Equações de Transporte 1D para o Simulador NPE-PSQ

1. Introdução

Este documento define o modelo físico 1D para o simulador NPE-PSQ, que resolve as equações de transporte radial de energia e partículas em um tokamak. O modelo 1D representa um avanço significativo em relação ao modelo 0D, pois captura a **estrutura espacial dos perfis de temperatura e densidade** no plasma.

2. Coordenadas e Geometria

2.1 Coordenada Radial

Utilizamos a **coordenada de fluxo normalizada** ρ (rho) como variável espacial:

`\rho = \sqrt{\frac{\Psi - \Psi_0}{\Psi_a - \Psi_0}}`

onde:

- Ψ é o fluxo poloidal magnético
- Ψ_0 é o fluxo no eixo magnético (centro)
- Ψ_a é o fluxo na borda do plasma

Propriedades:

- $\rho = 0$ no centro do plasma (eixo magnético)
- $\rho = 1$ na borda do plasma (LCFS - Last Closed Flux Surface)
- ρ é monotônico e facilita a discretização numérica

2.2 Geometria Toroidal

Para um tokamak com seção circular:

- Raio maior: $R_0 = 6.2$ m
- Raio menor: $a = 2.0$ m
- Razão de aspecto: $\varepsilon = a/R_0 = 0.323$
- Volume: $V(\rho) = 2\pi^2 R_0 a^2 \rho^2$

3. Equações de Transporte

3.1 Equação de Energia dos Elétrons

A evolução temporal da temperatura dos elétrons $T_e(\rho,t)$ é governada pela equação de difusão:

$$\frac{3}{2} n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(V' n_e \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho} \right) + Q_e$$

onde:

- **n_e**: densidade eletrônica [10^{20} m^{-3}]
- **T_e**: temperatura eletrônica [keV]
- **χ_e**: difusividade térmica eletrônica [m^2/s]
- **V'**: derivada do volume em relação a ρ
- **Q_e**: termo fonte de aquecimento [MW/m^3]

3.2 Equação de Energia dos Íons

Similarmente, para a temperatura dos íons $T_i(\rho,t)$:

$$\frac{3}{2} n_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(V' n_i \chi_i \frac{\partial T_i}{\partial \rho} \right) + Q_i + Q_{ei}$$

onde:

- **χ_i**: difusividade térmica iônica [m^2/s]
- **Q_i**: aquecimento iônico (NBI, ICRH) [MW/m^3]
- **Q_{ei}**: transferência colisional elétron-íon [MW/m^3]

3.3 Equação de Densidade

A evolução da densidade eletrônica $n_e(\rho,t)$:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{1}{V'} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(V' D \frac{\partial n_e}{\partial \rho} \right) + S_n$$

onde:

- **D**: coeficiente de difusão de partículas [m^2/s]
- **S_n**: fonte de partículas (fueling, NBI) [10^{20} m^{-3}/s]

4. Coeficientes de Transporte

4.1 Modelo de Transporte Neoclássico + Anômalo

Os coeficientes de transporte são decompostos em:

$$\chi_e = \chi_e^{neo} + \chi_e^{anom}$$ $$\chi_i = \chi_i^{neo} + \chi_i^{anom}$$ $$D = D^{neo} + D^{anom}$$

4.2 Transporte Neoclássico

Baseado na teoria de colisões:

$$\chi_e^{neo} = \frac{q^2 R_0}{\tau_e} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{3/2}$$

onde:

- **q**: fator de segurança
- **τ_e**: tempo de colisão elétron-íon

4.3 Transporte Anômalo (Modelo Bohm-gyro-Bohm)

Modelo empírico baseado em dados experimentais:

$$\chi_e^{anom} = F_e \times \chi_{gB}$$ $$\chi_i^{anom} = F_i \times \chi_{gB}$$

onde:

$$\chi_{gB} = \frac{\rho_i^2 c_s}{a}$$

com:

- **ρ_i**: raio de Larmor iônico
- **c_s**: velocidade do som
- **F_e, F_i**: fatores multiplicativos (tipicamente 0.5-2.0)

4.4 Modelo ITG/TEM (Instabilidades de Microescala)

Para maior fidelidade, podemos usar modelos de turbulência:

$$\chi_e^{anom} = C_{TEM} \left(\frac{R}{L_{T_e}} \right)^{\alpha} \chi_{gB}$$ $$\chi_i^{anom} = C_{ITG} \left(\frac{R}{L_{T_i}} \right)^{\beta} \chi_{gB}$$

onde:

- **R/L_t**: gradiente normalizado de temperatura (drive da instabilidade)
- **α, β**: expoentes (tipicamente 1.5-3.0)

5. Termos Fonte

5.1 Aquecimento por ECRH

O ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating) deposita energia nos elétrons de forma localizada:

$$Q_{ECRH}(\rho) = \frac{P_{ECRH}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{ECRH}} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_{ECRH})^2}{2\sigma_{ECRH}^2} \right)$$

onde:

- **P_{ECRH}**: potência total [MW]
- **ρ_{ECRH}**: posição radial de deposição (tipicamente 0.3-0.5)
- **σ_{ECRH}**: largura da deposição (tipicamente 0.1-0.2)

5.2 Aquecimento por ICRH

O ICRH (Ion Cyclotron Resonance Heating) aquece íons:

$$Q_{ICRH}(\rho) = \frac{P_{ICRH}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{ICRH}} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_{ICRH})^2}{2\sigma_{ICRH}^2} \right)$$

5.3 Aquecimento por NBI

O NBI (Neutral Beam Injection) deposita energia em ambos (elétrons e íons):

$$Q_{NBI,e}(\rho) = f_e \times P_{NBI} \times \text{Profile}(\rho)$$ $$Q_{NBI,i}(\rho) = f_i \times P_{NBI} \times \text{Profile}(\rho)$$

onde:

- **f_e**: fração de energia para elétrons (tipicamente 0.3)
- **f_i**: fração de energia para íons (tipicamente 0.7)

Perfil de deposição:

$$\text{Profile}(\rho) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}$$

5.4 Aquecimento Ôhmico

$$Q_{Ohm}(\rho) = \eta_{||} j_\phi^2$$

onde:

- **$\eta_{\parallel}$**: resistividade paralela
- **j_ϕ**: densidade de corrente toroidal

5.5 Aquecimento por Fusão (Partículas Alfa)

$$Q_\alpha(\rho) = P_{fusion}(\rho) \times (1 - f_{loss})$$

onde:

$$P_{fusion}(\rho) = \frac{n_e^2}{4} \langle \sigma v \rangle_{DT} E_\alpha$$

com:

- **$\langle \sigma v \rangle_{DT}$**: reatividade de fusão D-T
- **E_α**: energia das partículas alfa (3.5 MeV)

5.6 Transferência Colisional Elétron-Íon

$$Q_{ei}(\rho) = \frac{3 m_e n_e}{\tau_e} (T_i - T_e)$$

onde:

- **τ_e**: tempo de colisão elétron-íon

6. Condições de Contorno

6.1 Centro do Plasma ($\rho = 0$)

Condição de simetria (derivada nula):

$$\frac{\partial T_e}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = 0$$ $$\frac{\partial T_i}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = 0$$ $$\frac{\partial n_e}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=0} = 0$$

6.2 Borda do Plasma ($\rho = 1$)

Condições de Dirichlet (valores fixos):

$$T_e(\rho=1) = T_{e,edge} = 0.1 \text{ keV}$$ $$T_i(\rho=1) = T_{i,edge} = 0.1 \text{ keV}$$ $$n_e(\rho=1) = n_{e,edge} = 0.5 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

Alternativamente, podemos usar condições de Robin (mistas):

$$\chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} = \alpha (T_e - T_{e,edge})$$

7. Discretização Espacial

7.1 Grade Radial

Utilizamos uma grade uniforme em ρ:

$$\rho_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, 2, ..., N$$

onde **N** é o número de pontos radiais (tipicamente 100-200).

7.2 Método das Diferenças Finitas

Para a derivada espacial, usamos diferenças finitas centradas:

$$\frac{\partial T_e}{\partial \rho}\bigg|_i \approx \frac{T_{e,i+1} - T_{e,i-1}}{2\Delta\rho}$$

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial \rho^2}\bigg|_i \approx \frac{T_{e,i+1} - 2T_{e,i} + T_{e,i-1}}{\Delta\rho^2}$$

7.3 Forma Discretizada da Equação de Transporte

Para cada ponto radial i:

$$\frac{3}{2} n_{e,i} \frac{dT_{e,i}}{dt} = \frac{1}{V'_i} \frac{1}{\Delta\rho} \left[(V' n_e \chi_e)_{i+1/2} \frac{T_{e,i+1} - T_{e,i}}{\Delta\rho} - (V' n_e \chi_e)_{i-1/2} \frac{T_{e,i} - T_{e,i-1}}{\Delta\rho} \right] + Q_{e,i}$$

onde os índices fracionários ($i \pm 1/2$) indicam valores interpolados nas interfaces da célula.

8. Integração Temporal

8.1 Método de Euler Implícito

Devido à natureza difusiva (stiff) das equações, usamos um método implícito:

$$\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} = F(T_e^{n+1}, T_i^{n+1}, n_e^{n+1})$$

Isso requer a solução de um sistema linear a cada passo de tempo.

8.2 Método de Crank-Nicolson

Para maior precisão, podemos usar o método de Crank-Nicolson (ordem 2):

$$\frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F(T_e^{n+1}) + F(T_e^n) \right]$$

9. Parâmetros Típicos

Parâmetro	Valor	Unidade
Número de pontos radiais (N)	100	-
Passo de tempo (Δt)	0.001-0.01	s
Temperatura central (T_{e0})	10-20	keV
Densidade central (n_{e0})	10	10^{20} m^{-3}
χ_e (típico)	0.5-2.0	m^2/s
χ_i (típico)	1.0-5.0	m^2/s
D (típico)	0.1-1.0	m^2/s

10. Diagnósticos Derivados

10.1 Valores Médios Volumétricos

$$\langle T_e \rangle = \frac{\int_0^1 T_e(\rho) V'(\rho) d\rho}{\int_0^1 V'(\rho) d\rho}$$

10.2 Conteúdo de Energia

$$W_e = \frac{3}{2} \int_0^1 n_e(\rho) T_e(\rho) V'(\rho) d\rho$$

10.3 Tempo de Confinamento de Energia

$$\tau_E = \frac{W_e + W_i}{P_{heat} - P_{rad}}$$

10.4 Fator de Segurança q(ρ)

Para um tokamak circular:

$$q(\rho) = \frac{2\pi a^2 B_0}{R_0 \mu_0 I_p} \times \rho$$

onde:

- **B_0**: campo magnético toroidal
- **I_p**: corrente de plasma

10.5 Beta Normalizado

$$\beta_N = \frac{\beta}{I_p/(aB_0)} \times 100$$

onde:

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2}$$

11. Próximos Passos

1. **Implementar o solver de EDPs** usando diferenças finitas
2. **Validar o solver** com soluções analíticas simples
3. **Integrar com o sistema de controle NPE-PSQ**
4. **Comparar com resultados do modelo 0D**
5. **Validar com dados de códigos de referência (TRANSP, ASTRA)**

Autor: Sistema NPE-PSQ

Data: Dezembro 2025

Versão: 1.0