1. Chương 1

1.1. **Phép toán ma trận.** 1) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $3A - 2B^T, BAC, C^2A^TB^T, (AB)^2, (BA)^3$

2)Tính $AA^T - A^TA$ với

a)$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Tính $f(A)$ với

a)$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b)$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Hướng dẫn.

1) $3A - 2B^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -7 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $BAC = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C^2A^TB^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 3 \\ -8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -38 & 60 \\ -70 & 102 \end{pmatrix}$, $(BA)^3 = \begin{pmatrix} 506 & -158 & -506 \\ 82 & -16 & -82 \\ 30 & 6 & -30 \end{pmatrix}$

2)a)$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 20 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 24 \end{pmatrix}$ c)0_4

3a)$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 47 & 32 & -21 \\ -2 & 41 & -12 \\ -27 & -31 & 83 \end{pmatrix}$

1.2. **Hạng của ma trận.** 1) Tính hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 11 & 6 \\ 1 & 11 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -9 & 1 & 15 \end{pmatrix}$

d)$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&1&3&1\\1&3&5&-6\\1&2&1&4\end{pmatrix}$ e)$A=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&-2&3&0\\2&0&1&3\\3&2&-1&4\end{pmatrix}$ f)$A=\begin{pmatrix}2&1&3&7\\-2&1&1&-5\\1&2&0&6\\3&0&-3&1\end{pmatrix}$

2) Biện luận theo m hạng của ma trận:

a)$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&m&1\\0&4-m&5\end{pmatrix}$ b)$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&1&-2\\3&0&1&1\\0&0&2&m\end{pmatrix}$ c)$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&5&1&-1\\1&4&-1&0\\4&7&m&1\end{pmatrix}$

d)$A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$ e)$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&-1&1&0\\1&-2&3&2\\1&1&1&m\end{pmatrix}$ f)$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&1\\m+1&m+2&m-1\end{pmatrix}$

Hướng dẫn.

1a)3. b)3. c)3. d)4. e)3. f)4.

2)a)$r(A)=2\forall m$. b)$r(A)=3$ nếu $m=-2$ và $r(A)=4$ nếu $m\neq -2$.

c)$r(A)=3\forall m$ e)$r(A)=3$ nếu $m=13$ và $r(A)=4$ nếu ngược lại.

f) $r(A)=2\forall m$

1.3. **Hệ phương trình tuyến tính.** 1) Giải các hệ phương trình sau:

a)$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\2x_1-x_2+x_3=2\\4x_1-5x_2-x_3=0\end{cases}$ b)$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=3\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=3\\4x_1-x_2+5x_3-2x_4=6\\x_1+x_2+x_3+x_4=4\end{cases}$

c)$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\x_1+x_2-2x_3=0\\3x_1-x_2-x_3=1\end{cases}$ d)$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=1\\2x_1-x_2+x_3+x_4=2\\x_1-5x_2+2x_3-4x_4=1\\x_1-8x_2+3x_3-7x_4=1\end{cases}$

e)$\begin{cases}2x_1+2x_3+3x_4=4\\x_1+x_2+x_3+x_4=2\\3x_1+x_2+x_3+x_4=2\\4x_1+2x_2-2x_3-4x_4=-4\end{cases}$ f)$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\2x_1-x_2-x_3+x_4=4\\x_1+4x_2-5x_3-x_4=5\\x_1+x_2+x_3-x_4=8\end{cases}$

2) Giải và biện luận theo m:

a)$\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=1\\x+y+mz=1\end{cases}$ b)$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+3x_4=5\\x_1-x_2-3x_3+x_4=2\\4x_1-3x_2-5x_3+5x_4=9\\3x_1-x_2+5x_3+5x_4=m\end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 8x_1 - 9x_2 + 8x_3 + mx_4 = 19 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) $x_1 = 5/3, x_2 = 4/3, x_3 = 0$ b)$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

c)$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ d)$x_1 = 1 - 1/3s - t, x_2 = 1/3s + t, x_3 = s, x_4 = t$

e)$x_1 = 0, x_2 = 1/2t, x_3 = 2 - 3/2t, x_4 = t$

f)$x_1 = 4, x_2 = 7/3 + 2/3t, x_3 = 5/3 + 1/3t, x_4 = t$

2)a) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m \end{pmatrix}$

*$m \notin \{-2, 1\}$, hệ có nghiệm duy nhất: $z = \frac{1}{m+2}, y = -\frac{1}{m+2}, x = \frac{3}{m+2}$

*$m = -2$,ta có $2 - m - m^2 = 0$ và $1 - m \neq 0$, hệ vô nghiệm.

*$m = 1$, hệ trở thành $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - \alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta$.

b) $(A|B) \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-8 \end{pmatrix}$. $m \neq 8$, hệ vô nghiệm.

$m = 8, x_1 = 3 - 4\alpha - 2\beta, x_2 = 1 - 7\alpha - \beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta$.

c)$(A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3m-20 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 7-m & -5 \end{pmatrix}$

*m=7, hệ vô nghiệm.

*$m \neq 7$, hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2m-19}{m-7}, x_4 = \frac{5}{m-7}$

1.4. **Ma trận nghịch đảo.** 1) Tìm nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a)$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b)$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

c)$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 12 & -3 \end{pmatrix}$ d)$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 10 & 9 & -18 \\ 8 & 8 & 9 & -16 \\ 9 & 9 & 9 & -17 \end{pmatrix}$

Hướng dẫn

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -12 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -9 & -8 & -9 & 18 \\ -8 & -8 & -7 & 16 \\ -9 & -9 & -9 & 19 \end{pmatrix}$

2. Chuong 2

1) Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & -7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

2) Tìm nghịch đảo (nếu có) của các ma trận bằng phương pháp định thức:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 10 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Giải và biện luận hệ phương trình bằng quy tắc Cramer:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - my + 3z = 2 \\ x + 3y - mz = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$

Hướng dẫn

1) a)17 b)260. c)-608. d)1. e)2. f)66.

2)a)$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b)$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c)$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
d)$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e)$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
3)a)$\Delta = m^3 - 3m + 2, \Delta_1 = -(m-1)^2(m+1), \Delta_2 = (m-1)^2, \Delta_3 = (m^2-1)^2$.
*$m \notin \{1, -2\}$, có nghiệm duy nhất $x = -\frac{m+1}{m+2}, y = \frac{1}{m=2}, z = \frac{(m+1)^2}{m+2}$.
*m=-2, hệ vô nghiệm.
*m=1,$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, hệ tương đương với phương trình $x + y + z = 1$ có vô số nghiệm $x = 1 - \alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta$.
b)$\Delta = (m-1)(m-2), \Delta_1 = 1-m, \Delta_2 = 1-m, \Delta_3 = (m-1)(4m-5)$.
*$m \notin \{1, 2\}$, $x = y = \frac{1}{2-m}$, $z = \frac{4m-5}{m-2}$
*m=2, hệ vô nghiệm.
*m=1, $x = 2 - \alpha, y = 1, z = \alpha$.
c)$\Delta = \Delta_1 = (2-m)(m+3), \Delta_2 = 2 - m = \Delta_3$.
*$m \notin \{2, -3\}$, $x = 1, y = z = \frac{1}{m+3}$.
*m=-3,hệ vô nghiệm.
*m=2, $x = 5\alpha, y = 1 - 4\alpha, z = \alpha$
d) $\Delta = (m+3)(m-1)$, $\Delta_1 = (m+3)(m-1)$, $\Delta_2 = 1-m$, $\Delta_3 = m-1$.
*$m \notin \{-3, 1\}$, $x = 1, y = \frac{-1}{m+3}, z = \frac{1}{m+3}$.
*m=-3, hệ vô nghiệm.
*m=1, $x = \frac{3}{2} - 2\alpha, y = -\frac{1}{2} + \alpha, z = \alpha$
e) $\Delta = m^3 - 3m + 2$, $\Delta_1 = (m-1)^2(m+1) = \Delta_3, \Delta_2 = -(m-1)^2$,
*$m \notin \{-2, 1\}$, $x = \frac{m+1}{m+2} = z, y = -\frac{1}{m+2}$
*$m = -2$, hệ vô nghiệm.
*$m = 1$, $x = 1 - \alpha - \beta, y = \alpha, z = \beta$.