ÔN THI CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH HỆ CHÍNH QUI

CHƯƠNG 4:

Câu 1. *Các tập hợp* V và W *dưới đây có phải là không gian con của* $\mathbf{R}^4$ *không ? Tại sao ?*

$V = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, (5x + 4y + z - 6t)^2 + 3(9x - y + 7z + 2t)^4 \le -|\,8x - 6y + 3z - t\,| \}$

$W = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, x^2 + z^2 = y^2 + t^2 + 1 \}$.

Ta mô tả lại V dưới dạng tập hợp các nghiệm trên $\mathbf{R}^4$ của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất để khẳng định V là một không gian con của $\mathbf{R}^4$:

$V = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,/\, 5x + 4y + z - 6t = 9x - y + 7z + 2t = 8x - 6y + 3z - t = 0 \}$

(để ý $\alpha^2 + 3\beta^4 \le -|\gamma| \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\beta^4 + |\gamma| \le 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$).

Ta giải thích W không phải là một không gian con của $\mathbf{R}^4$ theo một trong 3 cách sau:

Cách 1: $\mathbf{O} = (0, 0, 0, 0) \notin W$ vì $0^2 + 0^2 = 0 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$.

Cách 2: $\exists \alpha = (1, 0, 0, 0), \beta = (0, 0, 1, 0) \in W$ [vì $1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2 = 0^2 + 0^2 + 1 = 1$] và $\alpha + \beta = (1, 0, 1, 0) \notin W$ [vì $1^2 + 1^2 = 2 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$].

Cách 3: $\exists \alpha = (1, 0, 0, 0) \in W$ [vì $1^2 + 0^2 = 0^2 + 0^2 + 1 = 1$], $\exists c = 2 \in \mathbf{R}$, $c\alpha = (2, 0, 0, 0) \notin W$ [vì $2^2 + 0^2 = 4 \neq 0^2 + 0^2 + 1 = 1$].

Câu 2. *Cho* $\alpha = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4$.

a) *Tìm một tập hợp hữu hạn* $S \subset \mathbf{R}^4$ *sao cho* $< S > = W$ *trong đó*

$W = \{ (b - 2a - 3c + 2d, a + 4b + 6c - d, 3a + 6c - 3d, d - a - 3b - 5c) \,/\, a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$.

b) *Khi nào* $\alpha \in W = < S >$ *và lúc đó hãy biểu diễn* α *thành một tổ hợp tuyến tính theo* S.

a) $W = \{ \gamma = a(-2, 1, 3, -1) + b(1, 4, 0, -3) + c(-3, 6, 6, -5) + d(2, -1, -3, 1) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \}$

$= < S >$ với

$S = \{ X = (-2, 1, 3, -1), Y = (1, 4, 0, -3), Z = (-3, 6, 6, -5), T = (2, -1, -3, 1) \} \subset \mathbf{R}^4$.

b) Ta có $\alpha \in W = < S > \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của S

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T = \alpha$

$\Leftrightarrow$ $c_1(-2, 1, 3, -1) + c_2(1, 4, 0, -3) + c_3(-3, 6, 6, -5) + c_4(2, -1, -3, 1) = (u, v, w, t)$.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -3 & 2 & u \\ 1 & 4 & 6 & -1 & v \\ 3 & 0 & 6 & -3 & w \\ -1 & -3 & -5 & 1 & t \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 3 & -1 & u+w \\ 0 & 1 & 1 & 0 & v+t \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3u-2w \\ 0 & -2 & -2 & 0 & u+w+t \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \to \begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 2 & -1 & u-v+w-t \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & v+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3u+3v-2w+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u+2v+w+3t \end{array}\right) \\ E_1 \ E_2 \end{array}$$

Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = \langle S \rangle \Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow$ ($-3u + 3v - 2w + 3t = 0 = u + 2v + w + 3t$) (*).

Lúc đó do hệ có vô số nghiệm nên có vô số cách biểu diễn $\alpha = c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4T$

với $c_3 = p$, $c_4 = q$ ($p, q \in \mathbf{R}$), $c_1 = q - 2p + u - v + w - t$ và $c_2 = -p + v + t$ (□).

Suy ra $\alpha = (u, v, w, t) \notin W = \langle S \rangle \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R}$

$\Leftrightarrow$ ($-3u + 3v - 2w + 3t \neq 0$ hay $u + 2v + w + 3t \neq 0$) (**).

Câu 3. *Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp dưới đây*:

a) $S = \{ X = (3, 1, -1), Y = (-1, -5, 7), Z = (1, -2, 3), T = (9, 0, 4) \} \subset \mathbf{R}^3$.

b) $D = \{ X = (-4, 2, 14, -6), Y = (6, -3, -21, 9) \} \subset \mathbf{R}^4$.

c) $E = \{ X = (2, -1, 0, 9), Y = (-5, 7, 3, -4) \} \subset \mathbf{R}^4$.

d) $F = \{ X = (-1, -1, -7, 2), Y = (5, -1, 1, 18), Z = (-5, 2, 8, -16) \} \subset \mathbf{R}^4$.

e) $G = \{ X = (1, -2, 3, -4), Y = (3, 3, -5, 1), Z = (-5, -8, 13, -6) \} \subset \mathbf{R}^4$.

f) $H = \{ X = (1, 2, 3m + 1), Y = (3, 1, m - 3), Z = (m + 5, 2, -4) \} \subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b), c) : S phụ thuộc tuyến tính vì $|S| = 4 > \dim\mathbf{R}^3 = 3$. D phụ thuộc tuyến tính vì X tỉ lệ với Y [$Y = (-3/2)X$]. E độc lập tuyến tính vì X không tỉ lệ với Y.

d) Trong F, lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -7 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 18 \\ -5 & 2 & 8 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 7 & 43 & -26 \end{pmatrix} \\ F_1 \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1^* & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -20^* & -40 \end{pmatrix} \\ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \end{array} = S_A .$$

Ta có $r(A) = 3 = |F|$ nên F độc lập tuyến tính.

e) Trong G, lập ma trận

$$B=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\3&3&-5&1\\-5&-8&13&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1]{}\begin{pmatrix}1^*&-2&3&-4\\0&9&-14&13\\0&-18&28&-26\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\ F_2]{}\begin{pmatrix}1^*&-2&3&-4\\0&9^*&-14&13\\0&0&0&0\end{pmatrix}=S_B.$$

Ta có $r(B)=2<|G|=3$ nên G phụ thuộc tuyến tính.

f) Trong H, tính $|C|=\begin{vmatrix}X\\Y\\Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3m+1\\3&1&m-3\\m+5&2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&m+7\\3&1^*&m-3\\m-1&0&2-2m\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}-5&m+7\\1&-2\end{vmatrix}=$

$=(m-1)(3-m)$. Khi đó H độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow |C|\neq 0 \Leftrightarrow 1\neq m\neq 3$.

H phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow |C|=0 \Leftrightarrow$ ($m=1$ hoặc $m=3$).

Câu 4. *Tập hợp nào dưới đây là cơ sở của* $\mathbf{R}^3$ *? Tại sao ?*

a) $S=\{X=(-3,2,7), Y=(8,-2,3)\}$.

b) $C=\{X=(-1,-1,-7), Y=(5,-1,1), Z=(-5,2,8), T=(4,0,-3)\}$.

c) $H=\{X=(1,2,3m+1), Y=(3,1,m-3), Z=(m+5,2,-4)\}\subset \mathbf{R}^3$ (*tham số thực* m).

a), b) : S và C không phải là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ vì $|S|=2\neq \dim\mathbf{R}^3=3\neq |C|=4$.

c) Trong H, tính $|C|=\begin{vmatrix}X\\Y\\Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3m+1\\3&1&m-3\\m+5&2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&m+7\\3&1^*&m-3\\m-1&0&2-2m\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}-5&m+7\\1&-2\end{vmatrix}$

$=(m-1)(3-m)$. Khi đó H là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow |C|\neq 0 \Leftrightarrow 1\neq m\neq 3$.

H không phải là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 \Leftrightarrow |C|=0 \Leftrightarrow$ ($m=1$ hoặc $m=3$).

Câu 5.

a) *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W=\langle S\rangle\leq V=\mathbf{R}^4$ *và chỉ ra* dimW *nếu*

$S=\{X=(-1,-2,4,0), Y=(2,3,3,-1), Z=(1,-4,2,-3), T=(-1,9,3,5)\}\subset \mathbf{R}^4$.

b) *Cho* $\alpha=(u,v,w,t)\in \mathbf{R}^4$. *Khi nào* $\alpha\in W$ và lúc đó tìm tọa độ $[\alpha]_B$?

a) Đặt ma trận $A=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&4&0\\2&3&3&-1\\1&-4&2&-3\\-1&9&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1^*&-2&4&0\\0&-1&11&-1\\0&5&5&2\\0&11&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1^*&-2&4&0\\0&-1^*&11&-1\\0&0&60&-3\\0&0&120&-6\end{pmatrix}$

$$\to S_A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1^* & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1^* & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 20^* & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}.$$ Do đó W có một cơ sở là

$B = \{\gamma_1 = (-1,-2, 4, 0), \gamma_2 = (0,-1, 11,-1), \gamma_3 = (0, 0, 20,-1)\}$ và $\dim W = |B| = 3 = r(A)$.

b) Ta có $\alpha \in W = \langle S \rangle = \langle B \rangle \Leftrightarrow \alpha$ là một tổ hợp tuyến tính của B

$\Leftrightarrow$ Phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$ (ẩn số $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$) có nghiệm trên $\mathbf{R}$.

Xét phương trình $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$

$\Leftrightarrow c_1(-1,-2, 4, 0) + c_2(0,-1, 11,-1) + c_3(0, 0, 20,-1) = (u, v, w, t)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & u \\ -2 & -1 & 0 & v \\ 4 & 11 & 20 & w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & -1 & 0 & v-2u \\ 0 & 9 & 20 & 2v+w \\ 0 & -1 & -1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 11 & 2v+w+9t \\ 0 & 0 & -1 & 2u-v+t \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1^* & 0 & 2u-v \\ 0 & 0 & 1^* & v-2u-t \\ 0 & 0 & 0 & 22u-9v+w+20t \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \end{array}.$$ Vậy $\alpha = (u, v, w, t) \in W = \langle B \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Hệ trên có nghiệm (duy nhất) trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow 22u - 9v + w + 20t = 0$ (*).

Lúc đó ta có tọa độ của α theo cơ sở B là $[\alpha]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 2u-v \\ v-2u-t \end{pmatrix}$ (□).

Ta có $\alpha = (u, v, w, t) \notin W \Leftrightarrow$ Hệ trên vô nghiệm trên $\mathbf{R} \Leftrightarrow 22u - 9v + w + 20t \neq 0$ (**).

Câu 6. *Tìm một cơ sở* B *cho không gian* $W = \{ X \in \mathbf{R}^5 \,/\, AX = \mathbf{O} \}$ (*W là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = \mathbf{O}$) *và chỉ ra* $\dim W$ *nếu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -9 & 2 & -8 & 12 \\ 3 & 9 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbf{R}).$$

Trước ta giải hệ $AX = \mathbf{O}$ với $X = (x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5$ (để mô tả cụ thể không gian W).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 2 & -8 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 7 & -9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 3 & 3 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & -30 & 0 \end{array}\right) \\ E_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 3 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ E_1 \quad E_2 \end{array}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 3 ẩn tự do $y, t, u \in \mathbf{R}$, $x = -3y - 2t + 2u$, $z = t - 3u$. Như vậy

$W = \{ X = (-3y - 2t + 2u, y, t - 3u, t, u) \mid z, t, u \in \mathbf{R} \}$

$= \{ X = y(-3, 1, 0, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 1, 0) + u(2, 0, -3, 0, 1) \mid y, t, u \in \mathbf{R} \}$, nghĩa là

$W = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (-3, 1, 0, 0, 0), \delta_2 = (-2, 0, 1, 1, 0), \delta_3 = (2, 0, -3, 0, 1) \} \subset \mathbf{R}^5$.

D độc lập tuyến tính nên D là một cơ sở của W và $\dim W = |D| = 3$ = số ẩn tự do của hệ.

Câu 7. *Trong* $\mathbf{R}^4$, *cho các tập hợp* $S = \{ X = (1, 2, 0, 1), Y = (2, 5, -1, 3), Z = (3, 1, 5, -2) \}$ *và* $T = \{ E = (2, 3, 1, 1), F = (3, 3, -2, 4) \}$. *Đặt* $V = \langle S \rangle \leq \mathbf{R}^4$ *và* $W = \langle T \rangle \leq \mathbf{R}^4$. *Tìm một cơ sở cho các không gian* V, W *và* V + W. *Từ đó tính* $\dim(V \cap W)$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\ F_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F_1 \; F_2 \end{array} = S_A = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}$.

Ta thấy V có một cơ sở là $C = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1) \}$ và $\dim V = |C| = 2$.

$W = \langle T \rangle$ và $T = \{ E, F \}$ độc lập tuyến tính (E và E có các thành phần không tỉ lệ với nhau) nên T là một cơ sở của W và $\dim W = |T| = 2$.

$V + W = \langle C \cup T \rangle$ với $C \cup T = \{ \gamma_1, \gamma_2, E, F \}$.

Lập ma trận $B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ F_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1^* & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F_1 \; F_2 \; F_3 \end{array} = S_B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ O \end{pmatrix}$.

Suy ra V + W có một cơ sở là $D = \{ \gamma_1 = (1, 2, 0, 1), \gamma_2 = (0, 1, -1, 1), \gamma_3 = (0, 0, -5, 4) \}$.

Suy ra $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - |D| = 4 - 3 = 1$.

Câu 8. *Cho* $S = \{ X = (-2, 1, -7, 3), Y = (6, 0, 25, -10), Z = (-4, -13, -34, 13) \} \subset V = \mathbf{R}^4$ *và* $T = \{ E = (1, 2, -5, -2, 3), F = (4, 8, -16, -7, 6) \} \subset W = \mathbf{R}^5$. *Giải thích* S *và* T *độc lập tuyến tính và bổ sung thêm các vector vào* S *và* T *để được một cơ sở cho* V *và* W.

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 & 3 \\ 6 & 0 & 25 & -10 \\ -4 & -13 & -34 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -15 & -20 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2^* & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3^* & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2^* \end{pmatrix} = S_A.$$

F_1 $\qquad$ $F_1 \quad F_2 \quad F_3$

Ta thấy $r(A) = 3 = |S|$ nên S độc lập tuyến tính. Do cột 3 của A không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm vector $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$ từ $\mathbf{R}^4$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^4$ là $S' = \{ X, Y, Z, \varepsilon_3 \}$.

Ta có T độc lập tuyến tính vì E và F có các thành phần không tỉ lệ với nhau.

$$\text{Lập ma trận } B = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -16 & -7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4^* & 1 & -6 \end{pmatrix} = S_B.$$

$F_1 \quad F_2$

Do các cột $2, 4$ và 5 của B không bán chuẩn hóa được nên ta bổ sung thêm các vector $\varepsilon'_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon'_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ và $\varepsilon'_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ từ $\mathbf{R}^5$ vào S để có một cơ sở của $\mathbf{R}^5$ là $T' = \{ E, F, \varepsilon'_2, \varepsilon'_4, \varepsilon'_5 \}$.

Câu 9. $\mathbf{R}^3$ *có các cơ sở* $S = \{ X_1 = (-1, 1, 2), X_2 = (2, -1, 2), X_3 = (1, 0, 3) \}$ *và* $T = \{ Y_1 = (2, 5, -2), Y_2 = (2, 1, -3), Y_3 = (1, -2, -2) \}$.

a) *Viết ma trận đổi cơ sở* $P = (S \to T)$.

b) *Cho* $[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = (4, 1, -2)$ *và* $[Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Tìm* X *và tính* $[Y]_S$ và $[Z]_S$.

c) *Cho* $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Xác định các cơ sở* $U = \{ G_1, G_2, G_3 \}$ *và* $V = \{ H_1, H_2, H_3 \}$ *của* $\mathbf{R}^3$ *sao cho* $(S \to U) = Q = (V \to T)$.

a) Viết $P = (S \to T)$.

Cách 1: Tìm trực tiếp $P = (S \to T) = ([Y_1]_S \ [Y_2]_S \ [Y_3]_S)$ bằng cách giải 3 hệ phương trình tuyến tính (có vế trái y hệt nhau) được ma trận hóa như sau:

$$\left(X_1^t \ \ X_2^t \ \ X_3^t \,\middle|\, Y_1^t \,\middle|\, Y_2^t \,\middle|\, Y_3^t \right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 1 & 12 & 4 & -3 \\ 0 & 1^* & 1 & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -40 & -17 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1^* & 0 & -33 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & 1^* & 40 & 17 & -6 \end{array}\right) = (I_3 \mid [Y_1]_S \; [Y_2]_S \; [Y_3]_S)$$

$E_1 \; E_2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $E_1 \; E_2 \; E_3$

Vậy $P = (S \to T) = ([Y_1]_S \; [Y_2]_S \; [Y_3]_S) = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

Cách 2: sử dụng cơ sở chính tắc $B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$.

Đặt $H = (B_o \to S) = (X_1^t \; X_2^t \; X_3^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $H^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Đặt $K = (B_o \to T) = (Y_1^t \; Y_2^t \; Y_3^t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $P = H^{-1}K = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$.

b) Ta có $X = 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2(-1, 1, 2) - (2, -1, 2) + 3(2, -3, -4) = (2, -6, -10)$.

Ta tính tọa độ $[Y]_S$ từ $Y = (4, 1, -2) \in \mathbf{R}^3$.

Cách 1: dùng định nghĩa của tọa độ. Đặt $[Y]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ thì $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$.

Ma trận hóa phương trình vector trên, ta có $\left(X_1^t \quad X_2^t \quad X_3^t \middle| \; Y^t\right) =$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1^* & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -24 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1^* & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1^* & 24 \end{array}\right) \end{array}$$

Vậy tọa độ của Y theo cơ sở S là $[Y]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Cách 2: dùng công thức thay đổi tọa độ theo cơ sở. Ta có

$[Y]_{B_o} = Y^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ nên $[Y]_S = (S \to B_o)\, [Y]_{B_o} = H^{-1}Y^t = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Ta có tọa độ $[Z]_S = (S \to T)\,[Z]_T = P\,[Z]_T = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 104 \\ -126 \end{pmatrix}$.

c) Ta có $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = Q = (S \to U) = ([G_1]_S \; [G_2]_S \; [G_3]_S)$.

Lần lượt đồng nhất 3 cột của ma trận đầu với ma trận cuối, ta tính được :

$G_1 = X_1 + 2X_2 + 2X_3 = (-1, 1, 2) + 2(2, -1, 2) + 2(2, -3, -4) = (7, -7, -2)$

$G_2 = -2X_1 - 3X_3 = -2(-1, 1, 2) - 3(2, -3, -4) = (-4, 7, 8)$

$G_3 = 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 2(-1, 1, 2) + (2, -1, 2) + 3(2, -3, -4) = (6, -8, -6)$.

Vậy $U = \{ G_1 = (7, -7, -2), G_2 = (-4, 7, 8), G_3 = (6, -8, -6) \}$.

Ta có $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} = (V \to T)^{-1} = (T \to V) = ([H_1]_T \; [H_2]_T \; [H_3]_T)$ nên

$H_1 = -3Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 = -3(2, 5, -2) + 4(2, 1, 3) + 6(1, -2, -2) = (8, -23, 6)$

$H_2 = Y_2 + Y_3 = (2, 1, 3) + (1, -2, -2) = (3, -1, 1)$

$H_3 = 2Y_1 - 3Y_2 - 4Y_3 = 2(2, 5, -2) - 3(2, 1, 3) - 4(1, -2, -2) = (-6, 15, -5)$.

Vậy $V = \{ H_1 = (8, -23, 6), H_2 = (3, -1, 1), H_3 = (-6, 15, -5) \}$.

CHƯƠNG 5:

Câu 1. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ có biểu thức

$f(X) = (-x + 2y + 4z - 3t, 2x + y - 2z + 5t, 3x + 4y + 7t), \forall X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

Tìm một cơ sở cho mỗi không gian Im(f) *và* Ker(f) *rồi chỉ ra số chiều của chúng.*

Đặt $A = B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1) \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^4$ thì $< f(A) > = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$.

Ta có $f(A) = \{ f(\varepsilon_1) = (-1, 2, 3), f(\varepsilon_2) = (2, 1, 4), f(\varepsilon_3) = (4, -2, 0), f(\varepsilon_4) = (-3, 5, 7) \}$.

Lập ma trận $M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \to \underset{F_1}{\begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}} \to S_M = \underset{F_1 \quad F_2}{\begin{pmatrix} -1^* & 2 & 3 \\ 0 & 1^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Im(f) có cơ sở $C = \{ \gamma_1 = (-1, 2, 3), \gamma_2 = (0, 1, 2) \}$ và $\dim_{\mathbf{R}} [\mathrm{Im}(f)] = |C| = 2 = r(M)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(X) = \mathbf{O} \}$

$= \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (-x + 2y + 4z - 3t,\ 2x + y - 2z + 5t,\ 3x + 4y + 7t) = \mathbf{O} \}$

$= \{ X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x + 2y + 4z - 3t = 2x + y - 2z + 5t = 3x + 4y + 7t = 0 \}$.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \underset{E_1}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 12 & -2 & 0 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{E_1\ E_2}{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -8/5 & 13/5 & 0 \\ 0 & 1^* & 6/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}}.$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $z = 5a$, $t = 5b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $x = 8a - 13b$, $y = b - 6a$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{ X = (8a - 13b, b - 6a, 5a, 5b) = a(8, -6, 5, 0) + b(-13, 1, 0, 5) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Như vậy $\mathrm{Ker}(f) = \langle D \rangle$ với $D = \{ \delta_1 = (8, -6, 5, 0), \delta_2 = (-13, 1, 0, 5) \}$ độc lập tuyến tính. Do đó $\mathrm{Ker}(f)$ có một cơ sở là $D = \{ \delta_1, \delta_2 \}$ và $\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Ker}(f) = |D| = 2 =$ số ẩn tự do của hệ phương trình $f(X) = \mathbf{O}$. Để ý $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim\mathbf{R}^4$.

Câu 2. $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* A, B *và* C. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ *có*

$$f(X) = (-u + 2v + 4w - 3t,\ 2u + v - 2w + 5t,\ 3u + 4v + 7t),\ \forall X = (u, v, w, t) \in \mathbf{R}^4.$$

a) D *và* E *lần lượt là các cơ sở của* $\mathbf{R}^2$ *và* $\mathbf{R}^3$ *như sau:*

$D = \{ \delta_1 = (5, -3), \delta_2 = (3, -2) \}$ *và* $E = \{\alpha_1 = (-5, 1, -3), \alpha_2 = (3, -1, 2), \alpha_3 = (1, 0, 1)\}$.

Viết $[f]_{C,B}$ *và tính* $[f]_{C,E}$.

b) *Xét* $g, h \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ *có các ma trận* $[g]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *và* $[h]_{E,D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Viết biểu thức của g *rồi tìm các ma trận* $[g]_{E,A}$, $[g]_{B,D}$, $[g]_{E,D}$.

Tìm các ma trận $[h]_{B,D}$, $[h]_{E,A}$, $[h]_{B,A}$ *rồi viết biểu thức của* h.

a) Ta có $S = (A \rightarrow D) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $T = (B \rightarrow E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad [f]_{C,B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad [f]_{C,E} = T^{-1}[f]_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -6 & 22 \end{pmatrix}.$$

b) Ta có $g(X) = (u - v + 2w, -2u + 3v), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

$[g]_{E,A} = [g]_{B,A}.T = ?$, $[g]_{B,D} = S^{-1}.[g]_{B,A} = ?$ và $[g]_{E,D} = S^{-1}.[g]_{B,A}.T = ?$.

$[h]_{B,D} = [h]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 13 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $[h]_{E,A} = S.[h]_{E,D} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 28 \\ -7 & -4 & -17 \end{pmatrix}$ và

$[h]_{B,A} = S.[h]_{E,D}.T^{-1} = \begin{pmatrix} -46 & 4 & 74 \\ 28 & -2 & -45 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, $h(X) = (-46u + 4v + 74w, 28u - 2v - 45w)$.

Câu 3. *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z), \forall X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. *Tìm một cơ sở cho mỗi không gian* Im(f) *và* Ker(f) *rồi chỉ ra số chiều của chúng.*

Đặt $A = B_o = \{ \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1) \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ thì

$f(A) = \{f(\varepsilon_1) = (1,2,-10), f(\varepsilon_2) = (3,1,0), f(\varepsilon_3) = (-3,1,-12)\}$ và $< f(A) > = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^3)$

Lập ma trận $M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 7 & -42 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\ F_2} \begin{pmatrix} 1^* & 2 & -10 \\ 0 & 1^* & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \end{pmatrix}$.

Im(f) có cơ sở $C = \{\gamma_1 = (1, 2, -10), \gamma_2 = (0, 1, -6)\}$ và $\dim_{\mathbf{R}}[\mathrm{Im}(f)] = |C| = 2 = r(M)$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(X) = (x + 3y - 3z, 2x + y + z, -10x - 12z) = \mathbf{O} = (0, 0, 0)\}$

$= \{ X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - 3z = 2x + y + z = -10x - 12z = 0 \}$. Ma trận hóa

hệ phương trình tuyến tính trên: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\ E_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1^* & -7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$.

Hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do là $z = 5a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x = -6a$, $y = 7a$.

Do đó $\mathrm{Ker}(f) = \{ X = (-6a, 7a, 5a) = a(-6, 7, 5) \mid a \in \mathbf{R} \}$.

Như vậy $\mathrm{Ker}(f) = < D >$ với $D = \{ \delta = (-6, 7, 5) \}$ độc lập tuyến tính nên Ker(f) có một cơ sở là $D = \{ \delta = (-6, 7, 5) \}$ và $\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{Ker}(f) = |D| = 1$ = số ẩn tự do của hệ phương trình tuyến tính $f(X) = \mathbf{O}$. Để ý $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = 2 + 1 = 3 = \dim\mathbf{R}^3$.

Câu 4. $\mathbf{R}^3$ *có cơ sở chính tắc* B *và cơ sở* $E = \{\alpha_1 = (1, 0, 2), \alpha_2 = (2, -2, 1), \alpha_3 = (3, -3, 2)\}$.

a) *Cho* $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $f(X) = (u + 3v - 3w, 2u + v + w, -10u - 12w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

Viết $[f]_B$, $[f]_{E,B}$, $[f]_{B,E}$ *và* $[f]_E$.

b) *Xét* $g, h \in L(\mathbf{R}^3)$ *có* $[\,g\,]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *và* $[\,h\,]_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. *Viết biểu thức của* g

rồi tính $[\,g\,]_{E,B}$, $[\,g\,]_{B,E}$ và $[\,g\,]_E$. *Tính* $[\,h\,]_{B,E}$, $[\,h\,]_{E,B}$ *và* $[\,h\,]_B$ *rồi viết biểu thức của* h.

Ta có $S = (B \to E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Ta có $[\,f\,]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

$[\,f\,]_{E,B} = [\,f\,]_B S = ?$, $[\,f\,]_{B,E} = S^{-1}.[\,f\,]_B = ?$ và $[\,f\,]_E = S^{-1}.[\,f\,]_B.S = ?$.

Từ $[\,g\,]_B$, ta có $g(X) = (u + 2v + 3w, -u + 2w, 2u + v + w), \forall X = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

$[\,g\,]_{E,B} = [\,g\,]_B.S = ?$, $[\,g\,]_{B,E} = S^{-1}.[\,g\,]_B = ?$ và $[\,g\,]_E = S^{-1}.[\,g\,]_B.S = ?$.

$[\,h\,]_{B,E} = [\,h\,]_E.S^{-1} = ?$, $[\,h\,]_{E,B} = S.[\,h\,]_E = ?$, $[\,h\,]_B = S.[\,h\,]_E.S^{-1} = ?$. Biểu thức h ?

Câu 5. $\mathbf{R}^3$ *và* $\mathbf{R}^4$ *có các cơ sở chính tắc lần lượt là* B *và* C.

a) *Tìm tọa độ* $[\,\alpha\,]_E$ *nếu* $\alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$

và $E = \{\, \alpha_1 = (2, -1, 5), \alpha_2 = (-1, 0, -1), \alpha_3 = (-4, -2, 1) \,\}$ *là một cơ sở của* $\mathbf{R}^3$.

b) *Cho* $\beta_1 = (-2, 3, 1), \beta_2 = (1, 0, -3)$ *và* $\beta_3 = (3, 4, 1) \in \mathbf{R}^3$.

Tìm $f \in L(\mathbf{R}^3)$ *thỏa* $f(\alpha_j) = \beta_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\,\alpha\,]_E$ *hay* $[\,f\,]_{E,B}$).

c) *Cho* $\gamma_1 = (1, -1, 0, 1), \gamma_2 = (-2, 1, 3, 0)$ *và* $\gamma_3 = (3, 0, -4, -1) \in \mathbf{R}^4$.

Tìm $g \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ *thỏa* $g(\alpha_j) = \gamma_j, \forall j = 1, 2, 3$ (*dùng* $[\,\alpha\,]_E$ *hay* $[\,g\,]_{E,C}$).

a) Ta có $P = (B \to E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $Q = (E \to B) = P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $[\,\alpha\,]_E = (E \to B)[\,\alpha\,]_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 = -2u + 5v + 2w \\ c_2 = -9u + 22v + 8w \\ c_3 = u - 3v - w \end{pmatrix}$, nghĩa là

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = (-2u + 5v + 2w)\alpha_1 + (-9u + 22v + 8w)\alpha_2 + (u - 3v - w)\alpha_3$ (*).

b) *Cách 1:* $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + c_3 f(\alpha_3)$

$= (-2u + 5v + 2w)(-2, 3, 1) + (-9u + 22v + 8w)(1, 0, -3) + (u - 3v - w)(3, 4, 1)$

$= (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w)$.

Cách 2: Ta có $[\,f\,]_B = [\,f\,]_{E,B}P^{-1} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_B \;\; [\,f(\alpha_2)\,]_B \;\; [\,f(\alpha_3)\,]_B\,).P^{-1}$

$$= (\,[\,\beta_1\,]_B \;\; [\,\beta_2\,]_B \;\; [\,\beta_3\,]_B\,).P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 26 & -64 & -23 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(\alpha) = (-2u + 3v + w, -2u + 3v + 2w, 26u - 64v - 23w)$, $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

c) *Cách 1*: $\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, từ (*) ta có

$g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1 g(\alpha_1) + c_2 g(\alpha_2) + c_3 g(\alpha_3)$

$= (-2u + 5v + 2w)(1,-1,0,1) + (-9u + 22v + 8w)(-2,1,3,0) + (u - 3v - w)(3,0,-4,-1)$

$= (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w)$.

Cách 2: Ta có $[\,g\,]_{B,C} = [\,g\,]_{E,C}P^{-1} = (\,[\,g(\alpha_1)\,]_C \;\; [\,g(\alpha_2)\,]_C \;\; [\,g(\alpha_3)\,]_C\,).P^{-1}$

$$= (\,[\,\gamma_1\,]_C \;\; [\,\gamma_2\,]_C \;\; [\,\gamma_3\,]_C\,).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -9 & 22 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -48 & -17 \\ -7 & 17 & 6 \\ -31 & 78 & 28 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $g(\alpha) = (19u - 48v - 17w, -7u + 17v + 6w, -31u + 78v + 28w, -3u + 8v + 3w)$,

$\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$.

CHƯƠNG 6:

Câu 1. *Giải thích tại sao các ma trận sau không chéo hóa được trên* **R** ?

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$. c) $M = \begin{pmatrix} 19 & -5 & -6 \\ 25 & -11 & 4 \\ 17 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

d) $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. e) $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $p_A(x) = |\,xI_2 - A\,| = \begin{vmatrix} x-8 & 11 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-8)(x+1) + 22 = x^2 - 7x + 14$ ($\Delta = 49 - 56 = -7 < 0$).

$p_A(x)$ vô nghiệm trên **R** nên không tách được trên **R**. Do đó A không chéo hóa được / **R**.

b) $p_B(x) = |\,xI_2 - B\,| = \begin{vmatrix} x-10 & -7 \\ 7 & x+4 \end{vmatrix} = (x-10)(x+4) + 49 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ nên $p_B(x)$

tách được trên **R**.

$B - 3I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$ và $E_3 = \{\, X \in \mathbf{R}^2 \mid (B - 3I_2)X = \mathbf{O} \,\} = \{\, X = (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u + v = 0 \,\}$.

Hệ trên có 1 ẩn tự do là v nên $\dim E_3 = 1 < 2$. Do đó B không chéo hóa được trên **R**.

c) $p_M(x) = |xI_3 - M| = \begin{vmatrix} x-19 & 5 & 6 \\ -25 & x+11 & -4 \\ -17 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2-x \\ -25 & x+11 & -4 \\ -17 & 5 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -25 & x+11 & -29 \\ -17 & 5 & x-13 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} x+11 & -29 \\ 5 & x-13 \end{vmatrix} = (x + 11)(x - 13) + 145 = (x + 11)(x^2 - 2x + 2).$

Do $p_M(x) = (x + 11).[\,(x - 1)^2 + 1\,]$ không tách được trên **R** nên M không chéo hóa được trên **R**.

d) $p_N(x) = |xI_3 - N| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -5 & x+3 & -3 \\ 1 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x - 2)(x + 3)(x + 2) - 3 + 2(x + 3) + 5(x + 2)$

$= (x^2 - 4)(x + 3) + 7x + 13 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$ nên $p_N(x)$ tách được trên **R**.

$E_{-1} = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (N + I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ trên có 1 ẩn tự do là w nên $\dim E_{-1} = 1 < 3$. Do đó N không chéo hóa được trên **R**.

e) $p_Q(x) = |xI_3 - Q| = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ -4 & x-4 & 4 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -2x-2 \\ -4 & x-4 & 4 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -4 & x-4 & -4 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$= (x + 1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2$ nên $p_Q(x)$ tách được trên **R**.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (Q - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & w & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Hệ trên có 1 ẩn tự do là w nên $\dim E_2 = 1 < 2$. Do đó Q không chéo hóa được trên **R**.

Câu 2. *Giải thích các ma trận sau chéo hóa được trên* **R** *và chéo hóa chúng.*
Áp dụng để tính nhanh lũy thừa k của chúng (k là số nguyên ≥ 0).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix}$. c) $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

d) *Sử dụng* a) *để tính* u_n và v_n *theo* $n \geq 0$ *biết rằng*

$u_o = 2, v_o = 5$ *và* $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - 4v_n\ ;\ v_{n+1} = -u_n + v_n$.

e) *Sử dụng* b) *để tính* u_n, v_n và w_n *theo* $n \geq 0$ *biết rằng* $u_o = 4, v_o = 1, w_o = -3$ *và* $\forall n \geq 0$,

$u_{n+1} = 7u_n - 6v_n - 10w_n\ ;\ v_{n+1} = -12u_n + 17v_n + 24w_n\ ;\ w_{n+1} = 12u_n - 15v_n - 22w_n$.

f) *Sử dụng* c) *để tính* u_n, v_n và w_n *theo* $n \geq 0$ *biết rằng* $u_o = -2, v_o = 3, w_o = -1$ *và*

$\forall n \geq 0, u_{n+1} = 6u_n + 12v_n + 16w_n\ ;\ v_{n+1} = -3u_n - 7v_n - 12w_n\ ;\ w_{n+1} = u_n + 3v_n + 6w_n$.

a) $p_A(x) = |xI_2 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ có 2 nghiệm

thực đơn ($c_1 = 3 \neq c_2 = -1$) nên A chéo hóa được trên $\mathbf{R}$.

Ta có $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ và $A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$E_3 = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A - 3I_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a + 2b = 0$ (nghĩa là $a = -2b$) $\}$

$= \{ \alpha = (-2b, b) = b(-2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $C_1 = \{ \alpha_1 = (-2, 1) \}$.

$E_{-1} = \{ \alpha \in \mathbf{R}^2 \mid (A + I_2)\alpha = \mathbf{O} \} = \{ \alpha = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid 2b - a = 0$ (nghĩa là $a = 2b$) $\}$

$= \{ \alpha = (2b, b) = b(2, 1) \mid b \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $C_2 = \{ \alpha_2 = (2, 1) \}$.

$\mathbf{R}^2 = E_3 \oplus E_{-1}$ có cơ sở $C = C_1 \cup C_2 = \{ \alpha_1 = (-2, 1), \alpha_2 = (2, 1) \}$.

Đặt $P = (B \to C) = ([\alpha_1]_B\ [\alpha_2]_B) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với B là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$ thì P

khả nghịch, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $\forall k \geq 1, A^k = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^k P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1} =$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2.3^k & 2(-1)^k \\ 3^k & (-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2.3^k & 4(-1)^k - 4.3^k \\ (-1)^k - 3^k & 2(-1)^k + 2.3^k \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4} = [\ 3^k\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^k\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ ]$ (công thức của A^k vẫn đúng khi $k = 0$).

d) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k - 4v_k \\ -u_k + v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = At_k$.

Vậy $\forall k \geq 0, t_{k+1} = At_k$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Do đó $\forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = At_{n-1} = A^2 t_{n-2} = \cdots = A^{n-1}t_1 = A^n t_o$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2.3^n & 4(-1)^n - 4.3^n \\ (-1)^n - 3^n & 2(-1)^n + 2.3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 4.3^n \\ 3(-1)^n + 2.3^n \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall n \geq 0, u_n = 6(-1)^n - 4.3^n$ và $v_n = 3(-1)^n + 2.3^n$.

b) $p_B(x) = |\, xI_3 - B \,| = \begin{vmatrix} x-7 & 6 & 10 \\ 12 & x-17 & -24 \\ -12 & 15 & x+22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-7 & 6 & 10 \\ 12 & x-17 & -24 \\ 0 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-7 & -4 & 10 \\ 12 & x+7 & -24 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$

$= (x-2)\begin{vmatrix} x-7 & -4 \\ 12 & x+7 \end{vmatrix} = (x-2)[\,(x-7)(x+7)+48\,] = (x-1)(x-2)(x+1).$

$p_B(x)$ có ba nghiệm thực đơn là ± 1 và 2 nên B chéo hóa được trên $\mathbf{R}$.

$E_1 = \{\, X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B - I_3)X = \mathbf{O} \,\}$.

$$X = (u, v, w) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 16 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -23 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}:$$

Nghiệm của hệ là $w = 3a$ ($a \in \mathbf{R}$), $v = -3a$ và $u = 2a$.

$E_1 = \{\, X = (2a, -3a, 3a) = a(2, -3, 3) \,/\, w \in \mathbf{R} \,\}$ có cơ sở $C_1 = \{\, \alpha_1 = (2, -3, 3) \,\}$ và $\dim E_1 = |\, C_1 \,| = 1$.

$E_2 = \{\, X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B - 2I_3)X = \mathbf{O} \,\}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 15 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -24 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}:$$

Nghiệm của hệ là $w \in \mathbf{R}$, $v = 0$ và $u = 2w$.

$E_2 = \{\, X = (2w, 0, w) = w(2, 0, 1) \,/\, w \in \mathbf{R} \,\}$ có cơ sở $C_2 = \{\, \alpha_2 = (2, 0, 1) \,\}$ và $\dim E_2 = |\, C_2 \,| = 1$.

$E_{-1} = \{\, X \in \mathbf{R}^3 \,/\, (B + I_3)X = \mathbf{O} \,\}$.

$$X = (u, v, w) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & -10 & 0 \\ -12 & 18 & 24 & 0 \\ 12 & -15 & -21 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}:$$

Nghiệm của hệ là $w = 2a$ ($a \in \mathbf{R}$), $v = -2a$ và $u = a$.

$E_{-1} = \{\, X = (a, -2a, 2a) = a(1, -2, 2) \,/\, w \in \mathbf{R} \,\}$ có cơ sở $C_3 = \{\, \alpha_3 = (1, -2, 2) \,\}$ và $\dim E_{-1} = |\, C_3 \,| = 1$.

Đặt $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \,\}$ thì C là một cơ sở của $\mathbf{R}^3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_{-1}$.

Gọi $D = \{\, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \,\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

Xét $P = (D \to C) = (\, [\,\alpha_1\,]_D \;\; [\,\alpha_2\,]_D \;\; [\,\alpha_3\,]_D \,) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$\forall k \geq 1, B^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2.2^k & (-1)^k \\ -3 & 0 & -2(-1)^k \\ 3 & 2^k & 2(-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3(-1)^k & 2.2^k-6+4(-1)^k & 2.2^k-8+6(-1)^k \\ 6(-1)^k-6 & 9-8(-1)^k & 12-12(-1)^k \\ 6-6(-1)^k & 2^k-9+8(-1)^k & 2^k-12+12(-1)^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ -6 & 9 & 12 \\ 6 & -9 & -12 \end{pmatrix} + 2^k\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k\begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 6 & -8 & -12 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Như vậy ta có $B^k = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ -6 & 9 & 12 \\ 6 & -9 & -12 \end{pmatrix} + 2^k\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k\begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 6 & -8 & -12 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \forall k \geq 1$

[công thức của B^k vẫn đúng khi $k = 0$].

e) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u_k - 6v_k - 10w_k \\ -12u_k + 17v_k + 24w_k \\ 12u_k - 15v_k - 22w_k \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = Bt_k$. Vậy $\forall k \geq 0, t_{k+1} = Bt_k$ với $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -10 \\ -12 & 17 & 24 \\ 12 & -15 & -22 \end{pmatrix}$.

Do đó $\forall n \geq 0, t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = Bt_{n-1} = B^2 t_{n-2} = \cdots = B^{n-1}t_1 = B^n t_o$

$= \begin{pmatrix} 4-3(-1)^n & 2.2^n-6+4(-1)^n & 2.2^n-8+6(-1)^n \\ 6(-1)^n-6 & 9-8(-1)^n & 12-12(-1)^n \\ 6-6(-1)^n & 2^n-9+8(-1)^n & 2^n-12+12(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34-4.2^n-26(-1)^n \\ -51+52(-1)^n \\ 51-2.2^n-52(-1)^n \end{pmatrix}$. Suy ra

$\forall n \geq 0, u_n = 34 - 2^{n+2} - 26(-1)^n, v_n = -51 + 52(-1)^n$ và $w_n = 51 - 2^{n+1} - 52(-1)^n$.

c) $p_C(x) = | xI_3 - C | = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 3 & x+7 & 12 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} x-6 & -12 & -16 \\ 0 & x-2 & 3x-6 \\ -1 & -3 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & -12 & 20 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -3 & x+3 \end{vmatrix}$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x-6 & 20 \\ -1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)\,[\,(x-6)(x+3)+20\,] = (x-1)(x-2)^2.$$

$E_1 = \{ X \in \mathbf{R^3} \,/\, (C - I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 16 & 0 \\ -3 & -8 & -12 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Nghiệm của hệ là $w \in \mathbf{R}$, $u = 4w$ và $v = -3w$.

$E_1 = \{ X = (4w, -3w, w) = w(4, -3, 1) \,/\, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $D_1 = \{ \alpha_1 = (4, -3, 1) \}$ và $\dim E_1 = |\,D_1\,| = 1$.

$E_2 = \{ X \in \mathbf{R^3} \,/\, (C - 2I_3)X = \mathbf{O} \}$.

$$X = (u, v, w) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 16 & 0 \\ -3 & -9 & -12 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Nghiệm của hệ là $v, w \in \mathbf{R}$, $u = -3v - 4w$.

$E_2 = \{ X = (-3v - 4w, v, w) = v(-3, 1, 0) + w(-4, 0, 1) \,/\, v, w \in \mathbf{R} \}$ có cơ sở $D_2 = \{ \alpha_2 = (-3, 1, 0), \alpha_3 = (-4, 0, 1) \}$ và $\dim E_2 = |\,D_2\,| = 2$. Suy ra C chéo hóa được trên $\mathbf{R}$.

Đặt $D = D_1 \cup D_2 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ thì D là một cơ sở của $\mathbf{R^3}$ vì $\mathbf{R^3} = E_1 \oplus E_2$.

Gọi $B = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R^3}$.

Xét $P = (B \to D) = (\,[\,\alpha_1\,]_B\ [\,\alpha_2\,]_B\ [\,\alpha_3\,]_B\,) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì P khả nghịch,

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Suy ra $C = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ và $\forall k \geq 1$,

$$C^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3.2^k & -4.2^k \\ -3 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5.2^k - 4 & 12.2^k - 12 & 16.2^k - 16 \\ 3 - 3.2^k & 9 - 8.2^k & 12 - 12.2^k \\ 2^k - 1 & 3.2^k - 3 & 5.2^k - 4 \end{pmatrix} = 2^k\begin{pmatrix} 5 & 12 & 16 \\ -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -12 & -16 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

[công thức của C^k vẫn đúng khi $k = 0$].

f) $\forall k \geq 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ thì $t_o = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ và $t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_k + 12v_k + 16w_k \\ -3u_k - 7v_k - 12w_k \\ u_k + 3v_k + 6w_k \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = Ct_k$. Vậy $\forall k \geq 0$, $t_{k+1} = Ct_k$ với $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 16 \\ -3 & -7 & -12 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Do đó $\forall n \geq 0$, $t_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = Ct_{n-1} = C^2\, t_{n-2} = \cdots = C^{n-1}t_1 = C^n\, t_o$

$$= \begin{pmatrix} 5.2^n - 4 & 12.2^n - 12 & 16.2^n - 16 \\ 3 - 3.2^n & 9 - 8.2^n & 12 - 12.2^n \\ 2^n - 1 & 3.2^n - 3 & 5.2^n - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.2^n - 12 \\ 9 - 6.2^n \\ 2.2^n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2^{n+1} - 12 \\ 9 - 3.2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\forall n \geq 0$, $u_n = 5.2^{n+1} - 12$, $v_n = 9 - 3.2^{n+1}$ và $w_n = 2^{n+1} - 3$.
