DÚ 4

Pavel Marek

Použitá tvrzení z přednášky

Zde opíšeme a očíslujeme tvrzení z přednášek, které budeme dále používat.

(B) $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n))$.

(D) $f(n) = o(g(n))$, $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{TIME}(2^{g(n)})$.

(E) $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f^2(n))$.

(F) $f(n) = o(g(n))$, g je prostorově konstruovatelná. Potom $\text{SPACE}(f(n)) \subsetneq \text{SPACE}(g(n))$.

(G) $f(n) = o(\frac{g(n)}{\log g(n)})$, g je časově konstruovatelná. Potom $\text{TIME}(f(n)) \subsetneq \text{TIME}(g(n))$.

1)

Porovnejte $\text{TIME}(2^n)$ *a* $\text{NSPACE}(\sqrt{n})$.

Z (D) je ihned vidět, že $\text{NSPACE}(\sqrt{n}) \subseteq \text{TIME}(2^n)$, protože $\sqrt{n} = o(n)$.
Pro ostrou inkluzi můžeme postupovat například takto:

$$\text{NSPACE}(\sqrt{n}) \subseteq \text{TIME}(2^{n^{3/4}}) \tag{1}$$

$$\text{TIME}(2^{n^{3/4}}) \subsetneq \text{TIME}(2^n) \tag{2}$$

kde rovnice 1 plyne z použití (D), protože $\sqrt{n} = o(n^{3/4})$. A rovnice 2 plyne z použití (G), protože

$$2^{n^{3/4}} = o(\frac{2^n}{\log 2^n}) = o(\frac{2^n}{n})$$

a toto platí, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n2^{n^{3/4}}}{2^n} = 0$$

Tedy platí $\text{NSPACE}(\sqrt{n}) \subsetneq \text{TIME}(2^n)$.

2)

Porovnejte NSPACE$((\log n)^3)$ *a* SPACE(n).

Postupujme následovně:

$$\mathrm{NSPACE}((\log n)^3) \subseteq \mathrm{SPACE}((\log n)^6) \tag{3}$$

$$\mathrm{SPACE}((\log n)^6) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n) \tag{4}$$

Kde rovnice 3 vychází z (E) a rovnice 4 vychází z (F), protože $(\log n)^6 = o(n)$ a toto platí protože $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^6}{n} = 0$. A tedy platí NSPACE$((\log n)^3) \subsetneq$ SPACE(n).

3)

Porovnejte NTIME(n^3) *a* SPACE(n^6).

Postupujme následovně:

$$\mathrm{NTIME}(n^3) \subseteq \mathrm{SPACE}(n^3) \tag{5}$$

$$\mathrm{SPACE}(n^3) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n^6) \tag{6}$$

Kde rovnice 5 vychází z (B) a rovnice 6 vychází z (F), protože $n^3 = o(n^6)$. Tedy platí NTIME$(n^3) \subsetneq$ SPACE(n^6).