Xác suất thống kê
ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT

Nguyễn Thị Hồng Nhung
nthnhung@hcmus.edu.vn

Khoa Toán Tin học
Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

Ngày 8 tháng 10 năm 2024

Nội dung

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (một thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần và kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (một thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần và kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Định nghĩa 1 (Không gian mẫu)

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (một thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần và kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Định nghĩa 1 (Không gian mẫu)

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (Random experiment)

Là sự thực hiện một số điều kiện xác định (một thí nghiệm cụ thể hay quan sát một hiện tượng nào đó), có thể lặp lại nhiều lần và kết quả của phép thử ta không xác định trước được.

Định nghĩa 1 (Không gian mẫu)

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là không gian mẫu hay không gian các biến cố sơ cấp (sample space), ký hiệu Ω.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Ví dụ 1

Phép thử đơn giản nhất là phép thử có hai kết quả xảy ra. Chẳng hạn như, phép thử tung đồng xu. Không gian mẫu cho phép thử này là

$$\Omega = \{S, N\}.$$

Hoặc, phép thử quan sát giới tính của trẻ sơ sinh tại một bệnh viện. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{M, F\}.$$

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Ví dụ 1

Phép thử đơn giản nhất là phép thử có hai kết quả xảy ra. Chẳng hạn như, phép thử tung đồng xu. Không gian mẫu cho phép thử này là

$$\Omega = \{S, N\}.$$

Hoặc, phép thử quan sát giới tính của trẻ sơ sinh tại một bệnh viện. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{M, F\}.$$

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Ví dụ 2

Nếu chúng ta kiểm tra ba cầu chì theo trình tự và ghi lại kết quả của mỗi lần kiểm tra, thì kết quả của toàn bộ thí nghiệm là bất kỳ chuỗi N và D nào có độ dài 3, trong đó N là cầu chì không hoạt động, và D là cầu chì có hoạt động.

$$\Omega = \{NNN, NND, NDN, NDD, DNN, DND, DDN, DDD\}.$$

Nếu chúng ta tung đồng xu liên tiếp 3 lần, chúng ta cũng có kết quả tương tự.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Ví dụ 2

Nếu chúng ta kiểm tra ba cầu chì theo trình tự và ghi lại kết quả của mỗi lần kiểm tra, thì kết quả của toàn bộ thí nghiệm là bất kỳ chuỗi N và D nào có độ dài 3, trong đó N là cầu chì không hoạt động, và D là cầu chì có hoạt động.

$$\Omega = \{NNN, NND, NDN, NDD, DNN, DND, DDN, DDD\}.$$

Nếu chúng ta tung đồng xu liên tiếp 3 lần, chúng ta cũng có kết quả tương tự.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Ví dụ 3

Nếu một pin của đèn pin hãng D có điện áp nằm ngoài giới hạn quy định, thì pin đó được coi là hỏng (F); nếu pin có điện áp nằm trong giới hạn quy định, thì pin đó được coi là pin đạt yêu cầu (S). Chúng ta kiểm tra từng pin khi nó ra khỏi dây chuyền lắp ráp cho đến khi quan sát thấy pin đạt yêu cầu đầu tiên. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{S, FS, FFS, FFFS, \ldots\}$$

Nghĩa là, đối với bất kỳ số nguyên dương n nào, chúng ta có thể phải kiểm tra n pin trước khi nhìn thấy S đầu tiên. Không gian mẫu chứa vô số kết quả có thể xảy ra.

Biến cố ngẫu nhiên

- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).

Biến cố ngẫu nhiên

- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Dùng các kí tự in hoa để kí hiệu biến cố ngẫu nhiên(sự kiện ngẫu nhiên)$A, B, C, \ldots$

Biến cố ngẫu nhiên

- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Dùng các kí tự in hoa để kí hiệu biến cố ngẫu nhiên(sự kiện ngẫu nhiên)$A, B, C, \ldots$
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.

Biến cố ngẫu nhiên

- Mỗi kết quả của phép thử ngẫu nhiên, $\omega, (\omega \in \Omega)$ gọi là một biến cố/sự kiện sơ cấp (simple event).
- Một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố được gọi là biến cố/sự kiện ngẫu nhiên (event). Dùng các kí tự in hoa để kí hiệu biến cố ngẫu nhiên(sự kiện ngẫu nhiên)$A, B, C, \ldots$
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện một phép thử gọi là biến cố chắc chắn, ký hiệu Ω.
- Biến cố luôn không xảy ra gọi là biến cố không thể có (empty event), kí hiệu $\emptyset$.

Biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 4

Quan sát mỗi xe trong ba xe đi ra khỏi đường cao tốc cụ thể rẽ trái (L) hoặc phải (R) ở cuối đường dốc ra. Tám kết quả có thể xảy ra là: LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL và RRR. Chúng ta có thể có một số biến cố ngẫu nhiên

$$
\begin{aligned}
A &= \{LLR, LRL, RLL\} \quad \text{có đúng 1 xe rẽ phải,}\\
B &= \{LLL, RLL, LRL, LLR\} \quad \text{có nhiều nhất 1 xe rẽ phải,}\\
C &= \{LLL, RRR\} \quad \text{cả 3 xe đi cùng hướng,}\\
E &= \{LLL\} \quad \text{cả 3 xe rẽ trái.}\\
D &= \{LRR, RLR, RRL, RLL, LRL, LLR\} \quad \text{Có đúng 1 xe đi khác hướng các xe còn}\\
F &= \{LRR, RLR, RRL, RLL, LRL, LLR, LLL, RRR\} \quad \text{Có nhiều nhất 1 xe đi khác}\\
G &= \quad \text{Có đúng 2 xe đi cùng hướng}
\end{aligned}
$$

D và G là hai biến cố tương đương.

Biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 4

Quan sát mỗi xe trong ba xe đi ra khỏi đường cao tốc cụ thể rẽ trái (L) hoặc phải (R) ở cuối đường dốc ra. Tám kết quả có thể xảy ra là: LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL và RRR. Chúng ta có thể có một số biến cố ngẫu nhiên

$$
\begin{aligned}
A &= \{LLR, LRL, RLL\} \quad \text{có đúng 1 xe rẽ phải,}\\
B &= \{LLL, RLL, LRL, LLR\} \quad \text{có nhiều nhất 1 xe rẽ phải,}\\
C &= \{LLL, RRR\} \quad \text{cả 3 xe đi cùng hướng,}\\
E &= \{LLL\} \quad \text{cả 3 xe rẽ trái.}\\
D &= \{LRR, RLR, RRL, RLL, LRL, LLR\} \quad \text{Có đúng 1 xe đi khác hướng các xe còn}\\
F &= \{LRR, RLR, RRL, RLL, LRL, LLR, LLL, RRR\} \quad \text{Có nhiều nhất 1 xe đi khác}\\
G &= \quad \text{Có đúng 2 xe đi cùng hướng}
\end{aligned}
$$

D và G là hai biến cố tương đương.

Biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 5

Trong ví dụ 3, ta có biến cố A: "có nhiều nhất 3 pin được kiểm tra", biến cố B: "một số lượng chẵn pin được kiểm tra". Khi đó,

$$\begin{aligned} A &= \{S, FS, FFS\} \\ B &= \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\} \end{aligned}$$

Biến cố ngẫu nhiên

Ví dụ 5

Trong ví dụ 3, ta có biến cố A: "có nhiều nhất 3 pịn được kiểm tra", biến cố B: "một số lượng chẵn pin được kiểm tra". Khi đó,

$$
\begin{aligned}
A &= \{S, FS, FFS\} \\
B &= \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Quan hệ giữa các biến cố I

1. **Sự kéo theo**
   A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra. Ta còn nói A là biến cố thuận lợi cho B.

Ví dụ 6

Tung một con xúc xắc.
Gọi A_i là biến cố được i chấm $(i = \overline{1,6})$,
B là biến cố được số chấm chia hết cho 3,
$C =$ *"số chấm chẵn",*
$\mathbb{P}_2 =$*"số chấm nguyên tố chẵn".*
Khi đó, ta có $A_2 \subset C, A_3 \subset B, A_2 \subset \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_2 \subset A_2$.

Quan hệ giữa các biến cố II

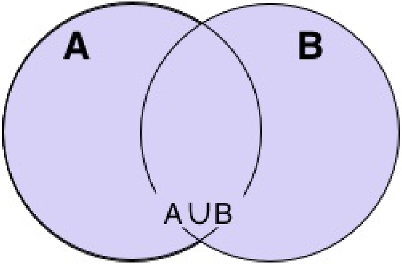
2. **Sự tương đương**
   A tương đương với B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại.

Ví dụ 7

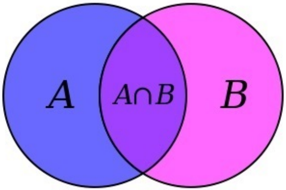
Trong ví dụ trên $A_2 = \mathbb{P}_2$.

Các phép toán trên biến cố I

1. **Biến cố tổng (union)**
   Biến cố tổng của A và B, ký hiệu $A \cup B$ là biến cố xảy ra nếu A hoặc B xảy ra (nghĩa là, có ít nhất một trong hai biến cố xảy ra).

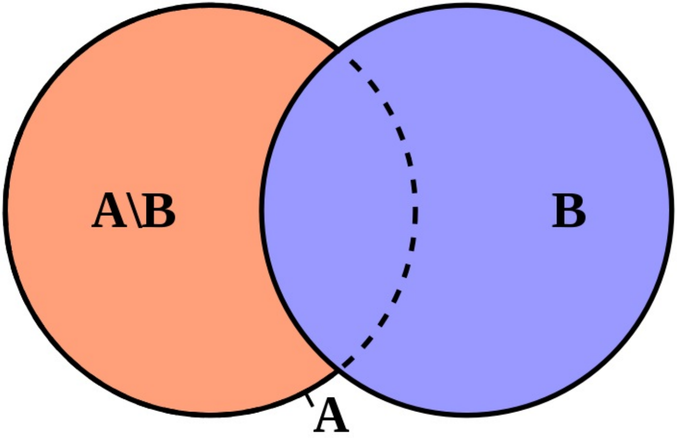


Các phép toán trên biến cố II



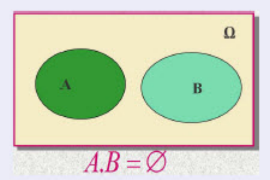
3. **Biến cố hiệu**
   Biến cố hiệu của A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là biến cố có được khi biến cố A xảy ra nhưng B không xảy ra.

Các phép toán trên biến cố III



Các phép toán trên biến cố IV

4. **Các biến cố xung khắc (mutually exclusive)**
   A xung khắc với B nếu A và B không đồng thời xảy ra, ký hiệu $AB = \emptyset$.

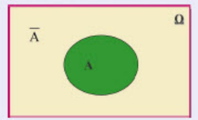


   Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi một nếu $A_iA_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$.

5. **Biến cố đối lập (complement)**
   Biến cố đối lập của A, ký hiệu $\overline{A}$, là biến cố xảy ra khi A không xảy ra và ngược lại, nghĩa là

$$\begin{cases} A + \overline{A} & = \Omega \\ A\overline{A} & = \emptyset \end{cases} \quad \text{hay } \overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Các phép toán trên biến cố V



Tính chất

- $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$
- $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

6. **Hệ đầy đủ các biến cố (exhaustive)**
Dãy n các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu:

$$A_iA_j = \emptyset,\ \forall i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

Ví dụ 8

Có 3 bệnh nhân phỏng.
Đặt các biến cố:

$$A_i = \text{"Bệnh nhân } i \text{ tử vong"}, i = 1, 2, 3.$$

Hãy biểu diễn theo A_i các biến cố sau:

a) $B =$ *"Có không quá hai bệnh nhân tử vong".*

b) $C =$ *"Có ít nhất một bệnh nhân tử vong".*

c) $D =$ *"Có ít nhất hai bệnh nhân tử vong".*

d) $E =$ *"Cả ba bệnh nhân đều sống sót".*

Bài giải
Biến cố A tương đương với biến cố " Có ít nhất một bệnh nhân sống sót"

$$\begin{aligned} B &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 \\ C &= A_1 + A_2 + A_3 \\ D &= A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 \\ E &= \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \end{aligned}$$

Nội dung

Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Khái niệm về xác suất

Xác suất của biến cố A là môt con số, số đó đặc trưng cho khả năng xuất hiện của biến cố A trong phép thử tương ứng. Ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$.

Nhận xét 1

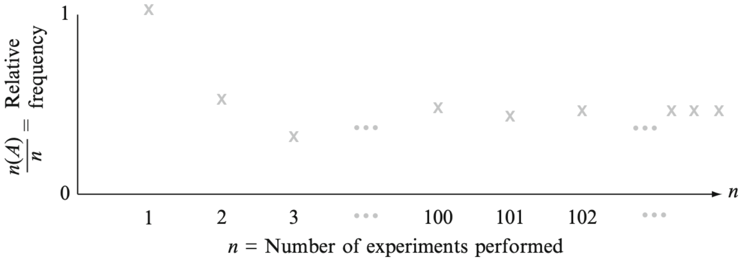
- $\mathbb{P}(A)$ *càng lớn (càng gần 1) thì khả năng xuất hiện* A *càng nhiều.*
- $\mathbb{P}(A)$ *càng nhỏ (càng gần 0) thì khả năng xuất hiện* A *càng ít.*

Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Định nghĩa 2 (Theo quan điểm cổ điển)

Nếu trong một phép thử có tất cả n biến cố sơ cấp đồng khả năng, nghĩa là $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$*,trong đó có* $n(A)$ *biến cố thuận lợi cho biến cố A thì xác suất của A, ký hiệu,* $\mathbb{P}(A)$*, là tỉ số* $\frac{m}{n}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{Số biến cố thuận lợi cho } A}{\text{Số tất cả các biến cố có thể}}$$



Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Ví dụ 9

Trong một hộp có 3 quả cầu trắng và 5 quả cầu đỏ giống hệt nhau về kích thước. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Tìm xác suất để được

a) *3 quả cầu đỏ.*

b) *2 quả cầu trắng và 1 quả cầu đỏ.*

Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Ưu và nhược điểm

- Ưu điểm: Tính được chính xác giá trị của xác suất mà không cần tiến hành phép thử.
- Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó. Vì vậy, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Định nghĩa 3 (Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê)

Thực hiện phép thử n lần. Giả sử biến cố A xuất hiện m lần. Khi đó m là tần số suất hiện biến cố A trong n phép thử, và tỷ số $\frac{m}{n}$ *được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử, ký hiệu,* $f_n(A) = \frac{m}{n}$.
Thực hiện phép thử vô hạn lần, $(n \to \infty)$ *tần suất xuất hiện biến cố A tiến về một số xác định gọi là xác suất của biến cố A.*

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Khái niệm và các định nghĩa về xác suất

Định nghĩa 4 (Định nghĩa theo quan điểm hình học)

Xét một phép thử đồng khả năng, không gian mẫu có vô hạn phần tử và được biểu diễn thành một miền hình học Ω có độ đo xác định (độ dài, diện tích, thể tích). Biến cố $A \subset \Omega$ được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó, xác suất xảy ra A được xác định bởi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Độ đo của miền } A}{\text{Độ đo của miền } \Omega} \tag{2}$$

Tính chất của xác suất

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Nếu $A \subset B$ thì $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
4. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Nội dung

Công thức cộng xác suất

- A, B là hai sự kiện tùy ý, ta có:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

Công thức cộng xác suất

- A, B là hai sự kiện tùy ý, ta có:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n sự kiện bất kỳ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j}^{n} \mathbb{P}(A_i A_j) + \\ &+ \sum_{i<j<k}^{n} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)\end{aligned}$$

Công thức cộng xác suất

- Cho A và B là hai biến cố xung khắc ta có :

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Công thức cộng xác suất

- Cho A và B là hai biến cố xung khắc ta có :

$$\mathbb{P}(A+B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B).$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các sự kiên xung khắc từng đôi một $(A_iA_j=\emptyset$ với $i \neq j)$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) \qquad (3)$$

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 10

Trong số 300 sinh viên năm I có 100 sinh viên biết tiếng Anh, 80 sinh viên biết tiếng Pháp, 30 sinh viên biết cả 2 ngoại ngữ Anh-Pháp. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên năm I. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ (Anh hoặc Pháp).

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 10

Trong số 300 sinh viên năm I có 100 sinh viên biết tiếng Anh, 80 sinh viên biết tiếng Pháp, 30 sinh viên biết cả 2 ngoại ngữ Anh-Pháp. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên năm I. Tính xác suất sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ (Anh hoặc Pháp).

Bài giải

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sinh viên năm nhất. Đặt các biến cố:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ Sinh viên này biết tiếng Anh }\} \\ B &= \{\text{ Sinh viên này biết tiếng Pháp }\} \\ N &= \{\text{ Sinh viên này biết ít nhất 1 ngoại ngữ }\} \end{aligned}$$

Ta có $N = A + B$;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \\ &= \frac{100}{300} + \frac{80}{300} - \frac{30}{300} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 11

Trong một vùng dân cư, 60% hộ gia đình sử dụng dịch vụ internet từ công ty cáp địa phương, 80% sử dụng dịch vụ truyền hình từ công ty đó và 50% sử dụng cả hai dịch vụ từ công ty. Nếu một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên,

a) *xác suất hộ gia đình đó sử dụng ít nhất một trong hai dịch vụ này từ công ty là bao nhiêu?*

b) *xác suất hộ gia đình đó sử dụng chính xác một trong hai dịch vụ từ công ty là bao nhiêu?*

Công thức cộng xác suất

Ví dụ 11

Trong một vùng dân cư, 60% hộ gia đình sử dụng dịch vụ internet từ công ty cáp địa phương, 80% sử dụng dịch vụ truyền hình từ công ty đó và 50% sử dụng cả hai dịch vụ từ công ty. Nếu một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên,

a) *xác suất hộ gia đình đó sử dụng ít nhất một trong hai dịch vụ này từ công ty là bao nhiêu?*
b) *xác suất hộ gia đình đó sử dụng chính xác một trong hai dịch vụ từ công ty là bao nhiêu?*

Bài giải

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình tại địa phương. Đặt các biến cố:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{ Hộ gia đình đó sử dụng dịch vụ internet của công ty. }\}\\
B &= \{\text{ Hộ gia đình đó sử dụng dịch vụ truyền hình của công ty. }\}\\
C &= \{\text{ Hộ gia đình đó sử dụng dịch vụ ít nhất 1 trong dịch vụ của công ty.}\}\\
D &= \{\text{ Hộ gia đình đó sử dụng dịch vụ chính xác 1 dịch vụ của công ty.}\}
\end{aligned}$$

Ta có $C = A + B$; $\quad D = \bar{A}B + A\bar{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9.\\
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) = 0,9 - 0,5 = 0,4.
\end{aligned}$$

Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa 5 (Conditional ptobability)

Cho hai biến cố A và B.

- *Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \ \mathbb{P}(B) > 0. \tag{5}$$

Công thức xác suất có điều kiện

Định nghĩa 5 (Conditional ptobability)

Cho hai biến cố A và B.

- *Xác suất xảy ra biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra là*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \ \mathbb{P}(B) > 0. \tag{5}$$

- *Tương tự, xác suất xảy ra biến cố B với điều kiện biến cố A đã xảy ra là*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}, \ \mathbb{P}(A) > 0. \tag{6}$$

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(B|B) = 1.$

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(B|B) = 1$.
3. Nếu $AC = \emptyset$ thì $\mathbb{P}[(A + C)|B] = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B)$.

Công thức xác suất điều kiện

Tính chất của xác suất có điều kiện

1. $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.
2. $\mathbb{P}(B|B) = 1$.
3. Nếu $AC = \emptyset$ thì $\mathbb{P}[(A+C)|B] = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B)$.
4. $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

Công thức xác suất điều kiện

Ví dụ 12

Một bộ bài tây có 52 lá được trộn kỹ. Chọn ngẫu nhiên 1 lá. Biết đã chọn được lá đỏ. Tính xác suất lá đó là lá át cơ.

Công thức xác suất điều kiện

Ví dụ 12

Một bộ bài tây có 52 lá được trộn kỹ. Chọn ngẫu nhiên 1 lá. Biết đã chọn được lá đỏ. Tính xác suất lá đó là lá át cơ.

Ví dụ 13

Một nhóm gồm 300 người trong đó có 200 nam và 100 nữ. Trong 200 nam có 100 người hút thuốc. Trong 100 nữ có 20 người hút thuốc. Chọn ngẫu nhiên một người.

a) *Biết đã chọn được nữ, tính xác suất người đó là người hút thuốc?*

b) *Biết đã chọn được người hút thuốc, tính xác suất người đó là nam?*

Công thức nhân xác suất

Hệ quả 1 (Multiplication rule)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \tag{7}$$

Công thức nhân xác suất

Hệ quả 1 (Multiplication rule)

Với các biến cố tùy ý A và B ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \tag{7}$$

Công thức nhân xác suất tổng quát

Cho họ $A_i (i = 1, \ldots, n)$ là họ n biến cố, khi đó

$$\mathbb{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)(A_3|A_1A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{8}$$

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 14

Có 10 lá thăm, trong đó có 4 lá thăm trúng thưởng. Sinh viên A rút trước, B rút sau.

a) *Hỏi trò chơi có công bằng hay không?*

b) *Nếu B được thưởng, tính xác suất A được thưởng?*

Sự độc lập giữa các biến cố

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập (independent)** với nhau nếu

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \tag{9}$$

Sự độc lập giữa các biến cố

Hai biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập (independent)** với nhau nếu

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) \tag{9}$$

Suy ra, nếu A độc lập với B thì

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\overline{B}) &= \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|\overline{A}) &= \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 15

Khảo sát giới tính của những đứa con trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không?

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 15

Khảo sát giới tính của những đứa con trong các gia đình có 2 con có độc lập với nhau hay không?

Bài giải

Không gian biến cố sơ cấp của phép thử: $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$
$A =$ "Con đầu là con trai." $= \{TT, TG\}$
$B =$ "Con thứ hai là con gái " $= \{TG, GG\}$
Ta có:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ và } \mathbb{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

và $\mathbb{P}(AB) = \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$. Vậy A, B độc lập.

Sự độc lập giữa các biến cố

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_iA_j) &= \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \\ \mathbb{P}(A_iA_jA_k) &= \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}(A_1A_2\ldots A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

với mọi tổ hợp chập 2, (i, j), chập 3, $(i, j, k), \ldots$ của n chỉ số.

Sự độc lập giữa các biến cố

n biến cố độc lập

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập với nhau nếu chúng thỏa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i A_j) &= \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \\ \mathbb{P}(A_i A_j A_k) &= \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

với mọi tổ hợp chập 2, (i, j), chập 3, $(i, j, k), \ldots$ của n chỉ số.

Chú ý

Sự độc lập từng đôi một không dẫn đến sự độc lập toàn phần.

Sự độc lập giữa các biến cố

Ví dụ 16

Xét phép thử ngẫu nhiên có các kết quả đồng khả năng

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Đặt $A = \{\omega_1, \omega_4\}, B = \{\omega_2, \omega_4\}, C = \{\omega_3, \omega_4\}$. *Tính* $\mathbb{P}(AB), \mathbb{P}(AC), \mathbb{P}(BC)$ *và* $\mathbb{P}(ABC)$.

Bài giải Ta có: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{2}{4}$ và $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(BC) = \frac{1}{4}$

$$ABC = \{\omega_4\} \Longrightarrow \mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa 6 (Total Probability Rule)

Cho $A_i (i = 1, \ldots, n)$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là một biến cố nào đó (trong cùng phép thử) thì

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i). \end{aligned} \tag{10}$$

Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ 17

Một nông trường có 4 đội sản xuất. Đội 1 sản xuất 1/3 tổng sản lượng nông sản của nông trường. Đội 2 sản xuất 1/4 tổng sản lượng, đội 3 sản xuất 1/4 tổng sản lượng và đội 4 sản xuất 1/6 tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm tương ứng với các đội sản xuất là 0.15; 0.08; 0.05 và 0.01.
Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường. Tìm xác suất để lấy phải một phế phẩm.

Công thức xác suất đầy đủ

1. Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường.
2. Gọi

$$A_i = \text{" Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất" }, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$B = \text{" Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".}$$

Công thức xác suất đầy đủ

1. Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường.
2. Gọi

$$A_i = \text{" Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất" }, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$B = \text{" Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".}$$

3. Vì chỉ lấy ngẫu nhiên một sản phẩm nên ta có: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ và theo giả thiết

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B|A_1) = 0.15,\ \mathbb{P}(B|A_2) = 0.08,\ \mathbb{P}(B|A_3) = 0.05,\ \mathbb{P}(B|A_4) = 0.01.$$

Công thức xác suất đầy đủ

1. Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường.
2. Gọi

$$A_i = \text{" Sản phẩm chọn được do đội thứ i sản xuất" }, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$B = \text{" Sản phẩm chọn được là một phế phẩm".}$$

3. Vì chỉ lấy ngẫu nhiên một sản phẩm nên ta có: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một hệ đầy đủ và theo giả thiết

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(B|A_1) = 0.15,\ \mathbb{P}(B|A_2) = 0.08,\ \mathbb{P}(B|A_3) = 0.05,\ \mathbb{P}(B|A_4) = 0.01.$$

4. Áp dụng công thức toàn phần ta có:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \\ &+ \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3) + \mathbb{P}(A_4)\mathbb{P}(B|A_4), \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0.15 + \frac{1}{4}\cdot 0.08 + \frac{1}{4}\cdot 0.05 + \frac{1}{6}\cdot 0.01 \\ &\approx 0,08417. \end{aligned} \tag{11}$$

Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

Ví dụ 18

Một đám đông có số đàn ông bằng nửa số phụ nữ. Xác suất để đàn ông bị bệnh tim là 0.06 và phụ nữ là 0.036. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ đám đông, tính xác suất để người này bị bệnh tim.

Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

Ví dụ 18

Một đám đông có số đàn ông bằng nửa số phụ nữ. Xác suất để đàn ông bị bệnh tim là 0.06 và phụ nữ là 0.036. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ đám đông, tính xác suất để người này bị bệnh tim.

Công thức Bayes

Định nghĩa 7 (Bayes Fomula)

Cho $A_i (i = 1, \ldots, n)$ *là hệ đầy đủ các biến cố,* B *là một biến cố nào đó liên quan đến hệ sao cho* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Khi đó với mọi* i

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)} \tag{12}$$

Công thức xác suất đầy đủ-Công thức Bayes

Ví dụ 19

Tỷ lệ bệnh B tại một địa phương bằng 0.02. Dùng một phản ứng giúp chuẩn đoán, nếu người bị bệnh thì phản ứng dương tính 95%, nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính 10%.

a) *Tìm xác suất dương tính của phản ứng.*
b) *Một người làm phản ứng thấy dương tính, tìm xác suất người đó là người bị bệnh.*
c) *Tìm xác suất chuẩn đoán đúng của phản ứng.*

- Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một người tại địa phương.
- Gọi A là biến cố người được chọn là người bị bệnh.
  B là biến cố người được chọn là người có phản ứng dương tính. $\{A, \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ.
- Theo đề ta có

$$\mathbb{P}(A) = 0.02 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0.02 = 0.98.$$

$$\mathbb{P}(B|A) = 0.95, \ \mathbb{P}(B|\overline{A}) = 0.10.$$

a Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \ldots = 0.117$$

b Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{19}{117}$$

Công thức xác suất đầy đủ-Công thức Bayes

Ví dụ 19

Tỷ lệ bệnh B tại một địa phương bằng 0.02. Dùng một phản ứng giúp chuẩn đoán, nếu người bị bệnh thì phản ứng dương tính 95%, nếu người không bị bệnh thì phản ứng dương tính 10%.

a) *Tìm xác suất dương tính của phản ứng.*
b) *Một người làm phản ứng thấy dương tính, tìm xác suất người đó là người bị bệnh.*
c) *Tìm xác suất chuẩn đoán đúng của phản ứng.*

- Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một người tại địa phương.
- Gọi A là biến cố người được chọn là người bị bệnh.
  B là biến cố người được chọn là người có phản ứng dương tính. $\{A, \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ.
- Theo đề ta có

$$\mathbb{P}(A) = 0.02 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0.02 = 0.98.$$
$$\mathbb{P}(B|A) = 0.95,\ \mathbb{P}(B|\overline{A}) = 0.10.$$

a Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \ldots = 0.117$$

b Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{19}{117}$$

c Gọi C là biến cố chuẩn đoán đúng của phản ứng. $C = AB + \bar{A}.\bar{B}$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A}) = 0.901$$

Công thức xác suất đầy đủ-Công thức Bayes

Ví dụ 20 (TỶ LỆ MỘT BỆNH HIẾM)

Chỉ có 1 trong 1000 người lớn mắc phải một căn bệnh hiếm gặp mà xét nghiệm chẩn đoán đã được phát triển. Xét nghiệm này có đặc điểm là khi một người thực sự mắc bệnh, xác suất kết quả xét nghiệm dương tính xảy ra là 99%, trong khi một người không mắc bệnh sẽ chỉ cho kết quả xét nghiệm dương tính là 2%. Nếu một người được chọn ngẫu nhiên để xét nghiệm và kết quả là dương tính, thì xác suất người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

Phép thử: Chọn ngẫu nhiên một người tại địa phương.
Gọi A là biến cố người được chọn là người bị bệnh.
B là biến cố người được chọn là người có phản ứng dương tính. $\{A, \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ.
Theo đề ta có

$$\mathbb{P}(A) = 0,001 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - 0,001 = 0,999.$$
$$\mathbb{P}(B|A) = 0,99,\ \mathbb{P}(B|\overline{A}) = 0,02.$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A}) = 0,001.0,99 + 0,999.0,02 = 0,02097$$

Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,001.0,99}{0,02097} \approx 0,04721$$

Nội dung

Bài 1

Bài 1.4 trang 22

a. $\Omega = \{XX, XD, XT, DX, DD, DT, TX, TD, TT\}$

b. $\Omega' = \{XD, XT, DX, DT, TX, TD\}$

Bài 2

Bài 1.1 trang 22 *Ta có*

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Bánh lái hoạt động tốt} \\
B_i &= \text{Nồi hơi thứ } i \text{ hoạt động tốt, } i = 1, 2, 3, 4. \\
C_j &= \text{Tuốc pin thứ } j \text{ hoạt động tốt, } j = 1, 2. \\
D &= \text{tàu hoạt động tốt.} \\
D &= A.\left(\cup_{i=1}^{4} B_i\right).(C_1 + C_2) = A(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)(C_1 + C_2). \\
\bar{D} &= \bar{A} + \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4 + \bar{C}_1.\bar{C}_2.
\end{aligned}
$$

Bài 3

Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong trường đại học. Ký hiệu A là biến cố sinh viên đó có thẻ Visa và B là biến cố sinh viên đó có thẻ Master. Giả sử $\mathbb{P}(A) = 0,5; \mathbb{P}(B) = 0,4;$ *và* $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,25$.

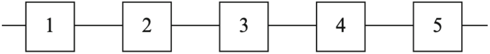
- *Tính xác suất người được chọn sở hữu ít nhất 1 trong hai thẻ.*
- *Tính xác suất sinh viên đó có thẻ Visa nhưng không có thẻ Master.*
- *Tính xác suất sinh viên đó có thẻ Visa, biết rằng sinh viên đó sử dụng ít nhất 1 trong hai thẻ (Visa, Master)*

Bài giải 1

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,25 = 0,65.$
- $\mathbb{P}(A.\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,5 - 0,25 = 0,25$
- $\mathbb{P}\left(A|(A \cup B)\right) = \frac{\mathbb{P}(A(A\cup B))}{\mathbb{P}(A\cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A\cup B)} = \frac{0,5}{0,65} \approx 0,77$

Bài 4

Hãy xem xét một hệ thống gồm năm thành phần giống hệt nhau được kết nối theo chuỗi



Chúng ta ký hiệu thành không hoạt động là F và thành phần hoạt động là S. Xác suất một thành phần hoạt động là 90%. *Tính xác suất hệ thống không hoạt động.*

Bài 5

Mười lăm chiếc điện thoại vừa được tiếp nhận tại một trung tâm dịch vụ được uỷ quyền. Năm trong số những chiếc điện thoại này là điện thoại di động, năm chiếc không dây và năm chiếc còn lại là điện thoại có dây. Giả sử rằng các điện thoại này được phân bố ngẫu nhiên các số 1, 2, . . . , 15 *để thiết lập thứ tự mà chúng sẽ được bảo hành.*

a) *Xác suất tất cả các điện thoại không dây nằm trong số mười chiếc đầu tiên được bảo hành là bao nhiêu?*

b) *Xác suất sau khi bảo hành mười chiếc điện thoại này, chỉ còn lại hai trong số ba loại điện thoại chưa được bảo hành là bao nhiêu?*

c) *Xác suất để hai điện thoại của mỗi loại nằm trong số sáu chiếc đầu tiên được*

Bài 6

Một tổ chức bán bảo hiểm nhân thọ có thời hạn và bảo hiểm y tế. Trong những người chỉ có bảo hiểm nhân thọ, 70% sẽ gia hạn vào năm sau và 80% những người chỉ có hợp đồng bảo hiểm y tế sẽ gia hạn vào năm sau. Tuy nhiên, 90% người được bảo hiểm có cả hai loại hợp đồng sẽ gia hạn ít nhất một trong hai loại vào năm sau. Trong số những người được bảo hiểm, 75% có bảo hiểm nhân thọ có thời hianj, 45% có bảo hiểm y tế và 20% có cả hai.

a) *Tính tỷ lệ phần trăm người được bảo hiểm sẽ gia hạn ít nhất một hợp đồng vào năm sau.*

b) *Nếu một người được chọn ngẫu nhiên thực sự gia hạn vào năm sau, thì xác suất người đó có cả bao hiểm nhân thọ và bảo hiểm y tế là bao nhiêu?*

Ví dụ 21

Phép thử: Tung đồng xu cân đối đồng chất 4 lần.

a. *Liệt kê 1 vài sự kiện sơ cấp*
b. *Biến cố A: "Có đúng 1 lần mặt S xuất hiện."*

$$A = \{SNNN, NSNN, NNSN, NNNS\}$$