Chương 1

Tập hợp - Giải tích tổ hợp

1.1 Tập hợp

Bài 1.1 (*). Cho dãy tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại dãy tập hợp $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, sao cho:

(a) Các B_i từng đôi một rời nhau;

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Hướng dẫn. Hãy bắt đầu với hai trường hợp dễ nhất $n = 2$ và $n = 3$. ■

Chú thích. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x | \exists n, x \in A_n\}$.

Bài tập này chỉ ra cách xây dựng một họ các tập rời nhau từ một họ các tập bất kì. ■

Bài 1.2. Chứng minh rằng các hệ thức sau đây tương đương nếu A và B là tập hợp con của Ω:

$$A \cup B = \Omega, \overline{A} \subset B, \overline{B} \subset A.$$

Hướng dẫn. Hãy chứng minh $A \cup B = \Omega \Rightarrow \overline{A} \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset A \Rightarrow A \cup B = \Omega$. ■

Bài 1.3. Khẳng định sau có đúng hay không: "nếu A, B, C là các tập con của tập Ω sao cho

$$A \subset \overline{B \cup C} \text{ và } B \subset \overline{A \cup C}$$

thì $B = \emptyset$" ?

Bài 1.4. Chứng minh rằng nếu A, B, C là các tập hợp con của tập hợp Ω, sao cho

$$A \cap B \subset \overline{C} \text{ và } A \cup C \subset B, \text{ thì } A \cap C = \emptyset$$

Bài 1.5. Tìm biểu thức đơn giản của các biểu thức sau:

(a) $(A \cup B)(A \cup C)$

(b) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$

(c) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})$

(d) $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$

(e) $(A \cup B)(B \cup C)$

Bài 1.6. Hệ thức nào trong các hệ thức sau đây đúng. Nếu đúng hãy chứng minh, nếu sai hãy cho ví dụ minh họa.

(a) $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus AB) \cup (C \setminus AC)$

(b) $A \cup B = (A \setminus AB) \cup B$

(c) $(A \cup B) \setminus A = B$

(d) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

(e) $ABC = AB(C \cup B)$

(f) $AB \cup BC \cup CA \supset ABC$

(g) $(AB \cup BC \cup CA) \subset (A \cup B \cup C)$

(h) $A\overline{B}C \subset A \cup B$

(i) $\overline{A \cup B}C = \overline{A}C \cup \overline{B}C$

(j) $\overline{A \cup B}C = C \setminus (C(A \cup B))$

Chú thích. Đôi khi vì sự đơn giản và tiện lợi người ta viết AB thay cho $A \cap B$, $A + B$ thay cho $A \cup B$ và A' hoặc A^c thay cho $\overline{A}$. Chữ c nhỏ trong A^c là viết tắt của từ "complement" (phần bù) trong tiếng Anh. ■

Bài 1.7. Chứng minh rằng:

(a) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup \overline{\overline{A} \cup B} = A$

(b) $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup B\overline{A}$

Bài 1.8. Chứng minh

(a) Nếu $A \cup B = AB$ thì $A = B$

(b) $A \cup BC \supset (A \cup B)C$

(c) Nếu $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ và $A \cap B = \emptyset$ thì $A_1 \cap B_1 = \emptyset$

Bài 1.9. Hệ thức nào trong các hệ thức sau đây đúng? Đối với các hệ thức sai, hãy chỉ ra điều kiện để hệ thức đúng.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(c) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

(d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Bài 1.10. Cho A, B, C là các tập con của Ω. Đặt $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Chứng minh:

(a) $B \triangle A = A \triangle B$

(b) $A \triangle \emptyset = A$

(c) $A \triangle A = \emptyset$

(d) $A \triangle \Omega = \overline{A}$

(e) $\overline{A \triangle B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

(f) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Chú thích. Phép toán $\triangle$ ở trên gọi là hiệu đối xứng. Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \triangle B$, là tập hợp gồm các phần tử chỉ thuộc A hoặc chỉ thuộc B, không đồng thời thuộc cả A và B. ■

Bài 1.11. Cho A, B, C là các tập con của Ω. Chứng minh:

(a) $((A \cap B) \cup (C \cap D))' = (A' \cup B') \cap (C' \cup D')$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = \emptyset$

(c) $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$

(d) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$

(e) $(A \cap B') \triangle (B \cap A') = A \triangle B$

(f) $A \triangle B = C \triangle D \Rightarrow A \triangle C = B \triangle D$

(g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(h) $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$

Bài 1.12 (*). Cho $A \subset \Omega$. Định nghĩa, I_A, là hàm chỉ (the indicator function, hay người ta còn gọi là hàm đặc trưng - the characteristic function) của A như sau:

$$I_A : \Omega \to [0, 1]$$

với

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \in A' \end{cases}$$

(a) Cho A, B là các tập con của Ω. Chứng minh rằng

$$A = B \text{ nếu và chỉ nếu } I_A = I_B$$

(b) Chứng minh các hệ thức sau

i. $I_\Omega = 1; I_\emptyset = 0$

ii. $I_{A \cap B} = I_A I_B$

iii. $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_A I_B$

iv. $I_{A'} = 1 - I_A$

v. $I_{A\triangle B} \equiv I_A + I_B \pmod 2$

vi. $I_{A\setminus B} = I_A(1 - I_B)$

(c) Bằng cách sử dụng các hệ thức liên quan đến hàm chỉ trong câu b, chứng minh các hệ thức liên quan đến tập hợp trong bài 1.11

Chú thích. Cho số nguyên dương n, hai số nguyên a, b được gọi là đồng dư theo mô-đun n nếu chúng có cùng số dư khi chia cho n (tức là $a - b$ chia hết cho n). Kí hiệu là $a \equiv b \pmod n$. Ví dụ: $1 \equiv 3 \pmod 2$. ■

Bài 1.13 (*). Cho Ω là một tập hợp và giả sử rằng $\mathcal{R}$ là một tập khác rỗng các tập con của Ω. Ta nói rằng $\mathcal{R}$ là một vành các tập con của Ω nếu

$$(A \in \mathcal{R} \text{ và } B \in \mathcal{R}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{R} \text{ và } A \setminus B \in \mathcal{R}).$$

(a) Giả sử $\mathcal{R}$ là một vành các tập con của Ω. Chứng minh rằng $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(b) Cho một ví dụ một vành $\mathcal{R}$ các tập con của Ω sao cho $\Omega \notin \mathcal{R}$.

(c) Gọi $\mathcal{R}$ là một tập các tập con của Ω. Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một vành nếu và chỉ nếu

$$(A \in \mathcal{R} \text{ và } B \in \mathcal{R}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{R} \text{ và } A \triangle B \in \mathcal{R}).$$

(d) Cho $\mathcal{S}$ là một tập các tập con của Ω. Giả sử rằng

$$(A \in \mathcal{S} \text{ và } B \in \mathcal{S}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{S} \text{ và } A \setminus B \in \mathcal{S}).$$

Chứng minh rằng $\mathcal{S}$ không nhất thiết là một vành các tập con của Ω.

(e) Chứng minh rằng giao của hai vành các tập con của Ω là một vành các tập con của Ω.

Hướng dẫn. Trong câu (c), sử dụng kết quả câu (c) và (d) trong bài 1.11 ■

1.2 Giải tích tổ hợp

Bài 1.14. Nếu một người có 6 đôi vớ khác nhau và 4 đôi giày khác nhau. Có bao nhiêu cách kết hợp giữa vớ và giày?

Đáp án. 24. ■

Bài 1.15. Một lớp có 40 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra một ban cán sự lớp gồm 3 người: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn ban cán sự lớp?

Đáp án. 59280. ■

Bài 1.16. Một lô hàng có 50 sản phẩm.

(a) Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên cùng lúc 5 sản phẩm để kiểm tra?

(b) Có bao nhiêu cách chọn ngẫu nhiên lần lượt 5 sản phẩm?

Đáp án. (a) 2118760 (b) 254251200. ∎

Bài 1.17. Trong một hệ thống điện thoại nội bộ 3 số

(a) có bao nhiêu máy có các chữ số khác nhau?

(b) Có bao nhiêu máy có số 9 ở cuối còn các chữ số còn lại đều khác nhau?

Đáp án. (a) 720 (b) 90. ∎

Bài 1.18. Mã vùng điện thoại của một quốc gia có dạng một dãy gồm 3 số. Số đầu tiên là một số nguyên nằm giữa 2 và 9., số thứ hai là 0 hoặc 1, và số thứ ba là một số nguyên bất kì từ 1 đến 9.

(a) Có thể có tối đa bao nhiêu mã vùng?

(b) Có bao nhiêu mã vùng bắt đầu với số 4?

Đáp án. (a) 144 (b) 18 ∎

Bài 1.19. Một hộp có 8 bi đỏ, 6 bi trắng, 4 bi vàng. Người ta chọn ra 6 bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

(a) Không yêu cầu gì thêm.

(b) Phải có 2 bi đỏ, 2 bi trắng, 2 bi vàng.

(c) Có đúng 2 bi vàng.

Đáp án. (a) 18564 (b) 2520 (c) 6006. ∎

Bài 1.20. Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B còn 4 người trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công?

Đáp án. 1260. ∎

Bài 1.21. Một tổ sản xuất có 12 người, trong đó có 4 nữ, cần chia thành 4 nhóm đều nhau. Hãy tìm số cách phân chia sao cho mỗi nhóm có 1 nữ?

Đáp án. 10080. ∎

Bài 1.22. Xếp 12 hành khách lên 4 toa tàu. Tìm số cách sắp xếp:

(a) Mỗi toa có 3 hành khách.

(b) Một toa có 6 hành khách, một toa có 4 hành khách, 2 toa còn lại mỗi toa có 1 hành khách.

Đáp án. (a) 369600 (b) 665280. ∎

Bài 1.23. (a) Có bao nhiêu cách xếp 3 nam và 3 nữ ngồi thành một hàng?

(b) Có bao nhiêu cách xếp 3 nam và 3 nữ ngồi thành một hàng nếu mỗi nam và mỗi nữ ngồi cạnh nhau?

(c) Có bao nhiêu cách xếp nếu 3 nam phải ngồi cạnh nhau?

(d) Có bao nhiêu cách xếp nếu không có hai nam hoặc hai nữ nào được ngồi cạnh nhau?

Đáp án. (a) 720 (b) 72 (c) 144 (d) 72. ∎

Bài 1.24. Có 6 học sinh được sắp xếp ngồi vào 6 chỗ đã ghi số thứ tự trên một bàn dài. Tìm số cách xếp

(a) 6 học sinh vào bàn.

(b) 6 học sinh này vào bàn sao cho 2 học sinh A, B ngồi cạnh nhau.

(c) 6 học sinh này ngồi vào bàn sao cho 2 học sinh A, B không ngồi cạnh nhau.

Đáp án. (a) 720 (b) 240 (c) 480. ∎

Bài 1.25. Năm người A, B, C, D, E sẽ phát biểu trong một hội nghị. Có bao nhiêu cách sắp xếp để:

(a) B phát biểu sau A.

(b) A phát biểu xong thì đến lượt B.

Đáp án. (a) 60 (b) 24. ∎

Bài 1.26. Từ 8 sinh viên nữ và 6 sinh viên nam, một nhóm làm việc gồm 3 nam và 3 nữ phải được lập ra. Có bao nhiêu cách lập nhóm nếu

(a) 2 trong số các sinh viên nam không chịu làm việc cùng nhau?

(b) 2 trong số các sinh viên nữ không chịu làm việc cùng nhau?

(c) 1 nam và 1 nữ không chịu làm việc cùng nhau?

Đáp án. (a) 896 (b) 1000 (c) 910. ∎

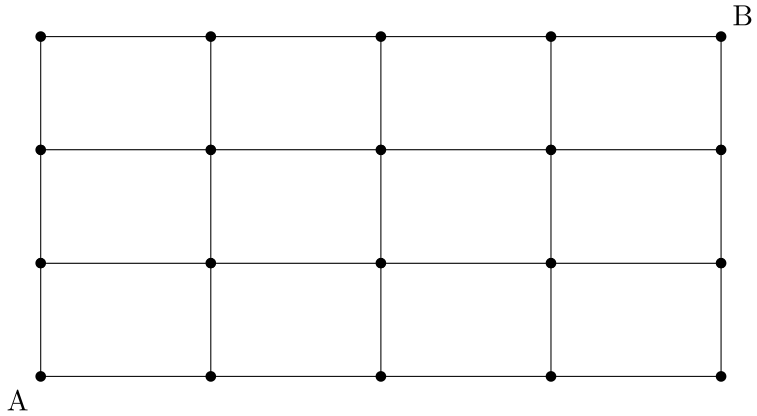
Bài 1.27. Một người có 8 người bạn. Người này dự định mời 5 trong số 8 người bạn tham dự một bữa tiệc liên hoan. Có bao nhiêu cách chọn nếu

(a) 2 trong số các người bạn giận nhau và sẽ không tham dự cùng nhau?

(b) 2 trong số các người bạn sẽ chỉ tham dự cùng nhau?

Đáp án. (a) 36 (b) 26. ∎

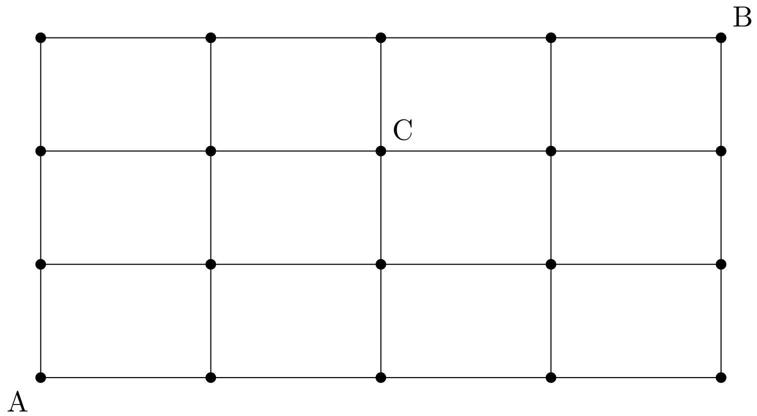
Bài 1.28. Xét một lưới các điểm được cho như hình bên dưới. Giả sử bắt đầu tại điểm A, ta có thể đi một bước lên trên hoặc một bước ngang sang phải và tiếp tục như vậy cho đến khi đến được điểm B. Hỏi có bao nhiêu đường đi từ A đến B?



Đáp án. 35. ■

Hướng dẫn. Chú ý rằng để đến B, ta cần đi 4 bước ngang sang phải và 3 bước lên trên. ■

Bài 1.29. Trong bài 1.28, có bao nhiêu đường đi từ A đến B qua C như trong hình bên dưới?



Đáp án. 18 ■

Bài 1.30. Các đại biểu đến từ 10 nước trong đó có Nga, Pháp, Anh, và Mỹ được xếp ngồi vào một hàng ghế. Có bao nhiêu cách xếp chỗ sao cho đại biểu Anh và Pháp ngồi kế nhau và đại biểu Nga và Mỹ không ngồi kế nhau?

Đáp án. 564480. ■

Bài 1.31 (*). 8 món quà giống nhau được chia cho 4 bạn.

(a) Có bao nhiêu cách chia?

(b) Có bao nhiêu cách chia nếu mỗi bạn nhận ít nhất một món quà?

Đáp án. (a) 165 (b) 35 ■

Bài 1.32 (*). Ta có 20 triệu đồng để đầu tư vào 4 hạng mục. Mỗi khoản đầu tư phải là bội số của 1 triệu đồng và mỗi hạng mục đều yêu cầu một khoản đầu tư tối thiểu nếu ta đầu tư vào đó. Các khoảng đầu tư tối thiểu này tương ứng là 2, 2, 3 và 4 triệu đồng. Có bao nhiêu cách đầu tư nếu ta đầu tư

(a) cả 4 hạng mục?

(b) ít nhất 3 trong 4 hạng mục?

Đáp án. (a) 220 (b) 572 ∎

Bài 1.33. Các chữ cái của các từ sau đây có thể được sắp xếp theo bao nhiêu cách?

(a) HANOI

(b) NGHEAN

(c) NHATRANG

Đáp án. (a) 120 (b) 360 (c) 10080 ∎

Bài 1.34 (*). Người ta có thể sắp xếp các chữ cái của từ

MUHAMMADAN

theo bao nhiêu cách sao cho 3 chữ cái giống nhau không ở gần nhau?

Chú thích. Muhammadan, trong tiếng Anh, là một tính từ và có nghĩa là (thuộc/liên quan đến) đạo Hồi. ∎

Đáp án. 88080. ∎

Bài 1.35. Cho số nguyên $n \geq 2$, chứng minh rằng

(a) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

(b) $1 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

(c) $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$

(d) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$

(e) $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

Hướng dẫn. Sử dụng công thức nhị thức Newton. ∎

Bài 1.36. Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \cdots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$$

Hướng dẫn. Sử dụng hệ thức $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. ∎

Bài 1.37. Cho m, n, r là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} C_{n-k}^r = C_{n+1}^{r+1} - C_{n-m}^{r+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m$

Hướng dẫn. (a) Sử dụng hệ thức $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. (b) Quy nạp. ■

Bài 1.38. Chứng minh rằng với các số nguyên dương n, k

$$C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k C_{n-k}^0 = 0$$

Tổng quát hơn,

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i} t^i = C_n^k (1+t)^k$$

Bài 1.39 (Hệ thức Vandermonde). Giả sử m, n, r là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_m^0 C_{n-m}^r + C_m^1 C_{n-m}^{r-1} + \cdots + C_m^r C_{n-m}^0 = C_n^r$$

Chú thích. Hệ thức này được tìm ra bởi nhà toán học Alexandre-Théophile Vandermonde vào thế kỉ 18. ■

Hướng dẫn. So sánh các hệ số t^r trong hai vế của hệ thức $(1+t)^m(1+t)^{n-m} = (1+t)^n$. ■

Bài 1.40. Chứng minh rằng

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Hướng dẫn. Áp dụng bài 1.39. ■

Bài 1.41. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2$$

Hướng dẫn. Áp dụng bài 1.40. ■

Bài 1.42 (*). Cho $r \le n$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^r = \begin{cases} 0 & \text{nếu } r < n \\ n! & \text{nếu } r = n \end{cases}$$

Hướng dẫn. Xét đạo hàm cấp r của $(1-e^t)^n$ tại $t = 0$. ■

Bài 1.43. Chứng minh rằng

$$C_n^1 \frac{1}{1} - C_n^2 \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Hướng dẫn. Tích phân trên $[0,1]$ hệ thức $\sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k = [1-(1-t)^n]t^{-1}$. ■