

Du 2

Pavel Marek

1) \Rightarrow

f je algoritmicky vyčíslitelná $\Rightarrow B = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = y\}$ je částečně rozhodnutelná.

Důkaz Máme turingův stroj M , který počítá f . Zkonstruujeme M' takový, že $L(M') = B$:

$M'(x \in \Sigma^*)$:

1. Pro všechny rozdělení $\langle x', y' \rangle$ z x :
 - (a) Spustí $M(x')$. Jeho výstup nazvěme y .
 - (b) Pokud $y = y'$:
 - i. Přijmi $\langle x', y' \rangle$. Zde totiž platí, že $f(x') = y'$.
2. Odmítni x .

K bodu 1 poznamenejme, že rozdělení vstupního slova x lze enumerovat například tak, že budeme posunovat rozdělovač x' a y' doprava.

1) \Leftarrow

$B = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = y\}$ je částečně rozhodnutelná $\Rightarrow f$ je algoritmicky vyčíslitelná.

Důkaz Máme M takový, že $L(M) = B$. Zkonstruujeme M' takový, že M' počítá f :

$M'(x \in \Sigma^*)$:

1. $y = \epsilon$.
2. L je prázdný seznam procesů. K procesům si budeme přidávat ještě část jejich vstupu.
3. Dokud žádný proces v L nepřijal:

- (a) Přidej proces $\langle x, y \rangle \in B$ společně s y do L . Tento proces lze jednoduše implementovat tak, že spustíme $M(\langle x, y \rangle)$.
 - (b) $y = \text{next}(y)$.
4. Vypiš y . Zde už víme, že nějaký proces z L přijal a y je část jeho vstupu. Navíc máme jistotu, že $\langle x, y \rangle \in B$ a $f(x) = y$.

2.1)

$\text{HASPRIME} = \{\langle M \rangle \mid \exists p (p \text{ prvočíslo a } \langle p \rangle \in L(M))\}$. Sestrojíme M' takový, že $L(M') = \text{HASPRIME}$:

$M'(x \in \Sigma^*)$:

1. Ověř, že x je kód nějakého turingova stroje a označ $\langle M \rangle = x$.
2. Pokud není, odmítni.

3. Pro všechny p prvočísla:

- (a) Spust' $M(\langle p \rangle)$. Nevadí, když výpočet nedoběhne.
- (b) Pokud přijme, přijmi.
- (c) Jinak odmítni.

Ještě pro krok 3 poznamenejme, že prvočísla jsou rozhodnutelný jazyk. Tedy lze pro ně sestavit enumerátor, který je vypisuje v lexikografickém pořadí.

2.2)

$\text{PSE} = \{\langle M, q \rangle \mid \exists x (M \text{ použije při výpočtu } x \text{ stav } q)\}$. Sestrojíme turingův stroj M' tak, že $L(M') = \text{PSE}$:

$M'(x \in \Sigma^*)$:

1. Ověř, že x je syntakticky $\langle M, q \rangle$ a přiřaď $\langle M, q \rangle = x$.
2. Modifikujeme M :
 - (a) Změníme q na **jediný** přijímající stav.
 - (b) Smažeme všechny přechody vedoucí ze stavu q .
3. Pro všechny $y \in \Sigma^*$: Zvolíme libovolné uspořádání a enumerujeme všechny slova v jazyce.
 - (a) Spustíme $M(y)$. Nevadí, když výpočet nedoběhne.
 - (b) Jestli přijme, přijmi.
 - (c) Jinak odmítni.