



TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM
KHOA VẬT LÝ – VẬT LÝ KỸ THUẬT

CHƯƠNG 4: CƠ HỌC VẬT RẮN

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 03 năm 2024

Định nghĩa vật rắn

Vật rắn (vật rắn tuyệt đối): là một hệ chất điểm mà khoảng cách giữa các chất điểm bất kỳ luôn không đổi trong quá trình chuyển động.

⇒ Có thể áp dụng các công thức của hệ chất điểm vào vật rắn và thêm vào đó mối liên kết giữa các chất điểm để tạo thành vật rắn.



Định nghĩa vật rắn

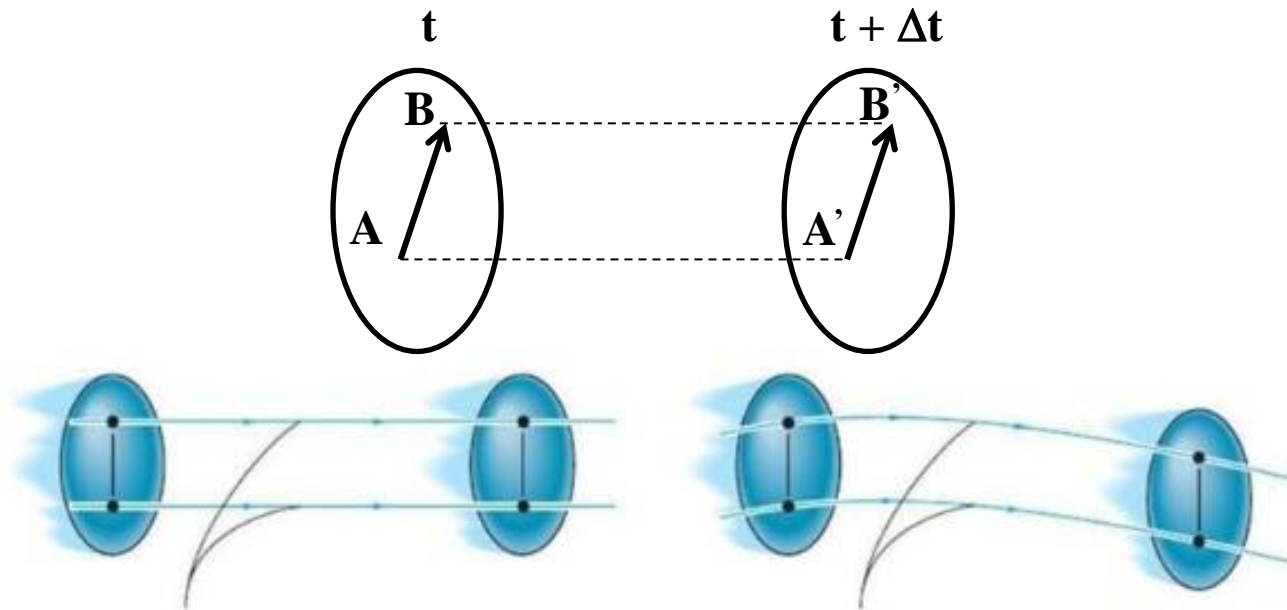
Chuyển động cơ học của vật rắn rất phức tạp, nhưng có thể phân tích một chuyển động bất kỳ của vật rắn thành hai loại chuyển động thành phần:

- **Chuyển động tịnh tiến**
- **Chuyển động quay**



Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Chuyển động tịnh tiến là chuyển động mà tất cả các điểm đều có cùng một dạng quỹ đạo như nhau. Quỹ đạo của chuyển động tịnh tiến có thể là những đường thẳng hoặc đường cong.



Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Xét vật rắn chuyển động trong hệ quy chiếu Oxyz, \vec{r}_A và \vec{r}_B là các vector vị trí của các điểm A và B trên vật rắn.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

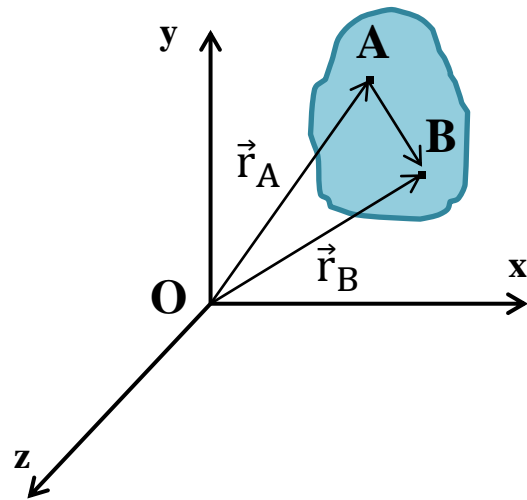
Lấy đạo hàm hai vế:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A$$



Trong chuyển động tịnh tiến, tất cả các điểm của vật rắn đều có cùng vector vận tốc và vector gia tốc. Xét tới chuyển động tịnh tiến của vật rắn \rightarrow xét chuyển động của khối tâm của vật rắn

Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Khối tâm (Trọng tâm): của một vật thể là điểm đặt đại diện cho phân bố trung bình khối lượng của vật thể.



Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Khối tâm (Trọng tâm): của một vật thể là điểm đặt đại diện cho phân bố trung bình khối lượng của vật thể. Ký hiệu là **C**

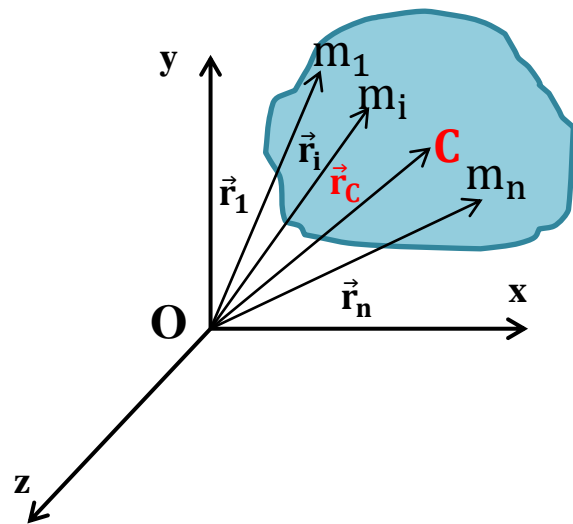
Được biểu diễn bởi: **\vec{R}_C**

Vật có khối lượng phân bố rời rạc:

$$\vec{R}_C = \overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

Vật có khối lượng phân bố liên tục:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \int_{vr} \vec{r} dm$$



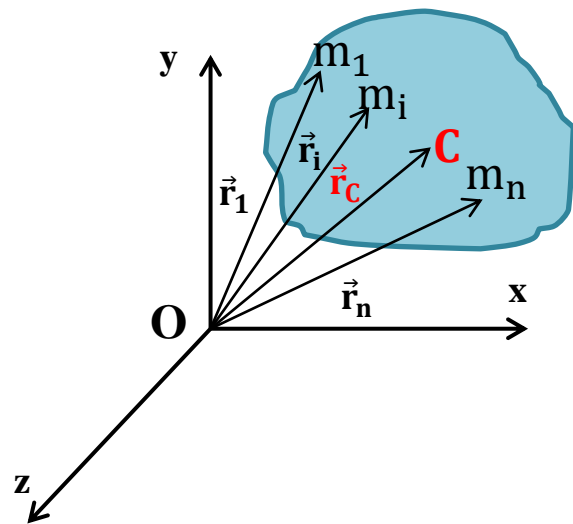
Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Vật có khối lượng phân bố rời rạc:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \begin{cases} X_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ Y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ Z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i \end{cases}$$

Vật có khối lượng phân bố liên tục:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \int_{vr} \vec{r} dm \Rightarrow \begin{cases} X_C = \frac{1}{m} \int_{vr} x dm \\ Y_C = \frac{1}{m} \int_{vr} y dm \\ Z_C = \frac{1}{m} \int_{vr} z dm \end{cases}$$



Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Đặc điểm của khối tâm vật rắn:

Vận tốc khối tâm: $\vec{v}_C = \frac{d\vec{R}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$

Động lượng vật rắn: $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}_C$

Gia tốc khối tâm: $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

Lực tổng hợp tác dụng lên vật rắn: $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}_C$

Kết luận: Như vậy, có thể xem bài toán chuyển động tịnh tiến của vật rắn như bài toán chuyển động của chất điểm đặt tại khối tâm và có khối lượng bằng với khối lượng của vật rắn

Chuyển động quay của vật rắn

Chuyển động quay quanh trục của vật rắn là chuyển động mà các chất điểm của vật rắn có quỹ đạo là những vòng tròn tâm nằm trên trục quay và bán kính bằng khoảng cách từ chất điểm đến trục quay.

Vật rắn quay quanh trục một góc θ thì mọi điểm trên vật rắn đều quét được một góc θ .

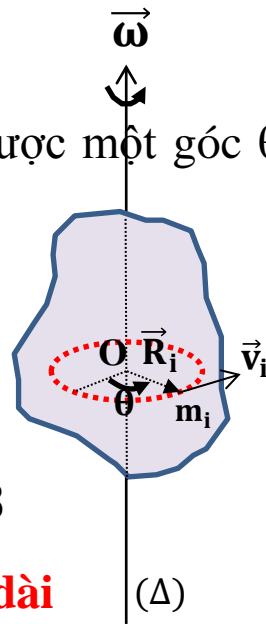
Nghĩa là: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_i = \dots = \theta_n$

Với trục quay cố định: $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}_3 = \dots = \vec{\beta}_n$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \dots = \vec{\omega}_n$$

Vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến: $v_i = R_i \omega_i = R_i \omega$ $a_{ti} = R_i \beta_i = R_i \beta$

→ **Khi vật rắn quay, chất điểm nào nằm càng xa trục quay thì vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến càng lớn**



Moment quán tính

Moment quán tính của một vật (đơn vị là kg.m^2) là đại lượng đặc trưng cho mức quán tính của vật khi chuyển động quay quanh một trục, tương tự như khối lượng trong chuyển động tịnh tiến.

Vật là hệ chất điểm rời rạc: $I = \sum_{i=1} m_i R_i^2$

m_i là khối lượng của chất điểm thứ i

R_i là khoảng cách từ chất điểm thứ i tới trục quay Δ

Vật là khối đồng nhất: $I = \int_{\text{vran}} R^2 dm$

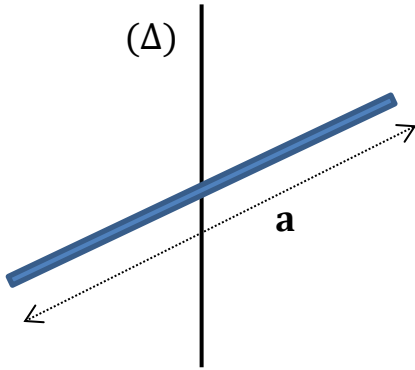
$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$\Rightarrow I = \int_{(V)} \rho R^2 dV$$

Moment quán tính

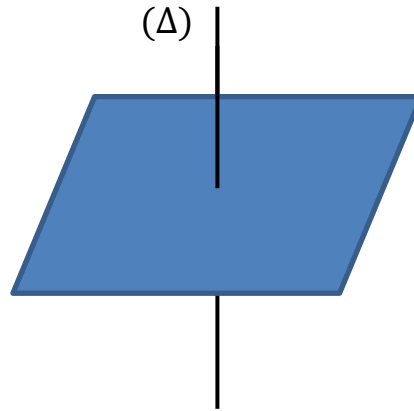
Moment quán tính của vật đối với trục quay đi qua khối tâm

Thanh mỏng chiều dài a , tiết diện S , trục quay vuông góc



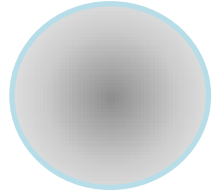
$$I = \frac{1}{12} ma^2$$

Hình chữ nhật có hai cạnh a và b



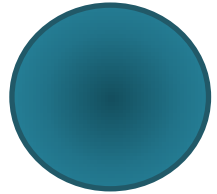
$$I = \frac{1}{12} m(a + b)^2$$

Quả cầu rỗng có bán kính R



$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

Quả cầu đặc có bán kính R

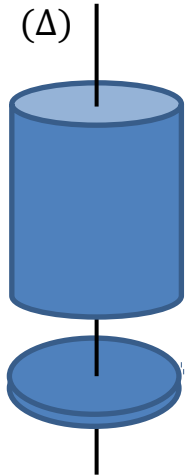


$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Moment quán tính

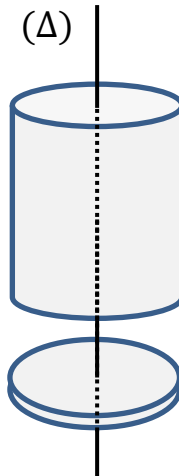
Moment quán tính của vật đối với trục quay đi qua khối tâm

Đĩa tròn hoặc hình trụ đặc có bán kính đáy R , chiều cao b



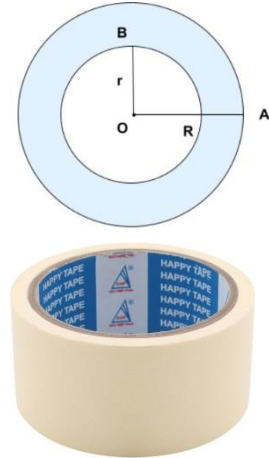
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Đĩa tròn hoặc hình trụ rỗng có bán kính đáy R , chiều cao b



$$I = mR^2$$

Đĩa hoặc hình trụ dạng vành khăn có bán kính r và R

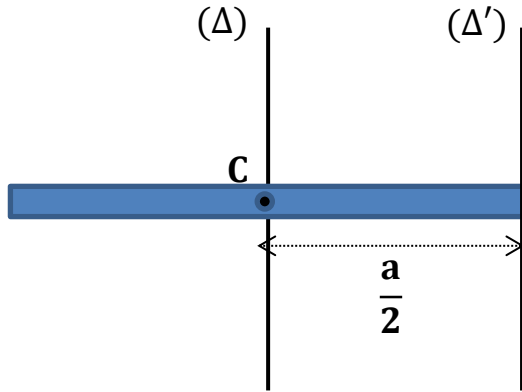


$$I = \frac{1}{2} m(r^2 + R^2)$$

Moment quán tính

Moment quán tính của vật đối với trục quay KHÔNG đi qua khối tâm

$$I = I_C + md^2$$



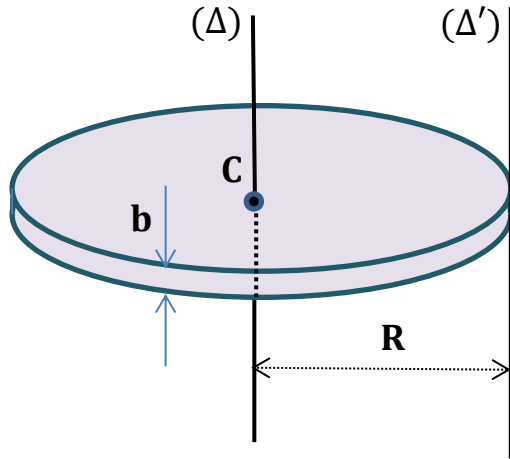
$$I = \frac{1}{12}ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{3}$$

Thanh đồng nhất tiết diện đều,
chiều dài a , trục quay Δ' vuông
góc với thanh tại đầu thanh

Moment quán tính

Moment quán tính của vật đối với trục quay KHÔNG đi qua khối tâm

$$I = I_C + md^2$$



Đĩa tròn đồng chất, bán kính R ,
độ dày b , trục Δ' vuông góc mặt
phẳng đĩa tại mép đĩa

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

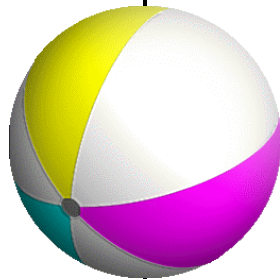
Đặc trưng cơ bản của vật rắn quay

Chuyển động tịnh tiến

Vận tốc: \vec{v}

Gia tốc: \vec{a}

Khối lượng: m



Chuyển động quay

Vận tốc dài: $\vec{v} = \vec{R} \times \vec{\omega}$

$$v = R \cdot \omega \cdot \sin(\vec{R}, \vec{\omega}) = R \cdot \omega$$

Gia tốc góc $\vec{\beta}$: $\vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{R}$

$$a_t = \beta \cdot R \qquad a_n = \omega^2 \cdot R$$

Moment quán tính:

$$I = \int_{\text{vran}} R^2 dm$$

Đặc trưng cơ bản của vật rắn quay

Chuyển động tịnh tiến

Động lượng: $\vec{p} = m\vec{v}$

Lực: \vec{F}

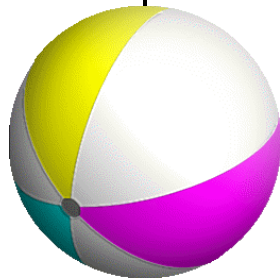
Động năng: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Chuyển động quay

Moment động lượng: $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}$

Moment lực: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

Động năng quay: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$



Phương trình chuyển động của vật rắn quay

Phương trình cơ bản chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định:

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

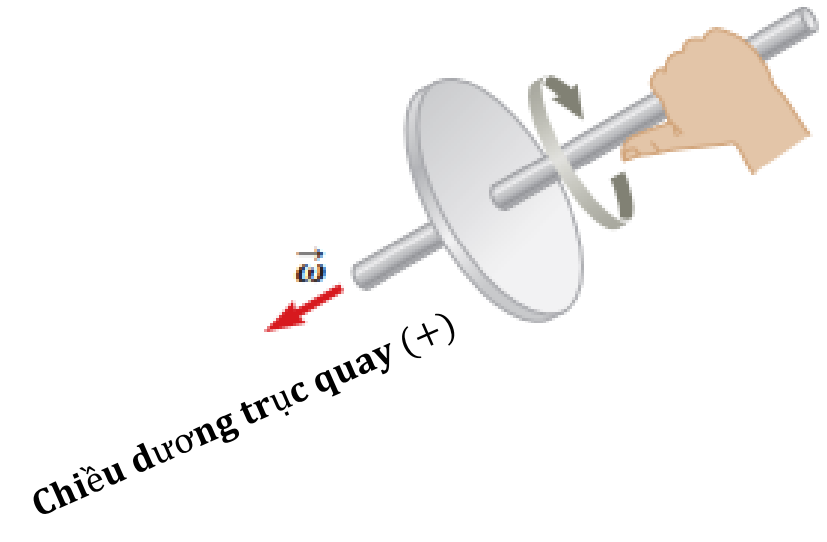
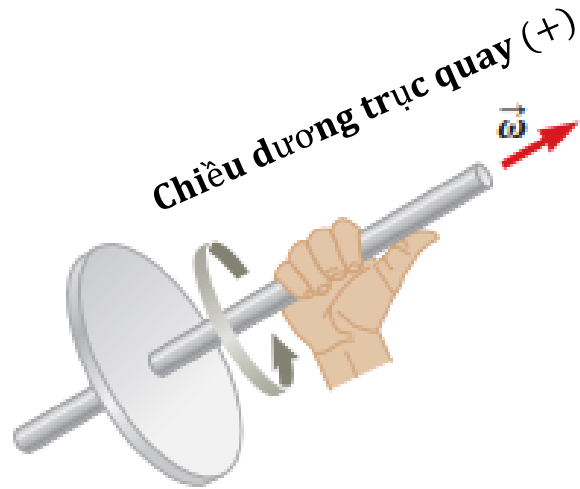
Phương trình này tương tự như phương trình của định luật II Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ đối với chuyển động tịnh tiến. Trong đó:

- \vec{M} : vector moment tổng hợp của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn quay có ý nghĩa tương tự như \vec{F} $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$
- $\vec{\beta}$: vector gia tốc góc đặc trưng cho sự thay đổi trạng thái chuyển động của vật rắn quay có ý nghĩa tương tự như \vec{a} $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$: quay nhanh dần $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$: quay chậm dần
- I : moment quán tính đặc trưng cho quán tính của vật rắn trong chuyển động quay có ý nghĩa tương tự như khối lượng m

Cách xác định chiều dương trục quay

Vật quay cùng chiều kim đồng hồ: chiều (+) trục quay hướng từ ngoài vào trong

Vật quay ngược chiều kim đồng hồ: chiều (+) trục quay hướng từ trong ra ngoài

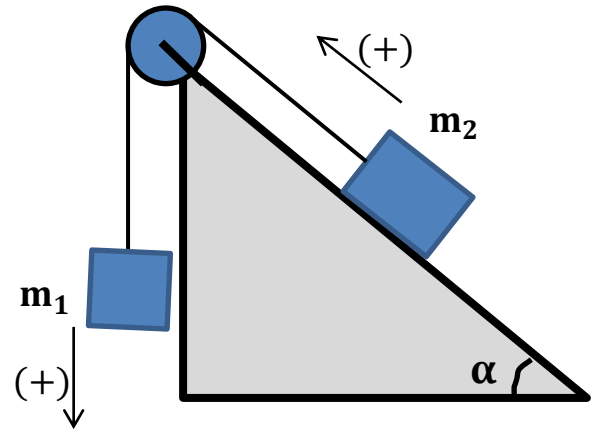


Bài tập 4.9

Hai vật có khối lượng $m_1 = 4 \text{ kg}$ và $m_2 = 6 \text{ kg}$ nối với nhau bằng sợi dây không khối lượng không giãn vắt qua ròng rọc ở đỉnh mặt phẳng nghiêng. Biết mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Vật m_2 ma sát với mặt nghiêng với hệ số ma sát trượt là 0,10.

Biết hệ chuyển động theo chiều như hình vẽ. Tìm gia tốc chuyển động của hệ m_1 và m_2 trong các trường hợp:

- Ròng rọc không có khối lượng.
- Ròng rọc có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ dạng đĩa đồng chất và quay quanh trục qua tâm của nó.




Bài tập 4.9

Hai vật có khối lượng $m_1 = 4 \text{ kg}$ và $m_2 = 6 \text{ kg}$ nối với nhau bằng sợi dây không khối lượng không giãn vắt qua ròng rọc ở đỉnh mặt phẳng nghiêng. Biết mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Vật m_2 ma sát với mặt nghiêng với hệ số ma sát trượt là 0,10. Ròng rọc có $m = 1 \text{ kg}$.

Bài giải:

Áp dụng II Newton cho chuyển động tịnh tiến của m_1 và m_2 :

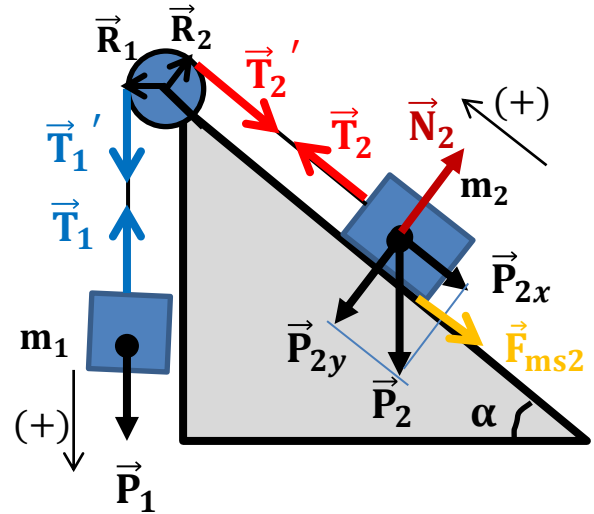
$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \quad \vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{ms}2} = m_2 \vec{a}_2$$

Chiều theo

 chiều (+) để

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$-m_2 g \sin \alpha + T_2 - k N_2 = m_2 a$$

$$\Leftrightarrow -m_2 g \sin \alpha + T_2 - k m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$



$$a_1 = a_2 = a$$

Bài tập 4.9

Hai vật có khối lượng $m_1 = 4 \text{ kg}$ và $m_2 = 6 \text{ kg}$ nối với nhau bằng sợi dây không khối lượng không giãn vắt qua ròng rọc ở đỉnh mặt phẳng nghiêng. Biết mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Vật m_2 ma sát với mặt nghiêng với hệ số ma sát trượt là 0,10. Ròng rọc có $m = 1 \text{ kg}$.

Bài giải:

Áp dụng II Newton cho chuyển động tịnh tiến của m_1 và m_2 :

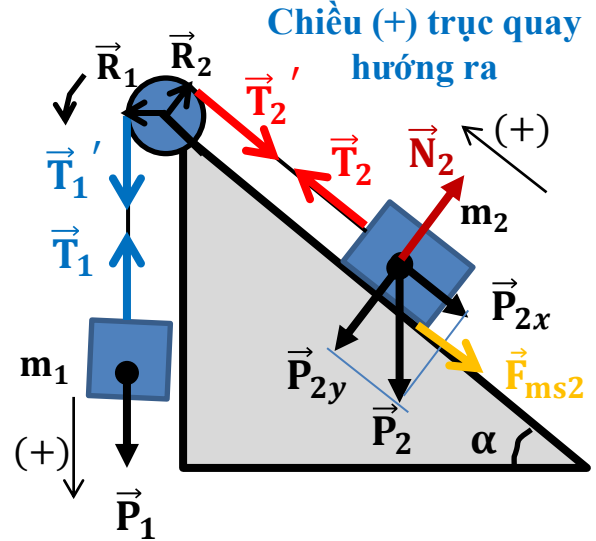
$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$-m_2 g \sin \alpha + T_2 - k m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

Phương trình cân bằng của ròng rọc:

$$\vec{M} = I\beta \Leftrightarrow \vec{M}_{T'_1} + \vec{M}_{T'_2} = I\beta \Leftrightarrow \vec{R}_1 \times \vec{T}'_1 + \vec{R}_2 \times \vec{T}'_2 = I\beta$$

Chiều theo chiều (+)
trục quay $\Rightarrow RT_1 - RT_2 = I\beta = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m a R$



$$\Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m a \quad (3)$$

Bài tập 4.9

Hai vật có khối lượng $m_1 = 4 \text{ kg}$ và $m_2 = 6 \text{ kg}$ nối với nhau bằng sợi dây không khối lượng không giãn vắt qua ròng rọc ở đỉnh mặt phẳng nghiêng. Biết mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Vật m_2 ma sát với mặt nghiêng với hệ số ma sát trượt là 0,10. Ròng rọc có $m = 1 \text{ kg}$.

Bài giải:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$-m_2 g \sin \alpha + T_2 - k m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m a \quad (3)$$

Lấy (1) + (2) + (3):

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g - m_2 g (\sin \alpha + k \cos \alpha)}{(m_1 + m_2 + \frac{m}{2})}$$

$$m_1 g - m_2 g \sin \alpha - k m_2 g \cos \alpha = (m_1 + m_2 + \frac{m}{2}) a$$

