

NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

NỘI DUNG

1 ĐA THỨC NỘI SUY

NỘI DUNG

1 ĐA THỨC NỘI SUY

2 ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

NỘI DUNG

- 1 ĐA THỨC NỘI SUY
- 2 ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE
- 3 ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

NỘI DUNG

- 1 ĐA THỨC NỘI SUY
- 2 ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE
- 3 ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON
- 4 SPLINE BẬC BA

NỘI DUNG

- 1 ĐA THỨC NỘI SUY
- 2 ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE
- 3 ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON
- 4 SPLINE BẬC BA
- 5 BÀI TOÁN XẤP XỈ HÀM THỰC NGHIỆM

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thực hành, thường gặp những hàm số $y = f(x)$ mà không biết biểu thức giải tích cụ thể f của chúng. Thông thường, ta chỉ biết các giá trị y_0, y_1, \dots, y_n của hàm số tại các điểm khác nhau x_0, x_1, \dots, x_n trên đoạn $[a, b]$. Các giá trị này có thể nhận được thông qua thí nghiệm, đo đạc, ... Khi sử dụng những hàm trên, nhiều khi ta cần biết các giá trị của chúng tại những điểm không trùng với $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$.

Để làm được điều đó, ta phải xây dựng một đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

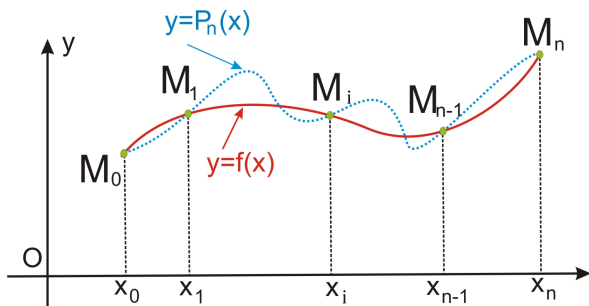
thỏa mãn

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

ĐỊNH NGHĨA 1.1

$P_n(x)$ được gọi là *đa thức nội suy* của hàm $f(x)$, còn các điểm $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ được gọi là *các nút nội suy*

Về mặt hình học, có nghĩa là tìm đường cong $y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ đã biết trước của đường cong $y = f(x)$.



ĐỊNH LÝ 1.1

Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số $f(x)$, nếu có, thì chỉ có duy nhất.

ĐỊNH LÝ 1.1

Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số $f(x)$, nếu có, thì chỉ có duy nhất.

VÍ DỤ 1.1

Xây dựng đa thức nội suy của hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi

x	0	1	3
y	1	-1	2

Giải.

Đa thức nội suy có dạng

$y = P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Thay các điểm $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3)$ vào đa thức này ta được hệ

$$\begin{cases} 0.a_2 + 0.a_1 + a_0 = 1 \\ 1.a_2 + 1.a_1 + a_0 = -1 \\ 9.a_2 + 3.a_1 + a_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{19}{6} \\ a_2 = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Vậy đa thức nội suy $P(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{19}{6}x + 1$

Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Ta sẽ xây dựng đa thức nội suy của hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_n]$, $n \geq 1$.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng sau

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^n p_n^k(x) \cdot y_k, \text{ trong đó } p_n^k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

VÍ DỤ 2.1

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin(\pi x)$ tại các nút nội suy

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$$

VÍ DỤ 2.1

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin(\pi x)$ tại các nút nội suy

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$$

Giải.

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$y = \sin(\pi x)$	0	$\frac{1}{2}$	1.

Công thức nội suy Lagrange của hàm số y

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})} \cdot 0 + \frac{x(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2} + \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} \cdot 1 = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Đặt

$$\omega(x) = (x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)$$

Khi đó

$$p_n^k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$$

Đa thức nội suy Lagrange trở thành

$$\mathcal{L}_n(x) = \omega(x) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{\omega'(x_k)(x-x_k)} = \omega(x) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{D_k},$$

với $D_k = \omega'(x_k)(x-x_k)$

x	x_0	x_1	\dots	x_n	
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	\dots	$x_0 - x_n$	D_0
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	\dots	$x_1 - x_n$	D_1
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	\dots	$x - x_n$	D_n
					$\omega(x)$

VÍ DỤ 2.2

Cho hàm số y được xác định bởi

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Sử dụng đa thức Lagrange

tính gần đúng giá trị của hàm số y tại $x = 2$.

VÍ DỤ 2.2

Cho hàm số y được xác định bởi

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Sử dụng đa thức Lagrange tính gần đúng giá trị của hàm số y tại $x = 2$.

Giải.

$x = 2$	0	1	3	4	
0	2-0	0-1	0-3	0-4	$D_0 = (2-0)(0-1)(0-3)(0-4) = -24$
1	1-0	2-1	1-3	1-4	$D_1 = (1-0)(2-1)(1-3)(1-4) = 6$
3	3-0	3-1	2-3	3-4	$D_2 = (3-0)(3-1)(2-3)(3-4) = 6$
4	4-0	4-1	4-3	2-4	$D_3 = (4-0)(4-1)(4-3)(2-4) = -24$
					$\omega(x) = (2-0)(2-1)(2-3)(2-4) = 4$

$$\text{Do đó } y(2) \approx L_3(2) = \omega(x) \left(\frac{y_0}{D_0} + \frac{y_1}{D_1} + \frac{y_2}{D_2} + \frac{y_3}{D_3} \right) = 4 \left(\frac{1}{-24} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{-1}{-24} \right) = 2.$$

Cho hàm số $f(x)$ xác định như sau

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

trên đoạn $[a, b] = [x_0, x_n]$.

ĐỊNH NGHĨA 3.1

Trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta định nghĩa đại lượng

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

được gọi là *tỉ sai phân cấp 1* của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$

Tương tự ta có **tỉ sai phân cấp 2** của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+2}]$ là

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

Quy nạp ta có **tỉ sai phân cấp p** của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+p}]$ là $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}] =$

$$\frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

VÍ DỤ 3.1

Lập bảng tỉ sai phân của hàm cho bởi

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

VÍ DỤ 3.1

Lập bảng tỉ sai phân của hàm cho bởi

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
1.0	0.76		
		$-0.47 = \frac{0.62 - 0.76}{1.3 - 1.0}$	
1.3	0.62		$-0.17 = \frac{-0.57 - (-0.47)}{1.6 - 1.0}$
		$-0.57 = \frac{0.45 - 0.62}{1.6 - 1.3}$	
1.6	0.45		$-0.00 = \frac{-0.57 - (-0.57)}{1.9 - 1.3}$
		$-0.57 = \frac{0.28 - 0.45}{1.9 - 1.6}$	
1.9	0.28		

Theo định nghĩa tỉ sai phân cấp 1 của $f(x)$ trên đoạn $[x, x_0]$ là $f[x, x_0] = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$

$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0)$. Lại áp dụng định nghĩa tỉ sai phân cấp 2 của $f(x)$ ta có

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1].$$

Thay vào công thức trên ta được $f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$.

Quá trình trên tiếp diễn đến bước thứ n ta được

$$\begin{aligned} f(x) = & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ & + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \text{ và} \\ R_n(x) = & f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) \\ \text{ta được } & f(x) = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) + R_n(x). \end{aligned}$$

ĐỊNH NGHĨA 3.2

Công thức $\mathcal{N}_n^{(1)}(x)$ được gọi là **công thức Newton tiến** xuất phát từ điểm nút x_0 của hàm số $f(x)$ và $R_n(x)$ được gọi là **sai số** của đa thức nội suy Newton.

Tương tự, ta có thể xây dựng **công thức Newton lùi** xuất phát từ điểm nút x_n của hàm số $f(x)$ như sau

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = & y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + \\ & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots + \\ & f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của đa thức nội suy, ta có với cùng 1 bảng số thì

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = \mathcal{N}_n^{(2)}(x)$$

VÍ DỤ 3.2

Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x	0	2	3	5	6
y	1	3	2	5	6

- ❶ *Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 của hàm số $y = f(x)$*
- ❷ *Dùng đa thức nội suy nhận được tính gần đúng $f(1.25)$*

Giải.

x_k	$f(x_k)$	Tỉ sai phân I	Tỉ sai phân II	Tỉ sai phân III	Tỉ sai phân IV
0	1				
		$1 = \frac{3-1}{2-0}$			
2	3		-2/3		
		$-1 = \frac{2-3}{3-2}$		3/10	
3	2		5/6		-11/120
		$3/2 = \frac{5-2}{5-3}$		-1/4	
5	5		-1/6		
		$1 = \frac{6-5}{6-5}$			
6	6				

Như vậy công thức nội suy Newton tiến là

$$\mathcal{N}_4^{(1)}(x) = 1 + 1 \cdot x + \left(-\frac{2}{3}\right)x(x-2) + \frac{3}{10}x(x-2)(x-3)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{11}{120}x(x-2)(x-3)(x-5) = \\ & = -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1. \end{aligned}$$

$$f(1.25) \approx \mathcal{N}_4^{(1)}(1.25) \approx 3.9312$$

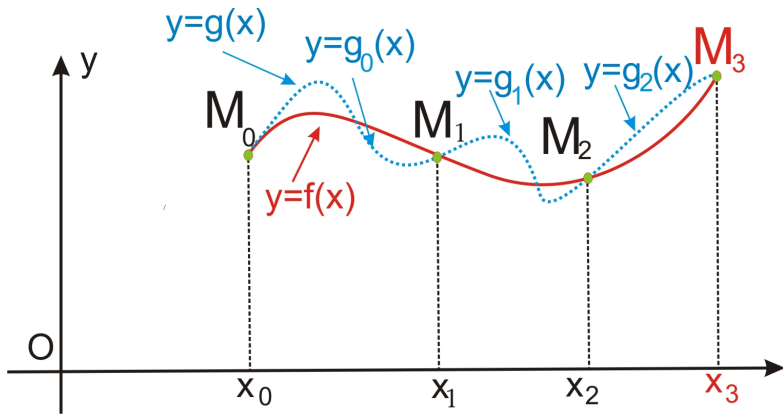
Việc xây dựng một đa thức đi qua các điểm nội suy cho trước trong trường hợp n lớn là rất khó khăn. Biện pháp khắc phục là trên từng đoạn liên tiếp của các cặp điểm nút nội suy ta nối chúng bởi các đường cong đơn giản như đoạn thẳng. Tuy nhiên, khi đó tại các điểm nút hàm sẽ mất **tính khả vi**. Do đó, phải xây dựng đường cong bằng cách nối các đoạn cong nhỏ lại với nhau sao cho vẫn bảo toàn **tính khả vi** của hàm.

Đường cong như vậy được gọi là đường **spline** (đường ghép trơn). Các hàm trên các đoạn nhỏ này thường là các đa thức và **bậc cao nhất** của các đa thức đó gọi là **bậc của spline**.

ĐỊNH NGHĨA 4.1

Cho $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và một phép phân hoạch của nó: $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$. Đặt $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. **Một spline bậc ba** nội suy hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ là hàm $g(x)$ thỏa các điều kiện sau:

- 1 $g(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[a, b]$
- 2 $g(x) = \begin{cases} g_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ g_1(x) & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$ ở đây $g_0(x), g_1(x)$ là các **đa thức bậc ba**
- 3 $g(x_0) = f(x_0) = y_0, g(x_1) = f(x_1) = y_1,$
 $g(x_2) = f(x_2) = y_2.$



Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là đa thức bậc ba nên

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Do $g(x_0) = g_0(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a_0$ và

$$g(x_1) = g_0(x_1) = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3 = y_1$$

Xét đoạn $[x_0, x_1]$. Đặt $h_0 = x_1 - x_0$. Vì $g_0(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3.$$

Do $g(x_0) = g_0(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = a_0$ và

$$g(x_1) = g_0(x_1) = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3 = y_1$$

$$\Leftrightarrow a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0^2 + d_0 h_0^3 = y_1$$

Từ đó, ta có

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0 h_0 - d_0 h_0^2$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là đa thức bậc ba nên

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Do $g(x_1) = g_1(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = a_1$ và

$$g(x_2) = g_1(x_2) = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2$$

Xét đoạn $[x_1, x_2]$. Đặt $h_1 = x_2 - x_1$. Vì $g_1(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3.$$

Do $g(x_1) = g_1(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = a_1$ và

$$g(x_2) = g_1(x_2) = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = y_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2$$

Từ đó, ta có

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - d_1 h_1^2$$

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_1 nên $g'_0(x_1) = g'_1(x_1)$ và $g''_0(x_1) = g''_1(x_1)$.

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_1 nên $g'_0(x_1) = g'_1(x_1)$ và $g''_0(x_1) = g''_1(x_1)$.
Từ điều kiện $g''_0(x_1) = g''_1(x_1)$ ta được

$$2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_1 - x_1)$$

$$\Rightarrow d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}$$

$$\Rightarrow b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0h_0 - d_0h_0^2 =$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h_0} - c_0h_0 - \frac{c_1 - c_0}{3h_0} \cdot h_0^2 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0)$$

Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_2 nên $g_1''(x_2) = g_2''(x_2)$

$$\Rightarrow 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) = 2c_2 + 6d_2(x_2 - x_2)$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - d_1 h_1^2 =$$

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} - c_1 h_1 - \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \cdot h_1^2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$

Từ điều kiện $g'_0(x_1) = g'_1(x_1)$ ta được

$$\begin{aligned} b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 &= \\ &= b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2 \\ \Rightarrow b_1 &= b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^2 \end{aligned}$$

Thay $b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$,

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0), \quad d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}, \text{ được}$$

Từ điều kiện $g'_0(x_1) = g'_1(x_1)$ ta được

$$\begin{aligned}b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 &= \\&= b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2 \\&\Rightarrow b_1 = b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^2\end{aligned}$$

Thay $b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$,

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0), \quad d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}, \text{ được}$$

$$h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0}$$

Hệ này có **vô số nghiệm**.

ĐỊNH NGHĨA 4.2

Cho $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và một phép phân hoạch của nó: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Đặt $y_k = f(x_k)$, $k = 0..n$. **Một spline bậc ba** nội suy hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ là hàm $g(x)$ thỏa các điều kiện sau:

- 1 $g(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[a, b]$
- 2 Trên mỗi đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0..n-1$, $g(x) = g_k(x)$ là **1 đa thức bậc ba**
- 3 $g(x_k) = f(x_k) = y_k, \forall k = 0..n$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0..n - 1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Do $g(x_k) = g_k(x_k) = y_k \Rightarrow y_k = a_k$ và

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = g(x_{k+1}) = g_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

Xét đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0..n-1$. Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$. Vì $g_k(x)$ là **đa thức bậc ba** nên

$$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3.$$

Do $g(x_k) = g_k(x_k) = y_k \Rightarrow y_k = a_k$ và

$$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = g(x_{k+1}) = g_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

Từ đó, ta có hệ

$$\begin{cases} b_k &= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2, \forall k = 0..n-1 \\ b_{k-1} &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - c_{k-1} h_{k-1} - d_{k-1} h_{k-1}^2, \forall k = 1..n \end{cases}$$

Xét tại điểm $x_k, k = 1..n - 1$. Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_k nên $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ và $g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k)$.

Xét tại điểm $x_k, k = 1..n - 1$. Do tính khả vi của hàm $g(x)$ đến cấp 2 tại x_k nên

$$g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k) \text{ và } g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k).$$

Từ điều kiện $g''_{k-1}(x_k) = g''_k(x_k)$ ta được

$$\begin{cases} d_{k-1} = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_{k-1}}, \forall k = 1..n - 1 \\ d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 1..n - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k), \forall k = 1..n - 1 \\ b_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \frac{h_{k-1}}{3}(c_k + 2c_{k-1}), \forall k = 1..n \end{cases}$$

Từ điều kiện $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ ta được

$$b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2$$

Từ điều kiện $g'_{k-1}(x_k) = g'_k(x_k)$ ta được

$$b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_kc_{k+1} = \\ \qquad \qquad \qquad = 3\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - 3\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \forall k = 1..n-1 \end{array} \right.$$

Hệ này có **vô số nghiệm** nên để có tính duy nhất, ta phải bổ sung thêm **các điều kiện biên**.

SPLINE BẬC BA TỰ NHIÊN

Điều kiện để xác định 1 spline bậc ba tự nhiên là

$$g''(a) = g''(b) = 0.$$

$$g''(a) = g_0''(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$g''(b) = g_n''(x_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c_n + 6d_n(x_n - x_n) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

Giải hệ $AC = B$ tìm C với
 $C = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$ và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải hệ $AC = B$ tìm C với
 $C = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$ và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sau khi tìm được $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ thì các hệ số của $g_k(x)$ được xác định bởi

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = y_k \\ b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 0..n-1 \end{array} \right.$$

VÍ DỤ 4.1

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy

bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

VÍ DỤ 4.1

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy

bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

$n = 2, h_0 = 2, h_1 = 3$. Do là spline bậc ba tự nhiên nên $c_0 = c_2 = 0$. Hệ số c_1 được xác định bởi

$$h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0}$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{3}{10}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = -\frac{1}{5} \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{1}{20}, \end{array} \right.$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = -\frac{1}{5} \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{1}{20}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 = y_1 = 1 \\ b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \frac{2}{5} \\ d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = -\frac{1}{30}, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba tự nhiên cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^3, & x \in [0, 2] \\ 1 + \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{10}(x-2)^2 - \frac{1}{30}(x-2)^3, & x \in [2, 5] \end{cases}$$

VÍ DỤ 4.2

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy

bảng số

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

VÍ DỤ 4.2

Xây dựng spline bậc ba tự nhiên nội suy

bảng số

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

$n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1$. Do là spline bậc ba tự nhiên nên $c_0 = c_3 = 0$. Hệ số c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(h_0 + h_1).c_1 + h_1.c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ h_1.c_1 + 2(h_1 + h_2).c_2 = 3\frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4.c_1 + 1.c_2 = 3 \\ 1.c_1 + 4.c_2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2}{5} \\ c_2 = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \frac{13}{15} \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{2}{15}, \end{array} \right.$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \frac{13}{15} \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = \frac{2}{15}, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 = y_1 = 2 \\ b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \frac{19}{15} \\ d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Khi $k = 2$ ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = y_2 = 4 \\ b_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = \frac{46}{15} \\ d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} = -\frac{7}{15}, \end{array} \right.$$

Khi $k = 2$ ta có

$$\begin{cases} a_2 = y_2 = 4 \\ b_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = \frac{46}{15} \\ d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2} = -\frac{7}{15}, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba tự nhiên cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{13}{15}x + \frac{2}{15}x^3, & x \in [0, 1] \\ 2 + \frac{19}{15}(x-1) + \frac{2}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ 4 + \frac{46}{15}(x-2) + \frac{7}{5}(x-2)^2 - \frac{7}{15}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

SPLINE BẬC BA RÀNG BУỘC

Điều kiện để xác định 1 spline bậc ba ràng buộc là

$$g'(a) = \alpha, g'(b) = \beta.$$

$$g'(a) = g'_0(x_0) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow b_0 + 2c_0(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 = \alpha \Rightarrow b_0 = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha$$

$$g'(b) = g'_{n-1}(x_n) = \beta$$

$$\Leftrightarrow b_{n-1} + 2c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(c_n + 2c_{n-1}) + 2c_{n-1}h_{n-1} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}} \cdot h_{n-1}^2 = \beta$$

$$\Rightarrow h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

Khi đó ta có thêm 2 phương trình

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases}$$

và thuật toán xác định spline bậc ba ràng buộc như sau: giải hệ $AC = B$ tìm C với $C = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dots \\ 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Sau khi tìm được $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ thì các hệ số của $g_k(x)$ được xác định bởi

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = y_k \\ b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \forall k = 0..n-1 \end{array} \right.$$

VÍ DỤ 4.3

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy

bảng số

x	0	1
y	1	1

thỏa $y'(0) = 1, y'(1) = 1$.

VÍ DỤ 4.3

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy

bảng số $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 1 \end{array}$ *thỏa* $y'(0) = 1, y'(1) = 1$.

$n = 1, h_0 = 1$. Khi đó

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_0c_0 + 2h_0c_1 = 3\beta - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + c_1 = -3 \\ c_0 + 2c_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = -3 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 1 \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = 2, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = 1 + x - 3x^2 + 2x^3, x \in [0, 1]$$

VÍ DỤ 4.4

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy

bảng số

x	0	1	2
y	1	2	1

thỏa điều kiện

$$y'(0) = 0, y'(2) = 0.$$

VÍ DỤ 4.4

Xây dựng spline bậc ba ràng buộc nội suy

bảng số

x	0	1	2
y	1	2	1

thỏa điều kiện

$$y'(0) = 0, y'(2) = 0.$$

$n = 2, h_0 = h_1 = 1, \alpha = \beta = 0$. Hệ số c_0, c_1, c_2 được xác định bởi $AC = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3\beta - 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_0, c_1, c_2)^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.c_0 + c_1 + 0.c_2 = 3 \\ c_0 + 4c_1 + c_2 = -6 \\ 0.c_0 + c_1 + 2.c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 3 \\ c_1 = -3 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 0 \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = -2, \end{cases}$$

Khi $k = 0$ ta có

$$\begin{cases} a_0 = y_0 = 1 \\ b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = 0 \\ d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = -2, \end{cases}$$

Khi $k = 1$ ta có

$$\begin{cases} a_1 = y_1 = 2 \\ b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = 0 \\ d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = 2, \end{cases}$$

Vậy spline bậc ba ràng buộc cần tìm là

$$g(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 - 2x^3, & x \in [0, 1] \\ 2 - 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$