CHƯƠNG I

CƠ SỞ LOGIC

I. MỆNH ĐỀ LOGIC:

1.1/ KHÁI NIỆM: *Mệnh đề logic* (gọi tắt là *mệnh đề*) là một câu phát biểu (về một lĩnh vực nào đó) *đúng* hoặc *sai* một cách khách quan. Tính đúng hoặc sai của mệnh đề được xác định từ *chính nội dung của mệnh đề* mà không phụ thuộc vào người phát biểu.

Ta dùng các ký hiệu A, B, C, … để chỉ các mệnh đề.

Tính đúng hoặc sai của một mệnh đề được gọi *chân trị* (hay *giá trị chân lý*) của mệnh đề đó. Ta sử dụng các số nhị phân 1 (hoặc 0) để thể hiện chân trị *đúng* (hoặc *sai*) của một mệnh đề.

Ví dụ

a) Các phát biểu dưới đây là mệnh đề (logic):

A = “ Nước Việt Nam thuộc về châu Á ” (chân trị *đúng*).
B = “ Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông ” (chân trị *sai*).
C = “ Vàng không nặng hơn sắt ” (chân trị *sai*).
D = “ Truyện Kiều của thi hào Nguyễn Du ” (chân trị *đúng*).

b) Các phát biểu dưới đây không phải là mệnh đề (logic):

E = “ Hãy đọc sách ! ” (câu mệnh lệnh).
F = “ Anh đi đâu ? ” và G = “ Tú muốn uống nước không ? ” (các câu nghi vấn).
G = “ Trời lạnh quá ! ” (câu cảm thán mang tính chủ quan).

c) Cần phân biệt *Định nghĩa* với *Mệnh đề*. Định nghĩa không phải là Mệnh đề.

H = “ Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song ” (Định nghĩa).
K = “ Hình bình hành có các cặp cạnh đối tương ứng bằng nhau ” (Mệnh đề).
L = “ Tam giác là hình phẳng có 3 đỉnh và 3 cạnh ” (Định nghĩa).
M = “ Tổng của ba góc trong một tam giác bằng 180^o ” (Mệnh đề).

1.2/ PHÂN LOẠI MỆNH ĐỀ:

Một mệnh đề được xếp vào một trong hai loại sau đây:

a) *Mệnh đề sơ cấp* : không sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” trong phát biểu **và** không thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn.

b) *Mệnh đề phức hợp:* có sử dụng trạng từ “ KHÔNG ” (hàm ý phủ định) trong phát biểu **hay** có thể chia thành các mệnh đề nhỏ hơn (bằng cách sử dụng các từ nối : *và, hay, suy ra, kéo theo, nếu … thì, tương đương, nếu và chỉ nếu, khi và chỉ khi, …*).

Ví dụ:

A = “ Tháng giêng có 30 ngày ” là mệnh đề sơ cấp.
B = “ 22 *không* chia hết cho 5 ” và C = “ $4 \le 1$ ” là các mệnh đề phức hợp.
D = “ *Nếu* $6 > 7$ *thì* $8 > 9$ ” là mệnh đề phức hợp.

II. CÁC PHÉP NỐI LOGIC (CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ):

Cho các mệnh đề P và Q.

2.1/ MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH: Ký hiệu $\overline{P}$ hay $\rceil P$ là *mệnh đề phủ định* của P. (đọc là *phủ định* P). $\overline{P}$ phát biểu các khả năng, các trường hợp còn lại mà P chưa phát biểu. Chân trị của $\overline{P}$ trái ngược với chân trị của P.

P	1	0
$\overline{P}$	0	1

Ví dụ:

A = " $3 > 8$ " có $\overline{A}$ = " $3 \le 8$ ".

B = " $4 \ne 7$ " có $\overline{B}$ = " $4 = 7$ ".

C = " Tuổi của An khoảng từ 18 đến 20 " có $\overline{C}$ = " Tuổi của An < 18 hoặc > 20 "

D = " Áo này màu xanh " có $\overline{D}$ = " Áo này không phải màu xanh ".

E = " Một nửa lớp thi đạt môn Toán " có

$\overline{E}$ = " Tỉ lệ số sinh viên của lớp thi đạt môn Toán không phải là 1/2 ".

F = " Không quá 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế " có

$\overline{F}$ = " Hơn 15 học sinh của trường được dự trại hè quốc tế ".

2.2/ MỆNH ĐỀ HỘI (PHÉP NỐI LIỀN):

Ký hiệu $P \wedge Q$ là *mệnh đề hội* của P và Q (đọc là P *hội* Q, P *và* Q).

$P \wedge Q$ *chỉ đúng* khi P và Q *cùng đúng*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \wedge Q$	1	0	0	0

2.3/ MỆNH ĐỀ TUYỂN (PHÉP NỐI RỜI):

Ký hiệu $P \vee Q$ là *mệnh đề tuyển* của P và Q (đọc là P *tuyển* Q, P *hay* Q).

$P \vee Q$ *chỉ sai* khi P và Q *cùng sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \vee Q$	1	1	1	0

2.4/ MỆNH ĐỀ KÉO THEO:

Ký hiệu $P \to Q$ là *mệnh đề kéo theo* của P và Q (đọc là P *kéo theo* Q, P *suy ra* Q, *nếu* P *thì* Q).

$P \to Q$ *chỉ sai* khi P *đúng* và Q *sai*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \to Q$	1	0	1	1

Nhận xét từ bảng chân trị của $P \to Q$ rằng:
* Nếu P *sai* thì $P \to Q$ *đúng* (bất chấp Q).
* Nếu Q *đúng* thì $P \to Q$ *đúng* (bất chấp P).
Chẳng hạn cho $D = [\, A \to (B \to C)\,]$ với B là mệnh đề *sai* và A, C là các mệnh đề *tùy ý*. Mệnh đề *phức hợp* D có chân trị *đúng* bất chấp A và C.

2.5/ <u>MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG:</u>

Ký hiệu $P \leftrightarrow Q$ là *mệnh đề tương đương* của P và Q.
(đọc là P *tương đương* Q, P *nếu và chỉ nếu* Q).
Để ý $(P \leftrightarrow Q) \equiv [\,(P \to Q) \wedge (Q \to P)\,]$.
$P \leftrightarrow Q$ *chỉ đúng* khi P và Q *có cùng chân trị*.

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \leftrightarrow Q$	1	0	0	1

<u>Ví dụ:</u> Xét các mệnh đề sau:
A = “ Nước tinh khiết không dẫn điện ” (*đúng*).
B = “ Công thức hóa học của nước là H_2O ” (*đúng*).
C = “ Vua Quang Trung đã đại thắng quân Minh ” (*sai*).
D = “$\sqrt{2} + \sqrt{3} \le 3$ ” (*sai*), E = “ Có sự sống ở ngoài trái đất ” (?).
F = “ Đội tuyển bóng đá Hà Lan sẽ vô địch worldcup trước năm 2100 ” (?).
Các mệnh sau là *đúng* : $\overline{C}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \vee D$, $B \vee E$, $A \to B$, $C \to A$, $D \to C$, $D \to F$, $E \to B$, $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$.
Các mệnh sau là *sai* : $\overline{A}$, $C \wedge B$, $D \wedge C$, $D \wedge E$, $C \vee D$, $A \to C$, $B \leftrightarrow D$.

2.6/ <u>THỨ TỰ ƯU TIÊN CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC:</u>

Khi không có dấu ngoặc, ta qui ước phép phủ định có độ ưu tiên *cao nhất*, tiếp theo là các phép toán $\wedge$ và $\vee$ ($\wedge$ và $\vee$ có độ ưu tiên *ngang nhau*), *thấp nhất* là các phép toán $\to$ và $\leftrightarrow$ ($\to$ và $\leftrightarrow$ có độ ưu tiên *ngang nhau*).
Khi có mặt đồng thời hai phép toán có độ ưu tiên *ngang nhau* thì sử dụng dấu ngoặc phân cách để người đọc biết phép toán nào được thực hiện trước.
Ta cũng sử dụng các dấu ngoặc để *thay đổi thứ tự ưu tiên theo ý muốn*.
Cho các mệnh đề A, B và C.
Viết $\overline{A} \wedge B \to C$ được hiểu là thực hiện $\overline{A}$ rồi thực hiện $(\overline{A} \wedge B)$ và sau cùng thực hiện $(\overline{A} \wedge B) \to C$.
Viết $A \vee B \leftrightarrow \overline{C}$ được hiểu là thực hiện $\overline{C}$ rồi thực hiện $(A \vee B)$ và sau cùng thực hiện $(A \vee B) \leftrightarrow \overline{C}$.
Viết $(A \vee B) \wedge C$, $A \vee (B \wedge C)$, $(A \to B) \leftrightarrow C$, $A \to (B \leftrightarrow C)$, $(A \to B) \vee C$, $(A \leftrightarrow B) \wedge C$ với hàm ý là các phép toán trong ngoặc được thực hiện trước.

2.7/ <u>BẢNG CHÂN TRỊ CỦA MỆNH ĐỀ PHỨC HỢP:</u>

A là *mệnh đề phức hợp* được tạo từ *các mệnh đề sơ cấp* $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.
Muốn xét chân trị của A, ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian.
Có 2^n khả năng xảy ra khi xét chân trị đồng thời của $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.

Bảng chân trị của A có 2^n cột tương ứng với mỗi khả năng chân trị của $P_1, P_2, \ldots$ và P_n.

Ví dụ: Cho các mệnh đề sơ cấp P, Q, R và mệnh đề phức hợp A như sau :

$$A = \{ [(P \vee Q) \wedge (\overline{P} \rightarrow R)] \leftrightarrow \overline{R} \}.$$

Để xét chân trị của A, ta cần xét chân trị của các mệnh đề trung gian $B = (P \vee Q)$, $\overline{P}$, $C = (\overline{P} \rightarrow R)$, $D = (B \wedge C)$ và $\overline{R}$.
Bảng chân trị của A có $2^3 = 8$ cột tương ứng với $2^3 = 8$ khả năng chân trị đồng thời của P, Q và R.

P	1	1	1	0	1	0	0	0
Q	1	1	0	1	0	1	0	0
R	1	0	1	1	0	0	1	0
$B = (P \vee Q)$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{P}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$C = (\overline{P} \rightarrow R)$	1	1	1	1	1	0	1	0
$D = (B \wedge C)$	1	1	1	1	1	0	0	0
$\overline{R}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$A = (D \leftrightarrow \overline{R})$	0	1	0	0	1	0	1	0

III. CÁC DẠNG MỆNH ĐỀ:

3.1/ KHÁI NIỆM:

a) *Biến số thực* là nơi để thay vào các hằng số thực khác nhau.
Biểu thức đại số là một cấu trúc bao gồm các hằng số thực, các biến số thực và các phép toán đại số $+, -, \times, :$, lũy thừa liên kết các hằng số và biến số.
Chẳng hạn $F(x,y,z,t) = \dfrac{2x^2y - 4yz^3t^4 + t - 3}{\sqrt{y^2 + 3z^4 + 1}}$ là một biểu thức đại số theo các biến số thực x, y, z và t.

b) *Biến mệnh đề* là nơi để thay vào các mệnh đề khác nhau.
Dạng mệnh đề là một cấu trúc bao gồm các mệnh đề, các biến mệnh đề và các phép toán mệnh đề $-$, $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ liên kết các mệnh đề và biến mệnh đề.
Chẳng hạn $F(p,q,r,s) = \{ (p \leftrightarrow \overline{q}) \vee [r \rightarrow (A \wedge \overline{s})] \} \wedge (q \vee B)$ là một dạng mệnh đề theo các biến mệnh đề p, q, r, s và các mệnh đề A = “ $\pi > \sqrt{11}$ ” và B = “ Nước sôi ở 100^o C dưới áp suất thường ”.

3.2/ DẠNG MỆNH ĐỀ HẰNG ĐÚNG VÀ HẰNG SAI:

Cho dạng mệnh đề $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n .

a) Nếu F *luôn luôn đúng* (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 1) bất chấp chân trị của $p_1, p_2, \ldots$ và p_n thì ta nói F là *một dạng mệnh đề hằng đúng* và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow$ **1**.

b) Nếu F *luôn luôn sai* (bảng chân trị của F có dòng cuối toàn giá trị 0) bất chấp chân trị của $p_1, p_2, \ldots$ và p_n thì ta nói F là *một dạng mệnh đề hằng sai* và ta ký hiệu $F \Leftrightarrow$ **O**.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q và r.

a) $F(p, q, r) = [\,(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (\bar{q} \vee r)\,]$ có $F \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (hãy lập bảng chân trị cho F).

b) $G(p, q, r) = \{\, p \leftrightarrow [q \vee (\bar{r} \rightarrow B)\,]\,\} \wedge A$ với các mệnh đề A = “ $2^3 > 3^2$ ” và B = “ Lào tiếp giáp với Việt Nam ”. Ta có $G \Leftrightarrow \mathbf{O}$ (vì A có chân trị sai).

3.3/ HỆ QUẢ LOGIC VÀ TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC:

Cho các dạng mệnh đề $E = E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ và $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n .

a) $E \rightarrow F$ chỉ là sự kéo theo *hình thức*. $E \rightarrow F$ không nhất thiết hằng đúng.

b) Nếu $(E \rightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Rightarrow F$ và nói F là *hệ quả logic* của E. Đây là sự kéo theo *thực sự*.

c) $E \leftrightarrow F$ chỉ là sự tương đương *hình thức*. $E \leftrightarrow F$ không nhất thiết hằng đúng.

d) Nếu $(E \leftrightarrow F) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ thì ta viết $E \Leftrightarrow F$ và nói E và F *tương đương logic với nhau*. Đây là sự tương đương *thực sự*.

Ví dụ: Cho các biến mệnh đề p, q, r và s. Lập bảng chân trị để thấy

a) $[\,p \rightarrow (p \wedge \bar{q})\,]$ và $[\,(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)\,]$ đều không phải là các dạng mệnh đề hằng đúng.

b) Ta có $[\,(p \wedge \bar{r}) \Rightarrow (p \vee \bar{q} \vee s)\,]$ và $\{\,[\,p \wedge (p \vee q)\,] \Leftrightarrow [\,p \vee (p \wedge q)\,] \Leftrightarrow p\,\}$.

IV. CÁC LUẬT LOGIC (TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHÉP NỐI LOGIC):

Cho các dạng mệnh đề (hoặc *các mệnh đề*) $E = E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $F = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ và $G = G(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots$ và p_n .

4.1/ LUẬT PHỦ ĐỊNH KÉP: $\overline{\overline{E}} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}$.

4.2/ LUẬT LŨY ĐẲNG (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $\mathbf{E \wedge E \Leftrightarrow E}$; $\mathbf{E \vee E \Leftrightarrow E}$.

4.3/ LUẬT GIAO HOÁN (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $\mathbf{F \wedge E \Leftrightarrow E \wedge F}$; $\mathbf{F \vee E \Leftrightarrow E \vee F}$.

4.4/ LUẬT PHỦ ĐỊNH DE MORGAN (của $\wedge$ và $\vee$)**:**

$$\overline{E \wedge F} \Leftrightarrow \overline{E} \vee \overline{F} \quad ; \quad \overline{E \vee F} \Leftrightarrow \overline{E} \wedge \overline{F} .$$

Ví dụ:

A = “ Tôi học tiếng Anh và tiếng Pháp ”.

$\overline{A}$ = “ Tôi *không* học tiếng Anh *hay không* học tiếng Pháp ”.

B = “ An đến trường hay đến thư viện ” .

$\overline{B}$ = “ An *không* đến trường *và không* đến thư viện ” .

C = “ $\sqrt{3a-8} < 1$ ” (a là hằng số thực) $\Leftrightarrow$ C = “ $(3a - 8) \geq 0$ và $\sqrt{3a-8} < 1$”.

$\overline{C}$ **=** “ $(3a - 8) < 0$ *hay* $\sqrt{3a-8} \geq 1$”.

4.5/ LUẬT HẤP THU (giữa $\wedge$ và $\vee$)**:**

$\mathbf{[\,E \wedge (E \vee F)\,] \Leftrightarrow E}$.

$\mathbf{[\,E \vee (E \wedge F)\,] \Leftrightarrow E}$.

Ví dụ: Cho $x, y, u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

$x^3(x^2 + 5y^6) = 0 \Leftrightarrow$ [$x = 0$ hay $(x^2 + 5y^6) = 0$]

$\Leftrightarrow$ [$x = 0$ *hay* ($x = 0$ *và* $y = 0$)] $\Leftrightarrow$ $x = 0$ (y thực tùy ý).

$u^8(3u^4 + 6v^2) \neq 0 \Leftrightarrow$ [$u \neq 0$ và $(3u^4 + 6v^2) \neq 0$]

$\Leftrightarrow$ [$u \neq 0$ *và* ($u \neq 0$ *hay* $v \neq 0$)] $\Leftrightarrow$ $u \neq 0$ (v thực tùy ý).

4.6/ <u>LUẬT KẾT HỢP</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:**

$$[\,(\mathbf{E} \wedge \mathbf{F}) \wedge \mathbf{G}\,] \Leftrightarrow [\,\mathbf{E} \wedge (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})\,] \Leftrightarrow (\mathbf{E} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}).$$

$$[\,(\mathbf{E} \vee \mathbf{F}) \vee \mathbf{G}\,] \Leftrightarrow [\,\mathbf{E} \vee (\mathbf{F} \vee \mathbf{G})\,] \Leftrightarrow (\mathbf{E} \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{G}).$$

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

[$(a \geq 2)$ và ($a \geq 4$ và $2a \neq b$)] $\Leftrightarrow$ [($a \geq 2$ và $a \geq 4$) và ($2a \neq b$)]

$\Leftrightarrow$ [$(a \geq 4)$ và $(2a \neq b)$].

[$(a < -1)$ hay ($a < -2$ hay $a^3 = 2\cos b$)] $\Leftrightarrow$ [($a < -1$ hay $a < -2$) hay $a^3 = 2\cos b$]

$\Leftrightarrow$ [$(a < -1)$ hay $(a^3 = 2\cos b)$].

4.7/ <u>LUẬT PHÂN PHỐI</u> (giữa $\wedge$ và $\vee$)**:**

$[\,\mathbf{E} \wedge (\mathbf{F} \vee \mathbf{G})\,] \Leftrightarrow [\,(\mathbf{E} \wedge \mathbf{F}) \vee (\mathbf{E} \wedge \mathbf{G})\,]$ ($\wedge$ phân phối với $\vee$).

$[\,\mathbf{E} \vee (\mathbf{F} \wedge \mathbf{G})\,] \Leftrightarrow [\,(\mathbf{E} \vee \mathbf{F}) \wedge (\mathbf{E} \vee \mathbf{G})\,]$ ($\vee$ phân phối với $\wedge$).

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

[$(x < -1)$ và ($x < 4$ hay $y \geq 3$)] $\Leftrightarrow$ [($x < -1$ và $x < 4$) hay ($x < -1$ và $y \geq 3$)]

$\Leftrightarrow$ [$(x < -1)$ hay ($x < -1$ và $y \geq 3$)] $\Leftrightarrow$ $(x < -1)$ $\Leftrightarrow$ ($x < -1$ và y thực tùy ý).

[$(xy \geq 5)$ hay ($xy \geq 2$ và $x^3 \neq y^2$)] $\Leftrightarrow$ [($xy \geq 5$ hay $xy \geq 2$) và ($xy \geq 5$ hay $x^3 \neq y^2$)]

$\Leftrightarrow$ [$(xy \geq 2)$ và ($xy \geq 5$ hay $x^3 \neq y^2$)].

4.8/ <u>LUẬT TRUNG HÒA</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{E}$; $(\mathbf{E} \vee \mathbf{O}) \Leftrightarrow \mathbf{E}$.

Ví dụ: Cho $x, y \in \mathbf{R}$. Ta có

($2x + y > 3$ và $4x^2 + e^y \geq -1$) $\Leftrightarrow$ ($2x + y > 3$).

[$8\sin x - 5\cos(y^3) = 14$ hay $x^6 \neq 9^y + 1$] $\Leftrightarrow$ ($x^6 \neq 9^y + 1$).

4.9/ <u>LUẬT THỐNG TRỊ</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{O}) \Leftrightarrow \mathbf{O}$; $(\mathbf{E} \vee \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Ví dụ: Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Ta có

($|a| - \ln b = 2$ và $b^2 < \sin^2 b$) $\Leftrightarrow$ **O** (không có a, b nào thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (hệ vô nghiệm).

[$a\cos(ab) > 2$ hay $e^{ab} + e^{-ab} \geq 1$] $\Leftrightarrow$ **1** (a, b nào cũng thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (a, b thực tùy ý).

4.10/ <u>LUẬT BÙ</u> (của $\wedge$ và $\vee$)**:** $(\boldsymbol{E} \wedge \overline{E}) \Leftrightarrow \mathbf{O}$; $(\boldsymbol{E} \vee \overline{E}) \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Ví dụ: Cho $u, v \in \mathbf{R}$. Ta có

($uv \geq 1$ và $uv < 1$) $\Leftrightarrow$ **O** (không có u, v nào thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (hệ vô nghiệm).

($7u^4 \neq 2^v + 3$ hay $7u^4 = 2^v + 3$) $\Leftrightarrow$ **1** (u, v nào cũng thỏa hệ) $\Leftrightarrow$ (u, v thực tùy ý).

4.11/ CÁC DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHỦ ĐỊNH CỦA MỆNH ĐỀ KÉO THEO:

a) $(\boldsymbol{E} \rightarrow \mathbf{F}) \Leftrightarrow (\overline{E} \vee \mathbf{F})$ (dùng để xóa dấu $\rightarrow$)

b) $(\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}) \Leftrightarrow (\overline{F} \rightarrow \overline{E})$ (dùng để suy luận theo dạng *phản đảo*).

c) $(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F})$ *không tương đương* với dạng *phản* $(\overline{E} \rightarrow \overline{F})$.

d) $(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F})$ *không tương đương* với dạng *đảo* $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E})$.

e) $\overline{E \rightarrow F} \Leftrightarrow (\mathbf{E} \wedge \overline{F})$.

[Từ a), dùng (**4.4**) và (**4.1**) ta có $\overline{E \rightarrow F} \Leftrightarrow \overline{\overline{E} \vee F} \Leftrightarrow (\overline{\overline{E}} \wedge \overline{F}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{E} \wedge \overline{F})$].

<u>Ví dụ:</u>

A = “ Nếu (An học tốt) thì (An thi đạt) ” $(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F})$.

A $\Leftrightarrow$ B với B = “ (An học không tốt) hay (An thi đạt) ” $(\overline{E} \vee \mathbf{F})$.

A $\Leftrightarrow$ C với C = “ Nếu (An thi không đạt) thì (An đã học không tốt) ” $(\overline{F} \rightarrow \overline{E})$.

A $\overline{\Leftrightarrow}$ D với D = “ Nếu (An học không tốt) thì (An thi không đạt) ” $(\overline{E} \rightarrow \overline{F})$.

A $\overline{\Leftrightarrow}$ E với E = “ Nếu (An thi đạt) thì (An đã học tốt) ” $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E})$.

Để ý A đúng và D, E đều sai nên A không tương đương với D và E.

4.12/ ÁP DỤNG:

Các luật logic được sử dụng để

– *Rút gọn* một dạng mệnh đề.

– *Chứng minh* một dạng mệnh đề *hằng đúng* hoặc *hằng sai*.

– *Chứng minh* hai dạng mệnh đề *tương đương với nhau*.

<u>Ví dụ:</u> Cho các biến mệnh đề p, q và r.

a) Rút gọn $A = [\, (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})\,]$.

$A \Leftrightarrow [\, (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q)\,] \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow [\, (p \vee \overline{p}) \wedge q\,] \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathbf{1} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow q \vee (p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \overline{q}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow (q \vee p)$.

b) Chứng minh $B = \{\, [\, p \rightarrow (q \vee r)\,] \rightarrow [\, (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)\,]\, \}$ hằng đúng.

$B \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{p} \vee r \Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee (\overline{p} \vee \overline{p}) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{p \rightarrow (q \vee r)} \vee [\, \overline{p} \vee (q \vee r)\,] \Leftrightarrow \overline{G} \vee G \Leftrightarrow \mathbf{1}$ với $G = [\, p \rightarrow (q \vee r)\,]$.

c) Chứng minh $C = \{\, [\, p \wedge (q \vee r)\,] \wedge \overline{(p \wedge q) \vee r}\, \}$ hằng sai.

$C \Leftrightarrow [\, (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,] \wedge \overline{p \wedge q} \wedge \overline{r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (H \vee K) \wedge (\overline{H} \wedge \overline{r})$ với $H = (p \wedge q)$ và $K = (p \wedge r)$. Suy ra

$C \Leftrightarrow (H \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow (\mathbf{O} \wedge \overline{r}) \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow \mathbf{O} \vee (K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r})$

$\Leftrightarrow K \wedge \overline{H} \wedge \overline{r} \Leftrightarrow \overline{H} \wedge K \wedge \overline{r} \Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge (r \wedge \overline{r}) \Leftrightarrow (\overline{H} \wedge p) \wedge \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{O}$.

d) Cho $E = \{\, [\, q \rightarrow (p \wedge r)\,] \wedge \overline{(p \vee r) \rightarrow q}\, \}$ và $F = \overline{(p \vee r) \rightarrow q}$.

Chứng minh $E \Leftrightarrow F$.

$E \Leftrightarrow [\, \overline{q} \vee (p \wedge r)\,] \wedge (p \vee r) \wedge \overline{q} \Leftrightarrow (\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q} \wedge (p \vee r)$ với $u = (p \wedge r)$

$\Leftrightarrow [\, (\overline{q} \vee u) \wedge \overline{q}\,] \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow \overline{q} \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge \overline{q} \Leftrightarrow \overline{(p \vee r) \rightarrow q} = F$.

V. MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ:

5.1/ LƯỢNG TỪ: Cho tập hợp A và biến x lấy các giá trị trong A.

a) *Lượng từ phổ biến* $\forall$(với mỗi, với mọi, với tất cả).

$\forall x \in A$: với mỗi (với mọi, với tất cả) phần tử x thuộc về tập hợp A.

b) *Lượng từ tồn tại* $\exists$ (tồn tại, có ít nhất một, có ai đó, có gì đó).

$\exists x \in A$: tồn tại (có ít nhất một) phần tử x thuộc về tập hợp A.

5.2/ VỊ TỪ: Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$.

$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một câu phát biểu có nội dung liên quan đến các biến x_j và chân trị của $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ phụ thuộc theo các biến x_j $(1 \le j \le n)$.

Ta nói $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *một vị từ theo* n *biến* $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$.

Ví dụ:

a) $p(x) =$ “ $3x^2 - 4x > 1$ ” với $x \in \mathbf{R}$. Ta có $p(0)$ sai và $p(2)$ đúng.
Ta gọi $p(x)$ là vị từ 1 biến.

b) $q(y,z) =$ “ $(4y - 7z) \,\vdots\, 5$ ” với $y \in \mathbf{Z}$ và $z \in \mathbf{Q}$.
Ta có $q(-2, \frac{3}{7})$ sai và $q(6, \frac{-1}{7})$ đúng. Ta gọi $q(y,z)$ là vị từ 2 biến.

5.3/ MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ :

Cho các tập hợp A_j và các biến $x_j \in A_j$ $(1 \le j \le n)$. Xét vị từ theo n biến $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và các lượng từ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{ \forall, \exists \}$.

a) Ta xây dựng *một mệnh đề lượng từ theo* n *biến* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là
$A =$ “ $\delta_1 x_1 \in A_1, \delta_2 x_2 \in A_2, \ldots, \delta_n x_n \in A_n, p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ”.

b) Qui ước $\overline{\forall} \equiv \exists$, $\overline{\exists} \equiv \forall$, ta có *dạng phủ định* của mệnh đề lượng từ A là
$\overline{A} =$ “ $\overline{\delta_1}\, x_1 \in A_1, \overline{\delta_2}\, x_2 \in A_2, \ldots, \overline{\delta_n}\, x_n \in A_n, \overline{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ ”.

c) Ta có thể xét trực tiếp chân trị của A (nếu đơn giản) hoặc xét gián tiếp chân trị của $\overline{A}$ rồi suy ra chân trị của A (nếu chân trị của $\overline{A}$ dễ xét hơn A).

Ví dụ:

a) $A =$ “ $\exists x \in \mathbf{Q}, x^3 = x$ ” có $\overline{A} =$ “ $\forall x \in \mathbf{Q}, x^3 \ne x$ ”. A đúng vì $\exists 1 \in \mathbf{Q}, 1^3 = 1$.

b) $B =$ “ $\forall x \in \mathbf{R}, x > \sin x$ ” có $\overline{B} =$ “ $\exists x \in \mathbf{R}, x \le \sin x$ ”.
$\overline{B}$ đúng vì $\exists 0 \in \mathbf{R}, 0 \le \sin 0 = 0$. Suy ra B sai.

c) $C =$ “$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in (0,+\infty), x \le 2^y - 3$” có $\overline{C} =$ “$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in (0,+\infty), x > 2^y - 3$”.
C đúng vì $\exists(-2) \in \mathbf{R}, \forall y \in (0,+\infty), -2 \le 2^y - 3$ (để ý $2^y > 1, \forall y \in (0,+\infty)$).

d) $D =$ “ $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 2y^3 > 5x^4 + 8$ ” có $\overline{D} =$ “ $\exists x \in \mathbf{Z}, \forall y \in \mathbf{Q}, 2y^3 \le 5x^4 + 8$ ”.
Ta có thể giải thích trực tiếp D đúng hoặc giải thích gián tiếp là $\overline{D}$ sai.
D đúng vì $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}$ thỏa $y > \sqrt[3]{5x^4 + 8} > 0$, nghĩa là $2y^3 > y^3 > 5x^4 + 8$.
$\overline{D}$ sai. Thật vậy, nếu $\overline{D}$ đúng thì có x nguyên cố định thỏa $2y^3 \le 5x^4 + 8$, $\forall y \in \mathbf{Q}$. Cho $y \to +\infty$ (lúc đó $2y^3 \to +\infty$) thì có mâu thuẫn vì $5x^4 + 8$ cố định.

e) $E =$ “ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2) \to (x > y)$ ” . Ta có
$E \Leftrightarrow E'$ = “ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x^2 \le y^2)$ hay $(x > y)$ ” (xóa dấu $\to$) và
$\overline{E} =$ “ $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, (x^2 > y^2)$ và $(x \le y)$ ”. Ta khẳng định E đúng bằng cách giải thích gián tiếp là E' đúng hay giải thích gián tiếp là $\overline{E}$ sai.

E' đúng vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y = x \in \mathbf{R}, (x^2 \le y^2 = x^2)$.
$\overline{E}$ sai. Thật vậy, nếu $\overline{E}$ đúng thì có x thực cố định thỏa $y^2 < x^2, \forall y \in \mathbf{R}$.
Cho $y \to +\infty$ (lúc đó $y^2 \to +\infty$) thì mâu thuẫn vì x^2 cố định.

f) F = " Họ (chúng tôi, các bạn) đi du lịch Rome " (lượng từ phổ biến tiềm ẩn).
$\overline{F}$ = " *Có ai đó trong số họ* (*chúng tôi, các bạn*) *không* đi du lịch Rome ".

g) G = " (Tất cả) các nghệ sĩ thích học ngoại ngữ ".
$\overline{G}$ = " *Có nghệ sĩ nào đó không* thích học ngoại ngữ ".

h) H = " Có bạn nào đó trong lớp đạt điểm 10 môn Toán ".
$\overline{H}$ = " *Cả lớp không* đạt điểm 10 môn Toán ".
= " *Không có bạn nào đó trong lớp* đạt điểm 10 môn Toán ".

k) K = " Không có ai đến trễ " = " Mọi người không đến trễ ".
$\overline{K}$ = " *Có ai đó* đến trễ ".

5.4/ <u>HOÁN ĐỔI LƯỢNG TỪ:</u>

Cho các tập hợp A, B và vị từ 2 biến $p(x,y)$ với $x \in A$ và $y \in B$. Ta có

a) Có thể hoán đổi 2 *lượng từ cùng loại* đứng cạnh nhau.
" $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)$ ".
" $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)$ ".

b) Không được hoán đổi 2 *lượng từ khác loại* đứng cạnh nhau.
" $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$ " $\Rightarrow$ " $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)$ " (chiều $\Leftarrow$ sai).
Vế trái : có x cố định trong A, y tùy ý trong B.
Vế phải : với mỗi y tùy ý trong B, có x trong A và x phụ thuộc theo y.

<u>Ví dụ:</u>

a) " $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \le 4$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, e^{x + \sin y} \le 4$ ".
Cả hai vế đều có chân trị sai.

b) " $\exists x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Q}, 3x + y = -1$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in \mathbf{Q}, \exists x \in \mathbf{Z}, 3x + y = -1$ ".
Cả hai vế đều có chân trị đúng.

c) " $\forall x \in \mathbf{Q}, \exists y \in \mathbf{R}, y = \sin x$ " (chân trị đúng vì hàm sin xác định trên $\mathbf{Q}$).
" $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{Q}, y = \sin x$ " (chân trị sai vì $y = \sin 0 = 0$ và $y = \sin 1 > 0$).

VI. <u>CÁC QUI TẮC SUY DIỄN (CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH)</u>

Cho các mệnh đề P, Q, R, S, P_1, P_2, … và P_n.

6.1/ <u>QUI TẮC PHẢN ĐẢO (Phản chứng dạng 1):</u>

($\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$) $\equiv$ ($\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$) (Ta có thể chứng minh vế phải thay cho chứng minh vế trái nếu việc chứng minh vế phải đơn giản hơn) .

<u>Ví dụ:</u> Cho các số nguyên a và b. Chứng minh " (ab lẻ) $\Rightarrow$ (a và b đều lẻ) ".

a) Chứng minh trực tiếp (rườm rà) : Viết $a = 2c + r$ và $b = 2d + s$ trong đó c, d là các số nguyên và $r, s \in \{ 0, 1\}$. Do $ab = 2(2cd + cs + dr) + rs$ lẻ nên $rs = 1$. Suy ra $r = s = 1$, nghĩa là a và b đều lẻ.

b) Chứng minh phản chứng (đơn giản hơn) : " (a hay b chẵn) $\Rightarrow$ (ab chẵn) "
Giả sử a hay b chẵn, nghĩa là $a = 2c$ và $b = 2d$ với c, d là các số nguyên.
Ta có $ab = 2(cb)$ hay $ab = 2(ad)$ nên ab chẵn.

6.2/ <u>QUI TẮC NÊU MÂU THUẪN (Phản chứng dạng 2):</u>

$(\mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \equiv [\,(\mathbf{P} \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \mathbf{O}\,]$ trong đó **O** thể hiện *sự mâu thuẫn* hay *vô lý*.

(Ta có thể chứng minh vế phải thay cho chứng minh vế trái nếu việc chứng minh vế phải đơn giản hơn).

<u>Ví dụ:</u> Cho các số thực a và b.

Chứng minh " (a hữu tỉ và b vô tỉ) $\Rightarrow$ (a + b vô tỉ) ".

a) Chứng minh trực tiếp : không thể được vì ta không có dạng tổng quát cho các số vô tỉ.

b) Chứng minh phản chứng : " (a hữu tỉ, b vô tỉ và a + b hữu tỉ) $\Rightarrow$ **O** ".

Giả sử a hữu tỉ, b vô tỉ và a + b hữu tỉ, nghĩa là a = $\frac{p}{q}$ và a + b = $\frac{r}{s}$ trong đó p, q, r, s là các số nguyên với q $\neq 0 \neq$ s. Suy ra b = (a + b) – a = $\frac{qr - ps}{qs}$ là số hữu tỉ : mâu thuẫn với giả thiết b vô tỉ.

6.3/ <u>QUI TẮC HỘI TUYỂN ĐƠN GIẢN:</u>

a) $[\,(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \Rightarrow \mathbf{P}\,]$ (hội đơn giản để xóa bớt thông tin Q không cần thiết).

b) $[\,\mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})\,]$ (tuyển đơn giản để thêm vào thông tin Q gây nhiễu).

<u>Ví dụ:</u>

(An học Anh văn và Pháp văn) $\Rightarrow$ (An học Anh văn).

Cho số thực a. ta có (a > 5) $\Rightarrow$ [(a > 5) hay (sina < 0)].

6.4/ <u>QUI TẮC KHẲNG ĐỊNH (Modus – Ponens):</u>

a) Dạng 1: $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ P \end{Bmatrix} \Rightarrow Q.$ b) Dạng 2: $\begin{Bmatrix} P \vee Q \\ \overline{P} \end{Bmatrix} \Rightarrow Q.$

<u>Ví dụ:</u>

a) [(Nếu An rảnh thì An xem phim) và (An rảnh)] $\Rightarrow$ (An xem phim).

b) [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú ăn chay trường)] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [(Tú hay Vy đã ăn gà quay) và (Tú không ăn gà quay)] $\Rightarrow$ (Vy đã ăn gà quay).

6.5/ <u>QUI TẮC PHỦ ĐỊNH (Modus – Tollens):</u>

$$\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ \overline{Q} \end{Bmatrix} \Rightarrow \overline{P}.$$

<u>Ví dụ:</u>

[(Nếu An giàu thì An mua xe hơi) và (An không mua xe hơi)] $\Rightarrow$ (An chưa giàu).

6.6/ <u>QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN (Syllogism):</u>

$\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \end{Bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R})$ (bỏ bớt suy luận trung gian Q).

<u>Ví dụ:</u>

[(Nếu trời mưa lớn thì đường bị ngập) và (nếu đường bị ngập thì An về nhà trễ)] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [(Nếu trời mưa lớn thì An về nhà trễ)] .

6.7/ QUI TẮC CHỨNG MINH THEO CÁC TRƯỜNG HỢP:

$$[\,(\boldsymbol{P_1} \vee \boldsymbol{P_2} \vee \ldots \vee \boldsymbol{P_n}) \Rightarrow \boldsymbol{Q}\,] \equiv \begin{Bmatrix} P_1 \Rightarrow Q \\ P_2 \Rightarrow Q \\ \vdots \\ P_n \Rightarrow Q \end{Bmatrix}.$$

(Ta có thể chứng minh các trường hợp riêng lẻ ở vế phải thay cho chứng minh vế trái vì việc chứng minh vế phải đơn giản hơn chứng minh một trường hợp tổng quát ở vế trái).

Ví dụ: Cho số nguyên k.

a) Chứng minh k^2 chia 4 dư 0 hoặc 1.

Ta chứng minh theo 2 trường hợp k chẵn hoặc k lẻ.

Nếu $k = 2r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = 4^2 r$ chia 4 dư 0.

Nếu $k = 2r + 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $k^2 = [\,4(r^2 + r) + 1\,]$ chia 4 dư 1.

b) Chứng minh $(2k^2 + k + 1)$ không chia hết cho 3.

Ta chứng minh theo 3 trường hợp tương ứng với số dư khi chia k cho 3.

Nếu $k = 3r$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 3r + 1 = [3r(6r + 1) + 1]$ chia 3 dư 1.

Nếu $k = 3r + 1$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 15r + 4 = [3r(6r + 5) + 4]$ chia 3 dư 1. Nếu $k = 3r + 2$ ($r \in \mathbf{Z}$) thì $(2k^2 + k + 1) = 18r^2 + 27r + 11 =$ $= [9r(2r + 3) + 11]$ chia 3 dư 2.

6.8/ HỆ QUẢ:

a) $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{Bmatrix} \Rightarrow [\,(\,\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R}\,) \Rightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{S})\,].$

b) $\begin{Bmatrix} P \Rightarrow Q \\ R \Rightarrow S \end{Bmatrix} \Rightarrow [\,(\,\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}\,) \Rightarrow (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{S})\,].$

6.9/ ÁP DỤNG:

Cho các dạng mệnh đề $E_1, E_2, \ldots, E_n$ và F.

a) Giải thích một quá trình suy luận là *đúng*:

Ta muốn chứng minh $[\,(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow F\,]$ là *đúng*. Lúc đó ta ký hiệu

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \\ \text{----------} \\ \therefore\ F \end{array}$$

Nếu dùng bảng chân trị hoặc dùng các luật logic biến đổi thì khá phức tạp, đặc biệt là khi n lớn. Ta dùng một trong hai cách chứng minh sau để được *đơn giản* và *có hiệu quả hơn*:

Cách 1: chia bài toán thành *nhiều bước suy luận trung gian* và ở mỗi bước ta dùng *các luật logic* (mục **IV**) hoặc *các qui tắc suy diễn* đã nêu trên.

Cách 2 : dùng *qui tắc phản chứng dạng* 2 trong (**6.2**), nghĩa là *giả sử quá trình suy luận là sai*. Lúc đó, xuất phát từ $(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n \wedge \overline{F})$, ta sẽ chỉ ra một sự mâu thuẫn. Như vậy quá trình suy luận là đúng.

b) Giải thích một quá trình suy luận là *sai*:

Ta muốn khẳng định $[(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ là *sai*. Ta *chỉ có một cách duy nhất* như sau : Ta gán cho mỗi biến mệnh đề chân trị 0 hoặc 1 sao cho $E_1, E_2, \ldots, E_n$ đều đúng và F sai. Khi đó $[(E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n) \Rightarrow F]$ *sai trong trường hợp đặc biệt đã gán*, nghĩa là suy luận trên là sai.

<u>Ví dụ:</u> Cho các biến mệnh đề p, q, r, s, t và u .

Xem xét các suy luận dưới đây đúng hay sai và giải thích tại sao ?

a)	b)	c)	d)
$p \to t$ (1)	$p \to r$ (1)	$(\bar{p} \vee q) \to (r \wedge s)$ (1)	p (1)
$\bar{r} \to q$ (2)	$\bar{u}$ (2)	$\bar{t}$ (2)	$\bar{p} \to q$ (2)
p (3)	$s \to t$ (3)	$r \to t$ (3)	$(q \wedge r) \to s$ (3)
$t \to \bar{q}$ (4)	$\bar{s} \to \bar{r}$ (4)	-----------------	$t \to r$ (4)
--------------	$\bar{t} \vee u$ (5)	$\therefore\ s \to p$ (4).	--------------------
$\therefore\ r \vee s$ (5).	-----------------		$\therefore\ \bar{s} \to \bar{t}$ (5).
	$\therefore\ p \to q$ (6).		

Ta chứng minh a) đúng bằng cách 1: Từ (1) và (3), ta có t (6). Từ (6) và (4), ta có $\bar{q}$ (7). Từ (7) và (2), ta có $\bar{\bar{r}}$ (8). Từ (8), ta có r (9). Từ (9), ta có $r \vee s$ (5). Như Như vậy suy luận a) là đúng.

Ta chứng minh b) đúng bằng cách 2: Giả sử (1), (2), (3), (4), (5) đúng và (6) sai. Từ (2) và (6), ta có p đúng và u, q đều sai. Từ (1) ta có r đúng. Từ (5), ta có t sai. Từ (3) ta có s sai. Do s sai và r đúng, ta có (4) sai : mâu thuẫn với điều đã giả sử. Như vậy suy luận b) là đúng.

Ta chứng minh c) đúng bằng cách 1: Từ (2) và (3), ta có $\bar{r}$ (5). Từ (5), ta có $\bar{r} \vee \bar{s}$ (6). Từ (6), ta có $\overline{r \wedge s}$ (7). Từ (7) và (1), ta có $\overline{\bar{p} \vee q}$ (8). Từ (8), ta có $\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$ (9). Từ (9), ta có $p \wedge \bar{q}$ (10). Từ (10), ta có p (11). Từ (11), ta có $\bar{s} \vee p$ (12). Từ (12), ta có $s \to p$ (4). Như vậy suy luận c) là đúng.

Ta chứng minh d) sai bằng cách gán chân trị đặc biệt cho các biến mệnh đề. Gán chân trị 1 cho p, r, t và gán chân trị 0 cho q, s thì (1), (2), (3), (4) đều đúng và (5) sai. Như vậy suy luận d) là sai.

VII. <u>PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUI NẠP:</u>

Cho $m \in \mathbf{N}$. Giả sử ta có một dãy vô hạn các mệnh đề P_n $(n \geq m)$ và ta muốn chứng minh chúng đều đúng. Ta dùng phương pháp chứng minh qui nạp.

7.1/ <u>QUI NẠP GIẢ THIẾT YẾU (ÍT GIẢ THIẾT):</u>

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.
* Chứng minh $\forall k \geq m$, (P_k đúng $\Rightarrow$ P_{k+1} đúng).
* Kết luận: P_n đúng $\forall n \geq m$.

<u>Ví dụ:</u> Chứng minh $\forall n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta chứng minh P_n = “ $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ” đúng $\forall n \geq 1$.

* P_1 = “ $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$ ” hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 1$ và giả sử P_k đúng, nghĩa là $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (*).

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Viết P_{k+1} = " $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1][(2(k+1)+1]}{6}$ ".

Ta kiểm tra vế trái của P_{k+1} bằng vế phải của P_{k+1}.

Vế trái = $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$ [sử dụng (*)]

$= \dfrac{(k+1)}{6}[\, k(2k+1) + 6(k+1) \,] = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ = Vế phải.

* Vậy P_n đúng $\forall n \geq 1$.

7.2/ <u>QUI NẠP GIẢ THIẾT MẠNH (NHIỀU GIẢ THIẾT):</u>

* Kiểm tra P_n đúng khi $n = m$.
* Chứng minh $\forall k \geq m$, [($P_m, P_{m+1}, \ldots$ và P_k đều đúng) $\Rightarrow$ P_{k+1} đúng].
* Kết luận: P_n đúng $\forall n \geq m$.

<u>Ví dụ:</u> Chứng minh $\forall n \geq 2$, n là tích của các số nguyên tố dương (số nguyên tố dương là số nguyên dương chỉ có 2 ước số dương là 1 và chính nó).

Ta chứng minh P_n = " n là tích của các số nguyên tố dương " đúng $\forall n \geq 2$.

* P_2 = " 2 là tích của đúng một số nguyên tố dương " hiển nhiên đúng.

* Xét $k \geq 2$ và giả sử $P_2, P_3, \ldots, P_k$ đều đúng, nghĩa là
$\forall t \in \{2, 3, \ldots, k\}$, t là tích của các số nguyên tố dương (*).

Ta chứng minh P_{k+1} cũng đúng bằng cách xét 2 trường hợp [xem (**6.7**)].

Viết P_{k+1} = " (k + 1) là tích của các số nguyên tố dương ".

Khi (k + 1) là số nguyên tố thì đương nhiên (k + 1) là tích của đúng một số nguyên tố dương.

Khi (k + 1) là số không nguyên tố thì $(k+1) = uv$ với $u, v \in \{2, 3, \ldots, k\}$.

Theo (*), $u = p_1p_2\ldots p_r$ và $v = q_1q_2\ldots q_s$ với $p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_s$ là các số nguyên tố dương. Suy ra $(k+1) = uv = p_1p_2\ldots p_r\, q_1q_2\ldots q_s$ cũng là tích của các số nguyên tố dương.

* Vậy P_n đúng $\forall n \geq 2$.
