第3章

渐进记法

渐进符号的引入

- 确定程序的操作计数和步数有两个重要的原因：
  - 比较两个完成同一功能的程序的时间复杂性；
  - 预测随着实例特征的变化，程序运行时间的变化量。
- 操作计数和步数都不能够非常精确地描述时间复杂性。
  - 操作计数: 把注意力集中在某些“关键”的操作上，而忽略了所有其他操作。
  - 执行步数: 概念本身就不精确。

渐进符号的引入

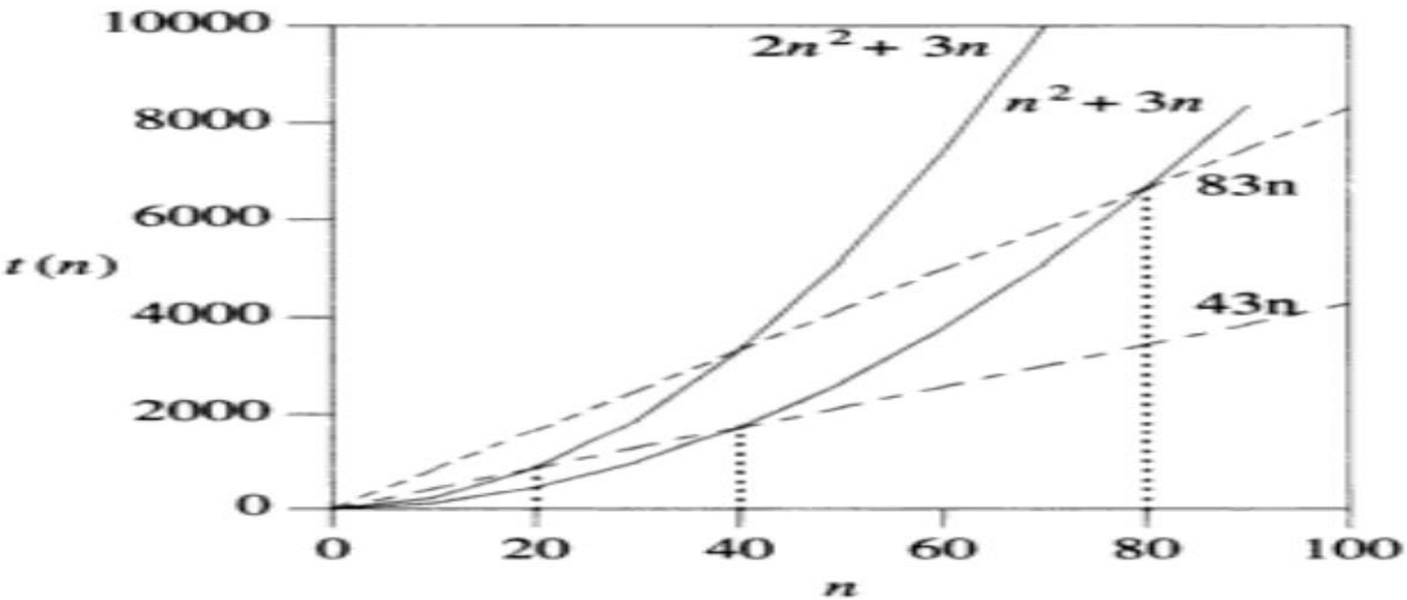
- 引入渐进符号的目的：
  - 描述大型实例特征下，时间复杂性和空间复杂性的具体表现。
  - 渐进符号O使用最普遍

渐进符号的引入

- 如果有两个程序的时间复杂性分别为:
  - $c_1n^2+c_2n$ 和 c_3n,
- 对于足够大的n，复杂性为c_3n的程序将比复杂性为$c_1n^2+c_2n$ 的程序运行得快。
- 对于比较小的n值，两者都有可能成为较快的程序(取决于c_1, c_2和c_3)。
- 如果：$c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=100$, 则有
  - $c_1n^2 + c_2n \le c_3n$　　　　$n \le 98$
  - $c_1n^2+c_2n > c_3n$　　　　$n > 98$

时间函数比较示例

- $t_A(n)=n^2+3n;\ t_B(n)=43n;$
- $t_A(n)=2n^2+3n;\ t_B(n)=83n;$



- $t_A(n)=c_1n^2+c_2n+c_3;\ t_B(n)=c_4n;$

渐进符号O, Ω, Θ, o

- 设***f(n)***表示程序的时间复杂性或空间复杂性（***n***为实例特征）。
- **O(Big Oh)**符号给出了函数f的一个上限。
- **Ω(Omega)**符号给出了函数f的一个下限。

  Θ(Theta)符号，函数f的上限与下限相同。
- **o(Little oh)**符号。

渐进的大于、小于、等于

- 定义3-1，令p(n)和q(n)是两个非负函数

p(n)* 渐进地大于 *q(n)

当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\frac{q(n)}{p(n)}=0$

q(n)* 渐进地小于 *p(n)

当且仅当 ***p(n)*渐进的大于*q(n)***

p(n)* 渐进地等于 *q(n)

当且仅当 任何一个都不是渐进的大于另一个

例3-1

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n+7}{3n^2+2n+6}=0$
  - $3n^2+2n+6$ 渐进地大于 $10n+7$
  - $10n+7$ 渐进地小于 $3n^2+2n+6$

- $8n^4+9n^2$ 渐进地大于 $100n^3-3$
- $2n^2+3n$ 渐进地大于 83n
- $12n+6$ 渐进地等于 $6n+2$

f(n) 中的项

- ***f(n)***：表示程序的时间复杂性或空间复杂性（***n***为实例特征）。
- ***f(n)***一般为若干项之和
- 例：$f(n)=3n^2+2n+6$,
  - 项：$3n^2$， $2n$， 6

$f(n)$中通常出现的项

项	名称
1	常数
$\log n$	对数
n	线性
$n\log n$	n个logn
n^2	平方
n^3	立方
2^n	指数
$n!$	阶乘

- **$1 < \log n < n < n\log n < n^2 < n^3 < 2^n < n!$**
  - <：渐进地小于

大O记法

- ***f(n)=O(g(n))*** (读作 “*f(n)* 是*g(n)*的大*O*”)， 表示 *f(n)* **渐进地小于或等于** *g(n)*
- $3n^2+2n+6$ 渐进地大于 $10n+7$
  - $10n+7=O(3n^2+2n+6)$;
  - $3n^2+2n+6\neq O(10n+7)$

- $100n^3-3=O(8n^4+9n^2)$
- $8n^4+9n^2\neq O(100n^3-3)$
- $83n=O(2n^2+3n)$
- $12n+6=O(6n+2)$

渐进复杂性分析

- $f(n)=O(g(n))$
- $f(n)=0$，$g(n)=0$
- 除$f(n)=0$以外，$g(n)$通常是
  - 令$f(n)=O(g(n))$为真的最小单位项（系数为1）
  - $f(n) = 10n + 7 = O(3n^2 + 2n + 6)$
  - $f(n) = 10n + 7 = O(n)$
- $f(n) = 8n^4+9n^2 = O(n^4)$

  $f(n) = 100n^3 -3 = O(n^3)$

  $f(n) = 3n^2 + 2n + 6 = O(n^2)$

  $f(n) = 12n + 6 = O(n)$

渐进复杂性分析

- 渐进复杂性分析，用**步数中渐进最大的项**来描述复杂度。
  - f(n)：步数函数
  - 步数函数中最小单位项：系数为1的各项
  - g(n)：最大项(渐进最大的项)
- 例：$f(n)=3n^2+6n\log n+7n+5$
- 最小单位项：n^2、$n\log n$、n、1
- 最大项：n^2
- $f(n)=3n^2+6n\log n+7n+5$

  $=O(n^2)$

渐进记法Ω

- $f(n)=\Omega(g(n))$（读作“$f(n)$ 是$g(n)$的Ω”
  表示 $f(n)$ 渐进地大于或等于 $g(n)$

- $f(n) = 10n + 7 = \Omega(n)$
- $f(n) = 100n^3 - 3 = \Omega(n^3)$
- $f(n) = 3n^2 + 2n + 6 = \Omega(n)$
- $f(n) = 8n^4 + 9n^2 = \Omega(n^3)$

渐进记法 Θ

- $\boldsymbol{f(n)=\Theta(g(n))}$ (读作 " $f(n)$ 是$g(n)$的Θ "

  表示 $f(n)$ 渐进地等于 $g(n)$

- $f(n) = 10n + 7 = \Theta(n)$
- $f(n) = 100n^3 - 3 = \Theta(n^3)$
- $f(n) = 3n^2 + 2n + 6 \neq \Theta(n)$
- $f(n) = 8n^4 + 9n^2 \neq \Theta(n^3)$

大O记法

- 定义3-3［大O记法］：
- $f(n)=O(g(n))$（读作"$f(n)$是$g(n)$的大O"），当且仅当存在正的常数c和n_0，使得对于所有的n，$n \geq n_0$，有$f(n) \leq cg(n)$。
- g是f的一个上限（不考虑常数因子c）
  - O表示量级(Order)。(最坏情况)
  - $O(g(n))$表示当n增大时，$f(n)$至多将以正比于$g(n)$的速度增长。
  - n足够大时，$f(n)$不大于$g(n)$的一个常数倍。

线性函数

- 例 3-7

$f(n)=\mathbf{3}\boldsymbol{n}\mathbf{+2}$

当$n \geqslant n_0=2$时， $f(n)=3n+2 \leq 3n+n=4n$

$f(n)=\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$

$f(n)=100n+6$,

当 $n \geqslant n_0=6$, $f(n)=100n+6 \leqslant 100n+n=101n$

$f(n)= \mathbf{100n+6=O(n)}$。

平方函数

- 例 3-8

$f(n)=10n^2 + 4n + 2$

$n\geq 2,\ f(n)\leq 10n^2 + 5n$

$n\geq 5$，　$5n\leq n^2$

$n\geq n_0=5$，

$f(n)\leq 10n^2 + n^2$

$\qquad = 11n^2$，

$f(n)=O(n^2)$

$10n^2 + 4n + 2 \ = O(n^2)$

指数函数

- 例 3-9

$f(n)=6*2^n+n^2$

$n\geq4$，　$n^2\leq2^n$，

$n\geq4$，$f(n)\leq6*2^n+2^n=7*2^n$

$6*2^n+n^2=O(2^n)$

常数函数

- 例 3-10

$f(n)=c$

$f(n)=O(1)$

最小上限

- 例 3-11

  $f(n)$=3n+3

  $n\geq 3$, $f(n)$=**3n+3**≤3n+n=4n=**O(n)**

  $n\geq 2$, $f(n)$=**3n+3**≤$3n^2$ = **O(n²)(**不是最小上限)

- 语句f(n)=O (g(n)) 仅表明对于所有的$n\geq n_0$，cg(n)是f(n)的一个上限。它并未指出该上限是否为最小上限。
- 为了使语句$f(n)$=O(g(n))有实际意义，其中的g(n)应尽量地小。

Ω符号

- 定义3-4[Ω符号]:
- ***f(n)=Ω(g(n))*** 当且仅当 存在正的常数*c*和n_0，使得对于所有的*n*, $n \geq n_0$，有$f(n) \geq cg(n)$。
- *g* 是*f* 的一个下限(不考虑常数因子*c*)。

$$f(n)=3n+2 \geq 3n = \mathbf{\Omega}(n)$$

$$f(n)=10n^2 + 4n + 2 \geq 10n^2 = \mathbf{\Omega}(n^2)$$

$$f(n)=6*2^n + n^2 \geq 6*2^n = \mathbf{\Omega}(2^n)$$

最大下限

- $f(n)=3n+2\geq 3n=\mathbf{\Omega}(n)$
- $f(n)=3n+2=\mathbf{\Omega}(1)$

- 为了使语句$f(n)=\mathbf{\Omega}(g(n))$更有实际意义，其中的g(n)应**足够地大**。
- 使用$3n+2=\mathbf{\Omega}(n)$

- $6*2^n+n^2=\Omega(2^n)$
- $6*2^n+n^2=\mathbf{\Omega}(1)$
- 使用$6*2^n+n^2=\Omega(2^n)$

Θ符号

- 对于所有足够大的n（如$n \geq n_0$），g既是f 的上限也是f 的下限(不考虑常数因子c)。

- 定义3-5[Θ符号]： ***$f(n)=\Theta(g(n))$*** (读作 "$f(n)$是$g(n)$的Θ"，当且仅当存在正常数c_1, c_2和n_0，使得对于所有的n, $n \geq n_0$, 有$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ 。

- 函数f介于函数g的c_1倍和c_2倍之间，除非n小于n_0。

Θ符号

$f(n)=3n+2=\Theta(n)$

$f(n)=10n^2 + 4n + 2=\Theta(n^2)$

$f(n)=6*2^n + n^2 = \Theta(2^n)$

O符号有用的结论

- 定理3-1
  如果$f(n)=a_m n^m+ \cdots +a_1 n+a_0$ 且$a_m>0$，则$f(n)=O(n^m)$。
- 加法规则：
  $$\begin{aligned} T(n)&=T_1(n)+T_2(n)\\ &=O(g_1(n)) + O(g_2(n))\\ &=O(\max(g_1(n), g_2(n))) \end{aligned}$$
- 乘法规则：
  $$\begin{aligned} T(n)&=T_1(n)*T_2(n)\\ &=O(g_1(n)) * O(g_2(n))\\ &=O(g_1(n)*g_2(n)) \end{aligned}$$

Ω、Θ符号有用的结论

- 定理3-3
  - 如果$f(n)=a_m n^m+\cdots+a_1 n+a_0$且$a_m>0$，则$f(n)=\Omega(n^m)$。

- 定理3-5
  - 如果$f(n)=a_m n^m+\cdots+a_1 n+a_0$且$a_m>0$，则$f(n)=\Theta(n^m)$。

小o记法

- 定义[小o符号]:
- $\boldsymbol{f(n)=o(g(n))}$ (读作 “ $f(n)$ 是$g(n)$的小O”)，当且仅当 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

常用的渐进符号标记(P74)

$f(n)$		渐进符号
E1	c	$\oplus(1)$
E2	$\sum_{i=0}^{k} c_i n^i$	$\oplus(n^k)$
E3	$\sum_{i=1}^{n} i$	$\oplus(n^2)$
E4	$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\oplus(n^3)$
E5	$\sum_{i=1}^{n} i^k, k>0$	$\oplus(n^{k+1})$
E6	$\sum_{i=0}^{n} r^i, r>1$	$\oplus(r^n)$
E7	$n!$	$\oplus((n/e)^n)$
E8	$\sum_{i=1}^{n} 1/i$	$\oplus(\log n)$

$\oplus$可以是O、Ω、Θ之一。

关于渐进符号的推理规则(P74)

I1 $\{f(n)=\Theta(g(n))\} \rightarrow \sum_{n=a}^{b} f(n)=\Theta(\sum_{n=a}^{b} g(n))$

I2 $\{f_i(n)=\Theta(g_i(n)), 1 \le i \le k\} \rightarrow \sum_{1}^{k} f_i(n)=\Theta(\max_{1 \le i \le k} \{g_i(n)\})$

I3 $\{f_i(n)=\Theta(g_i(n)), 1 \le i \le k\} \rightarrow \prod_{1}^{k} f_i(n)=\Theta(\prod_{1}^{k} g_i(n))$

I4 $\{f_1(n)=O(g_1(n)), f_2(n)=\Theta(g_2(n))\} \rightarrow f_1(n)+f_2(n)=O(g_1(n)+g_2(n))$

I5 $\{f_1(n)=\Theta(g_1(n)), f_2(n)=\Omega(g_2(n))\} \rightarrow f_1(n)+f_2(n)=\Omega(g_1(n)+g_2(n))$

I6 $\{f_1(n)=O(g(n)), f_2(n)=\Theta(g(n))\} \rightarrow f_1(n)+f_2(n)=\Theta(g(n))$

复杂性分析举例：

```
template<class T>
T sum(T a[], int n)
   {//计算a[0:n - 1]中元素之和
   T theSum=0;
   stepCount++; //对应于theSum=0
   for (int i=0; i<n; i++) {
      stepCount++; //对应于for语句
      theSum +=a[i];
      stepCount++; //对应于赋值语句
      }
   stepCount++; //对应于最后一个for语句
   stepCount++; //对应于return语句
   return theSum;
   }
```

步数：2n+3

$t_{sum}(n) = 2n+3=\Theta(n)$

函数sum(程序1-30)的渐进复杂性

语句	s/e	频率	总步数
T sum(T a[], int n)	0	0	$\Theta(0)$
{	0	0	$\Theta(0)$
T theSum=0;	1	1	$\Theta(1)$
for(int i=0;i<n;i++)	1	n+1	$\Theta(n)$
theSum +=a[i];	1	n	$\Theta(n)$
return theSum;	1	1	$\Theta(1)$
}	0	0	$\Theta(0)$

$t_{sum}(n) = \Theta(\max(g_i(n))) = \Theta(n)$

顺序搜索的渐进复杂性

语 句	s/e	频度	步数
`int SequentialSearch(T a[],T& x, int n)`	0	0	Θ(0)
`{`	0	0	Θ(0)
`int i;`	1	1	Θ(1)
`for(i=0;i<n&&a[i]!=x;i++)`	1	Ω(1),O(n)	Ω(1),O(n)
`if(i==n) return -1;`	1	1	Θ(1)
`return i;`	1	Ω(0),O(1)	Ω(0),O(1)
`}`	0	0	Θ(0)

$$t_{SequentialSearch}(n)=\Omega(1)$$

$$t_{SequentialSearch}(n)=O(n)$$

函数sequentialSearch的渐进复杂性

求排列(程序1-32)的渐进复杂性

程序1-32

```
template<class T>
void permutations(T list[], int k, int m)
{ //生成list[k:m]的所有排列方式 , 输出前缀是 list[0:k-1] 后缀是 list[k:m]的所有排列方式
   int i;
   if (k = =m) {// list[k:m]只有一个排列
      copy(list,list+m+1,ostream_iterator<T>(cout, " "))  ;
            cout << endl;
         }
   else // list[k:m ]有多个排列方式，递归地产生这些排列方式
         for (i=k; i <= m; i++) {
               swap (list[k], list[i]);
               permutations (list, k+1, m);
               swap (list[k], list[i]);
              }
}
```

求排列(程序1-32)的渐进复杂性

- 假定m=n-1。
- k=m:所需要的时间为cn(c是一个常数)。
  - $t_{permutations}(k, m) = t_{permutations}(m, m) = cn$
- k<m:执行else语句,
  - for循环将被执行**m-k+1**次
  - 每次循环所花费的时间:$d t_{permutations}(k+1, m)$,d是一个常数.
  - $t_{permutations}(k, m) = d(m-k+1) t_{permutations}(k+1, m)$。使用置换的方法,可以得到:
- $t_{permutations}(0, m) = \Theta((m+1)*(m+1)!) = \Theta(n*n!)$,其中n≥1。

例 3-24 折半搜索 (Binary Search)

- 在有序数组a中查找元素x

搜索过程示例

[05 13 19 21 37 56 64 75 80 88 92]

left middle right

[05 13 19 21 37] 56 64 75 80 88 92

left middle right

05 13 19 [21 37] 56 64 75 80 88 92

left right

middle

查找x=21的过程(查找成功)

搜索过程示例

[05 13 19 21 37 56 64 75 80 88 92]

05 13 19 21 37 56 [64 75 80 88 92]

05 13 19 21 37 56 64 75 80 [88 92]

05 13 19 21 37 56 64 75 80] [88 92

查找x=85的过程(查找失败)

程序3-1 折半搜索 (Binary Search)

```
template<class T>
int binarySearch(T a[], const T& x, int n)
{//在有序数组a中查找元素x
 //如果存在，就返回元素x的位置，否则返回-1
int left=0;    //left指向数据段的左端
int right=n-1 ;//right指向数据段的右端
while (left≤right) {
      int middle=(left+right)/2;//数据段的中间
      if (x= =a[middle]) return middle;
      if (x > a[middle]) left=middle + 1;
      else right=middle-1 ;
      }
return -1; //没有找到x
```

最坏情况下，时间复杂性：

O(logn)

矩阵加法2-21

语 句	s/e	频 率	总 步 数
`void Add( T **a, ...)`	0	0	$\Theta(0)$
`{`	0	0	$\Theta(0)$
`for (int i = 0; i < rows; i++)`	1	$\Theta(rows)$	$\Theta(rows)$
`for (int j = 0; j < cols; j++)`	1	$\Theta(rows*cols)$	$\Theta(rows*cols)$
`c[i][j] = a[i][j] + b[i][j];`	1	$\Theta(rows*cols)$	$\Theta(rows*cols)$
`}`	0	0	$\Theta(0)$

$$t_{Add}(rows, cols) = \Theta(rows*cols)$$

矩阵转置程序2-19

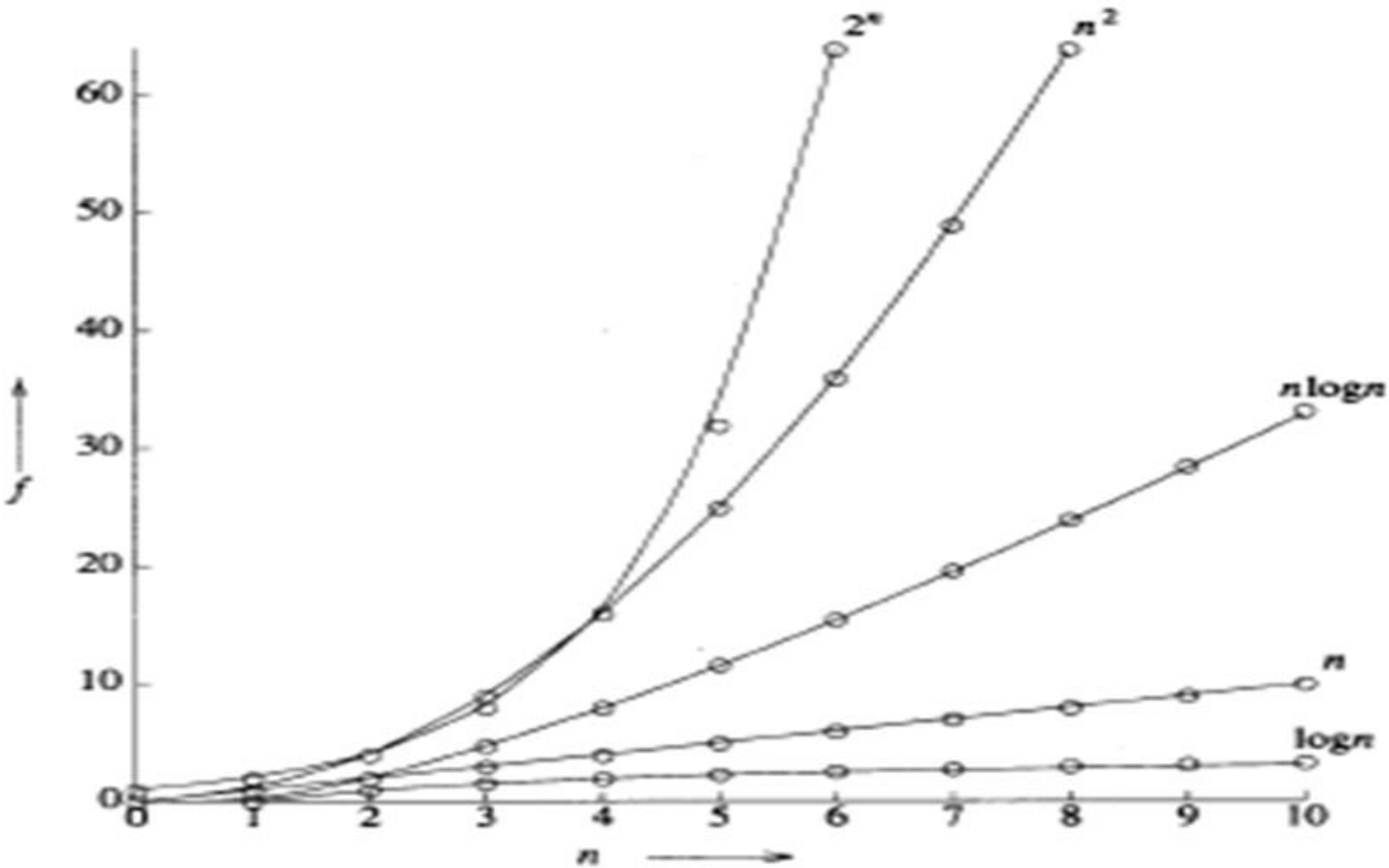
语 句	s/e	频 率	总 步 数
void Transpose(T **a, int rows)	0	0	$\Theta(0)$
{	0	0	$\Theta(0)$
for (int i = 0; i < rows; i++)	1	$\Theta(rows)$	$\Theta(rows)$
for (int j = i+1; j < rows; j++)	1	$\Theta(rows^2)$	$\Theta(rows^2)$
Swap(a[i][j], a[j][i]);	1	$\Theta(rows^2)$	$\Theta(rows^2)$
}	0	0	$\Theta(0)$

$$t_{Transpose}(rows) = \Theta(rows^2)$$

3.5 实际复杂性

$\log n$	n	$n\log n$	n^2	n^3	2^n
0	1	0	1	1	2
1	2	2	4	8	4
2	4	8	16	64	16
3	8	24	64	512	256
4	16	64	256	4096	65536
5	32	160	1024	32768	4294967296

实际复杂性



建议

从图中可以看出，随着n的增长，2^n的增长极快。事实上，如果程序需要2^n执行步，那么当n=40时，执行步数将大约为1.1*1012。在一台每秒执行1000000000步的计算机中，该程序大约需要执行18.3分钟；如果n=50，同样的程序在该台机器上将需要执行13天，当n=60时，需要执行310.56年；当n=100时，则需要执行4*1013年。因此可以认定，具有指数复杂性的程序仅适合于小的n(典型地取n≤40)。

建议

具有高次多项式复杂性的函数也必须限制使用。

例如，如果程序需要n^{10}执行步，那么当n=10时，每秒执行10000000000步的计算机需要10秒钟；当n=100时，需要3171年；n=1000时，将需要3.17*1013年。

如果程序的复杂性是n^3，则当n=1000时，需要执行1秒；n=10000时，需要110.67分钟；n=100000时，需要11.57天。

第4章

性能测量

性能测量

- 性能测量（performance measurement）主要关注于得到一个程序实际需要的空间和时间。
- 空间密切相关：
  - 特定的编译器
  - 编译器选项
  - 执行程序的计算机
- 不能精确地测量一个程序运行时所需要的空间
- 程序的运行时间：使用C++函数clock()

时间测量

- 测量程序(以排序为例)，需要
  - 确定实例特征n的一组值
  - 对于实例特征n的每一个值，设计测试数据
    - 可以人工设计或借助计算机设计相应的测试数据
  - 编写程序，测量运行时间
    - 为了提高测量的精确度，对于实例特征的每一个值，可以重复求解若干次。
    - 实际测量时间包括：排序的时间、额外时间(每次对a初始化等）

作业

9. 使用 O、Ω、Θ 和 o 的定义之一，证明下列等式的正确性。不用定理 3-1 至定理 3-6，也不用图 3-7 和图 3-8。

1） $5n^2-6n=\Theta(n^2)$

2） $n!=O(n^n)$

3） $2n^2 2^n+n\log n=\Theta(n^2 2^n)$

4） $\sum_{i=0}^{n} i^2=\Theta(n^3)$

5） $\sum_{i=0}^{n} i^3=\Theta(n^4)$

6） $n^{2^n}+6*2^n=\Theta(n^{2^n})$

7） $n^3+10^6 n^2=\Theta(n^3)$

8） $6n^3/(\log n+1)=O(n^3)$

9） $n^{1.001}+n\log n=\Theta(n^{1.001})$

10） $n^{k+\varepsilon}+n^k\log n=\Theta(n^{k+\varepsilon})$，$k\geqslant 0$ 且 $\varepsilon>0$

15. 对于 rows=10, 20, 30, …, 100，确定函数 squareMatrixMultiply(见程序 2-22) 的运行时间。分别用表格和曲线图显示结果。