POZNÁMKY A PŘÍKLADY K PŘEDMĚTU MAI 060

JAROMÍR ANTOCH

29. října 2018

Hlavní cíle přednášky

Hlavním tématem této přednášky je studium Markovských řetězců a Markovských procesů, jejich zobecněním a aplikacím. Více či méně podrobně probereme:

- Pojem rekurence v teorii pravděpodobnosti
- Náhodné procházky
- Markovské řetězce s diskrétními stavy a diskrétním časem
- Markovské procesy s diskrétními stavy a spojitým časem
- Modely růstu a zániku
- Poissonův proces
- Durbinův – Watsonův proces
- Základy modelů teorie hromadné obsluhy

Uvažované jevy

Uvažujme posloupnost opakovaných (ne nutně nezávislých) pokusů, z nichž každý má tutéž konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, kde zpravidla $\mathcal{J} \equiv \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{Z}$. Nechť

$$\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\} \tag{1}$$

značí jev, že první pokus skončil výsledkem E_{j_1}, druhý pokus skončil výsledkem E_{j_2}, ..., n-tý pokus skončil výsledkem E_{j_n}.

Nechť pro všechny konečné posloupnosti (1) platí:

- $P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}\right) = \sum_{j_n\in\mathcal{J}} P\left(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n-1}}, E_{j_n}\right),\ 1 < n < \infty,\ j_n \in \mathcal{J}$
- O každé posloupnosti typu (1) lze jednoznačně rozhodnout, zda má či nemá „vlastnost ξ“

Pozn. 1: Připomeňme, že jsou-li jevy $\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\}$ nezávislé, potom

$$P\left(\left\{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}\right\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(E_{j_k}\right) \tag{2}$$

Rekurentní jevy

Def. 1: Výrokem ξ *nastává na n-tém místě (konečné nebo nekonečné) posloupnosti* $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots$ budeme rozumět právě to, že posloupnost $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}$ má vlastnost ξ.

Def. 2: Vlastnost ξ nazveme rekurentním jevem, jestliže:

1. ξ nastal na n-tém a (n+m)-tém místě posloupnosti $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_{n+m}}$ tehdy a jen tehdy, nastal-li na posledním místě posloupnosti $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ a na posledním místě posloupnosti $E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}$ $\big($jinými slovy, jak posloupnost $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ tak posloupnost $E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}$ má vlastnost $\xi\big)$
2. v takovém případě platí:

$$P\Big(\underbrace{\overbrace{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}}^{A}}_{\xi}, \underbrace{\overbrace{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}}^{B}}_{\xi}\Big) = P\Big(\underbrace{\overbrace{E_{j_1}, \dots, E_{j_n}}^{A}}_{\xi}\Big) \cdot P\Big(\underbrace{\overbrace{E_{j_{n+1}}, \dots, E_{j_{n+m}}}^{B}}_{\xi}\Big)$$

TODO ♥

Příklady rekurentních jevů

Příklad 1: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p.
Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech si jsou rovny.

Příklad 2: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů, a to nezávisle na předchozích krocích. Jednotlivé možnosti nemusí být nutně stejně pravděpodobné.
Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice.

Příklad 3: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu, a to nezávisle na předchozích krocích. Jednotlivé možnosti nemusí být nutně stejně pravděpodobné.
Řekneme, že jev ξ nastal v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice.

Pravděpodobnosti návratů $\{f_n\}$, $\{u_n\}$ a vztah mezi nimi

Def. 3: Každému rekurentnímu jevu ξ přiřaďme posloupnosti čísel

$$f_n = P\big(\xi \text{ nastane v } n-\text{tém pokusu poprvé}\big) \qquad 1 \le n < \infty$$

$$u_n = P\big(\xi \text{ nastane v } n-\text{tém pokusu}\big) \qquad 1 \le n < \infty$$

Dodefinujme formálně $f_0 = 0,\ u_0 = 1$ a zaveďme vytvořující funkce $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ a $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Věta 1: Mezi pravděpodobnostmi $\{f_n\}$ a $\{u_n\}$, resp. mezi jejich vytvořujícími funkcemi $F(x)$ a $U(x)$, platí rekurentní vztak:

$$u_n = f_0 u_n + f_1 u_{n-1} + \ldots + f_n u_0, \qquad n \ge 1$$

$$F(x)U(x) = U(x) - 1, \qquad -1 < x < 1$$

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 4: Uvažujme Rubikovu kostku, tj. mechanický hlavolam tvořený zpravidla krychlí složenou z dílčích barevných krychliček. Nejběžnějším typem kostky je model $3 \times 3 \times 3$. Celkový počet kombinací pro tento model je $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 43.25 \times 10^{18}$ (Wikipedia). Úkolem zpravidla je rotacemi přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá stěna byla obarvena jen jednou barvou.
Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice, jíž může být libovolné rozestavení dílčích krychliček.

Příklad 5: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p. Zajímejme se o některý vzor možných výsledků, např. ZZZ, $ZZNZN$, apod.
Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže na konci sledované posloupnosti pokusů pozorujeme daný vzor.

Pozn. 2: „Náhodné procházky“ po grafech, po vrcholech krychlí $\{0, 1\}^n$, atd., mohou být též často popsány pomocí rekurentních jevů.

Opakované výskyty rekurentních jevů

Pozn. 3:

- Je-li $f = \sum_n f_n = 1$, pak lze $\{f_n\}$ považovat za rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu ξ.
- Je-li $f < 1$, pak doba čekání T_1 je tzv. nevlastní náhodná veličina, která nabývá s kladnou pravděpodobností ($= 1 - f$) nevlastní hodnoty ∞, kterou interpretujeme tak, že rekurentní jev ξ nenastal.
- Zdůrazněme, že pravděpodobnosti $\{u_n\}$ netvoří rozdělení pravděpodobnosti.

OPAKOVANÉ VÝSKYTY REKURENTNÍCH JEVŮ

Pozn. 4:

- Je-li $f = \sum_n f_n = 1$, pak lze $\{f_n\}$ považovat za rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny T_1 popisující čekání na první výskyt rekurentního jevu ξ.
- Je-li $f < 1$, pak doba čekání T_1 je tzv. nevlastní náhodná veličina, která nabývá s kladnou pravděpodobností $(= 1 - f)$ nevlastní hodnoty ∞, kterou interpretujeme tak, že rekurentní jev ξ nenastal.
- Zdůrazněme, že pravděpodobnosti $\{u_n\}$ netvoří rozdělení pravděpodobnosti.

Věta 2: Označme $f_n^{(r)}$, $1 \leq n < \infty$, pravděpodobnost jevu, že ξ nastane po r-té v n-tém pokusu, a položme $f_0^{(r)} = 0$. Potom platí

$$\left\{f_n^{(r)}\right\} = \left\{f_n\right\}^{r\star}$$

kde $\left\{f_n\right\}^{r\star}$ značí r-tou konvoluční mocninu posloupnosti $\left\{f_n\right\}$.

Věta 3: Pravděpodobnost jevu, že rekurentní jev nastane v nekonečné posloupnosti pokusů alespoň r-krát je rovna f^r, kde $f = \sum_i f_i$.

Alternativní přístup k zavedení rekurentních jevů

Nechť $T_i,\ 1 \le i \le r$, jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny mající totéž rozdělení $\{f_n\}$, kde T_i interpretujeme jako dobu, která uplyne mezi $(i-1)$-ním a i-tým výskytem ξ (tzv. doba návratu). Pak

$$T^{(r)} = T_1 + \ldots + T_r$$

interpretujeme jako dobu čekání na r-tý výskyt ξ.

Def. 4: Nechť $T_i,\ 1 \le i \le r$, jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny mající totéž rozdělení $\{f_n\}$. Potom výrok:

- rekurentní jev ξ nastal v čase n ztotožníme s výrokem existuje r tak, že
$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n$$
- rekurentní jev ξ nastal v čase n po r-té ztotožníme s výrokem
$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n$$

Klasifikace rekurentních jevů

Def. 5: Rekurentní jev ξ se nazývá trvalý, je-li $f = 1$, respektive přechodný, je-li $f < 1$, kde $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Věta 4: Pravděpodobnost toho, že rekurentní jev ξ nastane v nekonečné posloupnosti pokusů nekonečně mnohokrát je rovna jedné, jedná-li se o jev trvalý, a je rovna nule, jedná-li se o jev přechodný.

Věta 5: Rekurentní jev ξ je přechodný tehdy a jen tehdy, je-li $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < +\infty$. V tom případě je $f = (u-1)/u$, kde $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Def. 6: Je-li $f = 1$, označme $\mu = E\,T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} nf_n$ a interpretujme ji jako střední dobu návratu rekurentního jevu ξ.

Def. 7: Trvalý rekurentní jev ξ se nazývá nenulový, jestliže $\mu < +\infty$, respektive nulový, jestliže $\mu = +\infty$.

Def. 8: Rekurentní jev ξ se nazývá periodický, jestliže existuje přirozené $\lambda > 1$ tak, že $u_n = 0$ pro všechna n, která nejsou dělitelná λ. Největší číslo λ s touto vlastností se nazývá periodou jevu ξ.

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 6: Uvažujme posloupnosti nezávislých pokusů s alternativní odpovědí s pravděpodobností zdaru p. Řekneme, že v čase n nastává jev ξ, jestliže počty zdarů a nezdarů v prvních n pokusech jsou si rovny. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je:

- pro $p = 1/2$ trvalý
- pro $p \neq 1/2$ přechodný
- spočtěte pravděpodobnosti u_n a f_n a jejich aproximace
- $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$
- $F(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$
- $f_{2n-1} = 0, \ f_{2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n q^n, \ n = 1, 2, \ldots$
- pro $p = 1/2$ je $u_{2n-1} = 0$ a $u_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$
- nasimulujte několik realizací této náhodné procházky délky alespoň 10^5 pro různé hodnoty p, a nezapomeňte přitom na volbu $p = 1/2$
- nakreslete si odpovídající grafy a rozmyslete

Příklady rekurentních jevů (pokr.)

Příklad 7: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v rovině tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru nebo dolů. Všechny čtyři možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že rekurentní jev ξ nastává v čase n, jestliže jsme se po n-krocích vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná trvalý periodický rekurentní jev. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Příklad 8: Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech v prostoru tak, že v každém kroku se posune o jednotku vlevo, vpravo, nahoru, dolů, dopředu nebo dozadu. Všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné a nezávislé na předchozích krocích. Řekneme, že rekurentní jev ξ nastáváv čase n, jestliže jsme se vrátili do výchozí pozice. Ukažte, že se jedná o periodický rekurentní jev, který je přechodný. Spočtěte pravděpodobnosti u_n a jejich aproximace.

Pomůcka. Vzpomeňte si na multinomické rozdělení a větu o úplné pravděpodobnosti.

Limitní věta

Věta 6: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý neperiodický. Potom:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Věta 7: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý periodický s periodou λ. Potom

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

Pozn. 5: Důkaz se provádí pomocí 51 a tvrzení uvedeného v poznámce 47.

Asymptotické rozdělení četností rekurentních jevů

Věta 8: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý. Označme N_n počet výskytů ξ do času n a $T^{(r)}$ dobu čekání na r-tý výskyt ξ. Potom jevy $[\,N_n \geq r\,]$ a $[\,T^{(r)} \leq n\,]$, $1 \leq r \leq n < \infty$, jsou ekvivalentní. Předpokládejme dále, že rozdělení dob prvních návratů má konečnou střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2. Potom $N_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3}\right)$ a $T^{(r)} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}\big(r\mu, r\sigma^2\big)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n - n/\mu}{\sqrt{n\sigma^2/\mu^3}} \leq x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1$$

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}} \leq x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_1$$

kde

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

ASYMPTOTICKÉ ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ REKURENTNÍCH JEVŮ

Věta 9: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nenulový. Potom pro $n \to \infty$ platí $E\, N_n \approx n/\mu$, kde μ je střední doba návratu a N_n značí počet výskytů ξ do času n.

Pozn. 6: Nechť rekurentní jev ξ je trvalý nulový. Potom $E\, N_n$ není obecně řádu n^1. Ukažte, že pro model náhodné procházky po přímce popsaný v příkladu 6 platí $E\, N_{2n} \approx 2\sqrt{n/\pi}$.

Rekurentní jevy se zpožděním

Rekurentní jevy se zpožděním lze zavést způsobem naznačeným v df 4.

Def. 9: Uvažujme nezávislé celočíselné náhodné veličiny $T_1, T_2, \ldots$, kde T_1 má rozdělení $\{b_n\}$, zatímco $T_2, T_3, \ldots$ mají rozdělení $\{f_n\}$. Řekneme, že rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n po r-té, jestliže

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_r = n; \tag{3}$$

resp. rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n, jestliže existuje r tak, že platí (3).

Pozn. 7: V df 9 interpretujeme T_1 jako dobu čekání na první výskyt ξ, zatímco $T_2, T_3, \ldots$ jako doby návratu.

Příklad 9: Uvažujme Rubikovu kostku, viz př. 9, s libovolným nastavením krychliček na počátku. Úkolem budiž rotacemi přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá stěna byla obarvena jen jednou barvou (počáteční stav). Řekneme, že jev ξ nastává v čase n, jestliže je kostka v počátečním stavu. Zpožděním T_1 je rozdělení (náhodné) trajektorie potřebné k prvnímu dosažení počátečního stavu.

Rekurentní jevy se zpožděním

Věta 10: Nechť u_n značí pravděpodobnost jevu, že rekurentní jev se zpožděním ξ nastal v čase n. Nechť $u_0 = f_0 = b_0 = 0$. Potom

$$u_n = b_n + f_0 u_n + \ldots + f_n u_0, \quad \text{tj.} \quad \{u_n\} = \{b_n\} + \{f_n\} \star \{u_n\}$$

Pozn. 8: Uvědomme si, že následující jevy jsou ekvivalentní

$$\Big[\xi \text{ nastal v čase } n\Big] \equiv$$
$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \Big[\xi \text{ nastal v čase } n \text{ a předtím naposledy v čase } k\Big]$$
$$\cup \Big[\xi \text{ nastal v čase } n \text{ poprvé}\Big]$$

ROVNICE OBNOVY

Pozn. 9: Limitní věty předchozích odstavců lze považovat za speciální případy obecné věty, kterou lze formulovat analyticky bez použití pravděpodobnostních pojmů. Poznamenejme, že tato věta má také pravděpodobnostní význam.

Def. 10: Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ jsou dvě posloupnosti takové, že $a_0 = 0, 0 \leq a_n \leq 1, b_n \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \sum_{i=n}^{\infty} b_n < \infty$. Položme $u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} \ldots + a_n u_0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, tj.

$$\{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} \star \{u_n\} \tag{4}$$

Vztah (4) nazveme *rovnicí obnovy*.

Pozn. 10: Pro vytvořující funkce posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{u_n\}$ uvažované v df 10 platí

$$U(x) = B(x) + A(x)U(x) \quad \equiv \quad U(x) = \frac{B(x)}{1 - A(x)}$$

Rovnice obnovy (pokr.)

Def. 11: Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme periodickou, existuje-li $\lambda > 1$ tak, že $a_n = 0$ pro všechna n nedělitelná λ. Největší takové λ nazveme periodou.

Věta 11: Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je neperiodická. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. když lze $\{a_n\}$ považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého neperiodického rekurentního jevu ξ, potom

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n, & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty, \\ 0, & \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \infty. \end{cases}$$

3. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$, potom pro $n \to \infty$ je

$$u_n \approx \left. \frac{B(x)}{x^{n+1} A'(x)} \right|_{x=1}$$

kde $x < 1$ je jediný kořen rovnice $A(x) = 1$.

Rovnice obnovy (pokr.)

Věta 12: Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je periodická s periodou λ. Potom platí:

1. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
2. Je-li $\mu = \infty$, potom $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
3. Je-li $\mu < \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, tj. když lze $\{a_n\}$ považovat za rozdělení doby návratu nějakého trvalého periodického rekurentního jevu ξ, potom pro $0 \le j < \lambda$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n\lambda+j} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\lambda+j}}{\mu} \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

Markovovy řetězce

Def. 12: Posloupnost pokusů, z nichž každý má tu samou konečnou nebo spočetnou množinu možných výsledků $E_1, E_2, \ldots,$ nazveme Markovovým řetězcem (MŘ), jestliže pravděpodobnosti každé konečné posloupnosti výsledků (pokusů nultého až n-tého) je dána vztahem

$$P\left(E_{j_0}, E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}\right) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \ldots p_{j_{n-1} j_n}, \tag{5}$$

kde $a_k,\ k = 1, 2, \ldots$ jsou pravděpodobnosti výsledků nultého pokusu a $p_{jk},\ 1 \leq j, k < +\infty$, je (pro všechny pokusy táž) podmíněná pravděpodobnost výsledku E_k za podmínky výsledku E_j v pokuse předchozím.

Pozn. 12: Posloupnost $\{a_k\}$ nazýváme počátečním rozdělením pravděpodobností, podmíněné pravděpodobnosti p_{jk} nazýváme pravděpodobnostmi přechodu. Zatímco tedy k popisu nezávislých jevů stačí znát pravděpodobnosti p_i, k popisu MŘ potřebujeme znát $\boldsymbol{a} \equiv \{a_k\}$ a $\mathbf{P} \equiv \left\{p_{jk}\right\}$. Všimněme si, že $\sum_j p_{ij} = 1\ \ \forall i \in \mathbb{N}$.

PŘÍKLADY MARKOVOVÝCH ŘETĚZCŮ

1. Náhodná procházky po přímce.
2. Náhodná procházky po přímce s odrážejícími stěnami.
3. Náhodná procházka po přímce s pohlcujícími stěnami.
4. Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť n rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna molekula s tou samou pstí $1/n$ a přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
5. Modifikovaný Ehrenfestův myšlený pokus. Nechť n rozlišitelných molekul je rozděleno do dvou nádob označených A a B. V každém kroku se náhodně zvolí jedna nádoba a jedna molekula z ní se přemístí se do nádoby opačné. Stavem systému je počet molekul v nádobě A.
6. Posloupnost nezávislých opakovaných pokusů.
7. Úlohu o zruinování hráče.
8. Rubikova kostka.

Psti přechodu vyšších řádů

Věta 13: Pravděpodobnosti přechodu ze stavu E_j do stavu E_k po n-krocích, jež označíme $p_{jk}^{(n)}$, dostaneme jako prvky matice $\mathbf{P}^n$. Je zvykem dodefinovat $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$.

Pozn. 13: Matici $\mathbf{P}^n$ můžeme spočítat řadou způsobů:

- Postupným umocňováním matice přechodů $\mathbf{P}$.
- Přímo z definice (principu).
- Pomocí Perronova vzorce využívajícího znalosti vlastních čísel $\mathbf{P}$...

Def. 13: Vedle podmíněných pravděpodobností $p_{jk}^{(n)}$ zaveďme nepodmíněné (absolutní) pravděpodobnosti $a_k^{(n)}$ jako pravděpodobnosti jevu, že systém je v čase n ve stavu E_k.

Pozn. 14: Zřejmě platí, že:

$$a_k^{(0)} = a_k, \quad a_k^{(n)} = \sum_j a_j p_{jk}^{(n)} \quad \text{a} \quad a_k^{(n+m)} = \sum_j a_j^{(m)} p_{jk}^{(n)}$$

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}$ nezávislá na j, pak existuje také $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ a jsou si rovny.

ZNAČENÍ

- $f_{jj}^{(n)}$ ... pravděpodobnost prvního návratu do stavu E_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu E_j
- $f_{ij}^{(n)}$ ... pravděpodobnost prvního průchodu stavem E_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu E_i
- $p_{jj}^{(n)}$ ... pravděpodobnost jevu, že systém je v čase n ve stavu E_j,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu E_j
- $p_{ij}^{(n)}$ ... pravděpodobnost průchodu stavem E_j v čase n,
  byl-li řetězec v čase 0 ve stavu E_i

Věta 14: Položme $f_{jj}^{(0)} = 0,\ f_{ij}^{(0)} = 0,\ p_{jj}^{(0)} = 1,\ p_{ij}^{(0)} = 0,\ p_{jj}^{(1)} = p_{jj}.$
Potom platí

$$p_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(0)} p_{jj}^{(n)} + f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \ldots + f_{jj}^{(n-1)} p_{jj} + f_{jj}^{(n)} p_{jj}^{(0)}, \qquad 1 \le n < \infty,$$

$$\left\{p_{ij}^{(n)}\right\} = \left\{f_{ij}^{(n)}\right\} + \left\{f_{jj}^{(n)}\right\} \star \left\{p_{ij}^{(n)}\right\}$$

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav E_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_j, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_i, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev se zpožděním.

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav E_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_j, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_i, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev se zpožděním.

Teorie Markovových řetězců je v podstatě teorií rekurentních jevů. Nové je to, že jich studujeme více současně !!!

Klasifikace stavů MŘ

Věta 15: V Markovově řetězci zvolme pevně stav E_j.

a) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_j, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev.

b) Je-li řetězec na počátku ve stavu E_i, pak každý průchod systému stavem E_j je rekurentní jev se zpožděním.

Teorie Markovových řetězců je v podstatě teorií rekurentních jevů. Nové je to, že jich studujeme více současně !!!

Pojmy o klasifikaci rekurentních jevů se beze změny přenášejí i na stavy Markovova řetězce.

Věta 16: V Markovově řetězci zvolme pevně stav E_j.

- Stav E_j je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$. V takovém případě také $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ pro všechna i.
- Stav E_j je trvalý nulový $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$. V takovém případě také $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna i.

Klasifikace stavů MŘ (pokr.)

Věta 17: V Markovově řetězci zvolme pevně stav E_j.

- Je-li stav E_j trvalý nenulový neperiodický, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j},\ i \neq j, \quad \text{kde} \quad f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

- Je-li stav E_j trvalý nenulový periodický s periodou λ, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j}$$

a pro všechna $i \neq j$ a $0 \leq \nu \leq \lambda - 1$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n\lambda+\nu)} = \frac{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k\lambda+\nu)}}{\mu_j}$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \quad \text{kde} \quad \overline{p}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}$$

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce

Def. 14: Řekneme, že stav E_k je dosažitelný ze stavu E_j, jestliže existuje $n \geq 0$ takové, že $p_{jk}^{(n)} > 0$.

Pozn. 15: Ve smyslu df 14 je každý stav dosažitelný sám ze sebe, neboť $p_{jj}^{0} = 1$.

Def. 15: Neprázdná množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C. Nejmenší uzavřená množina obsahující množinu stavů se nazývá jejím uzávěrem.

Věta 18: Množina stavů C je uzavřená $\Leftrightarrow$ $p_{jk} = 0$ pro všechna $E_j \in C$ a $E_k \notin C$.

Def. 16: Je-li jednobodová množina $\{E_j\}$ uzavřená, tj. je-li $p_{jj} = 1$, pak se stav E_j nazývá absorbční stav.

Pozn. 16: Vynecháme-li v matici přechodů $\boldsymbol{P}$ Markovova řetězce řádky a sloupce odpovídající stavům vně uzavřené množiny C, dostaneme opět stochastickou matici. Množina C tedy také představuje Markovovův řetězec, kterému se říká podřetězec původního Markovova řetězce.

NEROZLOŽITELNÉ A ROZLOŽITELNÉ ŘETĚZCE (POKR.)

Def. 17: MŘ se nazývá nerozložitelný, jestliže v něm kromě množiny všech stavů neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů. V opačném případě se nazývá rozložitelný.

Věta 19: Řetězec je nerozložitelný $\Leftrightarrow$ každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Věta 20: Řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný $\Leftrightarrow$ odpovídající matice $\boldsymbol{P}$ je po případném přečíslování stavů tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

kde v diagonálních blocích stojí čtvercové matice.

Pozn. 17: Řekneme-li, že stavy E_j a E_k jsou téhož typu, budeme tím rozumět, že jsou buď oba přechodné, nebo jsou oba trvalé nulové, nebo jsou oba trvalé nenulové a současně jsou buď oba neperiodické nebo oba periodické s toutéž periodou.

Nerozložitelné a rozložitelné řetězce (pokr.)

Věta 21: Je-li stav E_k dosažitelný ze stavu E_j a naopak, stav E_j je dosažitelný ze stavu E_k, pak jsou oba stavy téhož typu.

Věta 22: V nerozložitelném MŘ jsou všechny stavy téhož typu.

Věta 23: V MŘ s konečně mnoha stavy neexistují stavy nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

STACIONÁRNÍ ROZDĚLENÍ

Def. 18: Mějme nerozložitelný MŘ s maticí pravděpodobností přechodů $\boldsymbol{P}$. Rozdělení $\{v_j\}$ se nazývá stacionární rozdělení tohoto řetězce, jestliže

$$v_j = \sum_i v_i p_{ij} \quad \forall j$$

Tento vztah lze maticově zapsat jako $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{P}'$ značí matici transponovanou k $\boldsymbol{P}$.

Věta 24: V nerozložitelném MŘ existuje stacionární rozdělení $\Leftrightarrow$ všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto stacionární rozdělení $\boldsymbol{v}$ je jediné a pro všechna i, j platí:

$$v_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad \text{v neperiodickém případě}$$

$$v_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} > 0 \qquad \text{v periodickém případě}$$

STACIONÁRNÍ ROZDĚLENÍ (POKR.)

Pozn. 18: V nerozložitelném MŘ s konečně mnoha stavy jsou dle věty 23, takže stacionární rozdělení existuje.

Def. 19: Matice s nezápornými prvky taková, že všechny řádkové i sloupcové součty jsou rovny jedné se nazývá dvojně stochastická.

Věta 25: Mějme nerozložitelný řetězec s dvojně stochastickou maticí. Je-li počet stavů konečný, řekněme n, potom stacionární rozdělení je rovnoměrné, tj. $v_i = 1/n$ pro $1 \leq i \leq n$. Je-li počet stavů nekonečný, potom stacionární rozdělení neexistuje.

Příklad 10:

- Nalezněte stacionarní rozdělení pro náhodnou procházku s dvěma odrážejícími stěnami.
- Zjistěte, pro které hodnoty p existuje stacionární rozdělení v případě náhodné procházky odrážející stěnou v nule a neohraničenou zprava.
- Nalezněte stacionární rozdělení pro Ehrenfestům myšlený pokus.

Rozložitelné řetězce

Pozn. 19: Připomeňme, že neprázdná množina stavů C se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C. Nejmenší uzavřená množina obsahující množinu stavů se nazývá jejím uzávěrem.

Věta 26: Uvažujme rozložitelný MŘ s konečně mnoha stavy. Potom pravděpodobnost jevu, že řetězec skončí v některé uzavřené podmnožině stavů konverguje k 1 pro $n \to \infty$ bez ohledu na to, kde řetězec začal.

Pozn. 20: Uvažujme rozložitelný MŘ s konečně mnoha stavy a maticí přechodů $\boldsymbol{P}$. Konstruujme postupně matice $\boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{P}^3, \ldots$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}^2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{RS} + \boldsymbol{QR} & \boldsymbol{Q}^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}^3 & \boldsymbol{0} \\ \ldots & \boldsymbol{Q}^3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}^3} \quad \ldots$$

Potom $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}^N = \boldsymbol{0}$ a $p_{ij}^n \to 0$ exponencielně rychle pro každé dva stavy E_i a E_j, jež jsou přechodné.

Rozložitelné řetězce

Pozn. 21: Pro každý rozložitelný MŘ daný maticí $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$ má $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ inverzi a platí

$$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right)^{-1}$$

Matice $\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right)^{-1}$ se nazývá fundamentální matice.

PŘECHODNÉ STAVY

Uvažujme MŘ obsahující stavy trvalé i přechodné. Nechť T je množina všech přechodných stavů a C je nějaká nerozložitelná uzavřená množina trvalých stavů.
Zafixujme některý stav E_j a označme:

- $x_j = P\big(E_j \to C\big)$ je pravděpodobnost absorbce v C
- $1 - x_j$ je pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu E_j, navždy setrvá v T nebo dojde k absorbci v jiné uzavřené množině stavů
- $x_j^{(1)} = \sum_{k \in C} p_{jk}$ je pravděpodobnost absorbce v C v prvním kroku
- y_j je pravděpodobnost jevu, že systém, který je na počátku ve stavu E_j, navždy setrvá v T

PŘECHODNÉ STAVY (POKR.)

Věta 27: Pravděpodobnosti $x_j,\ j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\xi_j - \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \xi_\nu = x_j^{(1)}, \quad j \in T. \tag{6}$$

Věta 28: Pravděpodobnosti $y_j,\ j \in T$, vyhovují soustavě rovnic

$$\eta_j = \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \eta_\nu, \quad j \in T. \tag{7}$$

Věta 29: Soustava (6) má jediné omezené řešení $\Leftrightarrow$ soustava (7) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 30: Pravděpodobnosti setrvání y_j jsou rovny nule $\forall\, j \in T \Leftrightarrow$ soustava (7) nemá jiné omezené řešení než triviální.

Věta 31: V řetězci s konečně mnoha stavy všechna $y_j = 0$ a x_j jsou tedy jediným řešením soustavy (6).

PŘECHODNÉ STAVY (POKR.)

Věta 32: V řetězci se stavy $E_0, E_1, E_2 \ldots$ jsou všechny stavy přechodné $\Leftrightarrow$ soustava

$$\eta_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{j\nu}\eta_\nu, \quad 1 \leq j < \infty, \tag{8}$$

má netriviální omezené řešení.

Reverzibilní Markovovy řetězce

Def. 20: Uvažujme nerozložitelný MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a})$. Jestliže existují kladná čísla π_i tak, že $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i, j$, řekneme, že MŘ je reverzibilní.

Pozn. 22: Uvažujme nerozložitelný reverzibilní MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{a})$. Potom platí

$$P(X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k) = P(X_0 = k, X_1 = j, X_2 = i) \qquad \forall\ i, j, k$$

Věta 33: Jestliže MŘ $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ je reverzibilní, potom odpovídající vektor $\boldsymbol{\pi}$ je jeho stacionárním rozdělením.

Pozn. 23: Předchozí tvrzení neplatí naopak, tj. existence stacionárního rozdělení neimplikuje, že se nutně jedná o reverzibilní MŘ.

OBECNĚJŠÍ DEFINICE MARKOVOVA ŘETĚZCE

Mějme MŘ se stavy $E_1, E_2, \ldots$, s počátečním rozdělením $\{a_j\}$ a maticí přechodů $\mathbf{P} \equiv \{p_{ij}\}$. Zaveďme celočíselné náhodné veličiny (cnv) $X_n,\ 0 \le n < \infty$ předpisem

$$X_n \text{ nabývá hodnoty } j \Leftrightarrow \text{je stav v čase } n \text{ ve stavu } E_j$$

Potom platí $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$P\big(X_0 = j\big) = a_j$$

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big) = p_{ij}$$

Pozn. 24: Markovovský řetězec se potom často ztotožňuje s takto zkonstruovanou posloupností náhodných veličin. Požadujeme-li splnění pouze druhé rovnosti, dostaneme:

Def. 21: Posloupnost cnv $X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, nazveme Markovským řetězcem, jestliže $\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = i_0\big)$$
$$= P\big(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\big)$$

Obecnější definice Markovova řetězce (pokr.)

Pozn. 25: Markovovy řetězce, kterými jsme se až doposud zabývali, měly navíc vlastnost nezávislosti pstí p_{ij} na n. Takové řetězce budeme nazývat homogeními. Pokud $P\big(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\big)$ na n bude záležet, což budeme značit $p_{ij}(n,n+1)$, budeme hovořit o řetězcích nehomogeních.

Pozn. 26: Pravděpodobnosti

$$P\big(X_0=j_0,X_1=j_1,\ldots,X_n=j_n)\big)=a_{j_0}p_{j_0j_1}\ldots p_{j_{n-1}j_n},$$

se změní na

$$P\big(X_0=j_0,X_1=j_1,\ldots,X_n=j_n)\big)=a_{j_0}(0,1)p_{j_0j_1}(1,2)\ldots p_{j_{n-1}j_n}(n-1,n)$$

Příklad 11: Nechť $Y_k,\ 1\le k<\infty$ jsou nezávislé cnv. Nechť $X_n=\sum_{k=1}^n Y_k$. Potom posloupnost $\big\{X_n\big\},\ 1\le n<\infty$ tvoří Markovův řetězec. Ověřte.

Příklad 12: Nechť $Y_k,\ 1\le k<\infty$ jsou nezávislé cnv. Uvažujme posloupnost klouzavých součtů $X_n^\star=\sum_{k=1}^r Y_{n+k},\ r$ pevné. Ověřte, že potom posloupnost $\big\{X_n^\star,\ 1\le n<\infty\big\}$ obecně netvoří Markovův řetězec.

Isingův model – úvodní pojmy

- G . . . graf
- V . . . vrcholy (vertexes) grafu
- $|V| = card(V)$
- E . . . hrany (edges)
- $[i \leftrightarrow j]$ . . . indikátor hrany mezi stavy i a j
- nejjednodušší situace : každý vrchol i má stavy $\sigma_i \in \{-1, +1\}$
- obecně mohou být stavy $\{1, \dots, K\}$ a popisovat šedi, $|V| = card(V)$ barvy atd.
- $\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_1, \dots, \sigma_{|V|}\right)$ popisuje stav systému
- prostorem stavů S rozumíme $\{-1, +1\}^{|V|}$, resp. $\{1, \dots, K\}^{|V|}$

Isingův model

Def. 22: **Isingův model** je pravděpodobnostní rozdělení $\pi(\beta)$ na prostoru stavů $S = \{-1, +1\}^{|V|}$, kde

$$\pi(\beta) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{C_\beta},$$

kde

$$H(\sigma) = \sum_{[i \leftrightarrow j] \in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big] \quad \text{a} \quad C_\beta = \sum_{\sigma^\star \in S} e^{-\beta H(\sigma^\star)}$$

Pozn. 27: Funkce $H(\sigma)$ se ve fyzice nazývá Hamiltonián a reprezentuje tzv. energii konfigurace stavů σ.

Pozn. 28: Pro $\beta > 0$ jsou v daném modelu nejpravděpodobnější ty konfigurace stavů σ, pro něž je $H(\sigma)$ malá, tj. mnoho sousedů má tutéž hodnotu stavu (týž spin), tj. mají malou energii (informaci).

Def. 23: Středním spinem konfigurace σ rozumíme

$$M(\sigma) = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} \sigma_i$$

Modifikace Isingova modelu

- **Klasický Isingův model**:

$$S = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\sigma) = \sum_{[i\leftrightarrow j]\in E} I[\sigma_i \neq \sigma_j].$$

$$\underset{S}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{H(S)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{S}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{H(S)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

- **Isingův model s vnějším polem**:

$$S = \{-1, +1\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\sigma, h) = \sum_{[i\leftrightarrow j]\in E} I[\sigma_i \neq \sigma_j] - h \sum_{i\in V} \sigma_i.$$

Pro všechna $\beta > 0$ a $h > 0$ jsou hodnoty $+1$ preferovány před hodnotami -1.

Modifikace Isingova modelu (pokr.)

- **Potův model** pro „náhodné záplatování barevných obrázků“:

$$S = \{1, \dots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{[i \leftrightarrow j] \in E} I\big[\sigma_i \neq \sigma_j\big].$$

- **Isingův model pro černobílé obrázky**:

$$S = \{1, \dots, K\}^{|V|} \quad \text{a} \quad H(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{[i \leftrightarrow j] \in E} f\big(\sigma_i, \sigma_j\big),$$

  a $f(.)$ je některá vhodná vzdálenost, například:

$$f(\sigma_i, \sigma_j) = \big|\sigma_i - \sigma_j\big|^p, \ p \geq 1.$$

  Vrcholy typicky reprezentují pixely a na rozdíl od Potova modelu zde chceme, aby sousedi byli „podobně šedí“, nikoliv identičtí.

Aplikace v analýze obrazu

Zadání:

- Uvažujme fotku prezentovanou maticí pixelů rozměrů $L_1 \times L_2$
- Vrcholy jsou jednotlivé pixely
- Hrany spojují sousední pixely
- Stavy jsou $\{1, \ldots, K\}$
- Prostor stavů $S = \{1, \ldots, K\}^V$
- Obrázek je reprezentován konfigurací $\boldsymbol{\sigma} = \big(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|V|}\big) \in S$
- Pozorujeme zašuměný obraz $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{|V|} \sim N\big(0, \delta^2\big)$

Problém: Odhadnout skutečný obraz $\boldsymbol{\sigma}$, pozorujeme-li $\boldsymbol{Y}$ a předpokládáme, že $\boldsymbol{\sigma}$ má apriorní rozdělení $e^{-\beta H(\boldsymbol{\sigma})}/C_\beta$.

Nástroj: Bayesovská statistika a Markovovy řetězce (náhodná procházka po grafu).

Aplikace v analýze obrazu (pokr.)

Sdružené rozdělení vektoru $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y})$ je

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y}) \sim \frac{e^{-\beta H(\sigma)} \cdot \prod_{i\in V} \exp\left\{-\,(Y_i - \sigma_i)^2/2\delta^2\right\}}{\text{konstanta jež záleží na } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{Y})}$$

Aposteriorní rozdělení je

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y}) \sim \frac{\exp\left[-\,\beta H(\boldsymbol{\sigma}) + \left(2\delta^2\right)^{-1} \sum_{i\in V} \left(2Y_i\sigma_i - \sigma_i^2\right)\right]}{\text{funkce jež záleží na } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{Y})}$$

Další postup:

- Generovat z aposteriorního rozdělení $(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y})$. Rozsáhlý výběr pak reprezentuje konfigurace které lze považovat za možné (věrohodné) reprezentace obrazu.
- Alternativou je nalézt nejlepší (nejpravděpodobnější) obraz, tj. nalézt konfiguraci $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ maximalizující $P(\boldsymbol{\sigma} \,|\, \boldsymbol{Y})$.

Exponenciální rozdělení – opakování

Def. 24: Řekneme, že náhodná veličina X se řídí exponenciálním rozdělením ($X \sim Exp(\lambda)$), má-li hustotu tvaru:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Věta 34: Nechť $X \sim Exp(\lambda)$. Potom $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E\,X = \lambda^{-1}$ a $var\,X = \lambda^{-2}$.

Věta 35: Vlastnost zapomínání. Nechť $X \sim Exp(\lambda)$ a interpretujme ji jako dobu života nějakého procesu. Potom pravděpodobnost jevu, že proces přežije dobu $y (> 0)$ za podmínky, že doposud přežil dobu $x (> 0)$ na době dosavadního života nezáleží.

- Pro exponenciální rozdělení platí, že je jediné spojité rozdělení pro něž

$$P(X > x + y \,|\, X > x) = P(X > y).$$

- Mezi diskrétními rozděleními má tuto vlastnost rozd. geometrické.

Funkce intenzity

Def. 25: Nechť náhodná veličina X má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom funkcí intenzity nazveme

$$\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad x \in \mathbb{R}_1.$$

Pozn. 29: Nechť náhodná veličina X, kterou interpretujme jako dobu života nějakého procesu, má hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$. Potom pro pravděpodobnost okamžitého selhání platí:

$$P\big(x < X \leq x + \Delta \,|\, X > x\big) = \frac{P(x < X \leq x + \Delta)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)}$$
$$= \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - F(x)} \frac{\Delta}{\Delta} \overset{\Delta \to 0}{\approx} \Delta \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Pozn. 30: Nechť náhodná veličina $X \sim Exp(\lambda)$. Potom $\Lambda(x) = \lambda$. Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení s konstantní intenzitou.

Lineární proces zrodu a zániku

Uvažujme systém, který má konečně nebo spočetně mnoho stavů, a ze stavu E_n může s nezanedbatelnou pravděpodobností přecházet pouze do stavů sousedních, tj.

- $E_n \to E_{n+1}$ ... **zrod**
- $E_n \to E_{n-1}$ ... **zánik**
- Do jiných sousedů může přejít pouze s pravděpodobností „nekonečně malou".

Pravděpodobnosti přechodů v časovém intervalu $(t, t+h)$ nechť jsou:

- $P\big(E_n \to E_{n+1}\big) = \lambda_n h + o(h)$
- $P\big(E_n \to E_{n-1}\big) = \mu_n h + o(h)$
- $P\big(E_n \to E_{n\pm j},\ j > 1\big) = o(h)$

Lineární proces zrodu a zániku (pokr.)

Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost toho, že systém je v čase t ve stavu E_n. **Cílem je** určit $P_n(t+h)$ a najít $p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$.

- Pravděpodobnosti $P_n(t)$ splňují následující systém diferenciálních rovnic:

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \tag{9}$$

$$P_n'(t) = -\big(\lambda_n + \mu_n\big)P_n(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t), \; n \geq 1$$

- Je-li systém v čase 0 ve stavu E_i, pak jsou splněny následující počáteční podmínky, tj. $P_i(0) = 1$ a $P_n(0) = 0$ pro $n \neq i$.
- Pravděpodobnosti p_n existují, nezávisí na počátečních podmínkách a vyhovují systému lineárních rovnic, který dostaneme z (9) položíme-li $P_n'(t) = 0, \; n \geq 0$, tj. soustavě

$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \tag{10}$$

$$0 = -\big(\lambda_n + \mu_n\big)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1} + \lambda_{n-1}p_{n-1} \; n \geq 1$$

Lineární růst

Model. Předpokládejme, že systém je složen z prvků, které se mohou dělit i zanikat. Za malý časový interval délky h nechť pravděpodobnost toho, že se jeden prvek rozdělí na dva rovna je rovna $\lambda h + o(h)$, a pravděpodobnost, že zanikne, je rovna $\mu h + o(h)$, přičemž λ, μ jsou konstanty, které charakterizují prvky.

Pozn. 31: Je-li chování prvků nezávislé, pak jde o model množení a zániku s parametry $\lambda_n = n\lambda,\ \mu_n = n\mu$.

Věta 36: Soustava (9) má následující řešení:

$$P_0(t) = A(t)$$

$$P_n(t) = \big(1 - A(t)\big)\big(1 - B(t)\big)\big(B(t)\big)^{n-1},\ n \geq 1$$

kde

$$A(t) = \frac{\mu\big(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\big)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}, \quad B(t) = \frac{\lambda\big(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\big)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}.$$

Model ústředny s nekonečně mnoha linkami

Příklad 13: Mějme ústřednu s nekonečně mnoha telefoními linkami. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li obsazeno právě n linek.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že jeden hovor skončí v průběhu intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky hovorů jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ bude obsazena nová linka, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Model telefonní dvojbudky s neomezenou frontou

Příklad 14: Uvažujme stanici obsluhy, která může současně obsluhovat nejvýše dva zákazníky, např. telefonní dvojbudku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné neomezené fronty. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pokud $\lambda < 2\mu$, pak pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{kde} \quad p_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}.$$

Model parkoviště před MFF bez fronty

Příklad 15: Uvažujme parkoviště automobilů před MFF UK s kapacitou N míst. Stavem systému je počet aut na parkovišti, fronta se netvoří.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že automobil, který v čase t parkuje, odjede v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky stání jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijede nový automobil, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Model telefonní budky s omezenou frontou

Příklad 16: Uvažujme stanici obsluhy, která může obsluhovat nejvýše jednoho zákazníka, např. telefonní budku. Zákazníci, kteří nemohou být obslouženi, se řadí do jediné omezené fronty délky N. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, je-li počet zákazníků (v obsluze i ve frontě) právě n.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že zákazník, který je v čase t obsluhován, bude v intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky obsluhy jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t+h)$ přijde nový zákazník, je $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pro limitní pravděpodobnosti p_n platí

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad \text{kde} \quad p_0 = \mu^{N+1}\frac{\lambda-\mu}{\lambda^{N+2}-\mu^{N+2}}.$$

Problém jednoho opraváře a mnoha strojů

Příklad 17: Mějme M strojů obsluhovaných jedním opravářem. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže nepracuje právě n strojů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že stroj který je v čase t opravován, začne v intervalu $(t, t+h)$ pracovat, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky oprav jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že stroj který v čase t pracoval, se v intervalu $(t, t+h)$ porouchá, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_{M-k} se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametrem μ/λ, tj. pro $k = 1, \ldots, M$

$$p_{M-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k p_M, \quad \text{kde} \quad p_M = \left[1 + \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k\right]^{-1}$$

Model popisující práci několika svářečů

Příklad 18: Mějme N svářečů, kteří nezávisle na sobě ve víceméně náhodných intervalech odebírají proud. Řekneme, že se systém nachází ve stavu E_n, jestliže pracuje právě n svářečů.

Předpokládejme, že:

- Pravděpodobnost jevu, že svářeč který je v čase t pracuje, přestane pracovat v intervalu $(t, t+h)$, je rovna $\mu h + o(h)$.
- Délky sváření jsou vzájemně nezávislé.
- Pravděpodobnost jevu, že svářeč, který v čase t nepracoval, v intervalu $(t, t+h)$ pracovat začne, je rovna $\lambda h + o(h)$.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\big(N, \mu/(\mu+\lambda)\big)$

$$p_n = \binom{N}{n} \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{N-n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Model kinetiky nevratné chemické reakce

Příklad 19: Mějme látku A (reagent), jejíž molekuly se nevratně přeměňují v molekuly látky B (produkt), přičemž rychlost reakce je dána konstantou $\kappa > 0$. Nechť koncentrace reagentu A v čase t je představována náhodnou veličinou $X(t)$, přičemž $X(0) = n_0$.

Z fyzikální podstaty předpokládejme, že:

- Pst jevu, že se změní jedna molekuly za $(t, t+h)$ v případě, kdy se za čas $(0, t)$ změnilo právě $n_0 - n$ molekul, je $n\kappa h + o(h)$.
- Pst změny více než jedné molekuly za $(t, t+h)$ je nulová.
- Látky A a B jsou statisticky nezávislé.
- Inverzní reakce $B \to A$ nastává s pravděpodobností nula.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že limitní pravděpodobnosti p_n se řídí binomickým rozdělením $Bi\left(n_0, e^{-\kappa t}\right)$.

Systémy hromadné obsluhy

Def. 26: Systémem hromadné obsluhy budeme rozumět:

- Jednu nebo více paralelních stanic obsluhy (linek), k nimž přicházejí zákazníci, kteří obsluhu požadují a po obsloužení systém opouštějí.
- Zákazníci, kteří nemohou být okamžitě obslouženi (protože všechny stanice obsluhy jsou obsazené) se řadí do jediné fronty.
- Doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením A.
- Doby obsluhy, do nichž se nezapočítává doba čekání ve frontě) jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením B.

Pozn. 32: Rozdělení dob příchodů se zpravidla předpokládá:

- exponenciální . . . M (Markovian)
- deterministické . . . D (Deterministic)
- obecné . . . G (General)
- Erlangovo, tj. $\Gamma(n,\lambda)$ . . . E_n (Erlang)

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Def. 27: Systémy hromadné obsluhy **M/M/x** jsou charakterizovány tím, že příchody zákazníků se řídí homogenním Poissonovým procesem a doby obsluhy mají exponenciální rozdělení.

Věta 37: Systémy **M/M/x** lze popsat obecným procesem zrodu a zániku.

Pozn. 33: Pro model:

- M/M/1 : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty$ a $\mu_j = \mu,\ 1 \le j < \infty$
- M/M/c : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty,\ \mu_j = j\mu,\ 0 \le j \le c$ a
  $\mu_j = c\mu,\ c \le j < \infty$
- M/M/∞ : $\lambda_j = \lambda,\ 0 \le j < \infty,\ \mu_0 = 0$ a $\mu_j = j\mu,\ 0 \le j < \infty$

Blíže viz příklad o telefonní ústředně s nekonečně mnoho linkami nebo příklad o dvojbudce s neomezenou frontou, tj. příklady 13 a 14.

M/M/1, M/M/c a M/M/∞

Věta 38: Pro systémy **M/M/x** platí:

- M/M/1 : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$.
- M/M/c : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí useknutým Poissonovým rozdělením s parametry $\left(c+1,\ \lambda/\mu\right)$.
- M/M/∞ : limitní pravděpodobnosti p_n se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ/μ.

Věta 39: Pro systém **M/M/c** platí, že odchody ze stabilizovaného systému s neomezenou frontou (beze ztrát, odpadání apod.) s parametry λ (vstup) a μ (výstup) jsou opět popsány homogenním Poissonovým procesem s parametrem λ!

Pozn. 34: Systémy **M/M/c** se tedy dají dobře kombinovat a za předpokladu stabilizovatelnosti se chod výsledného systému dá popsat vhodným Markovovským procesem.

M/M/1

Pozn. 35: Uvažujme model **M/M/1**. Z věty 38 víme, že limitní pravděpodobnosti p_n ustáleného chování popisující počet zákazníků v ustáleném provozu systému se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $1 - \lambda/\mu$. Odtud ze základních vlastností geometrického rozdělení vyplývá, že:

- Střední počet zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}\Big/\Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)$
- Rozptyl počtu zákazníků v systému je $\frac{\lambda}{\mu}\Big/\Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)^2$
- Střední délka fronty je $\sum_j j p_{j+1} = \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^2\Big/\Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)$

Pozn. 36: Všimněme si, že rozdíl mezi středním počtem zákazníků v systému a střední délkou fronty je λ/μ a nikoliv 1. Rozmyslete!

M/M/1 (POKR.)

Pozn. 37: Uvažujme model **M/M/1**.
Potom doba T_n strávená v systému zákazníkem, který se zařadil jako n-tý se řídí gamma rozdělením $\Gamma(n+1,\mu)$, neboť hledaný čas se skládá ze zbytkového času obsluhovaného zákazníka a časů obsluhy všech čekajících ve frontě, včetně našeho zákazníka.
Rozdělení doby čekání T jednoho náhodně vybraného zákazníka je podle věty o úplné pravděpodobnosti směsí rozdělení T_n s vahami danými pravděpodobnostmi ustáleného provozu p_n. Ukažte, že:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \geq 0,$$

takže střední doba setrvání v systému je rovna $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

M/M/1 + M/M/1 = TANDEM

Sériové propojení dvou systémů obsluhy M/M/1 se nazývá **tandemové uspořádání**.
Podrobnosti ještě budou doplněny.

Simulace M/M/1

```
for (i in 1:maximální počet zákazníků){
   if (aktcas >= maximální čas){break}
   # simulace končí, pokud je dosaženo maximálního času

   while (min(časy naplánovaných událostí) < čas příchodu
     dalšího zákazníka){
     # někdo skončí obsluhu dřív, než dorazí další zákazník
     aktcas <- min(časy naplánovaných událostí)
     stav <- stav - 1
     záznam události, odebrání zákazníka z˜obsluhy

     # začátek obsluhy dalšího zákazníka
     # (uvolnila se obslužná stanice)
     if (fronta není prázdná){
       délka obsluhy <- obsluha(aktcas,stav,stanice)
       začátek obsluhy zákazníka, aktualizace fronty
     }
   }
   # nejbližší událostí je příchod i-tého zákazníka
   aktcas <- čas příchodu dalšího zákazníka
   stav <- stav + 1
   záznam události

   # pokud je volná stanice, bude zákazník rovnou obsluhován
   if (některá stanice je volná){začátek obsluhy zákazníka}
     else{zařazení zákazníka na konec fronty}

   # určení času příchodu dalšího zákazníka
   příchod dalšího zákazníka <- aktcas + prichod(aktcas,stav)}
```

M/M/1

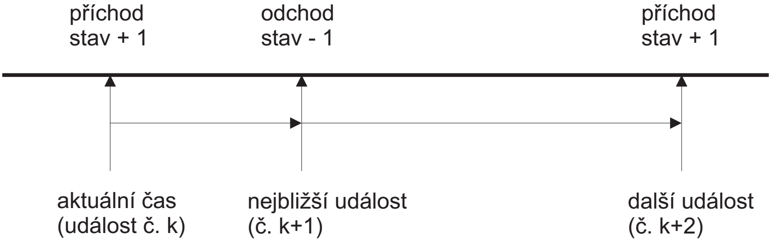
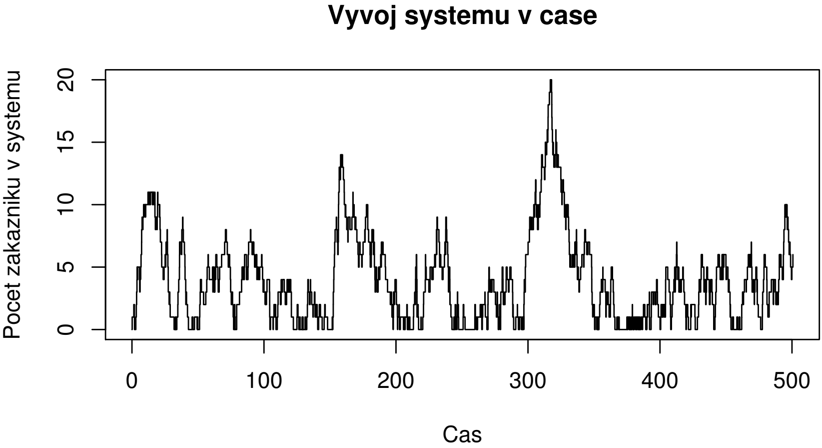


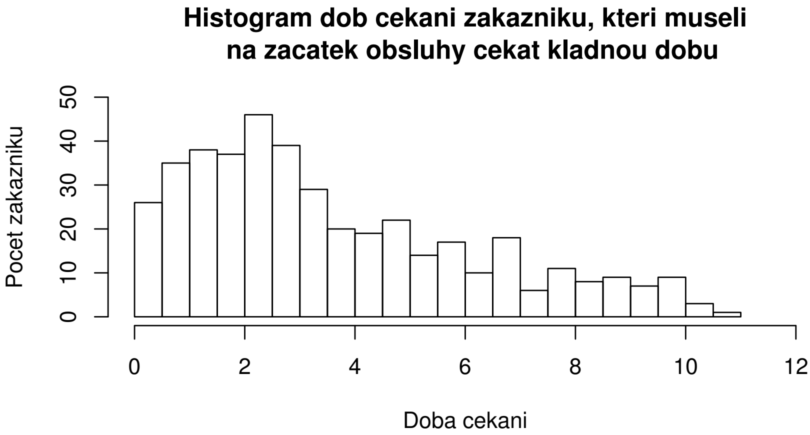
Schéma průběhu uvažovaného simulačního algoritmu.

M/M/1



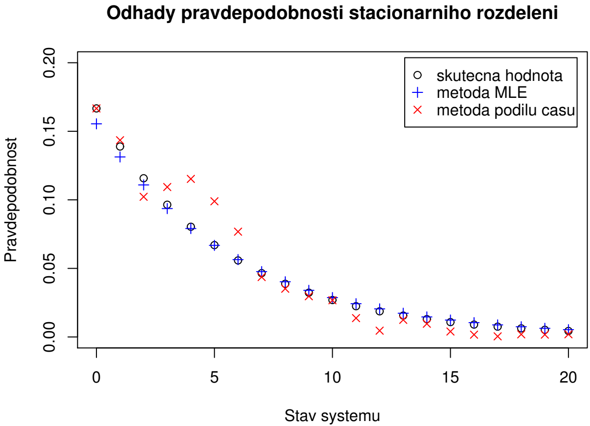
Časový vývoj počtu zákazníků v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$.

M/M/1



Histogram doby čekání na začátek obsluhy těch zákazníků, kteří museli čekat kladnou dobu (v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$).

M/M/1



Srovnání metod odhadu pravděpodobností stacionárního rozdělení v systému M/M/1 s parametry $\lambda = 1$ a $\mu = 1.2$.

ČÍTACÍ PROCES

Def. 28: Stochastický proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **čítací proces**, jestliže reprezentuje celkový počet „událostí“ jež se vyskytly do času t.

Pozn. 38: Čítací proces musí vždy splňovat:

- $N(t) \geq 0$.
- $N(t)$ nabývá přirozených hodnot.
- Jestliže $s < t$, potom $N(s) \leq N(t)$.
- Pro $s < t$ se $N(t) - N(s)$ rovná počtu událostí, jež se vyskytly v intervalu $(s, t]$.

Def. 29: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **proces s nezávislými přírůstky**, jestliže počty událostí jež se vyskytují v disjunktních intervalech jsou nezávislé náhodné veličiny.

Def. 30: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **proces se stacionárními přírůstky**, jestliže rozdělení počtu událostí, které se vyskytnou v libovolném intervalu, záleží pouze na jeho délce, nikoliv na jeho umístění.

Poissonův proces

Def. 31: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou** $\lambda,\ \lambda > 0$, jestliže:

i) $N(0) = 0$.

ii) Proces má nezávislé přírůstky.

iii) Počet událostí v libovolném intervalu délky t má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tj.

$$P\big(N(t+s) - N(s) = n\big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Def. 32: Čítací proces $N(t),\ t \geq 0$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou** $\lambda,\ \lambda > 0$, jestliže:

i) $N(0) = 0$.

ii) Proces má stacionární a nezávislé přírůstky.

iii) $P\big(N(h) = 1\big) = \lambda h + o(h)$.

iv) $P\big(N(h) \geq 2\big) = o(h)$.

Poissonův proces – vlastnosti

Věta 40: Definice 31 a 32 Poissonova procesu jsou ekvivalentní.

Pozn. 39: Podmínky (ii) – (iv) lze nahradit následující množinou ekvivalentních podmínek:

- **iii)** Proces má nezávislé přírůstky.
- **iv)** $P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) = \lambda h + o(h)$.
- **v)** $P\big(N(t+h) - N(t) \geq 2\big) = o(h)$.

Pozn. 40: Poissonův proces má stacionární přírůstky a $EN(t) = \lambda t$.

Pozn. 41: Výsledek, že $N(t)$ se řídí Poissonovým rozdělením, je důsledkem aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým.

Poissonův proces – doby mezi událostmi

Def. 33: Uvažujme Poissonův proces s intenzitou λ. Označme $T_n, \ n = 1, 2, \ldots$ dobu mezi n-tou a $(n-1)$-ní událostí, kde $T_0 = 0$. Posloupnost $\{T_n\}$ se nazývá **posloupností dob mezi událostmi**.

Věta 41: Posloupnost dob mezi událostmi se řídí exponenciálním rozdělením s intenzitou λ.

Věta 42: Uvažujme posloupnost dob mezi událostmi $\{T_n\}$. Nechť $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$. Potom S_n se řídí gamma rozdělením $\Gamma(n, \lambda)$ s hustotou

$$f_{S_n}(t; n; \lambda) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Rada. Vzpomeňte si na proces obnovy (10), odkud

$$N(t) \geq n \quad \Longleftrightarrow \quad S_n \leq t,$$

a zderivujme odpovídající distribuční funkci.

Poissonův proces jako model zrodu a zániku

Příklad 20: Uvažujme fyzikální systém, který podléhá okamžitým změnám způsobeným nahodilými vlivy, např. telefonní hovory, rozpad atomů apod. Označme $P_n(t)$ pravděpodobnost jevu, že za dobu t nastalo právě n změn.

Předpokládejme:

- Stacionární proces, tj. že tato situace nezávisí na poloze intervalu a délce t na časové ose.
- Bez ohledu na počet změn v intervalu $(0, t)$ nechť pravděpodobnost jevu, že v intervalu $(t, t + h)$ nastane jedna změna je $\lambda h + o(h)$, zatímco pst jevu, že nastane více změn je $o(h)$.

Pozn. 42: Všimněte si, že změny v intervalech $(0, t)$ a $(t, t + h)$ jsou nezávislé.

Úkoly:

- Sestavte diferenciální rovnice pro pravděpodobnosti $P_n(t)$.
- Ukažte, že pravděpodobnosti $P_n(t)$ se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λt.

Větvící se proces – aneb jak se mohou šířit viry

Model. Uvažujme jedince, kteří mohou dát vznik novým jedincům téhož druhu s pravděpodobnostmi

$$P(U = j) = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

a vytvořující funkci $P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.
Na začátku (nultá generace) existuje jeden jedinec. Nechť bezprostřední potomci n-té generace tvoří $(n+1)$-ní generaci a jedinci jednají nezávisle na sobě.

Problémy.

- Najděte rozdělení prvků v n-té generaci.
- Spočtěte limitní (tj. pro $n \to \infty$) pravděpodobnost jevu, že populace vymře.

Větvící se proces (pokr.)

Model. Nechť $X_0 = 1$, $X_1 (\equiv U)$ se řídí rozdělením (11) s vytvořující funkcí $P_1(x) \equiv P(x)$. Nechť X_n popisuje počet jedinců n-té generace.

Potom počet potomků každého z X_1 jedinců první generace je n.v. s rozdělením (11), jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na X_1, tj.

$$X_2 = U_1 + \ldots + U_{X_1}$$

Podobně X_3 jsou potomci druhého řádu jedinců první generace, tj. X_1 n.v. s rozdělením jako X_2, resp. potomky X_2 náhodných veličin s rozdělením jako X_1, tj. (11) atd.

Věta 43: Vytvořující funkce $P_n(x)$ n.v. X_n splňují rekurentní vztah

$$P_{n+1}(x) = P\big(P_n(x)\big) = P_n\big(P(x)\big)$$

a platí

$$E\,X_n = \big(E\,X_1\big)^n, \quad varX_n = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \left(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Markovské řetězce se spojitým časem

Def. 34: Markovským řetězcem se spojitým časem budeme rozumět náhodný proces takový, že se pohybuje ze stavu do stavu podle některého Markovova řetězce, přičemž doby, které stráví v jednotlivých stavech (než přejde do stavu jiného), se řídí exponenciálním rozdělením. Navíc, doby setrvání v jednotlivých stavech tvoří posloupnost nezávislých náhodných veličin.

Pozn. 43: Jinými slovy, jde o náhodný proces takový, že:

- Čas strávený ve stavu i se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/v_i$.
- Jestliže proces opouští stav i a vstupuje do stavu j, činí tak s pravděpodobností P_{ij}, přičemž

$$P_{ii} = 0 \ \forall\ i \quad \& \quad \sum_j P_{ij} = 1 \ \forall\ i.$$

Charakterizace náhodných veličin

Pozn. 44: Připomeňme, že náhodná veličina X může být jednoznačně charakterizována některou z následujících charakteristik:

- Hustotou $f(x),\ x \in \mathbb{R}_1$.
- Distribuční funkcí $F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}_1$.
- Charakteristickou funcí $\varphi(t) = E\, e^{itX},\ t \in \mathbb{R}_1$.

Některé „specielní" typy náhodných veličin mohou být vedle toho jednoznačně charakterizovány i některou jinou charakteristikou, např.

- Celočíselné náhodné veličiny jednoznačně charakterizuje jejich vytvořující funkce $P(x)$.
- Nezáporné náhodné veličiny jednoznačně charakterizuje funkce spolehlivosti $R(x) = P(X > x) = 1 - F(x),\ x \in \mathbb{R}_1$, nebo intenzita poruch $\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)},\ x > 0$.

Pro další charakterizace a výpočet momentů je pak velice užitečná momentová vytvořující funkce $m(t) = E\, e^{tX},\ t \in \mathbb{R}_1$.

Podmíněná pravděpodobnost

Def. 35: Mějme pravděpodobnostní prostor $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\big)$. Nechť jevy $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(B) > 0$. Potom podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky B rozumíme

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

PODMÍNĚNÉ CHARAKTERISTIKY

Def. 36: Nechť X a Y jsou dvě diskrétní náhodné veličiny. Potom:

- Podmíněnou hustotou X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathcal{P}\big(X = x|Y = y\big) = \frac{\mathcal{P}\big(X = x, Y = y\big)}{\mathcal{P}\big(Y = y\big)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

- Podmíněnou distribuční funkcí X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathcal{P}\big(X \le x|Y = y\big) = \sum_{z \le x} p_{X|Y}(z|y)$$

- Podmíněnou střední hodnotou X za podmínky $Y = y$ rozumíme:

$$E\big[X|Y = y\big] = \sum_x x \cdot \mathcal{P}\big(X = x|Y = y\big) = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$

Vytvořující funkce

Def. 37: Nechť $a_0, a_1, \dots$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada $\mathcal{A}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konverguje v některém okolí nuly, nazveme ji *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_j\}$.

Pozn. 45: Je-li $\{a_j\}$ omezená, pak zřejmě $\mathcal{A}(x)$ konverguje alespoň v intervalu $(-1, 1)$.

Def. 38: Je-li X celočíselná náhodná veličina, pro níž $P(X = j) = p_j$, $j = 0, 1, 2, \dots,\ \sum_j p_j = 1$, pak její *(pravděpodobnostní) vytvořující funkcí* budeme rozumět funkci $\mathcal{P}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$.

Pozn. 46:

- Vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ jednoznačně charakterizuje odpovídající náhodnou veličinu X.
- Všimněte si, že $\mathcal{P}(t) = E\, t^X$ $\Big[$připomeňme: $E\,X = \sum_j p_j x_j$ a $E\,g(X) = \sum_j p_j g(x_j)\Big]$.
- Pro celočíselnou náhodnou veličinu X její vytvořující funkce vždy konverguje také v bodě $x = 1$, neboť $\mathcal{P}(1) = 1$.

Vytvořující funkce — příklady

Příklad 21: Ověřte tvar vytvořujících funkci pro následující rozdělení:

- Alternativní ... $\mathcal{P}(x) = q + px$
- Binomické ... $\mathcal{P}(x) = (q + px)^n$
- Poissonovo ... $\mathcal{P}(x) = \exp\{-\lambda + \lambda x\}$
- Geometrické ... $\mathcal{P}(x) = p/(1 - qx)$
  resp. $= px/(1 - qx)$
- Negativně binomické ... $\mathcal{P}(x) = \big(p/(1 - qx)\big)^r$
  resp. $= \big(px/(1 - qx)\big)^r$
- Rovnoměrné ... $\mathcal{P}(x) = (1 - x^{n+1})/\big((n + 1)(1 - x)\big)$
  resp. $= \big(x(1 - x^n)\big)/\big(n(1 - x)\big)$

Spočtěte pomocí těchto vytvořujících funkcí odpovídající střední hodnotu a rozptyl.

Pozn. 47: Uvědomte si, že geometrické, respektive negativně binomické rozdělení jsou nejjednodušší modely popisující rozdělení doby čekání.

VLASTNOSTI VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

Věta 44: Označme $q_k = P(X > k) = \sum_{j>k} p_j$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a odpovídající vytvořující funkci $\mathcal{Q}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$. Pak pro $-1 < x < 1$ platí $\mathcal{Q}(x) = \big(1 - \mathcal{P}(x)\big)/(1 - x)$.

Věta 45: Pro celočíselnou náhodnou veličinu X platí

$$E\,X = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \mathcal{P}'(1) = \mathcal{Q}(1)$$

Věta 46: Nechť pro celočíselnou náhodnou veličinu X je poloměr konvergence odpovídající vytvořující funkce větší než jedna. Potom platí

$$var\,X = \mathcal{P}''(1) + \mathcal{P}'(1) - \big(\mathcal{P}'(1)\big)^2 = 2\mathcal{Q}'(1) + \mathcal{Q}(1) - \big(\mathcal{Q}(1)\big)^2$$

Pozn. 48: Věta 46 zůstává v platnosti i v případě, že poloměr konvergence $\mathcal{P}(x)$ je roven jedné, pokud existuje konečná $\lim_{x\to 1_-} \mathcal{Q}''(x)$ a pokud derivace v bodě $x = 1$ vystupující ve vzorci pro $var\,X$ nahradíme jejich limitami pro $x \to 1_-$.

ROZKLAD NA ČÁSTEČNÉ ZLOMKY

Pozn. 49: Teoreticky je znalost $\mathcal{P}(x)$ ekvivalentní znalosti $\{p_j\}$, neboť $p_j = \mathcal{P}^{(j)}(0)/j!$. V praxi však může být získání jednotlivých pravděpodobností značně náročné. V některých případech nám pomůže následující tvrzení.

Věta 47: Nechť vytvořující funkce $\mathcal{P}(x)$ posloupnosti $\{p_j\}$ se dá vyjádřit ve tvaru $\mathcal{P}(x) = U(x)/V(x)$, kde $U(x)$ a $V(x)$ jsou polynomy bez společných kořenů, $U(x)$ je stupně nižšího než $V(x)$ a nechť kořeny polynomu $V(x)$ jsou vesměs jednoduché. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}} + \cdots + \frac{\rho_m}{x_m^{n+1}}, \quad 0 \le n < \infty,$$

kde m je stupeň polynomu $V(x)$, $x_1, \ldots, x_m$ jsou jeho kořeny a $\rho_k = -U(x_k)/V'(x_k)$, $1 \le k \le m$.

Pozn. 50: Pro výpočt ρ_k se zpravidla užívá technika rozkladu na částečné zlomky, kterou má zabudovanou jak program *Maple* tak program *Mathematica*.

Rozklad na částečné zlomky (pokr.)

Pozn. 51: Nechť x_1 je ten kořen $V(x)$ pro nějž $|x_1| < x_k,\ 2 \le k \le m$. Potom

$$p_n = \frac{\rho_1}{x_1^{n+1}}\Big(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big(\frac{x_1}{x_2}\Big)^{n+1} + \ldots + \frac{\rho_m}{\rho_1}\Big(\frac{x_1}{x_m}\Big)^{n+1}\Big),$$

takže pro $n \to \infty$ platí $p_n \approx \rho_1/x_1^{n+1}$, kde $\rho_1 = -U(x_1)/V'(x_1)$.

Pozn. 52: Pro platnost asymptotického vztahu $p_n \approx \rho_1/x_1^{n+1}$ lze vynechat předpoklad, že $U(x)$ je stupně menšího než $V(x)$ a jednoduchost stačí požadovat jenom u kořene x_1. Ze zkušenosti je přitom známo, že aproximace je dobrá i pro malé hodnoty n.

Příklad 22: Nechť q_n je pravděpodobnost toho, že v posloupnosti n hodů mincí nepadne ani jednou trojice líců za sebou. Odvoďte vytvořující funkci $Q(x)$ a spočtěte pro menší hodnoty n pravděpodobnosti q_n jak přesně, tak přibližně.
Řešení: $Q(x) = \big(8 + 4x + 2x^2\big)/\big(8 - 4x - 2x^2 - x^3\big)$.

Konvoluce

Def. 39: Nechť $a_0, a_1, \dots$ a $b_0, b_1, \dots$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Potom posloupnost $c_0, c_1, \dots$ definovaná vztahem

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

se nazývá konvoluce posloupností $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$, a značí se $\{c_j\} = \{a_j\} \star \{b_j\}$.

Věta 48: Nechť $\{a_j\}$ a $\{b_j\}$ jsou posloupností s vytvořujícími funkcemi $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{B}(x)$. Potom pro vytvořující funkci jejich konvoluce $\{c_j\}$ platí

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x).$$

Pozn. 53: Konvoluci $\{a_j\} \star \{a_j\}$ nazýváme konvoluční mocninou a značíme ji $\{a_j\}^{2\star}$. Podobně n-tou konvoluční mocninu $\{a_j\} \star \dots \star \{a_j\}$ značíme $\{a_j\}^{n\star}$.

Věta 49: Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j\}$ a vytvořující funkcí $\mathcal{P}(x)$. Pak rozdělení součtu $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ je dáno n-tou konvoluční mocninou $\{p_j\}^{n\star}$ a odpovídající vytvořující funkce je $\mathcal{P}(x) \dots \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^n(x)$.

SLOŽENÁ ROZDĚLENÍ

Věta 50: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ a N jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny, X_i mají totéž rozdělení $\{f_j\}$ a N nechť má rozdělení $\{g_j\}$. Potom $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ je též celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{h_j\}$ a platí

$$h_j = P(S_N = j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot \{f_j\}^{n\star}.$$

Jsou-li $\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)$ a $\mathcal{C}(x)$ vytvořující funkce pozdělení $\{f_j\}, \{g_j\}$ a $\{h_j\}$, potom $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(x)\big)$ a $E\,S_N = E\,X_1 \cdot E\,N$. Rozptyl spočteme aplikací Věty 46 a pravidel pro derivaci složené funkce.

Pozn. 54: Všimněme si, že náhodná veličina $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ není nic jiného než náhodný součet náhodných veličin.

Příklad 23: Nechť počet snesených vajíček N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda)$ a pravděpodobnost narození jedince z vajíčka nechť je p, tj. X_i se řídí alternativním rozdělením. Ukažte, že potom S_N se řídí Poissonovým rozdělením $Po(\lambda p)$.