CHÉO HÓA MA TRẬN

TRẦN HÀ SƠN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN-ĐHQG TPHCM

Ngày 28 tháng 3 năm 2025

Overview

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Hai ma trận vuông A và B cấp n được gọi là đồng dạng nếu tồn tại một ma trận không suy biến S sao cho $B = S^{-1}AS$.

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ và ma trận $B = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ là hai ma trận đồng dạng vì tồn tại ma trận $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ thỏa $S^{-1}AS = B$.

Đa thức đặc trưng, phương trình đặc trưng

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi ấy, định thức của ma trận $A - \lambda I$, tức $\det(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A.
Ký hiệu $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, khi đó $P_A(\lambda) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A.

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Đa thức đặc trưng, phương trình đặc trưng

Định lý

Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

Chứng minh.

Giả sử $B = P^{-1}AP$, ta có:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda). \end{aligned}$$ $\square$

Trị riêng, vector riêng

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n trên trường số $\mathbb{K}$. Số $\lambda \in \mathbb{K}$ được gọi là trị riêng của ma trận A, nếu tồn tại một vector $x \in \mathbb{K}^n, x \neq \overrightarrow{0}$ sao cho

$$Ax = \lambda x.$$

Khi đó x được gọi là vector riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ.

Nhận xét: λ là trị riêng của A khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A - \lambda I)x = 0$ có nghiệm $x \neq \overrightarrow{0}$, điều đó tương đương với

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Do đó λ là trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của $P_A(\lambda) = 0$.

Trị riêng, vector riêng

Cách tìm trị riêng, vector riêng của ma trận A như sau:

- **Bước 1:** Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ để tìm trị riêng của ma trận A.
- **Bước 2:** Tìm vector riêng ứng với trị riêng λ bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính $(A - \lambda I)x = 0$. Nghiệm không tầm thường (khác vector 0) của nó chính là các vector riêng cần tìm.

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó $P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$.

Suy ra $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{array} \right.$

Ví dụ

Tìm trị riêng ứng với $\lambda = 0$. Giải hệ phương trình $(A - 0 \cdot I)x = 0$ ta được nghiệm có dạng $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Do đó các vector riêng của A ứng với $\lambda = 0$ có dạng $x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Ví dụ

Tìm trị riêng ứng với $\lambda = 1$. Giải hệ phương trình $(A - 1 \cdot I)x = 0$ ta được nghiệm có dạng $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ với $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Do đó các vector riêng của A ứng với $\lambda = 1$ có dạng $x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Trị riêng, vector riêng

Ví dụ

Tìm trị riêng ứng với $\lambda = 3$. Giải hệ phương trình $(A - 3 \cdot I)x = 0$ ta được nghiệm có dạng $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Do đó các vector riêng của A ứng với $\lambda = 3$ có dạng $x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Định lý

Các vector riêng ứng với trị riêng λ *cùng với vector* $\overrightarrow{0}$ *tạo thành một không gian con gọi là không gian con riêng ứng với* λ.

Định lý

Các vector riêng ứng với trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

Chéo hóa ma trận

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo D, tức là tồn tại một ma trận P khả nghịch thỏa

$$P^{-1}AP = D.$$

Trong đó, ma trận chéo D có dạng

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ví dụ

Với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$. A chéo hóa được vì

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Chéo hóa ma trận

Định lý

Ma trận A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi không gian $\mathbb{K}^n$ tồn tại một cơ sở từ các vector riêng của ma trận A.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A cấp n có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó $P_A(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$ và A có ba trị riêng phân biệt nên A chéo hóa được.

Cụ thể ma trận $P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ trong đó:

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ứng với trị riêng $\lambda = 0$,

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ứng với trị riêng $\lambda = 1$,

$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Ta được ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

.

Nhận xét

Ma trận **làm chéo hóa** P có cấu trúc: các cột là vector riêng của A, chúng độc lập tuyến tính và không suy biến.

Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hãy tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

Đáp án.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Chéo hóa ma trận

Định nghĩa

1. Bội hình học của trị riêng λ của ma trận A là số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$.
2. Bội đại số của λ là bội của nghiệm λ trong phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

Định lý

Bội hình học của trị riêng λ nhỏ hơn hoặc bằng bội đại số của nó.

Định lý

Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi bội đại số của trị riêng bất kì bằng bội hình học của nó.

Thuật toán chéo hóa ma trận vuông A

1. **Bước 1:** Tìm đa thức đặc trưng của ma trận A: $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$. Nếu $P_A(\lambda)$ không có nghiệm trên $\mathbb{K}$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc. Ngược lại, chuyển sang **Bước 2**.
2. **Bước 2:**Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ của đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ và có bội đại số tương ứng là $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Đối với mỗi λ_i, tìm số chiều của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)x = 0$. Nếu tồn tại một $i \in \overline{1, k}$ thỏa $dim(E(\lambda_i)) \neq \alpha_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc. Ngược lại thì A chéo hóa được và chuyển qua **Bước 3**.
3. **Bước 3:** Với mỗi $i \in \overline{1, k}$ tìm một cơ sở B_i cho không gian con $E(\lambda_i)$. Gọi P là ma trận có được bằng cách dựng lần lượt các vector trong $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k$ thành các cột. D là ma trận đường chéo có các phần tử nằm trên đường chéo lần lượt là $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\alpha_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{\alpha_k \text{ lần}}$. Khi đó

$$P^{-1}AP = D.$$

Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -16 & 6 & 30 \\ 4 & 1 & -8 \\ -9 & 3 & 17 \end{bmatrix}$.

Hãy cho biết A, B, C có chéo hóa được không. Giải thích.

Chéo hóa trực giao

Định nghĩa

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là trực giao khi và chỉ khi

$$A^{-1} = A^T,$$

nghĩa là $AA^T = A^T A = I$.

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, các phát biểu sau là tương đương:

1. *A là ma trận trực giao.*
2. *Các vector dòng của A tạo thành một cơ sở trực chuẩn.*
3. *Các vector cột của A tạo thành một cơ sơ trực chuẩn.*

Chéo hóa trực giao

Nhận xét

Bằng cách thay ma trận khả nghịch P chéo hóa A bằng ma trận trực giao Q, đẳng thức $P^{-1}AP = D$ trở thành $Q^T AQ = D$ và ta có khái niệm chéo hóa trực giao.

Định nghĩa

Cho hai ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. A, B được gọi là đồng dạng trực giao nếu tồn tại ma trận trực giao Q thỏa $B = Q^T AQ$.
2. Ma trận A được gọi là chéo hóa trực giao được khi nó đồng dạng trực giao với một ma trận chéo. Khi đó ta nói Q chéo hóa trực giao A.

Chéo hóa trực giao

Nhận xét

Đẳng thức $Q^TAQ = D$ kéo theo $A = QDQ^T$. Khi đó

$$A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T = A.$$

Do đó một ma trận chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi nó là ma trận đối xứng.

Định lý

Ma trận đối xứng $A \in M_n(\mathbb{R})$ luôn chéo hóa được và các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ đều là các số thực.

Chéo hóa trực giao

Định lý

Các vector riêng ứng với các trị riêng khác nhau của một ma trận đối xứng đều trực giao với nhau.

Giải thuật chéo hóa trực giao ma trận đối xứng.

- **Bước 1:** Tìm tất cả các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k$ của A.
- **Bước 2:** Ứng với mỗi trị riêng λ_i, tìm một cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B}_i$ ứng với không gian con riêng E_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- **Bước 3.** Xét $\mathcal{B} = \bigcup_i^k \mathcal{B}_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ta xếp các vector v_i vào ma trận

$$Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

được ma trận chéo hóa trực giao ma trận A.

□

Ví dụ

Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Đáp án: $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao

Ví dụ

Chéo hóa trực giao ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Phương pháp lặp (The power method)

Giả sử ma trận A_n hệ số thực chéo hóa được có các trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, trong đó λ_1 là trị riêng có trị tuyệt đối lớn nhất. Gọi $v \in \mathbb{R}^n$ là một vector đơn vị bất kì và $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm các vector riêng tương ứng của $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Khi đó:

$$A^k v = \alpha_1 A^k v_1 + \alpha_2 A^k v_2 + \cdots \alpha_n A^k v_n = \alpha_1 \lambda^k v_1 + \alpha_2 \lambda^k v_2 + \cdots \alpha_n \lambda^k v_n$$

Có các nhận xét sau:

- Do $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ với mọi $0 \leq i \leq n$ nên tỉ số $\dfrac{\lambda_1^k}{\lambda_i^k}$ sẽ hội tụ về 0 khi $k \longrightarrow \infty$.
- $u = \dfrac{A^k v}{\|A^k v\|} \approx \dfrac{\alpha_1 \lambda_1^k v_1}{\|\alpha_1 \lambda_1^k v_1\|}$, và do đó u là vector riêng tương ứng với trị riêng λ_1.
- $Au \approx \lambda_1 u$ và $\|Au\| \approx |\lambda_1|$.

Thuật toán lặp (The Power Mothod)

1. **Bước 1:** Chọn một vector đơn vị bất kì u_0.
2. **Bước 2:** Tạo một dãy các n-vector đơn vị $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bằng cách lặp lại các bước 2(a) đến 2(d) cho đến khi một trong các điều kiện dừng trong bước 2(c) hoặc 2(d) được thỏa mãn, hoặc cho đến khi rõ ràng rằng phương pháp này không hội tụ đến một đáp án.
   a. Cho u_{k-1}, tính $w_k = Au_{k-1}$.
   b. Tính $u_k = \dfrac{w_k}{\|w_k\|}$.
   c. Nếu u_{k-1} bằng u_k với độ chính xác mong muốn thì $\lambda = \|w_k\|$.
   d. Nếu u_{k-1} bằng $-u_k$ với độ chính xác mong muốn thì $\lambda = -\|w_k\|$.
3. **Bước 3:** Vector u_k cuối cùng được tính trong Bước 2 là một vector riêng xấp xỉ của tương ứng với giá trị riêng λ.

Thuật toán lặp (The Power Mothod)

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -16 & 6 & 30 \\ 4 & 1 & -8 \\ -9 & 3 & 17 \end{bmatrix}$. Sử dụng thuật toán lặp, hãy tìm trị riêng có trị tuyệt đối lớn nhất và một vector riêng tương ứng.

- **Bước 1:** Chọn $u_0 = (1, 0, 0)$.
- **Bước 2**: Thực hiện tính toán tìm $w1$ và u_1 như sau:
  1. $w_1 = Au_0 \approx (-16, 4, -9)$.
  2. $\|w_1\| = \sqrt{(-16)^2 + 4^2 + (-9)^2} \approx 18.79$.
  3. $u_1 = w_1/\|w_1\| \approx (-0.8516, 0.2129, -0.4790)$.

Thuật toán lặp (The Power Mothod)

Ví dụ

k	$\mathbf{w}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$	$\|\mathbf{w}_k\|$	$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|}$
1	$[-16, 4, -9]$	18.79	$[-0.8516, 0.2129, -0.4790]$
2	$[0.5322, 0.6387, 0.1597]$	0.8466	$[0.6287, 0.7544, 0.1886]$
3	$[0.1257, 1.760, -0.1886]$	1.775	$[0.0708, 0.9918, -0.1063]$
4	$[1.629, 2.125, 0.5313]$	2.730	$[0.5968, 0.7784, 0.1946]$
5	$[0.9601, 1.609, 0.2725]$	1.893	$[0.5071, 0.8498, 0.1439]$
6	$[1.302, 1.727, 0.4317]$	2.205	$[0.5904, 0.7830, 0.1958]$
7	$[1.125, 1.578, 0.3635]$	1.972	$[0.5704, 0.8004, 0.1843]$
8	$[1.207, 1.607, 0.4018]$	2.050	$[0.5889, 0.7841, 0.1960]$
9	$[1.164, 1.571, 0.3851]$	1.993	$[0.5840, 0.7884, 0.1932]$
10	$[1.184, 1.578, 0.3946]$	2.012	$[0.5885, 0.7844, 0.1961]$
11	$[1.173, 1.570, 0.3905]$	1.998	$[0.5873, 0.7855, 0.1954]$
12	$[1.179, 1.571, 0.3928]$	2.003	$[0.5884, 0.7844, 0.1961]$
13	$[1.176, 1.569, 0.3918]$	2.000	$[0.5881, 0.7847, 0.1959]$
14	$[1.177, 1.570, 0.3924]$	2.001	$[0.5884, 0.7845, 0.1961]$
15	$[1.176, 1.569, 0.3921]$	2.000	$[0.5883, 0.7845, 0.1961]$
16	$[1.177, 1.569, 0.3923]$	2.000	$[0.5884, 0.7845, 0.1961]$
17	$[1.177, 1.569, 0.3922]$	2.000	$[0.5883, 0.7845, 0.1961]$
18	$[1.177, 1.569, 0.3922]$	2.000	$[0.5883, 0.7845, 0.1961]$

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 7 & -15 & -24 \\ -12 & 25 & 42 \\ 6 & -15 & 23 \end{bmatrix}$. Sử dụng thuật toán lặp, hãy tìm trị riêng có trị tuyệt đối lớn nhất và một vector riêng tương ứng.

Thuật toán lặp (The Power Mothod)

Ví dụ

k	$\mathbf{w}_k = \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1}$	$\lVert\mathbf{w}_k\rVert$	$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{\lVert\mathbf{w}_k\rVert}$
1	$[7, -12, 6]$	15.13	$[0.4626, -0.7930, 0.3965]$
2	$[5.617, -8.723, 5.551]$	11.77	$[0.4774, -0.7413, 0.4718]$
3	$[3.139, -4.448, 3.134]$	6.282	$[0.4998, -0.7081, 0.4989]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
25	$[0.3434, 0.3341, 0.3434]$	0.5894	$[0.5825, 0.5668, 0.5825]$
26	$[-18.41, 31.65, -18.41]$	40.98	$[-0.4492, 0.7723, -0.4492]$
27	$[-3.949, 5.833, -3.949]$	8.075	$[-0.4890, 0.7223, -0.4890]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	$[2.589, -5.325, 2.589]$	6.462	$[0.4006, -0.8240, 0.4006]$
51	$[5.551, -8.583, 5.551]$	11.63	$[0.4772, -0.7379, 0.4772]$
52	$[2.957, -4.132, 2.957]$	5.879	$[0.5029, -0.7029, 0.5029]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Thuật toán lặp (The Power Mothod)

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -21 & 10 & -74 \\ 25 & -9 & 80 \\ 10 & -4 & 33 \end{bmatrix}$. Giải thích tại sao thuật toán lặp không hoạt động đúng với ma trận này.