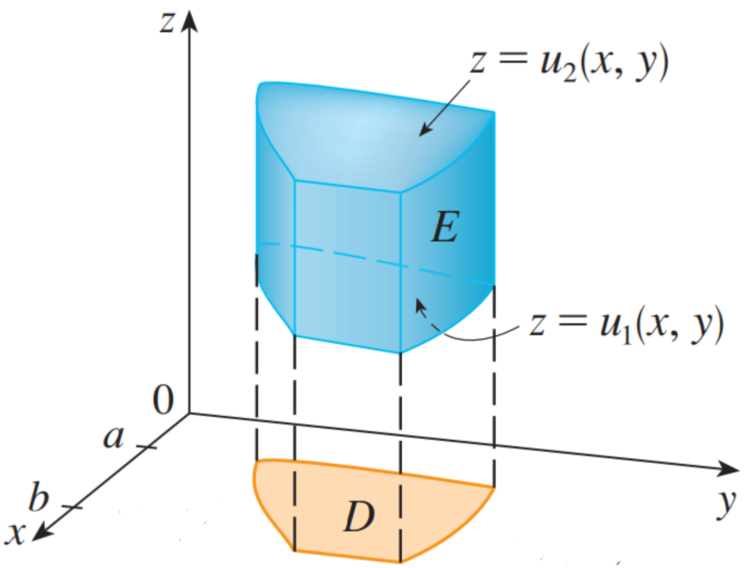
$$f)\ \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad e)\ \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos\left(x\sqrt{1+\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Tham khảo thêm các bài tập [1], 2.2.1→4.
- Tham khảo các bài tập [2] mục 15.3.

Định lý Fubini cho miền 3 chiều đơn giản

Cho miền $D \subset \mathbb{R}^2$ với $|D| \neq 0$. Xét miền $E \subset \mathbb{R}^3$ đơn giản theo Oz, $E = \{(x; y; z) \mid (x; y) \in D, u_1(x; y) \leq z \leq u_2(x; y)\}$. Giả sử hàm số f (xác định trên E), hàm số u_1, u_2 (xác định trên D) là các hàm số liên tục và bị chặn. Khi đó

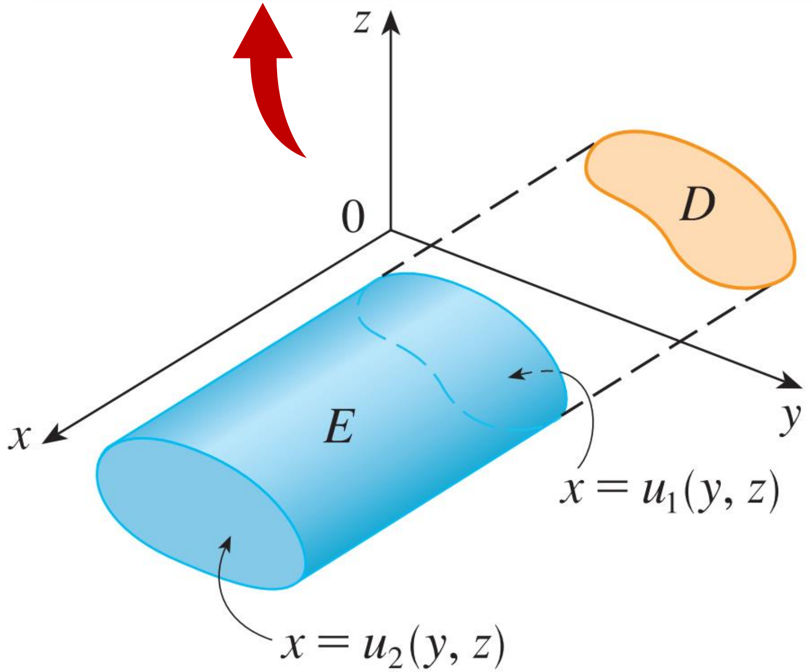
$$\int_E f = \int_D \left(\int_{u_1(x;y)}^{u_2(x;y)} f(x; y; z) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

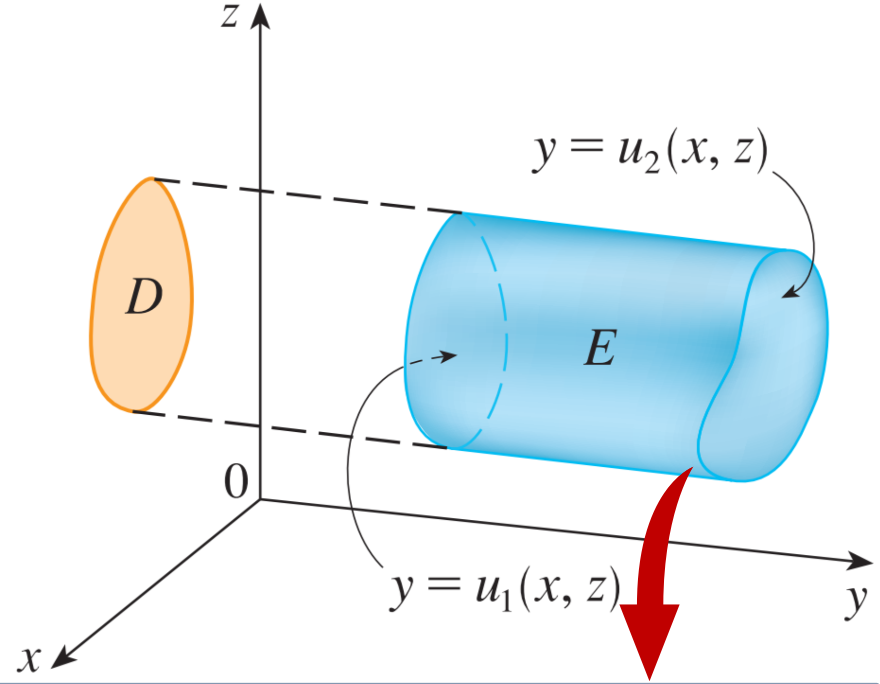


- Công thức Fubini ở trên được viết tương tự cho trường hợp E là miền ba chiều đơn giản theo Ox hoặc Oy.

Định lý Fubini cho miền 3 chiều đơn giản

$$\int_E f = \int_D \left(\int_{u_1(y;z)}^{u_2(y;z)} f(x;y;z)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}A$$

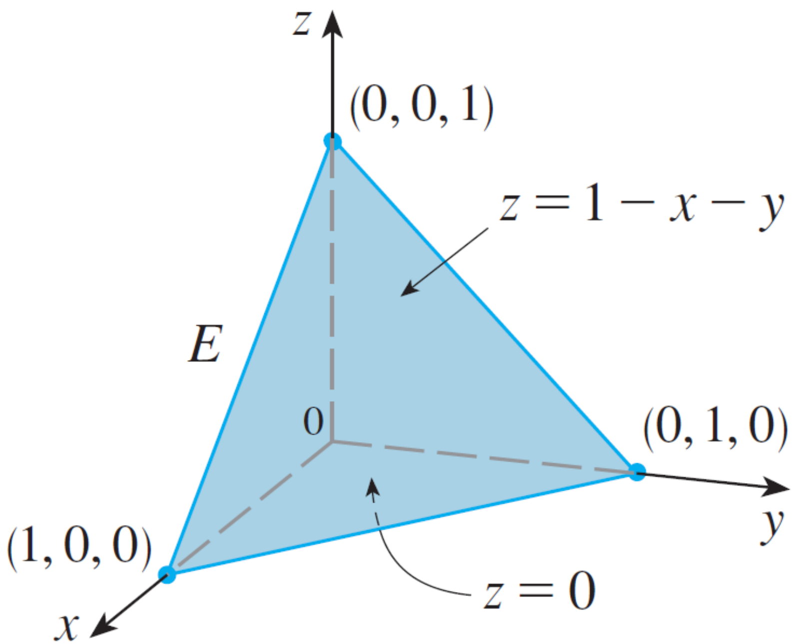




$$\int_E f = \int_D \left(\int_{u_1(x;z)}^{u_2(x;z)} f(x;y;z)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}A$$

Định lý Fubini cho miền 3 chiều đơn giản

Ví dụ. Tìm $\int_E z\mathrm{d}V$ với E là khối tứ diện bị bao quanh bởi các mặt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và $x + y + z = 1$.



Giải. Xem hình bên, ta có thể xem khối E đơn giản theo phương Oz, hình chiếu của khối lên mặt $z = 0$ là tam giác trong mặt Oxy, đơn giản theo phương Oy. Vậy

$$E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0; 1], \; 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}.$$

Ta đưa về tích phân lặp như sau

$$\int_E z\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1 - x - y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

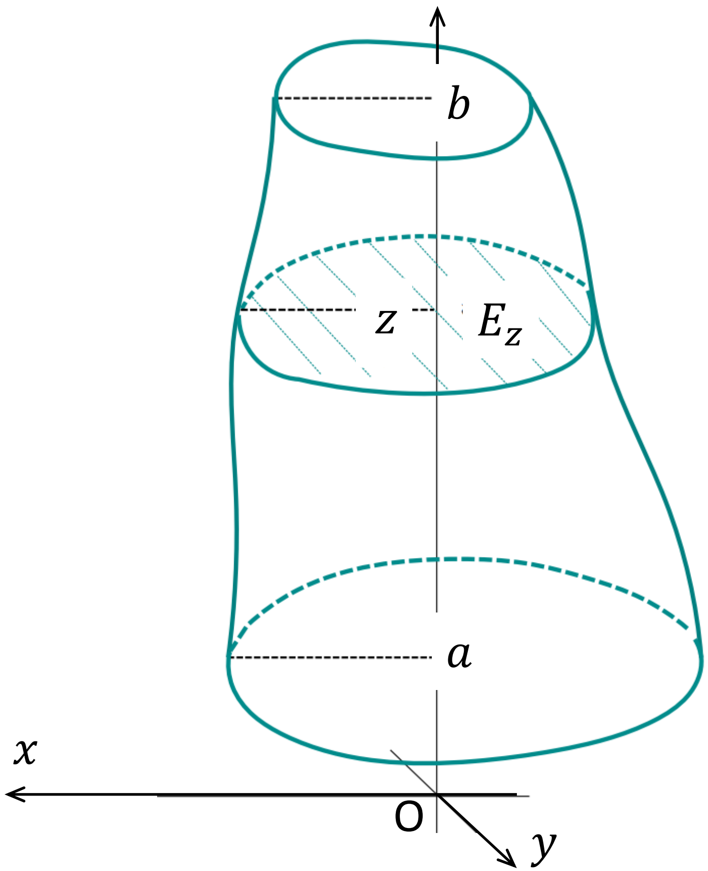
$$= \int_0^1 \frac{1}{6}(x + y - 1)^3\Big]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_0^1 (x - 1)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$$

Thể tích khối theo kỹ thuật cắt lớp

Dựa vào định lý Fubini, người ta có thể giải thích được (xem [1], ví dụ 2.2.13) khối hình học 3 chiều, được mô phỏng bởi $E \subset \mathbb{R}^3$, có thể tích $\int_E 1\mathrm{d}V$ được tính theo công thức của kỹ thuật cắt lớp đã được đề cập trong học phần Vi tích phân 1B, hoặc trong chương trình phổ thông trung học lớp 12, cụ thể là

Định lý (kỹ thuật cắt lớp). Giả có đoạn $[a;b]$ và tập $E \subset \mathbb{R}^3$ sao cho $\forall (x;y;z) \in E, z \in [a;b]$. Gọi $E_z \subset \mathbb{R}^2$ là tập hợp $E_z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x;y;z) \in E\}$. ($E_z$ mô phỏng cho thiết diện của khối hình học bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc trục Oz tại z.) Giả sử tập E_z có diện tích là $|E_z|$. Khi đó thể tích của E là

$$|E| = \int_E 1\mathrm{d}V = \int_a^b |E_z|\mathrm{d}z\,.$$



Bài tập

- Tham khảo bài tập [1], 2.2.5→16
- Tham khảo thêm bài tập trong [2], mục 15.7.