CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

I. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN:

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A, B, $A_1, A_2, \ldots$ và A_n .

a) Nếu A và B *rời nhau* ($A \cap B = \varnothing$) thì $| A \cup B | = | A | + | B |$.

b) Nếu $A_1, A_2, \ldots$ và A_n *rời nhau từng đôi một* ($A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $1 \le i \ne j \le n$) thì $| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n | = | A_1 | + | A_2 | + \cdots + | A_n |$.

Ví dụ:

a) Lớp học L có 80 sinh viên nam và 65 sinh viên nữ. Ta có thể viết $L = A \cup B$ với $A = \{ x \in L \mid x$ là nam $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ là nữ $\}$ và $A \cap B = \varnothing$. Suy ra $| L | = | A \cup B | = | A | + | B | = 80 + 65 = 145$. Vậy lớp học L có 145 sinh viên.

b) Trường T có 300 học sinh lớp 6, 280 học sinh lớp 7, 250 học sinh lớp 8, và 220 học sinh lớp 9. Ta có thể viết $T = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$ với $A_j = \{ x \in T \mid x$ học lớp $j \}$ $(6 \le j \le 9)$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $6 \le i \ne j \le 9$.
Suy ra $| T | = | A_6 | + | A_7 | + | A_8 | + | A_9 | = 300 + 280 + 250 + 220 = 1050$.
Vậy trường T có 1 050 học sinh.

1.2/ MỆNH ĐỀ: Cho tập hợp *hữu hạn* E và $B \subset E$. $\overline{B}$ là phần bù của B trong E.

a) Đặt $\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$ ($\wp(E)$ là *tập hợp tất cả các tập hợp con* của E)
Nếu $| E | = n$ (n nguyên ≥ 0) thì $|\wp(E)| = 2^n$.

b) $| B | = | E | - | \overline{B} |$ (nếu việc đếm $| E |$ và $| \overline{B} |$ dễ dàng hơn việc đếm $| B |$).

Ví dụ: Cho $E = \{1, 2, 3, \ldots , 8, 9\}$ và $\Pi = \wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$.

a) Do $| E | = 9$ nên $| \Pi | = 2^9 = 512$.

b) Cho $\Phi = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \in A$ hay $2 \in A) \}$ thì $\Phi \subset \Pi$ và
$\overline{\Phi} = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \notin A$ và $2 \notin A) \} = \wp(F)$ với $F = E \setminus \{1,2\}$ và $| F | = 7$.
Suy ra $| \Phi | = | \Pi | - | \overline{\Phi} | = 2^9 - 2^7 = 512 - 128 = 384$.

1.3/ NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ: Cho các tập hợp *hữu hạn* A và B. Ta có

a) $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$ (nguyên lý bù trừ).

b) $| A \cup B | = | A | + | B \setminus A | = | B | + | A \setminus B | =$
$= | A \setminus B | + | A \cap B | + | B \setminus A |$.

Ví dụ: Lớp học L có 95 sinh viên học tiếng Anh, 60 sinh viên học tiếng Pháp và 43 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Giả sử mỗi sinh viên trong lớp L đều học tiếng Anh hay tiếng Pháp. Hỏi lớp L có bao nhiêu sinh viên ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Anh ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Pháp ?
Đặt $A = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Pháp $\}$ thì
$L = A \cup B$ và $A \cap B = = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh và tiếng Pháp $\}$. Ta có

$|L| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 95 + 60 - 43 = 112$.
Số sinh viên chỉ học tiếng Anh $= |A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 95 - 43 = 52$.
Số sinh viên chỉ học tiếng Pháp $= |B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 60 - 43 = 17$.

1.4/ <u>NGUYÊN LÝ CỘNG:</u> Một công việc có thể thực hiện bằng *một trong* k *cách khác nhau* (chọn cách này thì không chọn các cách khác). Cách thứ j có thể thu được m_j kết quả khác nhau ($1 \le j \le k$). Ta có số kết quả khác nhau có thể xảy ra khi thực hiện xong công việc là $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$.

<u>Ví dụ:</u> Người ta đưa vào danh sách bầu chọn " quả bóng vàng " gồm 5 cầu thủ Đức, 4 cầu thủ Argentina, 3 cầu thủ Hà Lan và 2 cầu thủ Brazil. Số cầu thủ là ứng viên của " quả bóng vàng " là $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ (cầu thủ).

1.5/ <u>NGUYÊN LÝ NHÂN:</u> Một qui trình bao gồm k công việc *diễn ra liên tiếp hoặc đồng thời*. Việc thứ j có thể có m_j cách thực hiện ($1 \le j \le k$).
Số cách khác nhau để thực hiện xong quá trình là $(m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k)$.

<u>Ví dụ:</u>
a) Đi từ Sài gòn đến Cần Thơ là một quá trình bao gồm 4 công việc liên tiếp trong đó việc 1: đi từ Sài Gòn đến Long An (giả sử có 3 lộ trình), việc 2: đi từ Long An đến Tiền Giang (giả sử có 4 lộ trình), việc 3: đi từ Tiền Giang đến Vĩnh Long (giả sử có 2 lộ trình) và việc 4: đi từ Vĩnh Long đến Cần Thơ (giả sử có 3 lộ trình). Khi đó số lộ trình khác nhau để đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72 \text{ (lộ trình)}.$$

b) Xét số nguyên dương $N = \overline{abcd}$ có 4 chữ số thập phân trong đó a tùy ý, b chẵn, $c \vdots 3$ và $d > 3$. Việc xây dựng số N xem như một quá trình bao gồm 4 công việc đồng thời (a có 9 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn, d có 6 cách chọn). Số lượng số N có thể tạo ra là $9 \times 5 \times 4 \times 6 = 1080$ (số).

1.6/ <u>NGUYÊN LÝ DIRICHLET:</u> (Khẳng định *sự tồn tại*).
Có n con cá và m cái ao (chưa có cá) thỏa $n > m$.
Thả tùy ý n cá xuống m ao. Khi đó
a) Có ít nhất một ao chứa ít nhất 2 cá.
b) Có ít nhất một ao chứa ít nhất $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ cá ($\forall a \in \mathbf{R}$, $\lceil a \rceil$ là *phần nguyên già* của a, nghĩa là $\lceil a \rceil$ là *số nguyên nhỏ nhất* thỏa $\lceil a \rceil \ge a$).

<u>Ví dụ:</u>
a) Trong giảng đường hiện có 367 sinh viên . . Có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau (tính từ ngày 1/1 đến ngày 31/12 của mỗi năm).
Số sinh viên (số cá) là $367 > 366$ = số ao (số ngày sinh nhật có thể có). Dùng nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất 2 sinh viên có cùng ngày sinh nhật.
b) Cho $A \subset S = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ và $|A| \ge 6$.
Chứng minh có $a, b \in A$ thỏa $a + b = 11$.
Mỗi số của A được xem như là một con cá có mã số chính là số đó. Ta có ≥ 6 cá.
Tạo ra 5 ao B, C, D, E và F để thả cá từ tập hợp A với qui định đặc biệt

(một cách thả đặc biệt) : B chỉ nhận cá có mã số 1 và 10, C chỉ nhận cá có mã số 2 và 9, D chỉ nhận cá có mã số 3 và 8, E chỉ nhận cá có mã số 4 và 7, F chỉ nhận cá có mã số 5 và 6. Số cá $\geq 6 > 5$ = số ao nên theo nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất một ao nào đó chứa đúng 2 cá (gọi là a và b). Theo qui định đặc biệt, ta có $a + b = 11$.

c) Lớp học có 100 học sinh. Có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ học sinh có tháng sinh giống nhau và có ít nhất $\lceil 100/7 \rceil = 15$ học sinh có ngày sinh trong tuần (tính theo thứ hai, thứ ba, … , chủ nhật) là như nhau.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (KHÔNG LẶP):

2.1/ PHÉP HOÁN VỊ: Cho số nguyên $n \geq 1$.

a) Một *phép hoán vị* (*không lặp*) trên n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử.

b) Số phép hoán vị trên n phần tử là $P_n = n! = 1.2.3. \ldots (n-1).n$

Ví dụ:

a) Có $P_3 = 3! = 6$ cách sắp xếp 3 phần tử a, b, c vào 3 vị trí cho trước (không xếp trùng) như sau: abc, acb, cba, bac, bca và cab.

b) Có $P_7 = 7! = 5040$ cách sắp xếp 7 người vào một bàn dài có 7 ghế (mỗi ghế chỉ có 1 người ngồi).

c) 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc. Nếu xếp tùy ý thì có $10! = 3628800$ cách xếp. Nếu xếp xen kẽ thì có $2 \times (5!)^2 = 28800$ cách xếp. Nếu 5 nam đứng gần nhau thì có $5! \times 6! = 86400$ cách xếp. Nếu 5 nam đứng gần nhau và 5 nữ đứng gần nhau thì có $2 \times (5!)^2 = 28800$ cách xếp. Nếu một nam đứng ở đầu hàng và một nữ đứng ở cuối hàng thì có $5^2 \times 8! = 1008000$ cách xếp.

2.2/ PHÉP TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP: Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$.

a) Một *tổ hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *không quan tâm đến thứ tự chọn*.

b) Một *chỉnh hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *có quan tâm đến thứ tự chọn* (hoặc sau khi chọn xong lại tiếp tục xếp m phần tử đã chọn vào m vị trí cho sẵn).

c) Số tổ hợp n chọn m là $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

d) Số chỉnh hợp n chọn m là $A_n^m = C_n^m P_m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Ví dụ:

a) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để lập đội văn nghệ. Số cách chọn là $C_{10}^4 = 210$.

b) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để bổ nhiệm làm đội trưởng, đội phó, thư ký và thủ quĩ của một đội công tác xã hội. Số cách chọn là $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4 = 210 \times 24 = 504$.

c) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 2. Số dãy số có được là $C_8^3 \times 9^5 = 3306744$.

d) Lập các dãy số gồm 8 chữ số thập phân mà trong đó có các chữ số 1, 4, 9 (mỗi chữ số xuất hiện đúng một lần) và các chữ số còn lại thì khác nhau từng đôi một .

Số dãy số có được là $A_8^3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 846720$.

e) Có bao nhiêu dãy số gồm 9 chữ số thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau hay có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau ?

Ta giải bài toán này bằng nguyên lý bù trừ.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau là 7.9^6.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là 6.9^5.

Số dãy số gồm 9 chữ số thập phân có đúng 3 chữ số 5 đứng liền nhau và có đúng 4 chữ số 8 đứng liền nhau là $A_4^2 \times 8^2 = 12 \times 64 = 768$.

Số dãy số cần tìm là $(7.9^6 + 6.9^5) - 768 = 69.9^5 - 768 = 4073613$.

2.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các số nguyên $n \ge 1$ và $0 \le m \le n$. Khi đó

a) $C_n^m = C_n^{n-m}$ (sự đối xứng ở hai cực).

b) $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

c) Khi $m \ge 1$ thì $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ (hạ chỉ số dưới).

<u>Ví dụ:</u>

a) $C_7^0 = C_7^7 = 1$, $C_7^1 = C_7^6 = 7$, $C_7^2 = C_7^5 = 21$ và $C_7^3 = C_7^4 = 35$.

b) $C_9^5 = C_8^5 + C_8^4 = (C_7^5 + C_7^4) + (C_7^4 + C_7^3)$.

2.4/ <u>NHỊ THỨC NEWTON:</u> Cho số nguyên $n \ge 1$ và các số thực x, y. Ta có

$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$ (số mũ của x tăng dần và số mũ của y giảm dần)

$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i$ (số mũ của x giảm dần và số mũ của y tăng dần).

<u>Ví dụ:</u>

$$(x + y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^i y^{6-i} = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$$

$$= (y + x)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i x^{6-i} y^i = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

2.5/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho số nguyên $n \ge 1$. Ta có

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = [(-1) + 1]^n = 0$.

c) Suy ra $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

III. <u>GIẢI TÍCH TỔ HỢP (CÓ LẶP):</u>

3.1/ <u>PHÉP HOÁN VỊ LẶP:</u> Cho các số nguyên dương k, $n_1, n_2, \ldots$ và n_k.

Có k *loại vật khác nhau*, loại thứ j có n_j vật *giống hệt nhau* $(1 \le j \le k)$.

Tổng số vật là $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

a) Một *phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên* là một cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí cho trước sao cho *mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử* và *không phân biệt các vật cùng loại* .

b) Số phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên là

$$P_n^*(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Khi $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ thì hoán vị lặp trở về *hoán vị không lặp*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Từ các chữ số 8, 1, 1, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 6, ta có thể tạo ra bao nhiêu dãy số khác khác nhau (mỗi dãy số có 10 chữ số , chẳng hạn như dãy số 6196816996, ...) ?
Đây là phép đếm số hoán vị lặp trên $n = 10$ phần tử với $k = 4$ loại vật, mỗi loại vật là một loại chữ số và số vật của mỗi loại là $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$ và $n_4 = 4$.
Số dãy số có được là $P_{10}^*(1,2,3,4) = \dfrac{10!}{1!2!3!4!} = 12600$.

b) Nếu yêu cầu thêm đầu dãy là chữ số lẻ (1 hoặc 9) và cuối dãy là chữ số chẵn (6 hoặc 8) thì ta có được bao nhiêu dãy ?
Số dãy số có được là $P_8^*(1,3,4) + P_8^*(1,1,3,3) + P_8^*(2,2,4) + P_8^*(1,2,2,3) = 3500$.

3.2/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $n \ge 1$, $k \ge 2$ và các số thực $x_1, x_2, ..., x_k$.
Ta có khai triển *đa thức Newton nhiều biến* (mở rộng nhị thức Newton) :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+...+n_k=n \\ n_1,n_2,...,n_k \ge 0}} P_n^*(n_1, n_2, ..., n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ....x_k^{n_k}$$

trong đó $P_n^*(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ (để ý *các hệ số và số mũ của các biến* trong ngoặc đơn ở vế trái đều bằng 1).

<u>Ví dụ:</u>

a) Tìm hệ số của đơn thức $x^4y^5z^3u$ trong khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$.
Đặt $a = 9x$, $b = -2y$, $c = 5z$ và $d = -8t$. Dùng đa thức Newton, ta có :
$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = (a + b + c + d + u)^{13} = P_{13}^*(4,5,3,0,1)\, a^4b^5c^3d^0u^1 + \cdots =$
$= \dfrac{13!}{4!5!3!0!1!} (9x)^4(-2y)^5(5z)^3(-8t)^0u^1 + \cdots = -360360 \times 2^5 5^3 9^4 (x^4 y^5z^3u) + \cdots$
Hệ số cần tìm là $-360360 \times 2^5 5^3 9^4 = -9457287840000$.

b) Tìm hệ số của đơn thức $x^2y^{15}z^{12}t^2$ trong khai triển $(3x^2 + 4y^5 - z^3 - 5t)^{10}$.
Đặt $a = 3x^2$, $b = 4y^5$, $c = -z^3$ và $d = -5t$. Dùng đa thức Newton, ta có :
$(3x^2 + 4y^5 - z^3 - 5t)^{10} = (a + b + c + d)^{10} = P_{10}^*(1,3,4,2)\, a^1b^3c^4d^2 + \cdots =$
$= \dfrac{10!}{1!3!4!2!} (3x^2)^1(4y^5)^3(-z^3)^4(-5t)^2 + \cdots = 12600 \times 3^1 4^3 5^2 (x^2 y^{15}z^{12}t^2) + \cdots$
Hệ số cần tìm là $12600 \times 3^1 4^3 5^2 = 60480000$.

3.3/ <u>PHÉP TỔ HỢP LẶP:</u> Cho các số nguyên $k \ge 1$ và $m \ge 0$.
Có k *loại vật khác nhau*, mỗi loại vật có nhiều vật *giống hệt nhau*.

a) Một *tổ hợp lặp k loại vật chọn m* là một cách chọn ra m vật từ k loại vật nói trên sao cho *mỗi loại vật được chọn một số lần tùy ý không quá* m và *không phân biệt các vật cùng loại*.

b) Số tổ hợp lặp k loại vật chọn m là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)} = C_{m+(k-1)}^m$.

<u>Ví dụ:</u> An đến siêu thị mua 15 cái mũ. Siêu thị bán 4 loại mũ (cùng kiểu dáng, chất lượng và giá cả) có các màu trắng, xanh, đen và nâu. Hỏi An có bao nhiêu cách mua mũ (theo màu sắc) ?

Mỗi cách mua mũ là một tổ hợp lặp 4 loại vật chọn ra 15 vật.
Số cách mua mũ là $K_4^{15} = C_{15+(4-1)}^{(4-1)} = C_{18}^3$ = 816.

3.4/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.

Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$ (các ẩn số $x_1, x_2, \ldots$ và x_k là các số nguyên ≥ 0).

Mỗi nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên chính là một cách chọn ra m vật từ k loại vật, mỗi giá trị x_j là số vật loại thứ j được chọn ($1 \leq j \leq k$).

Do đó số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình cũng là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xếp tùy ý 20 viên bi (y hệt nhau) vào 4 cái hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?
Gọi x_j là số bi xếp vào hộp thứ j (($1 \leq j \leq 4$) thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ và x_1, x_2, x_3 và x_4 nguyên ≥ 0. Số cách xếp = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên) = $K_4^{20} = C_{23}^3$ = 1771.

b) Khi khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?

$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = \sum\limits_{\substack{p+q+r+s+n=13 \\ p,q,r,s,n\geq 0}} c(p,q,r,s,n)x^p y^q z^r t^s u^n$ với $c(p,q,r,s,n) \in \mathbf{R}$.

Mỗi đơn thức $c(p, q, r, s, n).x^p y^q z^r t^s u^n$ tương ứng với một bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n). Mỗi bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) chính là một nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$. Do đó số đơn thức xuất hiện = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$) =
$= K_5^{13} = C_{17}^4$ = 2380.

c) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t + u + v = 20$ trong đó $x \geq 2, y \geq 0, z \geq -3, t \geq 0, u \geq 4$ và $v = 3$ (*). Loại ẩn v, giữ nguyên ẩn y, t và đổi biến $x' = (x - 2) \geq 0$, $z' = (z + 3) \geq 0$ và $u' = (u - 4) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y + z' + t + u' = 14$ với x', y, z', t, u' đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{14} = C_{18}^4$ = 3060.

d) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z = 21$ trong đó $x > -4$, $y > 5$ và $2 \leq z < 7$ (*). Do x, y nguyên nên ($x > -4 \Leftrightarrow x \geq -3$) và ($y > 5 \Leftrightarrow y \geq 6$).
Đổi biến $x' = (x + 3) \geq 0$, $y' = (y - 6) \geq 0$ và $z' = (z - 2) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' < 5$ (**).
Xét phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 (I) và phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' \geq 5$ (II).
Đổi biến $z'' = (z - 5) \geq 0$, (II) tương đương với phương trình $x' + y' + z'' = 11$ với x', y', z'' đều nguyên ≥ 0 (III).
Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên của (**) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (II) =
= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (III) = $K_3^{16} - K_3^{11} = C_{18}^2 - C_{13}^2$ = 153 – 78 = 75.

e) Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của bất phương trình $x + y + z \leq 19$ (*).
Đặt $t = 19 - (x + y + z)$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t = 19$ với x, y, z, t đều nguyên ≥ 0 (**).
Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_4^{19} = C_{22}^3$ =
= 1540.

f) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z + t > -20$ trong đó $x < 1$, $y \le 4$, $z \le -3$ và $t < 6$ (*).

Đổi biến $x' = -x \ge 0$, $y' = -y \ge -4$, $z' = -z \ge 3$ và $t' = -t \ge -5$, ta có bất Phương trình tương đương $x' + y' + z' + t' \le 19$. Đổi biến $y'' = (y' + 4) \ge 0$, $z'' = (z' - 3) \ge 0$ và $t'' = (t' + 5) \ge 0$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y'' + z'' + t'' \le 25$. Đặt $u = 25 - (x' + y'' + z'' + t'')$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t + u = 25$ với x, y, z, t, u đều nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) $= K_5^{25} = C_{29}^4 = 23751$.
