Bài giảng: Ước Lượng
Học phần: Xác Suất Thống Kê

Nguyễn Thị Hồng Nhung[1]

[1]Khoa Toán-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên
Đại Học Quốc Gia Tp HCM

nthnhung@hcmus.edu.vn

Nội dung

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Bài toán: tìm tham số θ

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Bài toán: tìm tham số θ
  - Chọn một mẫu ngẫu nhiên cỡ n, $X_1, \ldots, X_n \widetilde{i.i.d} F(x, \theta)$.

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Bài toán: tìm tham số θ
  - Chọn một mẫu ngẫu nhiên cỡ n, $X_1, \ldots, X_n \widetilde{i.i.d} F(x, \theta)$.
  - Thống kê $\hat{\Theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ gọi là một ước lượng điểm cho θ.

Ước lượng điểm

- Giả sử cần khảo sát một đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Bài toán: tìm tham số θ
  - Chọn một mẫu ngẫu nhiên cỡ n, $X_1, \ldots, X_n \widetilde{i.i.d} F(x, \theta)$.
  - Thống kê $\hat{\Theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ gọi là một ước lượng điểm cho θ.
  - Với một mẫu thực nghiệm $x_1, \ldots, x_n$, ta gọi $\hat{\theta} = h(x_1, \ldots, x_n)$ là một giá trị ước lượng điểm cho θ.

Ước lượng điểm

Ví dụ 1

♣ $X =$ *Trọng lượng của lợn khi xuất chuồng, và giả sử* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Ước lượng điểm

Ví dụ 1

♣ $X =$ *Trọng lượng của lợn khi xuất chuồng, và giả sử* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Ước lượng điểm

Ví dụ 1

♣ *$X =$ Trọng lượng của lợn khi xuất chuồng, và giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Phân phối của X phụ thuộc vào kỳ vọng μ và phương sai σ^2.*

Ước lượng điểm

Ví dụ 1

♣ *X = Trọng lượng của lợn khi xuất chuồng, và giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*
Phân phối của X phụ thuộc vào kỳ vọng μ và phương sai σ^2.
Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

là những ước lượng điểm cho μ và σ^2.

Ước lượng điểm

Ví dụ 1

- *X = Trọng lượng của lợn khi xuất chuồng, và giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Phân phối của X phụ thuộc vào kỳ vọng μ và phương sai σ^2. Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  là những ước lượng điểm cho μ và σ^2.

- *Với một mẫu thực nghiệm*

$$x_1 = 59, x_2 = 58.5, x_3 = 60, x_4 = 65, x_5 = 62, x_6 = 70, x_7 = 71, x_8 = 61$$

  , giá trị ước lượng điểm của μ và σ^2 lần lượt là $\bar{x} = \ldots$ và $s^2 = \ldots$.

Ước lượng không chệch

Định nghĩa 1

Ước lượng điểm $\hat{\Theta}$ gọi là ước lượng không chệch (Unbiased estimator) cho tham số θ nếu

Ước lượng không chệch

Định nghĩa 1

Ước lượng điểm $\hat{\Theta}$ gọi là ước lượng không chệch (Unbiased estimator) cho tham số θ nếu

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \theta. \tag{1}$$

Ước lượng không chệch

Định nghĩa 1

Ước lượng điểm $\hat{\Theta}$ gọi là ước lượng không chệch (Unbiased estimator) cho tham số θ nếu

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \theta. \tag{1}$$

Nếu $\hat{\Theta}$ là ước lượng chệch của θ , độ sai khác

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) - \theta$$

Ước lượng không chệch

Định nghĩa 1

Ước lượng điểm $\hat{\Theta}$ gọi là ước lượng không chệch (Unbiased estimator) cho tham số θ nếu

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \theta. \tag{1}$$

Nếu $\hat{\Theta}$ là ước lượng chệch của θ , độ sai khác

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) - \theta$$

gọi là độ chệch của ước lượng, ký hiệu là Bias($\hat{\Theta}$) .

Ước lượng không chệch

Định nghĩa 1

Ước lượng điểm $\hat{\Theta}$ gọi là ước lượng không chệch (Unbiased estimator) cho tham số θ nếu

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \theta. \tag{1}$$

Nếu $\hat{\Theta}$ là ước lượng chệch của θ , độ sai khác

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}) - \theta$$

gọi là độ chệch của ước lượng, ký hiệu là Bias($\hat{\Theta}$) .

Ước lượng không chệch-Ví dụ

- $\bar{X}$ là một ước lượng không chệch của μ

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i}{n} = \mu.$$

Ước lượng không chệch-Ví dụ

- $\bar{X}$ là một ước lượng không chệch của μ

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i}{n} = \mu.$$

- S^2 là một ước lượng không chệch của σ^2

$$\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$$

Ước lượng không chệch-Ví dụ

- $\bar{X}$ là một ước lượng không chệch của μ

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i}{n} = \mu.$$

- S^2 là một ước lượng không chệch của σ^2

$$\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$$

- $\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ là ước lượng chệch của σ^2.

Ước lượng hiệu quả

Định nghĩa 2

Xét $\hat{\Theta}_1$ và $\hat{\Theta}_2$ là hai lượng không chệch của θ, $\hat{\Theta}_1$ gọi là ước lượng hiệu quả hơn $\hat{\Theta}_2$ nếu với cỡ mẫu n cho trước

Ước lượng hiệu quả

Định nghĩa 2

Xét $\hat{\Theta}_1$ *và* $\hat{\Theta}_2$ *là hai lượng không chệch của* θ*,* $\hat{\Theta}_1$ *gọi là ước lượng hiệu quả hơn* $\hat{\Theta}_2$ *nếu với cỡ mẫu n cho trước*

$$\mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_1) < \mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_2).$$

Ước lượng hiệu quả

Định nghĩa 2

Xét $\hat{\Theta}_1$ và $\hat{\Theta}_2$ là hai lượng không chệch của θ, $\hat{\Theta}_1$ gọi là ước lượng hiệu quả hơn $\hat{\Theta}_2$ nếu với cỡ mẫu n cho trước

$$\mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_1) < \mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_2).$$

Định lý 1

Trong một mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ thì $\bar{X}$ là ước lượng hiệu quả nhất cho μ.

Ước lượng hiệu quả

Định nghĩa 2

Xét $\hat{\Theta}_1$ và $\hat{\Theta}_2$ là hai lượng không chệch của θ, $\hat{\Theta}_1$ gọi là ước lượng hiệu quả hơn $\hat{\Theta}_2$ nếu với cỡ mẫu n cho trước

$$\mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_1) < \mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_2).$$

Định lý 1

Trong một mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ thì $\bar{X}$ là ước lượng hiệu quả nhất cho μ.

Trung bình của bình phương sai số-MSE

- Trong một số trường hợp, ước lượng $\hat{\Theta}_2$ là ước lượng chệch (với độ chệch nhỏ), nhưng lại có phương sai nhỏ hơn các ước lượng không chệch $\hat{\Theta}_1$ khác.
  Khi đó, ta có thể muốn chọn $\hat{\Theta}_2$, mặc dù là ước lượng chệch nhưng nó có độ phân tán nhỏ hơn nhiều so với các ước lượng $\hat{\Theta}$ khác.

Trung bình của bình phương sai số-MSE

- Trong một số trường hợp, ước lượng $\hat{\Theta}_2$ là ước lượng chệch (với độ chệch nhỏ), nhưng lại có phương sai nhỏ hơn các ước lượng không chệch $\hat{\Theta}_1$ khác.
  Khi đó, ta có thể muốn chọn $\hat{\Theta}_2$, mặc dù là ước lượng chệch nhưng nó có độ phân tán nhỏ hơn nhiều so với các ước lượng $\hat{\Theta}$ khác.
- Trung bình của bình phương sai số (Mean Squared Error - MSE) là một độ đo kết hợp giữa độ chệch (Bias) và phương sai mẫu của một ước lượng:

$$MSE(\hat{\Theta}) = \mathbb{E}(\hat{\Theta} - \theta)^2 \tag{2}$$

Trung bình của bình phương sai số-MSE

- Trong một số trường hợp, ước lượng $\hat{\Theta}_2$ là ước lượng chệch (với độ chệch nhỏ), nhưng lại có phương sai nhỏ hơn các ước lượng không chệch $\hat{\Theta}_1$ khác.
  Khi đó, ta có thể muốn chọn $\hat{\Theta}_2$, mặc dù là ước lượng chệch nhưng nó có độ phân tán nhỏ hơn nhiều so với các ước lượng $\hat{\Theta}$ khác.
- Trung bình của bình phương sai số (Mean Squarred Error - MSE) là một độ đo kết hợp giữa độ chệch (Bias) và phương sai mẫu của một ước lượng:

$$MSE(\hat{\Theta}) = \mathbb{E}(\hat{\Theta} - \theta)^2 \tag{2}$$

- $$MSE(\hat{\Theta}) = \mathbb{V}ar(\hat{\Theta}) + (Bias(\hat{\Theta}))^2. \tag{3}$$

Trung bình của bình phương sai số (tt)

- Nếu $\hat{\Theta}$ là ước lượng không chệch: $MSE(\hat{\Theta}) = \mathbb{V}ar(\hat{\Theta})$
- Cho trước hai ước lượng $\hat{\Theta}_1$ và $\hat{\Theta}_2$, tiêu chuẩn MSE cho phép ta chon $\hat{\Theta}_2$ nếu, với cỡ mẫu n

$$MSE(\hat{\Theta}_2) < MSE(\hat{\Theta}_1)$$

- Hoặc $\mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_1) - \mathbb{V}ar(\hat{\Theta}_2) > (Bias(\hat{\Theta}_2))^2 - (Bias(\hat{\Theta}_1))^2$.

Trung bình của bình phương sai số-MSE (tt)

- Nếu cả $\hat{\Theta}_1$ và $\hat{\Theta}_2$ là ước lượng không chệch, tiêu chuẩn MSE trở thành tiêu chuẩn so sánh dựa trên phương sai mẫu.
- Tiêu chuẩn MSE tương đương với việc so sánh tỷ số

$$Eff(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2) = \frac{MSE(\hat{\Theta}_2)}{MSE(\hat{\Theta}_1)} \tag{4}$$

và chọn $\hat{\Theta}_2$ nếu $Eff(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2) < 1$.

Sai số chuẩn - Standard Error

Định nghĩa 3

Sai số chuẩn (SE) của một ước lượng $\hat{\Theta}$ chính là độ lệch tiêu chuẩn của nó,

$$SE(\hat{\Theta}) = \sqrt{\mathbb{V}ar(\hat{\Theta})} \tag{5}$$

Ký hiệu khác: $\hat{\sigma}_{\hat{\Theta}}$

Sai số chuẩn - Standard Error

Định nghĩa 3

Sai số chuẩn (SE) của một ước lượng $\hat{\Theta}$ chính là độ lệch tiêu chuẩn của nó,

$$SE(\hat{\Theta}) = \sqrt{\mathbb{V}ar(\hat{\Theta})} \tag{5}$$

Ký hiệu khác: $\hat{\sigma}_{\hat{\Theta}}$

Tham số	Ước lượng T	$\mathbb{V}ar$	SE(T)
μ	$\bar{X}$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$
p	$\hat{P}$	$\frac{p(1-p)}{n}$	$\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$
σ^2	S^2	$\frac{2\sigma^4}{n-1}$	$S^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

Ước lượng bền vững

Định nghĩa 4

$\hat{\Theta}_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ *là một ước lượng điểm của tham số* θ*.* *Ước lượng* $\hat{\Theta}_n$ *gọi là* *ước lượng bền vững(consistency)* *nếu* $\hat{\Theta}_n \to^{\mathbb{P}} \theta$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\Theta}_n - \theta| \leq \epsilon\right) = 1, \ \forall \epsilon > 0.$$

Ước lượng bền vững

Định nghĩa 4

$\hat{\Theta}_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ là một ước lượng điểm của tham số θ.
Ước lượng $\hat{\Theta}_n$ gọi là ước lượng bền vững(consistency) nếu $\hat{\Theta}_n \to^{\mathbb{P}} \theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\Theta}_n - \theta| \leq \epsilon\right) = 1, \ \forall\epsilon > 0.$$

Định lý 2

Nếu $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) \to \theta$ và $D(\hat{\Theta}_n) \to 0$ khi $n \to \infty$ thì $\hat{\theta}_n$ là ước lượng vững.

Ước lượng bền vững

Định nghĩa 4

$\hat{\Theta}_n = h(X_1, \ldots, X_n)$ là một ước lượng điểm của tham số θ. Ước lượng $\hat{\Theta}_n$ gọi là ước lượng bền vững(consistency) nếu $\hat{\Theta}_n \to^{\mathbb{P}} \theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\Theta}_n - \theta| \le \epsilon\right) = 1, \ \forall \epsilon > 0.$$

Định lý 2

Nếu $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) \to \theta$ và $D(\hat{\Theta}_n) \to 0$ khi $n \to \infty$ thì $\hat{\theta}_n$ là ước lượng vững.

Ví dụ 2

1. S^2 là ước lượng vững của σ^2.
2. Với $X \sim B(n, p)$, $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$ là ước lượng vững cho p.

Nội dung

Bài toán

- Giả sử cần khảo sát đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Định nghĩa 5

Một ước lượng khoảng (interval estimator) của tham số θ là một cặp thống kê $L(X_1, \ldots, X_n)$ và $U(X_1, \ldots, X_n)$ của mẫu ngẫu nhiên thỏa $L(X) \leq U(X)$ và $L(X) \leq \theta \leq U(X)$.
Nếu một mẫu thực nghiệm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ được quan trắc, $[l(x), u(x)]$ gọi là khoảng ước lượng (interval estimator) cho θ.

Bài toán

- Giả sử cần khảo sát đặc tính X trên một tổng thể xác định.
- Biến ngẫu nhiên X có phân phối $F(x, \theta)$, tham số θ chưa biết.
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Định nghĩa 5

Một ước lượng khoảng (interval estimator) của tham số θ là một cặp thống kê $L(X_1, \ldots, X_n)$ và $U(X_1, \ldots, X_n)$ của mẫu ngẫu nhiên thỏa $L(X) \leq U(X)$ và $L(X) \leq \theta \leq U(X)$.
Nếu một mẫu thực nghiệm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ được quan trắc, $[l(x), u(x)]$ gọi là khoảng ước lượng (interval estimator) cho θ.

Khoảng tin cậy

- Vector ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ có hàm mật độ đồng thời phụ thuộc vào tham số $\theta \in \Theta$.

Khoảng tin cậy

- Vector ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ có hàm mật độ đồng thời phụ thuộc vào tham số $\theta \in \Theta$.
- $L(X)$ và $U(X)$ là hai thống kê sao cho $L(X) \leq U(X)$.

Khoảng tin cậy

- Vector ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ có hàm mật độ đồng thời phụ thuộc vào tham số $\theta \in \Theta$.
- $L(X)$ và $U(X)$ là hai thống kê sao cho $L(X) \leq U(X)$.
- Khi đó, khoảng ngẫu nhiên $[L(X), U(X)]$ gọi là khoảng tin cậy cho tham số θ với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ nếu

$$\mathbb{P}\left(L(X) \leq \theta \leq U(X)\right) = 1 - \alpha. \qquad (6)$$

Khoảng tin cậy

- Vector ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ có hàm mật độ đồng thời phụ thuộc vào tham số $\theta \in \Theta$.
- $L(X)$ và $U(X)$ là hai thống kê sao cho $L(X) \leq U(X)$.
- Khi đó, khoảng ngẫu nhiên $[L(X), U(X)]$ gọi là khoảng tin cậy cho tham số θ với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$ nếu

$$\mathbb{P}\left(L(X) \leq \theta \leq U(X)\right) = 1 - \alpha. \tag{6}$$

- Với mẫu thực nghiệm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ta có khoảng tin cậy cụ thể cho tham số θ là $l(x) \leq \theta \leq u(x)$.

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì
  - có ít nhất $100(1-\alpha)$ lần giá trị tham số $\theta \in [l, u]$;

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì
  - có ít nhất $100(1-\alpha)$ lần giá trị tham số $\theta \in [l, u]$;
  - có 100α lần giá trị tham số $\theta \notin [l, u]$.

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì
  - có ít nhất $100(1-\alpha)$ lần giá trị tham số $\theta \in [l, u]$;
  - có 100α lần giá trị tham số $\theta \notin [l, u]$.
- Ví dụ: X là thời gian làm bài thi của sinh viên.
  Chọn ngẫu nhiên 20 sinh viên thì thấy thời gian làm bài thi trung bình $\mu \in [45, 55]$(phút) với độ tin cậy 90%.

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì
  - có ít nhất $100(1-\alpha)$ lần giá trị tham số $\theta \in [l, u]$;
  - có 100α lần giá trị tham số $\theta \notin [l, u]$.
- Ví dụ: X là thời gian làm bài thi của sinh viên.
  Chọn ngẫu nhiên 20 sinh viên thì thấy thời gian làm bài thi trung bình $\mu \in [45, 55]$(phút) với độ tin cậy 90%.
  - Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu, mỗi lần khảo sát 20 sinh viên thì

Khoảng tin cậy

- Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu cỡ n thì
  - có ít nhất $100(1-\alpha)$ lần giá trị tham số $\theta \in [l, u]$;
  - có 100α lần giá trị tham số $\theta \notin [l, u]$.
- Ví dụ: X là thời gian làm bài thi của sinh viên. Chọn ngẫu nhiên 20 sinh viên thì thấy thời gian làm bài thi trung bình $\mu \in [45, 55]$(phút) với độ tin cậy 90%.
  - Ý nghĩa: với 100 lần lấy mẫu, mỗi lần khảo sát 20 sinh viên thì
    - có ít nhất $100(1-\alpha) = 90$ lần giá trị trung bình mẫu thuộc khoảng [45, 55] phút.

Nội dung

Xây dựng khoảng tin cậy cho kỳ vọng

Bài toán 1

Cho tổng thể có trung bình μ với phương sai có thể đã biết hoặc chưa biết. Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, hãy ước lượng μ với độ tin cậy $1 - \alpha$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Các giả định

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn, tức là $X_1, \dots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn, tức là $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Phương sai σ^2 của tổng thể đã biết.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Xây dựng khoảng tin cậy

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \dots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ thì $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ thì $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(\left\{\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) &= 1-\alpha,
\end{aligned}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

- Nếu $\bar{x}$ là trung bình mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phương sai σ^2 đã biết.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

- Nếu $\bar{x}$ là trung bình mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phương sai σ^2 đã biết.
- Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho kỳ vọng μ được xác định như sau

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

với $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Ví dụ 3

Đường kính của một ống piston trong động cơ xe máy có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 0.001$ *mm. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 15 ống piston có đường kính trung bình* $\bar{x} = 74.036$ *mm.*

- ♣ *Lập KTC 95% cho đường kính trung bình của piston.*
- ♣ *Lập KTC 99% cho đường kính trung bình.*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 95%, $1-\alpha = 0.95$, *suy ra* $\alpha = 0.05$, *và* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96; \bar{x} = 74,036$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 95%, $1-\alpha = 0.95$, *suy ra* $\alpha = 0.05$, *và* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$; $\bar{x} = 74,036$.
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} = 5,06 \times 10^{-4}$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 95%, $1-\alpha = 0.95$, *suy ra* $\alpha = 0.05$, *và* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96; \bar{x} = 74,036.$
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} = 5,06 \times 10^{-4}$
5. *Vậy KTC* 95% *cho đường kính trung bình của piston là* $\mu \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$

$\Rightarrow \mu \in [74,036-5,06\times10^{-4}; 74,036+5,06\times10^{-4};] = [74,0355; 74,$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 1

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 95%, $1-\alpha = 0.95$, *suy ra* $\alpha = 0.05$, *và* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96; \bar{x} = 74,036$.
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} = 5,06 \times 10^{-4}$
5. *Vậy KTC* 95% *cho đường kính trung bình của piston là* $\mu \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$

$\Rightarrow \mu \in [74,036-5,06\times10^{-4}; 74,036+5,06\times10^{-4};] = [74,0355; 74,$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ *là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.*
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 99%, *suy ra* $1-\alpha = 0.99$. *Vậy* $\alpha = 0.01$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 99%, *suy ra* $1-\alpha = 0.99$. *Vậy* $\alpha = 0.01$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} =$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 99%, *suy ra* $1-\alpha = 0.99$. *Vậy* $\alpha = 0.01$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} =$
5. *Vậy KTC* 95% *cho đường kính trung bình của piston là*

$$\mu \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon] =$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Bài giải 2

Gọi $X(mm)$ là đường kính của ống piston trong động cơ xe máy.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{15} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 0.001^2)$
2. *Đặt* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Độ tin cậy* 99%, *suy ra* $1-\alpha = 0.99$. *Vậy* $\alpha = 0.01$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{0.995}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \times \frac{0.001}{\sqrt{15}} =$
5. *Vậy KTC* 95% *cho đường kính trung bình của piston là*

$$\mu \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon] =$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)

Ví dụ 4

Đo chỉ số IQ của các sinh viên trong 1 trường đại học, khảo sát 18 sinh viên thu được kết quả sau:

130 122 119 142 136 127 120 152 141
132 127 118 150 141 133 137 129 142

Biết rằng chỉ số IQ của sinh viên tuân theo phân phối chuẩn với $\sigma = 10.50$.

- *Lập khoảng tin cậy 97% cho chỉ số IQ trung bình.*
- *Lập khoảng tin cậy 95% cho chỉ số IQ trung bình.*
- *Lập khoảng tin cậy 99% cho chỉ số IQ trung bình.*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên"

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$
2. *Thống kê* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$
2. *Thống kê* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} x_i = 133,2222$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0,03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,985} = 2,17$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$
2. *Thống kê* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} x_i = 133,2222$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0,03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,985} = 2,17$.
4. $\epsilon = z_{0,985}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \times \frac{10,5}{\sqrt{18}} = 5,3705$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$
2. *Thống kê* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} x_i = 133,2222$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0,03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,985} = 2,17$.
4. $\epsilon = z_{0,985}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \times \frac{10,5}{\sqrt{18}} = 5,3705$.
5. *Vậy KTC* 97% *cho chỉ số IQ trung bình của sinh viên là*

$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [127,8517; 138,5927]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 đã biết)(tt)

Bài giải 3

Gọi X là "Chỉ số IQ của sinh viên" $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{18} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, 10.5^2)$
2. *Thống kê* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{18} x_i = 133,2222$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0,03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,985} = 2,17$.
4. $\epsilon = z_{0,985}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \times \frac{10,5}{\sqrt{18}} = 5,3705$.
5. *Vậy KTC* 97% *cho chỉ số IQ trung bình của sinh viên là*

$$\mu \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon] = [127,8517; 138,5927]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Các giả định

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn.
- Phương sai σ^2 của tổng thể không biết, ta có thể dùng phương sai mẫu S^2 để thay thế σ^2.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn.
- Phương sai σ^2 của tổng thể không biết, ta có thể dùng phương sai mẫu S^2 để thay thế σ^2.
- Trường hợp cỡ mẫu nhỏ : $n \leq 30$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \; S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, thì $T \sim T(df = n-1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \; S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, thì $T \sim T(df = n-1)$.
- Với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) &= 1-\alpha \\
\mathbb{P}\left(\left\{\bar{X} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}\right) &= 1-\alpha,
\end{aligned}$$

$t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của phân phối $T(df = n-1)$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

♣ Nếu $\bar{x}$ và s lần lượt là trung bình mẫu và độ lệch tiêu mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n \leq 30$)

- Nếu $\bar{x}$ và s lần lượt là trung bình mẫu và độ lệch tiêu mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.
- Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho kỳ vọng μ được xác định như sau

$$\bar{x} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

$t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của $T(df = n-1)$.

Ví dụ

Ví dụ 5

Sản lượng mỗi ngày của một phân xưởng là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chuẩn. Kết quả thống kê của 9 ngày, ta thu được kết quả sau:

$$27,\ 26,\ 21,\ 28,\ 25,\ 30,\ 26,\ 23,\ 26.$$

Hãy xác định khoảng tin cậy 90% cho sản lượng trung bình mỗi ngày của phân xưởng.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*
2. *Đặt $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$. Suy ra $T \sim T(df = 8))$.*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*
2. *Đặt $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$. Suy ra $T \sim T(df = 8)$).*
3. *Ta có $\bar{x} \approx 25,7778$, $s \approx 2,6352$. Độ tin cậy 90%, suy ra $\alpha = 0.1$, suy ra $t^8_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^8_{0.95} = 1.8595$.*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*
2. *Đặt $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$. Suy ra $T \sim T(df = 8))$.*
3. *Ta có $\bar{x} \approx 25,7778$, $s \approx 2,6352$. Độ tin cậy 90%, suy ra $\alpha = 0.1$, suy ra $t^8_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^8_{0.95} = 1.8595$.*
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = t^8_{0.95} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.8595 \times \frac{2,6352}{\sqrt{9}} = 1.6364$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*
2. *Đặt $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$. Suy ra $T \sim T(df = 8))$.*
3. *Ta có $\bar{x} \approx 25,7778$, $s \approx 2,6352$. Độ tin cậy 90%, suy ra $\alpha = 0.1$, suy ra $t^8_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^8_{0.95} = 1.8595$.*
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = t^8_{0.95}\frac{s}{\sqrt{n}} = 1.8595 \times \frac{2,6352}{\sqrt{9}} = 1.6364$$

5. *Vậy KTC 90% cho sản lượng trung bình của phân xưởng là*

$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [24,1444, 27,4112]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n \leq 30$

Bài giải 4

Gọi X là sản lượng mỗi ngày của phân xưởng, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_9 \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*
2. *Đặt $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$. Suy ra $T \sim T(df = 8)$).*
3. *Ta có $\bar{x} \approx 25,7778$, $s \approx 2,6352$. Độ tin cậy 90%, suy ra $\alpha = 0.1$, suy ra $t^8_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^8_{0.95} = 1.8595$.*
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = t^8_{0.95} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.8595 \times \frac{2,6352}{\sqrt{9}} = 1.6364$$

5. *Vậy KTC 90% cho sản lượng trung bình của phân xưởng là*

$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [24,1444, 27,4112]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Các giả định

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Các giả định

♣ Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ một tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết, sử dụng phương sai mẫu S^2 thay thế cho σ^2.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Các giả định

- Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ một tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết, sử dụng phương sai mẫu S^2 thay thế cho σ^2.
- Cỡ mẫu: $n > 30$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$. Khi $n > 30$ thì T xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$..

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

Xây dựng khoảng tin cậy

- Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Thống kê trung bình mẫu và phương sai mẫu

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$. Khi $n > 30$ thì T xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$..
- Với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) &= 1-\alpha \\ \mathbb{P}\left(\left\{\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}\right) &= 1-\alpha. \end{aligned}$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

- Nếu $\bar{x}$ và s lần lượt là trung bình mẫu và độ lệch tiêu mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

- ♣ Nếu $\bar{x}$ và s lần lượt là trung bình mẫu và độ lệch tiêu mẫu của một mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$.
- ♣ Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho kỳ vọng μ được xác định như sau

$$\bar{x} - z^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

$z^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của $\mathcal{N}(0,1)$.

Ví dụ

Ví dụ 6

Biết lương tháng (Đv: triệu đồng) của thanh niên trong độ tuổi 25 – 35 *ở một khu vực có phân phối chuẩn. Khảo sát* 50 *thanh niên.*

Lương tháng	*1.8*	*2.5*	*3.2*	*3.9*	*4.6*	*5.3*	*6.0*	*6.7*	*7.4*
Số thanh niên	*3*	*3*	*8*	*9*	*11*	*7*	*5*	*2*	*2*

a *Lập khoảng tin cậy* 98% *cho lương tháng trung bình của thanh niên trong khu vực này.*

Ví dụ

Ví dụ 6

Biết lương tháng (Đv: triệu đồng) của thanh niên trong độ tuổi $25-35$ ở một khu vực có phân phối chuẩn. Khảo sát 50 thanh niên.

Lương tháng	*1.8*	*2.5*	*3.2*	*3.9*	*4.6*	*5.3*	*6.0*	*6.7*	*7.4*
Số thanh niên	*3*	*3*	*8*	*9*	*11*	*7*	*5*	*2*	*2*

a *Lập khoảng tin cậy* 98% *cho lương tháng trung bình của thanh niên trong khu vực này.*

b *Nếu muốn sai số ước lượng* $\epsilon = 0.10$ *mà vẫn giữ cỡ mẫu* $n = 50$ *thì độ tin cậy là bao nhiêu ?*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X lương tháng của thanh niên ở độ tuổi $25 - 35$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X lương tháng của thanh niên ở độ tuổi 25 − 35 , $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X *lương tháng của thanh niên ở độ tuổi* $25 - 35$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. *Thống kê*

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{S} \text{ .Suy ra } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X lương tháng của thanh niên ở độ tuổi $25 - 35$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. *Thống kê*
$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{S}$$ *.Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = 4,39$, $s = 1,3729$. *Độ tin cậy* 98%, *suy ra* $\alpha = 0,02$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.99} = 2,325$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X lương tháng của thanh niên ở độ tuổi 25 − 35, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. *Thống kê*
$$Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)}{S}$$ *.Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = 4,39$, $s = 1,3729$. *Độ tin cậy* 98%, *suy ra* $\alpha = 0,02$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.99} = 2,325$
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,325 \times \frac{1.3729}{\sqrt{50}} = 0,4514$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X *lương tháng của thanh niên ở độ tuổi* $25 - 35$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. *Thống kê*
$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{S}$$
.Suy ra $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = 4,39$, $s = 1,3729$. *Độ tin cậy* 98%, *suy ra* $\alpha = 0,02$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.99} = 2,325$
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,325 \times \frac{1.3729}{\sqrt{50}} = 0,4514$
5. *Vậy KTC* 98% *cho lương tháng trung bình của thanh niên là*
$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [4,39 - 0,4514, 4,39 + 0,4514] \Rightarrow \mu \in [3,9386; 4,8414]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

Bài giải 5

Gọi X *lương tháng của thanh niên ở độ tuổi* $25 - 35$, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. *Mẫu ngẫu nhiên* $X_1, X_2, \ldots, X_{50} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. *Thống kê*
$$Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)}{S}$$ *.Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
3. *Ta có* $\bar{x} = 4,39$, $s = 1,3729$. *Độ tin cậy* 98%, *suy ra* $\alpha = 0,02$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.99} = 2,325$
4. *Sai số ước lượng:* $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,325 \times \frac{1.3729}{\sqrt{50}} = 0,4514$
5. *Vậy KTC* 98% *cho lương tháng trung bình của thanh niên là*

$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] = [4,39 - 0,4514, 4,39 + 0,4514] \Rightarrow \mu \in [3,9386; 4,8414]$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết, $n > 30$

b. Với $n = 50$, để sai số ước lượng $\epsilon = 0,10 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}10\sqrt{50}}{1{,}3729} = 0,515 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \phi(0,515) = 0,6967$. Vậy mức ý nghĩa $\alpha = 2(1 - 0,6967) = 0,6066$ và độ tin cậy $1 - \alpha = 0,3934$

Nội dung

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

Bài toán 2

Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ cá thể mang đặc tính $\mathcal{A}$ nào đó trong tổng thể, p, chưa biết. Từ mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$, hãy tìm khoảng tin cậy cho p với độ tin cậy $100 \times (1-\alpha)\%$.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

Bài toán 2

Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ cá thể mang đặc tính $\mathcal{A}$ nào đó trong tổng thể, p, chưa biết. Từ mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$, hãy tìm khoảng tin cậy cho p với độ tin cậy $100 \times (1-\alpha)\%$.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.
- Đặt

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.
- Đặt

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.
- Đặt

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

- Biến ngẫu nhiên $\hat{P}$ có kỳ vọng và phương sai lần lượt là

$$\mathbb{E}(\hat{P}) = \mu_{\hat{P}} = p; \ \mathbb{V}ar(\hat{P}) = \sigma^2_{\hat{P}} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ của tổng thể

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n,p)$, p chưa biết.
- Đặt
$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$
- Biến ngẫu nhiên $\hat{P}$ có kỳ vọng và phương sai lần lượt là
$$\mathbb{E}(\hat{P}) = \mu_{\hat{P}} = p; \ \mathbb{V}ar(\hat{P}) = \sigma^2_{\hat{P}} = \frac{p(1-p)}{n}.$$
- Ta có
$$Z = \frac{\hat{P} - \mathbb{E}\hat{P}}{\sigma_{\hat{P}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

KTC cho tỷ lệ của tổng thể

Xây dựng khoảng tin cậy

KTC cho tỷ lệ của tổng thể

Xây dựng khoảng tin cậy

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.

KTC cho tỷ lệ của tổng thể

Xây dựng khoảng tin cậy

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n, p)$, p chưa biết.
- $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$ thì Z xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$..

KTC cho tỷ lệ của tổng thể

Xây dựng khoảng tin cậy

- Goi Y là số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát, thì $Y \sim B(n,p)$, p chưa biết.
- $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$ thì Z xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$..
- Với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$, ta có

$$\mathbb{P}\left(\left\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left\{\hat{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\}\right\} = 1-\alpha.$$

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

- Nếu $\hat{p}$ tỷ lệ cá thể mang đặc tính $\mathcal{A}$ trong mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể.

KTC cho kỳ vọng (phương sai σ^2 chưa biết)($n > 30$)

- Nếu $\hat{p}$ tỷ lệ cá thể mang đặc tính $\mathcal{A}$ trong mẫu ngẫu nhiên cỡ n được chọn từ một tổng thể.
- Khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho tỷ lệ p được xác định như sau

$$\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{\ })}{n}},$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ là phân vị mức $1-\frac{\alpha}{2}$ của $\mathcal{N}(0,1)$.

Ước lượng tỷ lệ của tổng thể

Vậy

- Với mẫu ngẫu nhiên, khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho p là

$$\left[\hat{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]$$

Ước lượng tỷ lệ của tổng thể

Vậy

- Với mẫu ngẫu nhiên, khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho p là

$$\left[\hat{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]$$

- Với mẫu cụ thể, khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho p là

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ

Ví dụ 7

Giả sử quan sát 100 người thấy có 20 người bị bệnh sốt xuất huyết.

a *Hãy ước lượng tỉ lệ bệnh sốt xuất huyết ở độ tin cậy 96%.*

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ

Ví dụ 7

Giả sử quan sát 100 người thấy có 20 người bị bệnh sốt xuất huyết.

a *Hãy ước lượng tỉ lệ bệnh sốt xuất huyết ở độ tin cậy 96%.*

b *Nếu muốn sai số ước lượng không quá 3% ở độ tin cậy 95%thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu người?*

Bài giải 6

Gọi Y là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu , $Y \sim B(n, p)$

Bài giải 6

Gọi Y *là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu ,* $Y \sim B(n, p)$

1. p *là tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu* $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.
2. $Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Bài giải 6

Gọi Y là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu , $Y \sim B(n, p)$

1. *p là tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.*
2. $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
3. *Ta có* $n = 100, \hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0.03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$

Bài giải 6

Gọi Y là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu , $Y \sim B(n, p)$

1. *p là tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.*
2. $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $n = 100, \hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0.03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 0.0868$$

Bài giải 6

Gọi Y là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu , $Y \sim B(n,p)$

1. *p là tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.*
2. $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $n = 100, \hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0.03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 0.0868$$

5. *Vậy KTC* 97% *cho tỷ lệ mắc bệnh số xuất huyết là*

$$p \in [\hat{p}-\epsilon, \hat{p}+\epsilon] = [0.2 - 0.0868; 0.2 + 0.0868] = [0.1132; 0.2868]$$

Bài giải 6

Gọi Y là số người mắc bệnh sốt xuất huyết trong mẫu , $Y \sim B(n, p)$

1. *p là tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.*
2. $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. *Suy ra* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. *Ta có* $n = 100, \hat{p} = \frac{20}{100} = 0.2$. *Độ tin cậy* 97%, *suy ra* $\alpha = 0.03$, *suy ra* $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$
4. *Sai số ước lượng:*

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 0.0868$$

5. *Vậy KTC* 97% *cho tỷ lệ mắc bệnh số xuất huyết là*

$$p \in [\hat{p}-\epsilon, \hat{p}+\epsilon] = [0.2 - 0.0868; 0.2 + 0.0868] = [0.1132; 0.2868]$$

Bài 1a. Phụ lục B5

Gọi X Số tiền một thanh niên phải bỏ ra cho các hoạt động vui chơi giải trí , $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. Mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_{400} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. Thống kê
$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{S} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
3. $\bar{x} = 148,25$; $s = 51,9006$; $n = 400$. Độ tin cậy 95%, suy ra $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1,96$.
4. SSUL: $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,96 \times \frac{51,9006}{\sqrt{400}} = 5,0863$
5. Vậy KTC 95% cho số tiền trung bình một thanh niên bỏ ra là
$$\mu \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon] \Rightarrow \mu \in [143,1637; 153,3363]$$

Bài 1b Phụ lục B5

Gọi Y là số thanh niên khá giả trong mẫu , $Y \sim B(n, p)$.

1. p là tỷ lệ thanh niên khá giả, chưa biết. Thống kê tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{Y}{n}$.
2. $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$. Suy ra $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
3. Ta có $n = 400, \hat{p} = \frac{90}{400} = 0.225$. Độ tin cậy 97% $\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.985} = 2.17$
4. Sai số ước lượng:
$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \times \sqrt{\frac{0.225 \times 0.775}{400}} = 0.0453$$
5. Vậy KTC 97% cho tỷ lệ thanh niên khá giả là
$$p \in [\hat{p}-\epsilon, \hat{p}+\epsilon] \Rightarrow \mu \in [0.225 - 0.0453; 0.225 + 0.0453] \Rightarrow \mu \in [0.1797; 0.2703]$$
.
6. Nếu muốn sai số không quá 0.01 thì
$$\epsilon = z_{0.985}.\sqrt{\frac{0.225 \times 0.775}{n}} \le 0.01 \Rightarrow n \ge \left(\frac{2.17}{0.01}\right)^2 \times 0.225 \times 0.775 \approx 8211.144.$$
Vậy cần khảo sát thêm ít nhất $8212 - 400 = 7812$ thanh niên.

Khoảng tin cậy

Nhận xét 1

- *Chất lượng của ước lượng phản ánh qua độ tin cậy* $(1-\alpha)$ *và dung sai* ϵ.

Câu hỏi 1

Với độ tin cậy $(1-\alpha)$, *nếu ta muốn dung sai* ϵ *đạt được ở một mức nào đó cho trước thì kích thước mẫu n tối thiểu là bao nhiêu ?*

Khoảng tin cậy

Nhận xét 1

- *Chất lượng của ước lượng phản ánh qua độ tin cậy $(1-\alpha)$ và dung sai ϵ.*
- *Độ tin cậy càng cao và dung sai càng nhỏ thì ước lượng càng tốt.*

Câu hỏi 1

Với độ tin cậy $(1-\alpha)$, nếu ta muốn dung sai ϵ đạt được ở một mức nào đó cho trước thì kích thước mẫu n tối thiểu là bao nhiêu ?

Khoảng tin cậy

Nhận xét 1

- *Chất lượng của ước lượng phản ánh qua độ tin cậy* $(1-\alpha)$ *và dung sai* ϵ.
- *Độ tin cậy càng cao và dung sai càng nhỏ thì ước lượng càng tốt.*
- *Tuy nhiên, dung sai* ϵ *lại phụ thuộc vào kích thước mẫu n và độ tin cậy* $(1-\alpha)$.

Câu hỏi 1

Với độ tin cậy $(1-\alpha)$, *nếu ta muốn dung sai* ϵ *đạt được ở một mức nào đó cho trước thì kích thước mẫu n tối thiểu là bao nhiêu ?*

Khoảng tin cậy

Nhận xét 1

- *Chất lượng của ước lượng phản ánh qua độ tin cậy* $(1-\alpha)$ *và dung sai* ϵ.
- *Độ tin cậy càng cao và dung sai càng nhỏ thì ước lượng càng tốt.*
- *Tuy nhiên, dung sai* ϵ *lại phụ thuộc vào kích thước mẫu n và độ tin cậy* $(1-\alpha)$.

Câu hỏi 1

Với độ tin cậy $(1-\alpha)$, *nếu ta muốn dung sai* ϵ *đạt được ở một mức nào đó cho trước thì kích thước mẫu n tối thiểu là bao nhiêu ?*

Khoảng tin cậy

Nhận xét 1

- *Chất lượng của ước lượng phản ánh qua độ tin cậy* $(1-\alpha)$ *và dung sai* ϵ.
- *Độ tin cậy càng cao và dung sai càng nhỏ thì ước lượng càng tốt.*
- *Tuy nhiên, dung sai* ϵ *lại phụ thuộc vào kích thước mẫu n và độ tin cậy* $(1-\alpha)$.

Câu hỏi 1

Với độ tin cậy $(1-\alpha)$, *nếu ta muốn dung sai* ϵ *đạt được ở một mức nào đó cho trước thì kích thước mẫu n tối thiểu là bao nhiêu ?*

Khi ước lượng trung bình tổng thể

Bài toán 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho $\epsilon \leq \epsilon_0$, với ϵ_0 và α cho trước.

Khi ước lượng trung bình tổng thể

Bài toán 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho $\epsilon \leq \epsilon_0$, với ϵ_0 và α cho trước.

a Nếu biết $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$, từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Để $\epsilon \leq \epsilon_0$ ta cần chọn

$$n \geq \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}$$

Khi ước lượng trung bình tổng thể

b Nếu chưa biết σ^2, ta căn cứ vào mẫu đã cho để tính s^2. Từ đó ta xác định đươc kích thước mẫu tối thiểu

$$n \geq \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{s^2}{\epsilon_0^2}.$$

Khi ước lượng tỷ lệ tổng thể

a Khi đã biết $\hat{p}$, để $\epsilon \leq \epsilon_0$ thì từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow n \geq \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\epsilon_0^2}$$

Khi ước lượng tỷ lệ tổng thể

a Khi đã biết $\hat{p}$, để $\epsilon \leq \epsilon_0$ thì từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow n \geq \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\epsilon_0^2}$$

b Khi chưa biết $\hat{p}$, ta có $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.
Do $\hat{p}(1-\hat{p})$ đạt giá trị cực đại 0.25 khi $\hat{p} = 0.5$ nên $\epsilon \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.25}{n}}$. Do đó, để $\epsilon \leq \epsilon_0$ ta chọn n sao cho $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \epsilon_0$, tức là

$$n \geq \frac{0.25\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\epsilon_0^2}$$

Nội dung

Xác định độ tin cậy

Câu hỏi 2

Khi ước lượng các số đặc trưng của tổng thể bằng các số liệu quan sát của một mẫu kích thước n, nếu ta muốn dung sai ϵ *đủ nhỏ thì độ tin cậy* $(1-\alpha)$ *sẽ là bao nhiêu ?*

Xác định độ tin cậy

Câu hỏi 2

Khi ước lượng các số đặc trưng của tổng thể bằng các số liệu quan sát của một mẫu kích thước n, nếu ta muốn dung sai ϵ đủ nhỏ thì độ tin cậy $(1-\alpha)$ sẽ là bao nhiêu ?

Bài toán 4

Tìm $(1-\alpha)$ khi biết n và ϵ.

Xác định độ tin cậy

Câu hỏi 2

Khi ước lượng các số đặc trưng của tổng thể bằng các số liệu quan sát của một mẫu kích thước n, nếu ta muốn dung sai ϵ đủ nhỏ thì độ tin cậy $(1-\alpha)$ sẽ là bao nhiêu ?

Bài toán 4

Tìm $(1-\alpha)$ khi biết n và ϵ.

Khi ước lượng trung bình tổng thể

a Nếu biết $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$ thì từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ta suy ra $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. sau khi xác định được $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ta suy ra độ tin cậy $(1-\alpha)$.

Khi ước lượng trung bình tổng thể

a Nếu biết $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$ thì từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ta suy ra $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$. sau khi xác định được $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ta suy ra độ tin cậy $(1-\alpha)$.

b Nếu chưa biết $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$, khi đó ta căn cứ vào mẫu đã cho để tính s. Từ đó xác định $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ theo công thức $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{s}$ Sau đó suy ra độ tin cậy $(1-\alpha)$ như ở trên.

Khi ước lượng tỷ lệ tổng thể

Từ công thức

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ta suy ra

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \epsilon \sqrt{\frac{n}{\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

Từ đó ta suy ra $(1-\alpha)$ như ở trên.