CHƯƠNG IV

HỆ THỨC ĐỆ QUI (PHƯƠNG PHÁP ĐẾM CAO CẤP)

I. HỆ THỨC ĐỆ QUI:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho số nguyên $r \geq 0$.

Một quá trình diễn ra gắn liền với tham số nguyên $n \geq r$. Ta muốn *tính trực tiếp* một đại lượng a_n có liên quan đến quá trình trên theo $n \geq r$. Giả sử ta biết được k giá trị ban đầu là $a_r = \alpha_1$, $a_{r+1} = \alpha_2$, ... , $a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*) và thiết lập được một hệ thức $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n)$, $\forall n \geq r + k$ (**) *tính gián tiếp* a_n *theo* k *số hạng đi trước nó* [trong (**) ít nhất phải có mặt a_{n-k}].
(*) và (**) được cho sẵn hoặc ta tự tính toán trực tiếp từ quá trình.
Từ (*) và (**), nếu vế phải của (**) luôn luôn xác định thì ta có duy nhất dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).
Ta nói (**) là *một hệ thức đệ qui cấp* k với *điều kiện ban đầu* (*).

Ví dụ:

a) Tính $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, $\forall n \geq r = 1$.

Ta có $a_1 = \int_1^e \ln x dx = x\ln x \,]_1^e - \int_1^e dx = e - x\,]_1^e = e - (e - 1) = 1$ và $\forall n \geq 2$,

$a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n \,]_1^e - \int_1^e n(\ln x)^{n-1} dx = e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - na_{n-1}$. Như vậy

$a_1 = 1$ (*) và $a_n = e - na_{n-1} = f(a_{n-1}, n)$, $\forall n \geq 2$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 1.

b) Dãy số Fibonacci $\{ a_n \mid n \geq r = 0 \}$ có

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = f(a_{n-1}, a_{n-2}, n)$, $\forall n \geq 2$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 2.

c) Tính $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx$, $\forall n \geq r = 2$. Đặt $t = tgx$ thì $dt = (1 + t^2)dx$ và ta có

$a_2 = \int_0^{\pi/4} tg^2 x dx = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+t^2})dt = t - \text{arctg}t \,]_q^1 = 1 - \text{arctg}1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

$a_3 = \int_0^{\pi/4} tg^3 x dx = \int_0^{\pi/4} tgx(1 + tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tgx dx = \int_0^1 t dt - \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos x)}{\cos x} =$

$= \frac{t^2}{2} \,]_0^1 + \ln(\cos x) \,]_0^{\pi/4} = \frac{1 - \ln 2}{2}$.

và $\forall n \geq 4$, $a_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx = \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} x(1 + tg^2 x)dx - \int_0^{\pi/4} tg^{n-2} x dx = \int_0^1 t^{n-2} dt - a_{n-2} =$

$= \frac{t^{n-1}}{n-1} \,]_0^1 - a_{n-2} = \frac{1}{n-1} - a_{n-2}$. Như vậy $a_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$, $a_3 = \frac{1 - \ln 2}{2}$ (*) và

$a_n = \frac{1}{n-1} - a_{n-2} = f(a_{n-1}, a_{n-2}, n)$, $\forall n \geq 4$ (**) : đây là hệ thức đệ qui cấp 2.

1.2/ <u>GIẢI HỆ THỨC ĐỆ QUI:</u>

Cho hệ thức đệ qui cấp k có $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$, $\forall n \geq r + k$ (**) với điều kiện đầu $a_r = \alpha_1, a_{r+1} = \alpha_2, \dots, a_{r+(k-1)} = \alpha_k$ (*).

a) Nếu chỉ giải riêng (**), ta thường có vô số dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (**).

b) Nếu giải đồng thời (*) và (**), ta chỉ có nhiều nhất lmột dãy $\{ a_n \mid n \geq r \}$ thỏa (*) và (**).

c) Việc thực hiện a) hoặc b) gọi là *giải một hệ thức đệ qui*.
Nếu thực hiện a), ta nói ta tìm *các nghiệm tổng quát* của (**).
Nếu thực hiện b), ta nói ta tìm *một nghiệm riêng* của (**) tương ứng với (*).

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho hệ thức đệ qui cấp 3 có
$a_o = 2, a_1 = -5, a_2 = 5$ (*) và $\forall n \geq 3$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ (**)
Giải (**), ta có nghiệm tổng quát $a_n = p + q(-1)^n + s.2^n$, $\forall n \geq 0$ ($p, q, s \in \mathbf{R}$).
Kết hợp thêm (*), ta có $2 = p + q + s$, $-5 = p - q + 2s$, $5 = p + q + 4s$. Từ đó $p = -3, q = 4, s = 1$ và $a_n = -3 + 4(-1)^n + 2^n$, $\forall n \geq 0$ là nghiệm riêng của (**).

b) Cho hệ thức đệ qui cấp 2 có $a_1 = 3, a_2 = -4$ (*) và $\forall n \geq 1$, $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ (**).
Giải (**), ta có vô số dãy $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ thỏa (chỉ cần chọn a_1, a_2 tùy ý ≥ 0).
Kết hợp thêm (*), ta không có dãy $\{ a_n \mid n \geq 1 \}$ nào thỏa (*) và (**) vì $a_3 = \sqrt{a_1 a_2} = \sqrt{-12}$ vô nghĩa.

II. <u>HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG THUẦN NHẤT:</u>

2.1/ <u>HỆ THỨC CẤP 1:</u> Cho $a_n = \lambda a_{n-1}$, $\forall n \geq r + 1$ (**) ($\lambda \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$)
Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq r + 1$ và ta lập đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$. Ta thấy (**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda^n$, $\forall n \geq r$ ($p \in \mathbf{R}$).

<u>Ví dụ:</u> Cho $a_o = 5$ (*) và $a_n = -4a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ (**) có đa thức tương ứng $f(x) = x + 4$.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p(-4)^n$, $\forall n \geq 0$ ($p \in \mathbf{R}$). Từ (*), ta có $5 = p(-4)^o = p$. Vậy $a_n = 5(-4)^n$, $\forall n \geq 0$.

2.2/ <u>HỆ THỨC CẤP 2:</u>

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$, $\forall n \geq r + 2$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ và $\mu \neq 0$) (**).
Suy ra $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0$, $\forall n \geq r + 2$ và ta lập tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$ với biệt thức $\Delta = \lambda^2 + 4\mu$.

a) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ với hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\lambda_1^n + q\lambda_2^n$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = (x - \lambda_o)^2$ với nghiệm thực kép λ_o.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)\lambda_o^n$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

c) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phức dạng lượng giác $d(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$.
(**) có nghiệm tổng quát $a_n = d^n(p\cos n\varphi + q\sin n\varphi)$, $\forall n \geq r$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Ví dụ:

a) Cho $a_1 = -16, a_2 = 2$ (*) và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $\forall n \geq 1$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ ($\lambda_1 = 3 \neq \lambda_2 = -2$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p.3^n + q(-2)^n$, $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $-16 = 3p - 4q$ và $2 = 9p + 16q$ nên $p = -2$ và $q = 5$.

Vậy $a_n = (-2)3^n + 5(-2)^n$, $\forall n \geq 1$.

b) Cho $a_2 = 0, a_3 = -64$ (*) và $a_{n+1} = 8a_n - 16a_{n-1}$, $\forall n \geq 3$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ (nghiệm kép $\lambda_o = 4$).

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = (p + nq)4^n$, $\forall n \geq 2$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $0 = 16(p + 2q)$ và $-64 = 64(p + 3q)$ nên $p = 2$ và $q = -1$.

Vậy $a_n = (2-n)4^n$, $\forall n \geq 2$.

c) Cho $a_o = 3, a_1 = 6$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2$ và $f(x)$ có hai nghiệm phức có dạng lượng giác $1 \pm i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3})$.

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = 2^n(p\cos\frac{n\pi}{3} + q\sin\frac{n\pi}{3})$, $\forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $3 = p$ và $6 = p + q\sqrt{3}$ nên $p = 3$ và $q = \sqrt{3}$.

Vậy $a_n = 2^n(3\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})$, $\forall n \geq 0$.

d) Cho $n \geq 1$. An đi từ mặt đất (bậc thang thứ 0) lên cầu thang đến bậc thang thứ n. Mỗi bước chân của An sẽ lên được 1 hoặc 2 bậc thang. Hỏi An có bao nhiêu cách bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n ?

Đặt a_n là số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n ($\forall n \geq 1$).

Dễ thấy $a_1 = 1, a_2 = 2$ (*). Ta có $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 3$ (**) trong đó a_{n-1} = Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà có đặt chân lên bậc thang thứ $(n-1)$

và a_{n-2} = Số cách để An bước chân từ mặt đất lên đến bậc thang thứ n mà không đặt chân lên bậc thang thứ $(n-1)$, nghĩa là An có đặt chân lên bậc thứ $(n-2)$ rồi đặt chân lên bậc thứ n ngay.

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$, $\forall n \geq 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

Từ (*), $1 = \alpha p + \beta q$ và $2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$ nên $p = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ và $q = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$.

Vậy $a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$, $\forall n \geq 1$.

e) Dãy Fibonacci $a_o = 0, a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ (**).

Ta có đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$)

(**) có nghiệm tổng quát $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$, $\forall n \geq 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$). Từ (*), $0 = p + q$ và $1 = \alpha p + \beta q$ nên $p = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $q = -p = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Vậy $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$, $\forall n \geq 0$.

III. HỆ THỨC ĐỆ QUI TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG KHÔNG THUẦN NHẤT:

3.1/ HỆ THỨC CẤP 1:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \varphi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r + 1$ (**) trong đó $\lambda, \alpha \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq r + 1$ (♦) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - \lambda)$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (♦) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**).

a) Nếu $\alpha \neq \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

b) Nếu $\alpha = \lambda$: (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n$, $\forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

Ví dụ:

a) Bài toán THÁP HÀ NỘI: Cho $n \geq 1$. Có 3 cọc I, II và III. Tại cọc I đang có n cái đĩa tròn có bán kính khác nhau (khi đặt đĩa vào bất cứ cọc nào, ta luôn luôn phải tuân thủ việc đặt đĩa nhỏ ở phía trên đĩa lớn). Hãy di chuyển hết n đĩa này qua cọc II (mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa và có thể đặt tạm đĩa vào cọc trung gian trong quá trình chuyển đĩa). Hỏi ta phải cần bao nhiêu lần chuyển đĩa ?

Đặt a_n = số lần chuyển đĩa cần có để chuyển n đĩa từ cọc I qua cọc II ($n \geq 1$).

Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $\forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 2 \neq \alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 1$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - 2a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq 2$ (♦) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = (x - 2)$.

(♦) có nghiệm tổng quát $a_n' = p2^n$, $\forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n \psi_o(n) = q$, $\forall n \geq 1$ ($q \in \mathbf{R}$).

Thay $a_n'' = q$, $\forall n \geq 1$ vào (**), ta có $q = 2q + 1$ nên $a_n'' = q = -1$, $\forall n \geq 1$.

Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = p2^n - 1$, $\forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

Từ (*) ta có $1 = 2p - 1$ nên $p = 1$. Vậy $a_n = 2^n - 1$, $\forall n \geq 1$.

b) Tính $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, $\forall n \geq 1$.

Ta có $a_1 = 1$ (*) và $a_n = a_{n-1} + n^2$ $\forall n \geq 2$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 1 = \alpha$ và $\varphi_2(n) = n^2$ có $\deg(\varphi_2) = 2$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - a_{n-1} = 0$, $\forall n \geq 2$ (♦) và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = x - 1$.

(♦) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n = p$, $\forall n \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$).

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_2(n) = n(qn^2 + sn + t)$, $\forall n \geq 1$ ($q, s, t \in \mathbf{R}$). Thay $a_n'' = (qn^3 + sn^2 + tn)$, $\forall n \geq 1$ vào (**), ta có

$qn^3 + sn^2 + tn = q(n-1)^3 + s(n-1)^2 + t(n-1) + n^2$, $\forall n \geq 2$ (cũng đúng $\forall n \in \mathbf{Z}$).

Thế $n = 0$, $n = 1$ và $n = 2$ vào đồng nhất thức trên, ta có hệ phương trình

$s - t - q = 0$, $q + s + t = 1$ và $7q + 3s + t = 4$. Giải ra ta được $q = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{6}$

và $a_n'' = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$, $\forall n \geq 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là

$a_n = a_n' + a_n'' = p + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = p + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \forall n \geq 1 \ (p \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $1 = p + 1$ nên $p = 0$. Vậy $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1$.

3.2/ HỆ THỨC CẤP 2:

Cho $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2} + \varphi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r + 2$ (**) trong đó $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbf{R}$, $\mu \neq 0 \neq \alpha$, $\varphi_m(x)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\varphi_m) = m \geq 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n - \lambda a_{n-1} - \mu a_{n-2} = 0, \forall n \geq r + 2$ (♦) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - \lambda x - \mu$.

Ta có Nghiệm tổng quát a_n của (**) =

= Nghiệm tổng quát a_n' của (♦) + một nghiệm cụ thể bất kỳ a_n'' của (**).

a) Nếu α không là nghiệm của $f(x)$ [$f(\alpha) \neq 0$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = \psi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

b) Nếu α là nghiệm đơn của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 \neq f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n\psi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

c) Nếu α là nghiệm kép của $f(x)$ [$f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$] : (**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = n^2\psi_m(n)\alpha^n, \forall n \geq r$ trong đó $\psi_m(n)$ là đa thức hệ số thực theo biến n và $\deg(\psi_m) = m$.

Ví dụ:

a) Cho $a_2 = 37, a_3 = -97$ (*) và $a_{n+1} = 9a_{n-1} + 5.2^n, \forall n \geq 3$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 0, \mu = -9, \alpha = 2$ và $\varphi_o(n) = 5$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+1} - 9a_{n-1} = 0, \forall n \geq 3$ (♦) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ có $f(2) = -5 \neq 0$.

(♦) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.3^n + q(-3)^n, \forall n \geq 2 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 2^n\psi_o(n) = t.2^n, \forall n \geq 2 \ (t \in \mathbf{R})$.

Thay $a_n'' = t.2^n, \forall n \geq 2$ vào (**), ta có $t.2^{n+1} = 9\,t.2^{n-1} + 5.2^n, \forall n \geq 3$, nghĩa là $t = -2$ và $a_n'' = -2^{n+1}, \forall n \geq 2$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = \ = p.3^n + q(-3)^n - 2^{n+1}, \forall n \geq 2 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $37 = 9p + 9q - 8$ và $-97 = 27p - 27q - 16$ nên $p = 1$ và $q = 4$.

Vậy $a_n = 3^n + 4(-3)^n - 2^{n+1}, \forall n \geq 2$.

b) Cho $a_o = 73, a_1 = 92$ (*) và $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n + 24, \forall n \geq 0$ (**). Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = -4, \mu = 5$, $\alpha = 1$ và $\varphi_o(n) = 24$ có $\deg(\varphi_o) = 0$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0, \forall n \geq 0$ (♦) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ có $f(1) = 0 \neq f'(1)$

(♦) có nghiệm tổng quát $a_n' = p.1^n + q(-5)^n = p + q(-5)^n, \forall n \geq 0 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $a_n'' = 1^n n\psi_o(n) = tn, \forall n \geq 0 \ (t \in \mathbf{R})$.

Thay $a_n = t\,n, \forall n \geq 0$ vào (**), ta có $t(n+2) = -4t(n+1) + 5t\,n + 4, \forall n \geq 0$, nghĩa là $t = 4$ và $a_n = 4t \ \forall n \geq 0$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là $a_n = a_n' + a_n'' = \ = p + q(-5)^n + 4t, \forall n \geq 0 \ (p, q \in \mathbf{R})$.

Từ (*) ta có $73 = p + q$ và $92 = p - 5q + 4$ nên $p = \frac{151}{2}$ và $q = \frac{-5}{2}$.

Vậy $a_n = \frac{8n + (-5)^{n+1} + 151}{2}$, $\forall n \ge 0$.

c) Cho $a_1 = 84$, $a_2 = 49$ (*) và $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2} + 6(2n - 1)(-7)^n$, $\forall n \ge 3$ (**)
Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 14$, $\mu = 49$, $\alpha = -7$ và $\varphi_1(n) = 6(2n - 1)$ có $\deg(\varphi_1) = 1$.
Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_n + 14a_{n-1} + 49a_{n-2} = 0$, $\forall n \ge 3$ (♦) và tam thức bậc hai tương ứng $f(x) = x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$ có $f(-7) = 0 = f'(-7)$
(♦) có nghiệm tổng quát $a_n' = (p + nq)(-7)^n$, $\forall n \ge 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).
(**) có một nghiệm cụ thể có dạng
$a_n'' = (-7)^n n^2\psi_1(n) = (-7)^n n^2(sn + t)$, $\forall n \ge 1$ ($t \in \mathbf{R}$).
Thay $a_n = (-7)^n n^2(sn + t)$, $\forall n \ge 1$ vào (**), ta có

$$(-7)^n n^2(sn + t) = 6(2n - 1)(-7)^n - 14(-7)^{n-1}(n - 1)^2 [s(n - 1) + t] -$$
$$- 49(-7)^{n-2}(n - 2)^2 [s(n - 2) + t], \forall n \ge 3, \text{ nghĩa là}$$
$$sn^3 + tn^2 = 2(n - 1)^2(sn - s + t) - (n - 2)^2(sn - 2s + t) + 12n - 6, \forall n \ge 3$$

(cũng đúng $\forall n \in \mathbf{Z}$).
Thế $n = 1$ và $n = 2$, ta có $2t = 6$ và $3s + t = 9$ nên $s = 2$ và $t = 3$, nghĩa là $a_n'' = n^2(2n + 3)(-7)^n$, $\forall n \ge 1$. Do đó (**) có nghiệm tổng quát là
$a_n = a_n' + a_n'' = (p + qn + 3n^2 + 2n^3)(-7)^n$, $\forall n \ge 1$ ($p, q \in \mathbf{R}$).
Từ (*) ta có $84 = -7(p + q + 5)$ và $49 = 49(p + 2q + 28)$ nên
$p = -7$ và $q = -10$. Vậy $a_n = (2n^3 + 3n^2 - 10n - 7)(-7)^n$, $\forall n \ge 1$.
