**Lưu ý chung**

-Quá trình làm bài phải trình bày đầy đủ các bước biến đổi ma trận.

- Được phép ghi kết quả tính định thức, tìm ma trận nghịch đảo.

# 1. Chương 3

## 1.1. **Tổ hợp tuyến tính-tập sinh, độc lập tuyến tính-cơ sở.** .

**1**) Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vecto $u_1, u_2, u_3, u_4, u = (a, b, c, d)$. Tìm điều kiện để $u$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3, u_4$.

a)$u_1 = (1, 2, 3, 6), u_2 = (3, -1, 2, 4), u_3 = (-3, 8, 5, 10), u_4 = (-1, 5, 4, 8)$.

b) $u_1 = (1, 1, 2, 0), u_2 = (2, 1, 1, 2), u_3 = (3, -1, 1, 1), u_4 = (0, 3, 2, 1)$.

c) $u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 3, 3, 2), u_3 = (1, 0, 0, 1), u_4 = (1, 4, 4, 1)$.

d) $u_1 = (2, 3, -2, -3), u_2 = (2, 1, -3, 0), u_3 = (1, 1, -3, 1), u_4 = (5, 5, -8, -2)$.

**Hướng dẫn** a) Lập ma trận $A = (u_1^T u_2^T u_3^T u_4^T | u^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & | & a \\ 2 & -1 & 8 & 5 & | & b \\ 3 & 2 & 5 & 4 & | & c \\ 6 & 4 & 10 & 8 & | & d \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 & | & a \\ 0 & -7 & 14 & 7 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & d-2a-2b \end{pmatrix}$. Điều kiện để $u$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3, u_4$ là hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Vậy điều kiện cần tìm là $c - a - b = d - 2a - 2b = 0$.

b)$c + d - a - b = 0$

c)$a - d = b - c = 0$

d)$2a + 2b + 2c + 2d = 0$

**Lưu ý:**- Có thể có nhiều kết quả khác nhau, tùy vào kết quả của việc biến đổi ma trận thành bậc thang.

**2**) Trong $\mathbb{R}^3$ cho tập con $S$, kiểm chứng $S$ có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

a) $S = \{u_1 = (1, 3, 2), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (-2, 3, 5), u_4 = (2, 1, -1)\}$

b) $S = \{u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (3, -1, 4), u_4 = (2, 2, 3)\}$

c) $S = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 1, 3), u_3 = (2, 0, 1)\}$

d) $S = \{u_1 = (1, 1, 3), u_2 = (2, 1, 4), u_3 = (0, 1, 2), u_4 = (1, 0, 1)\}$

**Hướng dẫn** a) Cho vecto $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, lập ma trận $(u_1^T u_2^T u_3^T u_4^T | u^T) =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & | & a \\ 3 & 2 & 3 & 1 & | & b \\ 2 & 1 & 5 & -1 & | & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & | & a \\ 0 & -1 & 9 & -5 & | & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & c-b-a \end{pmatrix}$

Với $a = b = 0, c = 1$ ta có $c - a - b = 1 \neq 0$ nên hệ phương trình tương ứng vô nghiệm, khi đó $u$ không là tổ hợp tuyến tính của $S$, vậy $S$ không là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

b) Tương tự a) $(u_1^T u_2^T u_3^T u_4^T | u^T) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & b \\ 0 & -1 & 5 & -2 & | & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & c-a+b \end{pmatrix}$.

Hệ tương ứng có nghiệm với mọi $a, b, c$ nên $u$ luôn là tổ hợp tuyến tính của $S$ với mọi $u \in \mathbb{R}^3$. Vậy $S$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

c) $S$ là tập sinh

d) $S$ không là tập sinh.

**3**) Xét tính độc lập, phụ thuộc tuyến tính của các vecto

a) $u_1 = (1,1,1,4), u_2 = (2,1,1,4), u_3 = (1,2,1,4), u_4 = (1,1,2,6)$

b) $u_1 = (-1,1,1,1), u_2 = (1,1,1,3), u_3 = (2,1,-1,2), u_4 = (2,1,1,1)$

c) $u_1 = (1,1,1,2), u_2 = (1,1,2,2), u_3 = (-1,1,2,0), u_4 = (2,1,1,1)$

d) $u_1 = (2,-1,3,1), u_2 = (1,0,1,2), u_3 = (3,1,2,1)$

**Hướng dẫn** a) Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$r(A) = 4$ bằng số vecto nên các vecto độc lập tuyến tính.

b) $r(A) = 4$, các vecto độc lập tuyến tính.

c) $r(A) = 3 <$ số vecto, suy ra các vecto phụ thuộc tuyến tính.

d) $r(A) = 3 =$ số vecto, các vecto độc lập tuyến tính.

**4**) Chứng minh các tập hợp sau là cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

a) $B = \{u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (2,1,1,2), u_3 = (1,3,4,0), u_4 = (1,3,2,1)\}$

b) $B = \{u_1 = (2,3,1,1), u_2 = (-1,1,3,-2), u_3 = (4,1,1,1), u_4 = (1,4,1,0)\}$

c) $B = \{u_1 = (3,-2,1,0), u_2 = (2,3,4,1), u_3 = (1,-2,-3,2), u_4 = (1,1,1,2)\}$

**Hường dẫn** a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, ta có $r(A) = 4 =$ số vecto, suy ra $B$ độc lập tuyến tính, hơn nữa $B$ có 4 vecto bằng $dim\mathbb{R}^4$ nên $B$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

## 1.2. **Cơ sở của không gian con.** .

**1**) Tìm cơ sở cho không gian con $W$ của $\mathbb{R}^4$:

a) $W$ có một tập sinh là $S = \{u_1 = (2,-1,1,2), u_2 = (1,1,-1,1), u_3 = (2,1,0,3), u_4 = (1,-1,2,2)\}$.

b) $W = < u_1, u_2, u_3, u_4 >$ với $u_1 = (2,1,1,5), u_2 = (1,2,1,6), u_3 = (1,1,2,5), u_4 = (1,1,1,4)$.

c) $W$ được sinh bởi các vecto $u_1 = (1,2,3,4), u_2 = (2,1,1,0), u_3 =$

$(-2,1,-1,2), u_4 = (0,1,0,1)$.
d) $W =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ với $u_1 = (1,1,2,1), u_2 = (2,1,3,1), u_3 = (3,-1,1,0), u_4 = (1,2,2,3)$.

**Hướng dẫn** a) Lập ma trận $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy $W$ có một cơ sở là $\{(1,1,-1,1),(0,-1,2,1),(0,0,-1,-1)\}$
b) Cơ sở: $\{(1,1,1,4),(0,1,0,2),(0,0,1,2)\}$
c) Cơ sở: $\{(1,2,3,4),(0,1,0,1),(0,0,-5,-5)\}$
d) Cơ sở: $\{(1,1,2,1),(0,-1,-1,-1),(0,0,-1,1)\}$.

**2**) Tìm một cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm của hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \qquad 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \qquad x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

**Hướng dẫn** a) Hệ phương trình có ma trận mở rộng: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad -x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Tập nghiêm của hệ phương trình là $\{(-\alpha,-\alpha,-\alpha,\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$. Cho $\alpha = 1$ ta có nghiêm căn bản $u = (-1,-1,-1,1)$. Vây không gian nghiệm có một cơ sở là $B = \{u = (-1,-1,-1,1)\}$.
b) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất, $W = \{(0,0,0,0)\}$, suy ra $W$ có cơ sở là $\emptyset$ (tập rỗng), $dimW = 0$
c) Hệ phương trình có tập nghiệm là $W = \{(0,-\alpha,-\alpha,\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$. Cho $\alpha = 1$ ta có nghiệm căn bản $u = (0,-1,-1,1)$. Vậy $W$ có cơ sở là $B = \{u = (0,-1,-1,1)\}$, $dimW = 1$.
d) Hệ phương trình có tập nghiệm $W = \{(\alpha,0,-3\alpha,\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$. Cơ sở: $\{(1,0,-3,1)\}$, $dimW = 1$.

**3**) Trong $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con $U =< u_1, u_2, u_3 >, V =< v_1, v_2, v_3 >$. Tìm cơ sở cho các không gian $U, V, U + V$, từ đó suy ra số chiều của $U \cap V$.

a)$u_1 = (4, 0, 5, 5), u_2 = (1, 2, 5, 1), u_3 = (4, 5, 1, 3), v_1 = (5, 1, 5, 5), v_2 = (5, 0, 5, 2), v_3 = (1, 0, 1, 2)$.

b) $u_1 = (0, 0, 2, 1), u_2 = (4, 4, 2, 0), u_3 = (2, 5, 3, 3), v_1 = (2, 5, 3, 0), v_2 = (1, 1, 2, 3), v_3 = (3, 4, 2, 3)$

c) $u_1 = (1, 1, 3, 2), u_2 = (5, 4, 5, 2), u_3 = (0, 3, 0, 5), v_1 = (5, 2, 3, 4), v_2 = (1, 3, 5, 5), v_3 = (3, -4, -7, -6)$.

**Hướng dẫn** a) Cơ sở $U : \{(4, 0, 5, 5), (0, 8, 15, -1), (0, 0, 107, 11)\}$, cơ sở $V : \{(5, 1, 5, 5), (0, -1, 0, -3), (0, 0, 0, 1)\}$. Cơ sở $U+V$ : lập ma trận:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ cơ sở của $U+V$ là $\{(4, 0, 5, 5), (0, 8, 15, -1), (0, 0, -5, -17), (0, 0, 0, 1)\}$. Suy ra số chiều của $U \cap V$ là

$$dim(U \cap V) = dimU + dimV - dim(U + V) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

b) Cơ sở $U : \{(4, 4, 2, 0), (0, 3, 2, 3), (0, 0, 2, 1)\}$.
Cơ sở $V : \{(2, 5, 3, 0), (0, -3, 1, 6), (0, 0, -11, -12)\}$.
Cơ sở $U + V : \{(4, 4, 2, 0), (0, 3, 2, 3), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, -3)\}, dim(U \cap V) = 2$

c) Cơ sở $U : \{(1, 1, 3, 2), (0, -1, -10, -8), (0, 0, -30, -19)\}$
Cơ sở $V : \{(5, 2, 3, 4), (0, 13, 22, 21)\}$.
Cơ sở $U+V : \{(1, 1, 3, 2), (0, -1, -10, -8), (0, 0, -30, -19), (0, 0, 0, 1)\}$, $dim(U \cap V) = 1$.

### 1.3. **Tọa độ, ma trận chuyển cơ sở.** .

**1**. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $B, B'$ và cơ sở chính tắc $B_0$ và vecto $u$. Tìm các ma trận $(B_0 \to B'), (B \to B_0)$ và $(B \to B')$, tính tọa độ $[u]_B$ nếu biết $[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và:

a) $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}, B' = \{(3, 1, -1), (6, 4, -3), (10, 5, -4)\}$
b) $B = \{(2, 1, 1, ), (1, 2, 1), (-2, -2, -1)\}, B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
c) $B = \{((2, 2, -1), (2, 5, -2), (5, 10, -4)\}, B' = \{(2, 1, -1), (0, 1, 0), (4, 2, -1)\}$

**Hướng dẫn** a) $(B_0 \to B') = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ (chỉ cần ghi kết quả, lấy các vecto của $B'$ viết thành cột).

$(B \to B_0) = (B_0 \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

* Tính $(B \to B')$. **Cách 1**: Lập ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \to B') = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**Cách 2**: $(B \to B') = (B \to B_0)(B_0 \to B') =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

* Tính $[u]_B$. **Cách 1:** $[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ nên $u = (3,1,-1) + 2(6,4,-3) + 3(10,5,-4) = (45,24,-19)$. Lập ma trận: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 45 \\ 1 & 1 & 1 & | & 24 \\ 0 & 1 & 0 & | & -19 \end{pmatrix}$. Giải hệ tương ứng ta có nghiệm $x_1 = 45, x_2 = -19, x_3 = -2$, vậy $[u]_B = \begin{pmatrix} 45 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Cách 2**:$[u]_B = (B \to B')[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $(B_0 \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(B \to B_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , $[u]_B = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$

c) $(B_0 \to B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(B \to B_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & -3 & -10 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$(B \to B') = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $[u]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

**2.** Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở $B, B'$. Tìm cơ sở $B$ nếu biết:

a) $B' = \{(-10,4,1),(3,-1,-1),(-6,3,-1)\}$ và $(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B' = \{(0,2,4),(1,1,2),(0,1,1)\}$ và $(B \to B') = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $B' = \{(10,6,3),(5,4,1),(4,3,1)\}$ và $(B \to B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Hướng dẫn**. Gọi $B_0$ là cơ sở chính tắc.

a) $(B_0 \to B) = (B_0 \to B')(B \to B')^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -10 & -37 & 25 \\ 4 & 15 & -10 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(-10,4,1),(-37,15,4),(25,-10,-3)\}$

b) $B = \{(0,3,5),(-1,9,14),(\frac{-3}{2},17,\frac{53}{2}\}$

c) $B = \{(3,2,1),(-1,1,-1),(2,0,1)\}$

## 2. Chuong 4.

**1.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, xác định công thức $f$ nếu biết $f(u_1) = (1,2), f(u_2) = (2,-1), f(u_3) = (1,1)$ và:

a)$u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,1,0)$

b)$u_1 = (2,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,2,1)$.

c) $u_1 = (2,2,-1), u_2 = (2,5,-2), u_3 = (5,10,-4)$.

**Hướng dẫn**

a) Cho vecto $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, lập ma trận: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & b-a-c \end{array}\right) \Rightarrow (a,b,c) = au_1 + cu_2 + (b-a-c)u_3 \Rightarrow$ $f(a,b,c) = af(u_1) + cf(u_2) + (b-a-c)f(u_3) = a(1,2) + c(2,-1) + (b-a-c)(1,1) = (b+c, a+b-2c)$. Vậy $f$ được xác định bởi công thức $f(a,b,c) = (b+c, a+b-2c) \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f(a,b,c) = (-b+2c)(1,2) + (-a+2c)(2,-1) + (a+b-3c)(1,1) =$

$(3c-a, 2a-b-c)$.
c) $f(a,b,c) = (-2b-5c)(1,2) + (-3b-2a-10c)(2,-1) + (a+2b+6c)(1,1) = (-3a-6b-19c, 3a+b+6c)$.
**2.** Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có công thức $f(x,y,z) = (x-2y+z, 2x-y-z)$. Tính ma trận biểu diễn $[f]_{B,C}$ với:
a) $B = \{(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2)\}$, $C = \{(1,3),(2,5)\}$.
b) $B = \{(-1,2,2),(-2,5,2),(-4,10,5)\}$, $C = \{(5,3),(2,1)\}$.
c) $B = \{(1,-3,6),(1,1,3),(1,4,-10)\}$, $C = \{(3,2),(2,1)\}$.
**Hướng dẫn**. Gọi $B_0, C_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.
a)**Cách 1.** $f(1,1,2) = (1,-1), f(1,2,1) = (-2,-1), f(1,2,2) = (-1,-2)$.
Lập ma trận giải tọa độ các vecto trên theo cơ sở $C$ : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & | & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & | & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [f]_{B,C} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
**Cách 2** Ta có $[f]_{B_0,C_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (viết các hệ số trong công thức của $f$). $\Rightarrow [f]_{B,C} = (C_0 \to C)^{-1}[f]_{B_0,C_0}(B_0 \to B)$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
b) $[f]_{B.C} = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -27 \\ 21 & 25 & 58 \end{pmatrix}$
c)$[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} -15 & -6 & 33 \\ 29 & 10 & -58 \end{pmatrix}$.
**3.** Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở $B, C$, cho toán tử tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa $[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$. Xác định công thức của $f$ và tìm cơ sở cho $Imf, Kerf$ nếu :
a) $B = \{(5,6,-2),(-2,-2,1),(2,3,0)\}$, $C = \{(5,-2,2),(6,-2,3),(-2,1,0)\}$
b) $B = \{(-6,14,7),(-2,5,2),(-3,6,4)\}$, $C = \{(6,2,3),(14,5,6),(7,2,4)\}$.
c) $B = \{(-4,15,5),(-1,4,1),(-2,6,3)\}$, $C = \{(4,1,2),(15,4,6),(5,1,3))\}$
**Hướng dẫn.** Gọi $B_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
a) Tính ma trận biểu diễn toán tử $f$ theo cơ sở chính tắc $B_0$:
$[f]_{B_0} = (C \to C_0)^{-1}[f]_{B,C}(B \to B_0) = (C_0 \to C)[f]_{B,C}(B_0 \to B)^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -187 & 121 & -112 \\ 85 & -55 & 50 \\ -34 & 22 & -23 \end{pmatrix}$.

Suy ra $f$ có công thức là

$f(x, y, z) = (-187x + 121y - 112z, 85x - 55y + 50z, -34x + 22y - 23z)$

$*Kerf$ : là không gian nghiệm của hệ phuong trình: $\begin{cases} -187x + 121y - 112z = 0 \\ 85x - 55y + 50z = 0 \\ -34x + 22y - 23z = 0 \end{cases}$.

Lập ma trận: $\begin{pmatrix} -187 & 121 & -112 \\ 85 & -55 & 50 \\ -34 & 22 & -23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 17 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Kerf$ có một cơ sở là $\{(\frac{11}{17}, 1, 0)\}$

* $Imf$ có một tập sinh là $\{f(1, 0, 0) = (-187, 85, -34), f(0, 1, 0) = (121, -55, 22), f(0, 0, 1) = (-112, 50, -23)\}$, lập ma trận: $\begin{pmatrix} -187 & 85 & -34 \\ 121 & -55 & 22 \\ -112 & 50 & -23 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} -187 & 85 & -34 \\ 0 & 10 & 29 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow Imf$ có một cơ sở là $\{(-187, 85, -34), (0, 10, 29)\}$.

b) $f(x, y, z) = (1035x + 226y + 441z, 322x + 71y + 136z, 537x + 116y + 231z)$.

Cơ sở $Kerf$ : $\{(\frac{-25}{31}, \frac{54}{31}, 1)\}$.

Cơ sở $Imf$ : $\{(226, 71, 116), (0, -713, 1302)\}$

c) $f(x, y, z) = (884x + 122y + 349z, 200x + 28y + 78z, 457x + 62y + 183z)$

$Kerf$ : $\{(\frac{-8}{11}, \frac{53}{22}, 1)\}$

$Imf$ : $\{(884, 200, 457), (0, 176, -473)\}$

## 3. Chương 5.

1) Tìm trị riêng và cơ sở các không gian con riêng của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Hướng dẫn.**- Trị riêng của ma trận $A$ là số thực $\alpha$ sao cho tồn tại vecto cột $u \neq 0$ thỏa $Au = \alpha u$, vecto cột u được gọi là vecto riêng ứng với trị riêng $\alpha$.

-Trị riêng là nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(x) = |A - xI_n|$.

- Không gian con riêng ứng với trị riêng $\alpha$ là không gian con gồm tất cả vecto riêng ứng với $\alpha$, không gian con riêng ứng với $\alpha$ được ký hiệu là $E(\alpha)$.

- $E(\alpha)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $A - \alpha I_n = 0$, giải không gian nghiệm này ta tìm được cơ sở cho $E(\alpha)$.

a)$P_A(x) = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (6-x)(2-x)^2$

$\Rightarrow A$ có trị riêng là $x = 2, x = 6$.

Các không gian con riêng

*E(2): $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(2) = \{(-s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$ có nghiệm căn bản là (-1,1,0),(-1,0,1). Vậy $E(2)$ có cơ sở là $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

* $E(6) : A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(6) = \{(s, 2s, s) | s \in \mathbb{R}\}$ có nghiệm căn bản là $(1, 2, 1)$. vây $E(6)$ có cơ sở là $(1, 2, 1)$

b) * Trị riêng: x=-1.

*$E(-1) : A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(-1) = \{(-s, -s, s) | s \in \mathbb{R}\}$ có nghiệm căn bản là $(-1, -1, 1)$. vậy $E(-1)$ có cơ sở là $\{(-1, -1, 1)\}$

c)* Trị riêng x=2.

* $E(2) : A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(2) = \{(s, 2s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$ có nghiệm căn bản là $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$. Vậy $E(2)$ có cơ sở là $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

d)* Trị riêng $x = 1$ và $x = 2$

* $E(1) : A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(1) = \{(3s, -3s, s)\}$ có nghiệm căn bản là $(3, -3, 1)$. Vậy $E(1)$ có cơ sở là $\{(3, -3, 1)\}$.

*$E(2) : A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(2) = \{(-s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$ có nghiệm căn bản là $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$. vậy $E(2)$ có cơ sở là $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

**2.** (Chéo hóa ma trận) Chỉ ra ma trận $P$ khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo, với $A$ là các ma trận được cho trong bài 1. Viết dạng chéo hóa của A .

**Hướng dẫn.**- Theo kết quả bài 1) ta đã có trị riêng và cơ sở các không gian con riêng.

- Nếu tổng số chiều các không gian con riêng bằng kích thước ma trận (trong bài này là 3) thì $A$ chéo hóa được.

- Lấy hội các cơ sở không gian con riêng ta được cơ sở $B$ là cơ sở chéo hóa $A$, ma trận $P = (B_0 \to B)$ là ma trận cần tìm ($B_0$ là cơ sở chính tắc).

a) Theo bài 1) $A$ có các trị riêng là $x = 2, x = 6$, $dimE(2) + dimE(6) = 2 + 1 = 3$ và $A$ là ma trận vuông cấp 3 nên $A$ chéo hóa được. $E(2)$ có cơ sở $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, $E(6)$ có cơ sở $\{(1, 2, 1)\}$, suy ra $A$ có một cơ sở chéo hóa là $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$.

Ma trận $P$ làm chéo hóa $A : P = (B_0 \to B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dạng chéo hóa của $A : P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A$ có 1 trị riêng duy nhất là $x = -1$ và $dimE(-1) = 1 < 3$ nên $A$ không chéo hóa được (không tồn tại ma trận $P$ thỏa yêu cầu đề bài).

c) Không chéo hóa được.

d) Chéo hóa được.

Cơ sở chéo hóa: $B = \{(3, -3, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

Ma trận chéo hóa $A : P = (B_0 \to B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dạng chéo hóa của $A : P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$