ĐỒ ÁN 2: PHƯƠNG PHÁP HƯỚNG GIẢM

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

1 Giới thiệu phương pháp hướng giảm

Xét bài toán quy hoạch P_{krb} không ràng buộc

$$\min f(x) \quad \text{v.d.k. } x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm phi tuyến, khả vi trên $\mathbb{R}^n$.

Ta đã biết, nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{R}^n$ thì điều kiện cần của nghiệm cực tiểu địa phương x^* là $\nabla f(x^*) = 0$. Hệ phương trình $\nabla f(x) = 0$ có n ẩn, n phương trình. Tuy nhiên, ngoại trừ một số trường hợp đơn giản, nói chung việc giải trực tiếp hệ này là khó thực hiện được. Ví dụ xét hàm một biến $f(x) = e^x + x^2 + \cos x$, ta thấy khó có công thức nghiệm của phương trình $f'(x) = e^x + 2x - \sin x = 0$.

Ý tưởng cơ bản của *phương pháp hướng giảm* (descent method) để giải bài toán (P_{krb}) với hàm mục tiêu f khả vi là: xuất phát một điểm bất kỳ $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ta xây dựng một dãy điểm $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ sao cho

$$f(x^0) > f(x^1) > f(x^2) > \cdots$$

và dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến điểm đúng $x^* \in \mathbb{R}^n$ của hàm f, tức $\nabla f(x^*) = 0$. Trường hợp f là hàm lồi, thì điểm x^* cũng chính là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P_{krb}).

Lược đồ chung

Bước khởi đầu. Xuất phát từ một điểm tuỳ ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Gán $k := 0$.
Bước lặp k. $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

(k_1) **If** x^k thoả mãn điều kiện dừng **Then** Dừng thuật toán
Else xác định $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$ sao cho $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

(k_2) Gán $k := k + 1$; Quay lại Bước lặp k.

Trong lược đồ trên, điều kiện dừng của thuật toán tại Bước (k_1) thường là

$$\nabla f(x^k) \approx 0 \quad \text{hoặc} \quad \|x^k - x^{k-1}\| \text{ đủ nhỏ.}$$

Tại một bước lặp k điển hình, nếu điều kiện dừng chưa được thoả mãn thì ta phải xác định điểm

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k \quad \text{sao cho} \quad f(x^{k+1}) < f(x^k),$$

trong đó $d^k \in \mathbb{R}^n$ là *hướng giảm* của f tại x^k và số thực $t_k > 0$ là *độ dài bước*. Sự lựa chọn hướng dịch chuyển d^k và độ dài bước t_k khác nhau cho ta các thuật toán cụ thể tương ứng với các phương pháp hướng giảm khác nhau.

2 Thuật toán gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia

Trong thuật toán này, tại mỗi bước lặp k, điểm lặp tiếp theo được xác định bởi

$$x^{k+1} := x^k - t_k \nabla f(x^k),$$

trong đó t_k là nghiệm cực tiểu của hàm một biến

$$\varphi_k(t) := f(x^k - t\nabla f(x^k)) \quad \text{với } t > 0.$$

Cụ thể thuật toán như sau:
Bước lặp k. $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

(k_1) Tính $x^{k+1} := x^k - t_k \nabla f(x^k)$, trong đó

$$t_k = \arg\min\{\varphi_k(t),\ t > 0\}.$$

(k_2) Tính $\nabla f(x^{k+1})$.

(k_3) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy điểm dừng* $x^* \approx x^{k+1}$)
Else $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

3 Thực hiện yêu cầu

Cho hàm

$$f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^{3} \exp(a_i^\top x + b_i)\right)$$

với tham số như sau:

- $x \in \mathbb{R}^2$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0.5 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
- $b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

Hãy sử dụng hai phương pháp:

a) Phương pháp nội suy parabol,

b) Phương pháp Brent,

để xác định t_k tại mỗi bước lặp trong thuật toán gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia và so sánh độ phức tạp của hai phương pháp này.

4 Quy định nộp bài

- Thực hiện toàn bộ bài làm trên 1 tập tin Jupyter Notebook `MSSV.ipynb` đính kèm.
- Sinh viên nộp tập tin `MSSV.zip` được nén từ thư mục MSSV chứa các tập tin sau:
    1. Báo cáo toàn bộ bài làm: `MSSV.pdf`
    2. Mã nguồn: `MSSV.ipynb`

5 Quy định chấm bài

Đây là đồ án chiếm 10%.

Những trường hợp sau đây sẽ bị 0 điểm toàn bộ đồ án:

- Nộp sai quy định.
- Không có tập tin mã nguồn (`MSSV.ipynb`).
- Không có tập tin báo cáo (`MSSV.pdf`).
- Thực thi mã nguồn báo lỗi.