CHƯƠNG V

TẬP HỢP SỐ NGUYÊN Z

I. SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho a, b $\in$ **Z**.

a) Ta nói a | b (a là *một ước số* của b hay a *chia hết* b) nếu $\exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}$, b = ***k***a.
Lúc đó ta cũng nói là b ⋮ a (b là *một bội số* của a hay b *chia hết cho* a).

b) Suy ra: a *không chia hết* b (hay b *không chia hết cho* a) nếu
$\forall k \in \mathbf{Z}$, $b \neq ka$.

Ví dụ:

a) 12 | (–48) [hay (–48) ⋮ 12] vì $\exists(-4) \in \mathbf{Z}$, $(-48) = (-4)12$.

b) 17 không chia hết 65 (vì $\forall k \in \mathbf{Z}$, $65 > 17|k|$ nếu $|k| \leq 3$ và $65 < 17|k|$ nếu $|k| \geq 4$, nghĩa là $\forall k \in \mathbf{Z}$, $65 \neq 17k$).

1.2/ TÍNH CHẤT: Cho a, b, c, d $\in$ **Z**. Đặt $\mathbf{Z^*} = \mathbf{Z} \setminus \{ 0 \}$. Khi đó

a) $a = \pm 1 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}, a \mid k$.   b) $a \neq 0 \Leftrightarrow$ a chỉ có *hữu hạn ước số*.

c) $a = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}, k \mid a \Leftrightarrow$ a có *vô hạn ước số*.
$a \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \overline{k \mid a} \Leftrightarrow$ a có *chỉ có hữu hạn ước số*.

d) $a \mid b \Leftrightarrow (-a) \mid b \Leftrightarrow a \mid (-b) \Leftrightarrow (-a) \mid (-b)$.

e) Nếu $a \mid b$ thì ($b = 0$ hay $0 < |a| \leq |b|$).

f) ($a \mid b$ và $b \mid a$) $\Leftrightarrow a = \pm b \Leftrightarrow |a| = |b|$.

g) ($a \mid b$, $b \mid a$ và $ab \geq 0$) $\Leftrightarrow a = b$.

h) Nếu ($a \mid \mathbf{b}$ và $\mathbf{b} \mid c$) thì $a \mid c$.

i) Nếu ($\mathbf{a} \mid b$ và $\mathbf{a} \mid c$) thì [$\mathbf{a} \mid (b \pm c)$ và $\mathbf{a} \mid bc$].

j) Nếu ($a \mid b$ và $c \mid d$) thì $ac \mid bd$.

k) $a \mid b \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}, a \mid kb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}, ka \mid kb \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z^*}, a \mid kb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z^*}, ka \mid kb \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z^*}, ka \mid kb$.

Việc chứng minh các tính chất trên là các bài tập đơn giản về số nguyên.

1.3/ THUẬT CHIA EUCLIDE: a, b $\in$ **Z** và $b \neq 0$.

Khi đó *có duy nhất* q, r $\in$ **Z** thỏa $a = qb + r$ và $0 \leq r < |b|$.
Ta nói a là *số bị chia*, b là *số chia*, q là *số thương* và r là *số dư*.
Ta ký hiệu q = a *div* b, r = a *mod* b và $a \equiv r \pmod{b}$.

Ví dụ:
$140 = 9(15) + 5$ với $0 \leq 5 < |15| = 15$.
$-140 = -10(15) + 10$ với $0 \leq 10 < |15| = 15$.
$140 = -9(-15) + 5$ với $0 \leq 5 < |-15| = 15$.
$-140 = 10(-15) + 10$ với $0 \leq 10 < |-15| = 15$.

II. ƯỚC SỐ CHUNG DƯƠNG LỚN NHẤT:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$.

Xét $S = \{ c \in \mathbf{Z} \,/\, c \mid a$ và $c \mid b \}$ = Tập hợp *các ước số chung* của a và b.

Ta có $S \neq \varnothing$ (vì $\pm 1 \in S$) và $\forall c \in S, |c| \leq \min\{|a|, |b|\}$ nên S hữu hạn.

Đặt $d = \max(S)$ và gọi d là *ước số chung dương lớn nhất* của a và b.

Ký hiệu $d = (a, b) = (b, a)$. Ta có $1 \leq d \leq \min\{|a|, |b|\}$.

Ví dụ: Cho $a = -36$ và $b = 48$.

Xét $S = \{c \in \mathbf{Z} \,/\, c \mid (-36)$ và $c \mid 48\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

Đặt $d = \max(S) = 12$ thì $d = (-36, 12) = (12, -36)$.

2.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ và $d \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Khi đó

$d = (a, b) \Leftrightarrow [\,(d \mid a), (d \mid b)$ và $\forall k \in \mathbf{Z}, (k \mid a$ và $k \mid b) \Rightarrow k \mid d\,]$.

(d là *một ước số chung* của a và b) và (d là *bội của mọi ước chung* của a và b).

Ví dụ: Cho $a = 75, b = 100$ và $S = \{c \in \mathbf{Z} \,/\, c \mid 75$ và $c \mid 100\} = \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}$.

Ta có $d = (75, 100) = 25$ vì $25 \in S \cap \mathbf{N}^*$ và $k \mid 25, \forall k \in S$.

2.3/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ và $d \in \mathbf{N}^*$. Khi đó

$d = (a, b) \Leftrightarrow [\,(d \mid a), (d \mid b)$ và $\exists r, s \in \mathbf{Z}, d = ra + sb$ (r, s không duy nhất)]

(d là *một ước số chung* của a và b) và (d là *một tổ hợp nguyên* của a và b).

Ví dụ:

a) $(12, -32) = \mathbf{4}$ vì $\mathbf{4} \mid 12, \mathbf{4} \mid (-32)$ và $\exists (-5), (-2) \in \mathbf{Z}, \mathbf{4} = (-5)12 + (-2)(-32)$.

Ta cũng thấy $\exists\, 3, 1 \in \mathbf{Z}, \mathbf{4} = 3(12) + 1(-32)$.

b) $(9, 20) = \mathbf{1}$ vì $\mathbf{1} \mid 9, \mathbf{1} \mid 20$ và $\exists 9, (-4) \in \mathbf{Z}, \mathbf{1} = (9)9 + (-4)20$.

2.4/ TÍNH CHẤT: Cho $a, b, \lambda \in \mathbf{Z}^*$. Khi đó

a) $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$ và $(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|\,(a, b)$.

b) Nếu $a \mid b$ thì $(a, b) = |a|$. Đặc biệt $(\pm a, \pm a) = |a|$.

Ví dụ:

a) $(36, 48) = (-36, 48) = (36, -48) = (-36, -48) = 12$.

b) $(-\mathbf{7} \times 36, -\mathbf{7} \times 48) = |-\mathbf{7}|\,(36, 48) = \mathbf{7} \times 12 = 84$.

c) $(-15, 90) = |-15| = 15$ vì $(-15) \mid 90$. Đặc biệt $(\pm 57, \pm 57) = |\pm 57| = 57$.

2.5/ BỔ ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$ thỏa $|a| > |b|$ và b không chia hết a.

Chia Eucide $a = qb + r$ với $0 < r < |b|$. Khi đó $(a, b) = (b, r)$.

Ý nghĩa : Tìm (b, r) thay cho (a, b) với thuận lợi là $r < |b| < |a|$.

Ví dụ: Chia Euclide liên tiếp : $432 = 5(76) + 52$, $76 = 1(52) + 24$, $52 = 2(24) + 4$ và $24 = 6(4)$. Từ các phép chia Euclide trên, ta suy ra

$(432, 76) = (76, 52) = (52, 24) = (24, 4) = 4$.

2.6/ THUẬT TOÁN TÌM ƯỚC SỐ CHUNG DƯƠNG LỚN NHẤT VÀ BIỂU DIỄN TỔ HỢP NGUYÊN:

a) Vấn đề : Cho a, b $\in$ **Z*** thỏa $|a| > |b|$.

Tìm $d = (a,b)$ và tìm $r, s \in$ **Z** thỏa $d = ra + sb$.

b) Chia Euclide liên tiếp (số bị chia và số chia ở bước sau lần lượt là số chia và số dư ở bước trước):

$a = q_o b + r_o$ ($0 < r_o < |b|$) [1].

$b = q_1 r_o + r_1$ ($0 < r_1 < |r_o| = r_o$) [2].

$r_o = q_2 r_1 + r_2$ ($0 < r_2 < |r_1| = r_1$) [3].

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$ ($0 < r_3 < |r_2| = r_2$) [4].

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$r_{n-4} = q_{n-2} r_{n-3} + r_{n-2}$ ($0 < r_{n-2} < |r_{n-3}| = r_{n-3}$) [n – 1].

$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$ ($0 < r_{n-1} < |r_{n-2}| = r_{n-2}$) [n].

$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + 0$ (phép chia dừng khi số dư bằng 0) [n + 1].

Từ các đẳng thức [1], [2], [3], … , [n], [n + 1] và theo (**2.5**), ta có

$d = (a, b) = (b, r_o) = (r_o , r_1) = (r_1 , r_2) = \ldots = (r_{n-3} , r_{n-2}) = (r_{n-2} , r_{n-1}) = r_{n-1}$.

Từ các đẳng thức [n], [n – 1], … , [3], [2] và [1], ta biểu diễn các số dư

$d = r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} = r_{n-3} - q_{n-1}(r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3}) =$

$= - q_{n-1} r_{n-4} + (1 + q_{n-1} q_{n-2}) r_{n-3} = \ldots$,

d lần lượt được biểu diễn là tổ hợp nguyên của { r_{n-2} , r_{n-3} }, của { r_{n-3} , r_{n-4} }, … , của { r_1 , r_o }, của { r_0 ,b } và sau hết là của { b, a }.

Ví dụ: Tìm $d = (-952, 525)$ và tìm $r, s \in$ **Z** thỏa $d = r(-952) + s(525)$.

Chia Euclide liên tiếp : $-952 = -2(525) + 98$ [1], $525 = 5(98) + 35$ [2], $98 = 2(35) + 28$ [3], $35 = 1(28) + 7$ [4] và $28 = 4(7) + 0$ [5].

Từ [1], [2], [3], [4] và [5], ta có

$d = (-952, 525) = (525, 98) = (98, 35) = (35, 28) = (28, 7) = 7$.

Từ [4], [3], [2] và [1], ta biểu diễn các số dư

$d = 7 = 35 - 28 = 35 - [\, 98 - 2(35)\,] = - 98 + 3(35) = - 98 + 3[\, 525 - 5(98)]$

$= 3(525) - 16(98) = 3(525) - 16\, [-952 + 2(525)\,] = (-16)(-952) - 29(525)$.

Vậy $d = 7 = r(-952) + s(525)$ với $r = -16$ và $s = -29$.

III. BỘI SỐ CHUNG DƯƠNG NHỎ NHẤT:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho a, b $\in$ **Z*** và

$T = \{c \in$ **N*** $/ c \vdots a$ và $c \vdots b\}$ = Tập hợp *các bội số chung dương* của a và b.

Ta có $T \neq \emptyset$ (vì $|ab| \in T$) và $\forall c \in T$, $c \geq \max\{ |a|, |b| \}$.

Đặt $e = \min(T)$ và gọi e là *bội số chung dương nhỏ nhất* của a và b.

Ký hiệu $e = [a, b] = [b, a]$. Ta có $\max\{ |a|, |b| \} \leq e \leq |ab|$.

Ví dụ: Cho $a = -36 = -2^2 3^2$ và $b = 48 = 2^4 3^1$.

Xét $T = \{ c \in$ **N*** $/ c \vdots (-36)$ và $c \vdots 48 \} = \{ 2^4 3^2 t \mid t \in$ **N*** $\}$.

Đặt $e = \min(S) = 2^4 3^2 = 144$ (ứng với $t = 1$) thì $e = [-36, 12] = [12, -36]$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ và $e \in \mathbf{N^*}$. Khi đó

$e = [a, b] \Leftrightarrow [\,(e \vdots a), (e \vdots b)$ và $\forall k \in \mathbf{Z}, (k \vdots a$ và $k \vdots b) \Rightarrow k \vdots e\,]$.

(e là *một bội số chung* của a và b) và (e là *ước của mọi bội chung* của a và b).

Ví dụ: Cho $a = 75 = 3.5^2$, $b = 100 = 2^2 5^2$ và

$L = \{ c \in \mathbf{Z} \,/\, c \vdots 75$ và $c \vdots 100 \} = \{ 2^2.3.5^2 t \mid t \in \mathbf{Z^*} \} = \{ 300t \mid t \in \mathbf{Z^*} \}$.

Ta có $e = [75, 100] = 300$ vì $300 \in L \cap \mathbf{N^*}$ và $300 \mid k, \forall k \in L$.

3.3/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ và $e \in \mathbf{N^*}$. Khi đó]

$e = [a, b] \Leftrightarrow [\,(e \vdots a), (e \vdots b)$ và $\exists u, v \in \mathbf{Z}, \dfrac{1}{e} = \dfrac{u}{a} + \dfrac{v}{b}$ (u, v không duy nhất)].

(e là *một bội số chung* của a và b) và ($\dfrac{1}{e}$ là *một tổ hợp nguyên* của $\dfrac{1}{a}$ và $\dfrac{1}{b}$).

Ví dụ:

$[12, -32] = 96$ vì $\mathbf{96} \vdots 12$, $\mathbf{96} \vdots (-32)$ và $\exists (-1), (-3) \in \mathbf{Z}, \dfrac{1}{96} = \dfrac{-1}{12} + \dfrac{-3}{-32}$.

Ta cũng thấy $\exists\, 2, 5 \in \mathbf{Z}, \dfrac{1}{96} = \dfrac{2}{12} + \dfrac{5}{-32}$.

3.4/ TÍNH CHẤT: Cho $a, b, \lambda \in \mathbf{Z^*}$. Khi đó

a) $[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$ và $[\lambda a, \lambda b] = |\lambda|\,[a, b]$.

b) Nếu $a \mid b$ thì $[a, b] = |b|$. Đặc biệt $[\pm a, \pm a] = |a|$.

Ví dụ:

a) $[36, 48] = [-36, 48] = [36, -48] = [-36, -48] = 144$.

b) $[-\mathbf{7} \times 36, -\mathbf{7} \times 48] = |-\mathbf{7}|\,[36, 48] = \mathbf{7} \times 144 = 1008$.

c) $[15, -90] = |-90| = 90$ vì $15 \mid (-90)$. Đặc biệt $[\pm 57, \pm 57] = |\pm 57| = 57$.

3.5/ ĐỊNH LÝ: Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ với $d = (a, b)$ và $e = [a, b]$. Khi đó

a) $de = |ab|$. Suy ra $e = \dfrac{|ab|}{d}$.

b) Chọn $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = ra + sb$ thì $\dfrac{1}{e} = \dfrac{d}{|ab|} = \dfrac{ra + sb}{|ab|} = \dfrac{u}{a} + \dfrac{v}{b}$ trong đó

$u = s$ và $v = r$ (nếu $ab > 0$) hoặc $u = -s$ và $v = -r$ (nếu $ab < 0$).

Ví dụ: $a = -952$ và $b = 525$ có $d = (a, b) = 7$ nên $e = [a, b] = \dfrac{|ab|}{d} = 71400$.

Hơn nữa do $ab < 0$ và $d = ra + sb$ với $r = -16$ và $s = -29$ nên

$\dfrac{1}{e} = \dfrac{u}{a} + \dfrac{v}{b}$ với $u = -s = 29$ và $v = -r = 16$. Vậy $\dfrac{1}{e} = \dfrac{29}{a} + \dfrac{16}{b}$.

IV. SỰ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$.

a) Ta nói a và b là hai số *nguyên tố cùng nhau* nếu a và b chỉ có hai ước số chung là ± 1, nghĩa là $(a, b) = 1$.

b) Suy ra a và b là hai số *không nguyên tố cùng nhau* nếu $(a, b) \geq 2$.

Ví dụ: Do $(-25, 42) = 1$ nên -25 và 42 là hai số nguyên tố cùng nhau.
Do $(84, 56) = 28 \geq 2$ nên 84 và 56 là hai số không nguyên tố cùng nhau.

4.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$. Khi đó

$$(a, b) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbf{Z} \text{ thỏa } \mathbf{1} = ra + sb.$$

Ví dụ: Ta có $5(17) + (-12)7 = \mathbf{1}$ nên ta thấy có 16 cặp số nguyên tố cùng nhau là

$$(\pm 5, \pm 12) = (\pm 5, \pm 7) = (\pm 17, \pm 12) = (\pm 17, \pm 7) = \mathbf{1}.$$

4.3/ MỆNH ĐỀ: Cho $a, b, c \in \mathbf{Z^*}$.
a) Nếu $(\mathbf{a}, b) = 1 = (\mathbf{a}, c)$ thì $(\mathbf{a}, bc) = 1$.
b) Nếu $[\ \mathbf{a} \mid bc$ và $(\mathbf{a}, b) = \mathbf{1}\ ]$ thì $\mathbf{a} \mid c$.
c) Nếu $[\ a \mid \mathbf{c}\ , b \mid \mathbf{c}$ và $(a, b) = \mathbf{1}\ ]$ thì $ab \mid \mathbf{c}$.

Ví dụ:
a) $(\mathbf{12}, 25) = 1 = (\mathbf{12}, -47)$ nên $(\mathbf{12}, 25 \times [-47]) = 1$.
b) $\mathbf{19} \mid (76 \times 31)$ và $(\mathbf{19}, 31) = 1$ nên $\mathbf{19} \mid 76$.
c) $9 \mid \mathbf{1188}$, $-22 \mid \mathbf{1188}$ và $(9, -22) = 1$ nên $9(-22) \mid \mathbf{1188}$.

4.4/ DẠNG TỐI GIẢN CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ :

Cho $a, b \in \mathbf{Z^*}$ và $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q^*} = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Đặt $d = (a, b)$ và viết $a = da'$, $b = db'$.

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{-a'}{-b'}$ với $(a', b') = (-a', -b') = \mathbf{1}$.

Ta nói $\frac{a}{b}$ có hai dạng tối giản (không giản ước được) là $\frac{a'}{b'}$ và $\frac{-a'}{-b'}$.

Ví dụ: $a = -160$ và $b = 150$. Ta có $d = (a, b) = 10$, $a = -16d$ và $b = 15d$.
Suy ra $\frac{a}{b} = \frac{16}{-15} = \frac{-16}{15}$, nghĩa là $\frac{a}{b}$ có hai dạng tối giản là $\frac{16}{-15}$ và $\frac{-16}{15}$ vì $(16, -15) = (-16, 15) = 1$.

V. SỰ PHÂN TÍCH NGUYÊN TỐ:

5.1/ SỐ NGUYÊN TỐ : Cho $p \in \mathbf{Z}$ và $|p| \geq 2$ (nghĩa là $0 \neq p \neq \pm 1$).
a) Ta nói p là *một số nguyên tố* nếu p chỉ có hai ước số dương là 1 và $|p|$ (nghĩa là p chỉ có 4 ước số là ± 1 và $\pm p$).
b) Suy ra q là một số *không nguyên tố* (còn gọi là *hợp số*) nếu q có hơn hai ước số dương.

Ví dụ:
Các số nguyên tố đầu tiên là $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29, \ldots$
± 28 là một hợp số vì ± 28 có hơn hai ước số dương là $1, 2, 4, \ldots$

5.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $p \in \mathbf{Z}$ và $|p| \geq 2$. Các phát biểu sau là *tương đương* :

a) p nguyên tố. b) $\forall k \in \mathbf{Z}^*$, $\overline{p \mid k} \Rightarrow (p, k) = \mathbf{1}$.

c) $\forall k \in \mathbf{Z}^*$, $(p, k) \neq \mathbf{1} \Rightarrow p \mid k$. d) $\forall a, b \in \mathbf{Z}^*$, $p \mid ab \Rightarrow (p \mid a$ hay $p \mid b)$.

e) $\forall a, b \in \mathbf{Z}^*$, $(\overline{p \mid a}$ và $\overline{p \mid b}) \Rightarrow \overline{p \mid ab}$.

<u>Ví dụ:</u> 83 là số nguyên tố, $\overline{83 \mid 724}$ và $\overline{83 \mid 615}$ nên $(83, 724) = \mathbf{1}$ và $\overline{83 \mid (724).(615)}$.

5.3/ <u>ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH NGUYÊN TỐ:</u> Cho $k \in \mathbf{Z}$ và $|k| \geq 2$.

Khi đó k được phân tích một cách duy nhất dưới dạng $k = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ (*)

trong đó $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ là các số nguyên tố > 0 và $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbf{N}^*$.

(*) gọi là *sự phân tích nguyên tố* của k.

<u>Ví dụ:</u> $178.200 = 2^3 3^4 5^2 11^1$ và $-102.375 = -3^2 5^3 7^1 13^1$.

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

Phân tích nguyên tố $a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ và $b = \pm q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots q_n^{s_n}$. Khi đó

$$(a, b) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \{ p_1, p_2, \ldots, p_m \} \cap \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} = \varnothing.$$

<u>Ví dụ:</u> Ta có $(\pm 2^3 5^4 11^2 19^8 29^5, \pm 3^6 7^{10} 13^2 17^7 23^1 31^4) = \mathbf{1}$ vì

$$\{ 2, 5, 11, 19, 29 \} \cap \{ 3, 7, 13, 17, 23, 31 \} = \varnothing.$$

5.5/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Ta có thể tìm $d = (a, b)$, $e = [a, b]$ và các dạng tối giản của phân số $\dfrac{a}{b}$ dựa theo sự phân tích nguyên tố của a và b.

Phân tích nguyên tố một cách “ thỏa hiệp ” giữa a và b như sau:

$a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ và $b = \pm p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_m^{s_m}$ trong đó $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ là các số nguyên tố > 0 và $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_m, s_m \in \mathbf{N}$ sao cho $r_i + s_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq m)$.

Đặt $u_i = \min\{r_i, s_i\}$ và $v_i = \max\{r_i, s_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$.

Khi đó $d = (a, b) = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_m^{u_m}$, $e = [a, b] = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \ldots p_m^{v_m}$ và

các dạng tối giản của $\dfrac{a}{b}$ lần lượt là

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sgn}(a)\, p_1^{r_1-u_1} p_2^{r_2-u_2} \ldots p_m^{r_m-u_m}}{\operatorname{sgn}(b)\, p_1^{s_1-u_1} p_2^{s_2-u_2} \ldots p_m^{s_m-u_m}} \quad \text{hay} \quad \frac{a}{b} = \frac{-\operatorname{sgn}(a)\, p_1^{r_1-u_1} p_2^{r_2-u_2} \ldots p_m^{r_m-u_m}}{-\operatorname{sgn}(b)\, p_1^{s_1-u_1} p_2^{s_2-u_2} \ldots p_m^{s_m-u_m}} \text{ trong đó}$$

$\operatorname{sgn}(a)$ và $\operatorname{sgn}(b)$ là dấu của a và b.

<u>Ví dụ:</u> $a = 2^3 3^5 7^4 13^2 17^3$ và $b = -2^8 5^2 7^2 11^3 17^9 19^1$ có các dạng phân tích nguyên tố một cách “ thỏa hiệp ” là

$a = 2^3 3^5 5^0 7^4 11^0 13^2 17^3 19^0$ và $b = -2^8 3^0 5^2 7^2 11^3 13^0 17^9 19^1$. Ta suy ra

$d = (a, b) = 2^3 3^0 5^0 7^2 11^0 13^0 17^3 19^0 = 2^3 7^2 17^3$ và

$e = [a, b] = 2^8 3^5 5^2 7^4 11^3 13^2 17^9 19^1$.

Các dạng tối giản của $\dfrac{a}{b}$ là $\dfrac{3^5 7^2 13^2}{-2^5 5^2 11^3 17^6 19^1}$ và $\dfrac{-3^5 7^2 13^2}{2^5 5^2 11^3 17^6 19^1}$.

5.6/ <u>MÔ TẢ CÁC ƯỚC SỐ CỦA SỐ NGUYÊN:</u> Cho $k \in \mathbf{Z}$ với $|k| \geq 2$.

Phân tích nguyên tố $k = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$. Khi đó

a) Tập hợp các ước số dương và tập hợp các ước số nguyên của k lần lượt là

$A = \{ p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_m^{t_m} \mid t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbf{N}$ và $t_j \leq r_j \ (1 \leq j \leq k) \}$ và

$B = \{ \pm p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_m^{t_m} \mid t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbf{N}$ và $t_j \leq r_j \ (1 \leq j \leq k) \}$.

b) $|A| = (r_1 + 1)(r_2 + 1)\ldots(r_m + 1)$ và $|B| = 2|A| = 2(r_1 + 1)(r_2 + 1)\ldots(r_m + 1)$.

<u>Ví dụ:</u> $k = -2^5 3^2 5^4 11^3 19^4$ có tập hợp các ước số dương và tập hợp các ước số lần lượt là $A = \{2^a 3^b 5^c 11^d 19^e \mid a, b, c, d, e \in \mathbf{N}$ và $a \leq 5, b \leq 2, c \leq 4, d \leq 3$ và $e \leq 4 \}$ và $B = \{ \pm 2^a 3^b 5^c 11^d 19^e \mid a, b, c, d, e \in \mathbf{N}$ và $a \leq 5, b \leq 2, c \leq 4, d \leq 3$ và $e \leq 4 \}$.
Suy ra $|A| = (5 + 1)(2 + 1)(4 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 1800$ và $|B| = 2|A| = 3600$.
