

# Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hiện tính toán các vấn đề liên quan đến đại số tuyến tính, MAPLE cung cấp hai gói lệnh `linalg` và `LinearAlgebra`. Trong phần này chúng tôi trình bày gói `linalg`. Độc giả có thể tham khảo thêm gói lệnh `LinearAlgebra`. Mỗi gói lệnh chứa nhiều hàm, để gọi `gói_lệnh` nào đó ta sử dụng `> with(gói_lệnh)`

```
> with(linalg);
```

```
BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol,  
addrow, . . . . ., transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian
```

Như vậy, gói lệnh `linalg` chứa các hàm `BlockDiagonal`, `GramSchmidt`, . . . , `wronskian`.

### 1.1 Ma trận

Để khởi tạo một ma trận ta sử dụng các hàm sau:

- `randmatrix(m, n)`: Tạo ra ma trận cấp  $m \times n$  với các phần tử là số nguyên được lấy ngẫu nhiên từ  $-99$  đến  $99$ .
- `matrix(m, n, list_of_elements)`: Tạo ra một ma trận cấp  $m \times n$  với `list_of_elements` là danh sách các phần tử, có dạng  $[a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{mn}]$ .
- `matrix(m, n, list_of_rows)`: Tạo ra một ma trận cấp  $m \times n$  với `list_of_rows` là danh sách các dòng, có dạng  $[[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]]$ .
- `matrix(list_of_rows)`: Tạo ra một ma trận với `list_of_rows` là danh sách các dòng, có dạng

$$[[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{m1}, \dots, a_{mn}]].$$

- `matrix(m, n, element)`: Tạo ra một ma trận cấp  $m \times n$  với các phần tử đều bằng `element`.
- `array(identity, 1..n, 1..n)`: Tạo ra ma trận đơn vị cấp  $n$ .
- `diag(list_of_elements)`: Tạo ra ma trận đường chéo trong đó `list_of_elements` là các phần tử trên đường chéo, có dạng  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ .

```
> with(linalg);
```

```
> randmatrix(2, 3);      #Kết quả ngẫu nhiên
```

$$\begin{bmatrix} 44 & 29 & 98 \\ -23 & 10 & -61 \end{bmatrix}$$

> `matrix(2, 3, [[2, 3, 4], [3, 4, 4]]);`

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

> `matrix(2, 3, [5, 4, 6, 3, 4, 5]);`

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

> `matrix([[2, 3, 4], [3, 4, 4], [4, 5, 3]]);`

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

> `matrix(3, 2, 0);`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> `diag(1, -2);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

> `l3:=array(identity, 1 .. 3, 1 .. 3): print(l3);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `l3:=diag(1, 1, 1);` #Có thể tạo ma trận đơn vị cấp 3 bằng cách này

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.2 Các phép toán trên ma trận

Cho  $A, B, C, \dots$  là các ma trận. Khi đó

- $A[i, j]$ : Phần tử ở dòng  $i$  và cột  $j$  của ma trận  $A$ .
- `evalm(A)`: In ra ma trận  $A$ .
- `equal(A, B)`: Kiểm tra hai ma trận  $A$  và  $B$  có bằng nhau hay không?.
- `transpose(A)`: Tìm ma trận chuyển vị của ma trận  $A$ .

- `scalarmul(A, expr)` hay `evalm(expr*A)`: Nhân ma trận **A** với biểu thức **expr**.
- `matadd(A, B, C,...)` hay `evalm(A+B+C+...)`: Tính tổng ma trận **A + B + C + ...**
- `multiply(A, B, C,...)` hay `evalm(A.B.C...)`: Tính tích ma trận **ABC ...**
- `evalm(A^k)`: Tính lũy thừa **k** của ma trận **A**.
- `inverse(A)` hay `evalm(A^(-1))`: Tìm ma trận nghịch đảo của **A** (nếu có).

> **A := matrix(2, 3, [1, 2, 1, -2, 3, 5]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **A[2, 3];**

5

> **evalm(A);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **transpose(A);**    #Chuyển vị ma trận A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

> **evalm(3\*A);**    #Tính 3A. Lưu ý \* là dấu sao

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

> **B := matrix(2, 3, [1, -2, 1, 4, 3, 1]);**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

> **equal(A, B);**    #Kiểm tra A = B không?

**false**

> **evalm(3\*A - 2\*B);**    #Tính 3A - 2B

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -14 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

> **C := matrix(3, 3, [1, 1, -1, 1, 2, 1, -2, -1, 3]);**

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> **evalm(B.C);**    #Tính AC. Lưu ý . là dấu chấm

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

> **evalm(C^4);**    #Tính  $C^4$

$$\begin{bmatrix} 47 & 53 & -26 \\ -28 & -8 & 53 \\ -133 & -134 & 99 \end{bmatrix}$$

> **inverse(C);**    #Tính  $C^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

### 1.3 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho  $A$  là ma trận. Khi đó các phép biến đổi sơ cấp trên  $A$  được thực hiện bởi các hàm sau:

- **swaprow(A, i, j):** Hoán vị hai dòng  $i$  và  $j$  ( $d_i \leftrightarrow d_j$ ).
- **swapcol(A, i, j):** Hoán vị hai cột  $i$  và  $j$  ( $c_i \leftrightarrow c_j$ ).
- **mulrow(A, i,  $\alpha$ ):** Nhân dòng  $i$  với  $\alpha$  ( $d_i \rightarrow \alpha d_i$ ).
- **mulcol(A, i,  $\alpha$ ):** Nhân cột  $i$  với  $\alpha$  ( $c_i \rightarrow \alpha c_i$ ).
- **addrow(A, j, i,  $\alpha$ ):** Thay dòng  $j$  bởi dòng  $j$  cộng cho  $\alpha$  lần dòng  $i$  ( $d_j \rightarrow d_j + \alpha d_i$ ).
- **addcol(A, j, i,  $\alpha$ ):** Thay cột  $j$  bởi cột  $j$  cộng cho  $\alpha$  lần cột  $i$  ( $c_j \rightarrow c_j + \alpha c_i$ ).

> **A := matrix(3, 4, [1, 2, 4, 3, 2, 4, 0, 1, 3, 1, 5, 2]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> **swaprow(A, 1, 2);**    #Hoán vị dòng 1 và dòng 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> **mulrow(A, 2, 4)** #Nhân dòng 2 với 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 16 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

> **addrow(A, 2, 1, 3)** #dòng 1 = dòng 1+3\*dòng 2

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Dạng bậc thang của ma trận

Cho  $A$  là ma trận. Khi đó

- **pivot(A, i, j)**: Nếu phần tử  $A_{ij} \neq 0$  thì sẽ đưa các phần tử khác trên cột  $j$  về 0 bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng loại 3. Ngược lại, báo lỗi.
- **gausselim(A)**: Tìm một dạng bậc thang của ma trận  $A$ .
- **gaussjord(A)**: Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận  $A$ .
- **rank(A)**: Tìm hạng của ma trận  $A$ .

> **A := matrix(3, 4, [1, 1, 2, 3, 1, 2, 8, 1, 3, 2, 3, 5]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> **pivot(A, 2, 1);**

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -21 & 2 \end{bmatrix}$$

> **gausselim(A);** #Dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

> **gaussjord(A);** #Dạng bậc thang rút gọn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

## 1.5 Giải phương trình ma trận $AX=B$

Cho  $A, B$  là các ma trận và  $X$  là biến ma trận. Khi đó

- `linsolve(A, B)`: Giải phương trình ma trận  $AX = B$ .

Ví dụ 1. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

> `A := matrix(2, 3, [1, 2, -1, -2, -3, 1]);`

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

> `B:= matrix(2, 2, [1, -2, -1, 1])`

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> `linsolve(A, B);`

$$\begin{bmatrix} -t_1 & 1 - t_2 \\ t_1 & t_2 \\ -1 + t_1 & 3 + t_2 \end{bmatrix}$$

Từ kết quả tính toán trên, ta kết luận  $X = \begin{pmatrix} -t & 1-s \\ t & s \\ -1+t & 3+s \end{pmatrix}$  với  $t, s$  tự do.

## 1.6 Giải hệ phương trình tuyến tính

- `solve(eqns, vars)`: Giải hệ phương trình `eqns` với các biến `vars`. Trong đó `eqns` có dạng `{eqn1, eqn2, ...}`; `vars` có dạng `{var1, var2, ...}`.
- `linsolve(A, b)`: Giải hệ phương trình  $AX = b$ , với  $A$  là ma trận hệ số,  $b$  là vectơ các hệ số tự do.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ x + y + z = 4; \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$$

Cách 1.

```
> solve({x-y-2*z = -3, x+y+z =4, 2*x-y+z =1}, {x, y, z});
```

$$\{x = 1, y = 2, z = 1\}$$

Cách 2.

```
> A:=matrix(3, 3, [2, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector(3, [1, 4, -3]);
```

$$b := [1 \ 4 \ -3]$$

```
> linsolve(A, b);
```

$$[1 \ 2 \ 1]$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 5x + 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

```
> A := matrix(3, 3,[1, 1, -2, 2, 3, 3, 5, 7, 4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector(3, [4, 3, 10]);
```

$$[4 \ 3 \ 10]$$

```
> linsolve(A, b);
```

$$[9 + 9\_t_1 \ -5 - 7\_t_1 \ -t_1]$$

Vậy nghiệm của hệ là  $\begin{cases} x = 9 + 9t \\ y = -5 - 7t \\ z = t \end{cases}$  với  $t$  là ẩn tự do.

## Phần II. Bài tập

1.1 Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Tính  $3A \pm 2B$ .

b) Tìm ma trận  $X$  sao cho  $2A + 3B - 4X = 0$ .

1.2 Tính các tích sau:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ .

1.3 Tính  $A^T A$  và  $AA^T$  với

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;      b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .      c)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1.4 Tính  $AB - BA$  trong các trường hợp sau:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ;

b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1.5 Cho  $A = \text{diag}(2, 3, 1, 4)$  và  $B = \text{diag}(1, -1, 3, 2)$ . Tính

a)  $A + B$ .      b)  $2A - 3B$ .      c)  $AB$ .      d)  $A^3$ .

1.6 Tìm hai ma trận  $A, B$  khác ma trận không sao cho  $AB$  là ma trận không.

1.7 Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ . Tìm  $B, C \in M_2(\mathbb{R})$  sao cho  $B \neq C$  mà  $AB = AC$ .

1.8 Tìm tất cả các ma trận giao hoán với  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1.9 Cho  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Chứng minh rằng, với mọi  $k \in \mathbb{N}$  ta có

$$A^k = \text{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k).$$

1.10 Tìm  $A^k, k \in \mathbb{N}$  trong các trường hợp sau:



$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{f) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{g) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{h)* } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.11** Cho  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Bằng quy nạp toán học, chứng minh rằng

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**1.12** Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  sao cho  $AB \neq BA$ . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } (A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

$$\text{b) } A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B).$$

**1.13** Tìm một ma trận  $A$  sao cho  $A \neq 0$  nhưng  $A^2 = 0$ .

**1.14** Hãy xác định  $f(A)$  trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5.$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; f(x) = 4x^2 - 3x + 4.$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; f(x) = -3x^2 - x + 5.$$

**1.15** Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

$$\text{a) } \text{Giả sử } A^9 = A^{20} = I_n. \text{ Chứng minh rằng } A = I_n.$$

$$\text{b) } \text{Giả sử } A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I_n. \text{ Chứng minh rằng } A = B = I_n.$$

$$\text{c) } \text{Giả sử } ABA = BAB = A^4B^7 = I_n. \text{ Chứng minh rằng } A = B = I_n.$$

**1.16** Một ma trận  $A \in M_n(\mathbb{R})$  được gọi là lũy đẳng nếu  $A^2 = A$ .

- a) Kiểm tra  $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  là ma trận lũy đẳng.
- b) Chứng minh rằng, nếu  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  sao cho  $AB = A$  và  $BA = B$  thì  $A$  và  $B$  là các ma trận lũy đẳng.
- c) Chứng minh rằng, nếu  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  sao cho  $A$  và  $B$  cùng lũy đẳng thì  $A + B$  lũy đẳng khi và chỉ khi  $AB = BA = 0$ .

**1.17** Xác định hạng của các ma trận sau bằng cách đưa ma trận về dạng bậc thang:

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ .
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ .
- e)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ .
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ .
- f)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 15 & 13 \end{pmatrix}$ .

**1.18** Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số  $m \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ .
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .
- b)  $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ .
- d)  $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ .

**1.19** Tìm dạng bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ .
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ .

**1.20** Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

- a)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

c)  $* \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$

**1.21** Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

c)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$

**1.22** Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

**1.23** Cho  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Chứng minh rằng  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ . Trong trường hợp  $A$  khả nghịch, hãy tìm  $A^{-1}$ .

**1.24** Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Chứng minh rằng, nếu  $AB$  khả nghịch thì  $A$  và  $B$  cùng khả nghịch.

**1.25** Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Chứng minh rằng, nếu  $AB = A + B$  thì  $A$  và  $B$  giao hoán nhau, nghĩa là  $AB = BA$ .

**1.26** Giải các phương trình ma trận

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c)  $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

f)  $X \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

g)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**1.27** Cho  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

a) Chứng minh  $A$  khả nghịch và tìm  $A^{-1}$ .

b) Tìm ma trận  $X$  thỏa mãn điều kiện  $XA = B$ .

**1.28** Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  và  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Chứng minh  $A$  và  $B$  khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

b) Tìm ma trận  $X$  thỏa mãn điều kiện  $AXB = C$ .

**1.29** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Chứng minh  $A$  khả nghịch và tìm  $A^{-1}$ .

b) Tính  $B^2$  và tìm ma trận  $X$  thỏa mãn  $AXA = B^2 - 2I_3$ .

**1.30** Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

a) Chứng minh  $A$  khả nghịch và tìm  $A^{-1}$ .

b) Tìm ma trận  $X$  thỏa  $A^2XA = ABA$ .

**1.31** Giải các hệ phương trình sau:

a)  $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1; \\ 2y - 5z = 2; \\ 4z = 8. \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 9; \\ 5y - z + 3t = 1; \\ 7z - t = 3; \\ 2t = 8. \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 4y - z = 11; \\ 5y + z = 2; \\ 3z = -9. \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 5; \\ 2y - z + t = 0; \\ z - t = 1; \\ 4t = 6. \end{cases}$

**1.32** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3; \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 6; \\ x_4 - 5x_5 = 5. \end{cases}$$

**1.33** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9; \\ 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 22. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases} \quad e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 4; \\ 3x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 7. \end{cases} \quad f) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \end{cases}$$

**1.34** Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

**1.35** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + mx_3 = m + 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$  sao cho:

- a) hệ có một nghiệm duy nhất;
- b) hệ vô nghiệm;
- c) hệ có vô số nghiệm.

**1.36** Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số  $m$ :

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3; \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1. \end{cases}$$

**1.37** Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số  $m$ :

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = m; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2m + 1; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -m, \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 2; \\ 5x_1 + 10x_2 - 17x_3 + 23x_4 = 1; \\ 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 + mx_4 = 13 - m, \end{cases}$$