第18章

分而治之算法

找出伪币问题

- 16枚硬币，其中有一个伪币，其特征是重量不足，如何快速找出？
- 8　8
- 4　4
- 2　2
- 1　1　（如何选）

分而治之算法思想：

- 1、把问题分解成两个或多个更小的问题；
- 2、分别解决每个小问题；
- 3、把各小问题的解答组合起来，即可得到原问题的解。

本章学习内容

- 18.2.2　归并排序
- 18.2.3　快速排序
- 18.2.4　选择

18.2.2 归并排序(Merge Sort)

- 利用分而治之方法进行排序算法:
- 将n 个元素按非递增顺序排列.
  - 若n 为1，算法终止;
  - 否则
    - 将这一元素集合分割成两个或更多个子集合
    - 对每一个子集合分别排序
    - 将排好序的子集合归并为一个集合

分而治之排序-1

- 将*n* 个元素的集合分成两个子集合*A* 和 *B* 。如何进行子集合的划分。
- 1.
  - 把前面n-1个元素放到第一个子集A中，最后一个元素放到子集B中。按照这种方式对A递归地进行排序。由于B仅含一个元素，所以它已经排序完毕，在A排完序后，用程序2-10中函数insert将A和B合并起来。
  - 插入排序(insertionSort程序2-15)的递归算法
  - 时间复杂性 :O(n^2)

分而治之排序-2

- 2.
  - 将含有最大值的元素放入B(用函数Max(见程序1-37)来找出最大元素)，剩下的放入A中。然后A被递归排序。合并排序后的A和B，只需要将B添加到A中即可。
  - 选择排序selectionSort(见程序2-7)的递归算法
  - 时间复杂性: $\Theta(n^2)$

分而治之排序-3

- 3.
  - 以上方法中，含有最大值的元素集合B(用冒泡过程(见程序2-9)来寻找最大元素并把它移到最右边的位置)
  - 冒泡排序bubbleSort(见程序2-9)的递归算法。
  - 时间复杂性: $\Theta(n^2)$

分而治之排序-4

- 上述分割方案将*n* 个元素分成两个极不平衡的集合*A*和*B*。*A*有*n*-1个元素，而*B*仅含一个元素。
- 4. 平衡分割法的情况：
  - A:含有***n/k*** 个元素
  - B:其余的元素
  - 递归地使用分而治之方法对*A*和*B*进行排序
  - 将排好序的*A*和*B*归并为一个集合。

分而治之排序算法的伪代码

```
template<class T>
void sort( T E, int n)
{ / /对E中的n个元素进行排序， k为全局变量
    if (n>=k) {
        i = n/k;
        j = n-i;
        令A 包含E中的前i 个元素
        令B 包含E中余下的j 个元素
        sort(A, i);
        sort(B, j);
        merge(A, B, E, i, j); //把A和B合并到E
        }
    else 使用插入排序算法对E进行排序
}
```

分而治之排序算法的时间

- 设t(n) 为分而治之排序算法在最坏情况下所需花费的时间.
- $$t(n)=\begin{cases} d & n<k \\ t(n/k)+t(n-n/k)+cn & n\geq k \end{cases}$$

- 当 k=2，t(n)最小，t(n)= Θ(nlogn) .
- 归并排序(merge sort)，或二路归并排序(two-way merge sort)： k=2的分而治之排序方法.

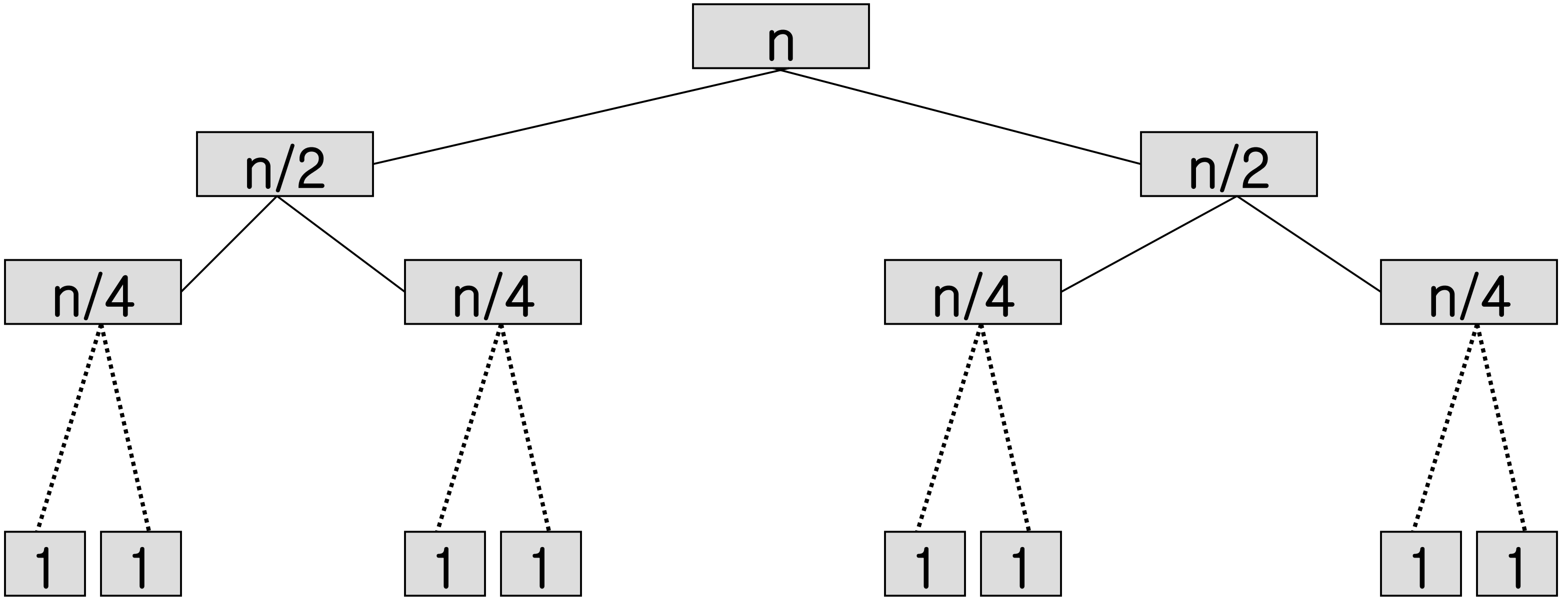
归并排序算法

```
template<class T>
mergeSort( T *a, int left, int right)
{//对a[left:right]中的元素进行排序
    if (left < right) {//至少两个元素
    int middle = (left + right)/2; //中心位置
    mergeSort(a, left, middle);
    mergeSort(a, middle +1, right);
    merge(a, b, left, middle, right); //从a合并到b
    copy(b, a, left, right); //排序结果复制到a
    }
}
```

消除递归可改善性能

归并排序调用图

- 假设 $n = 2^k$.



归并排序

- 长度为1的序列被归并为长度为2的有序序列；
- 长度为2的序列被归并为长度为4的有序序列；
- ……
- 长度为n /2的序列被归并为长度为n 的序列。

归并排序示例

- 初始段a: [8], [4], [5], [6], [2], [1], [7], [3]
- 归并到b: [4, 8], [5, 6], [1, 2], [3, 7]
- 归并到a : [4, 5, 6, 8], [1, 2, 3, 7]
- 归并到b: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
- 归并到a: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

mergeSort实现

```
template<class T>
void mergeSort(T a[], int n)
{// 使用归并排序算法对a[0:n-1] 进行排序
    T *b = new T [n];
    int segmentSize = 1; // 段的大小
    while (segmentSize < n) {
        mergePass(a, b, segmentSize, n); // 从a归并到b
        segmentSize += segmentSize;
        mergePass(b, a, segmentSize, n); // 从b 归并到a
        segmentSize += segmentSize;
        }
}
```

```
template<class T>
void merge(T c[], T d[], int startOfFirst, int endOfFirst,
                                        int endOfSecond)
{//把c[startOfFirst : endOfFirst]和c[endOfFirst+1 : endOfSecond]
 //归并到d[startOfFirst : endOfSecond].
      int  first = startOfFirst, // 第一段的游标
           second = endOfFirst+1, // 第二段的游标
           result = startOfFirst; // 结果段的游标
      //当两个被归并段都未处理完，则不断进行归并
      while ((first <= endOfFirst) && (second <= endOfSecond))
           if (c[first] <= c[second]) d[result++] = c[first++];
                                        else   d[result++] = c[second++];
      // 考虑余下的部分
      if  (first > endOfFirst)
             for (int q = second; q <= endOfSecond; q++)
                          d[result++] = c[q];
       else for (int q = first; q <= endOfFirst; q++)
                     d[result++] = c[q];
}
```

一趟归并实现

```
template<class T>
void mergePass(T x[], T y[], int segmentSize, int n)
{   // 归并大小为segmentSize的相邻段
     int i=0;
     while (i <= n-2*segmentSize) {
          // 归并两个大小为segmentSize的相邻段
          merge(x, y, i, i+segmentSize-1, i+2*segmentSize-1);
          i=i+2*segmentSize;
          }
     // 剩下不足2*segmentSize个元素
     if  (i + segmentSize < n)
          merge(x, y, i, i+segmentSize-1, n-1);
     else   for (int j = i; j <= n-1; j++) // 把最后一段复制到y
                    y[j] = x[j];
}
```

自然归并排序

- 自然归并排序(natural merge sort)是基本归并排序(见程序18 -3)的一种变化。它首先对输入序列中已经存在的有序子序列进行归并。
- 例:4, 8, 3, 7, 1, 5, 6, 2
  - [4, 8], [3, 7], [1, 5, 6], [2]
  - [3, 4, 7, 8], [1, 2, 5, 6]
  - [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

归并排序

- 稳定排序？

18.2.3 快速排序(Quick Sort)

- 快速排序方法描述
  - //使用快速排序方法对*a*[0:*n*-1]排序
  - 从*a*[0:*n*-1]中选择一个元素作为*middle*，该元素为**支点**
  - 把余下的元素分割为两段*left*和*right*，使得*left*中的元素都不大于支点，而*right*中的元素都不小于支点
  - 递归地使用快速排序方法对*left*进行排序
  - 递归地使用快速排序方法对*right*进行排序
  - 所得结果为*left*+*middle*+*right*

快速排序实现

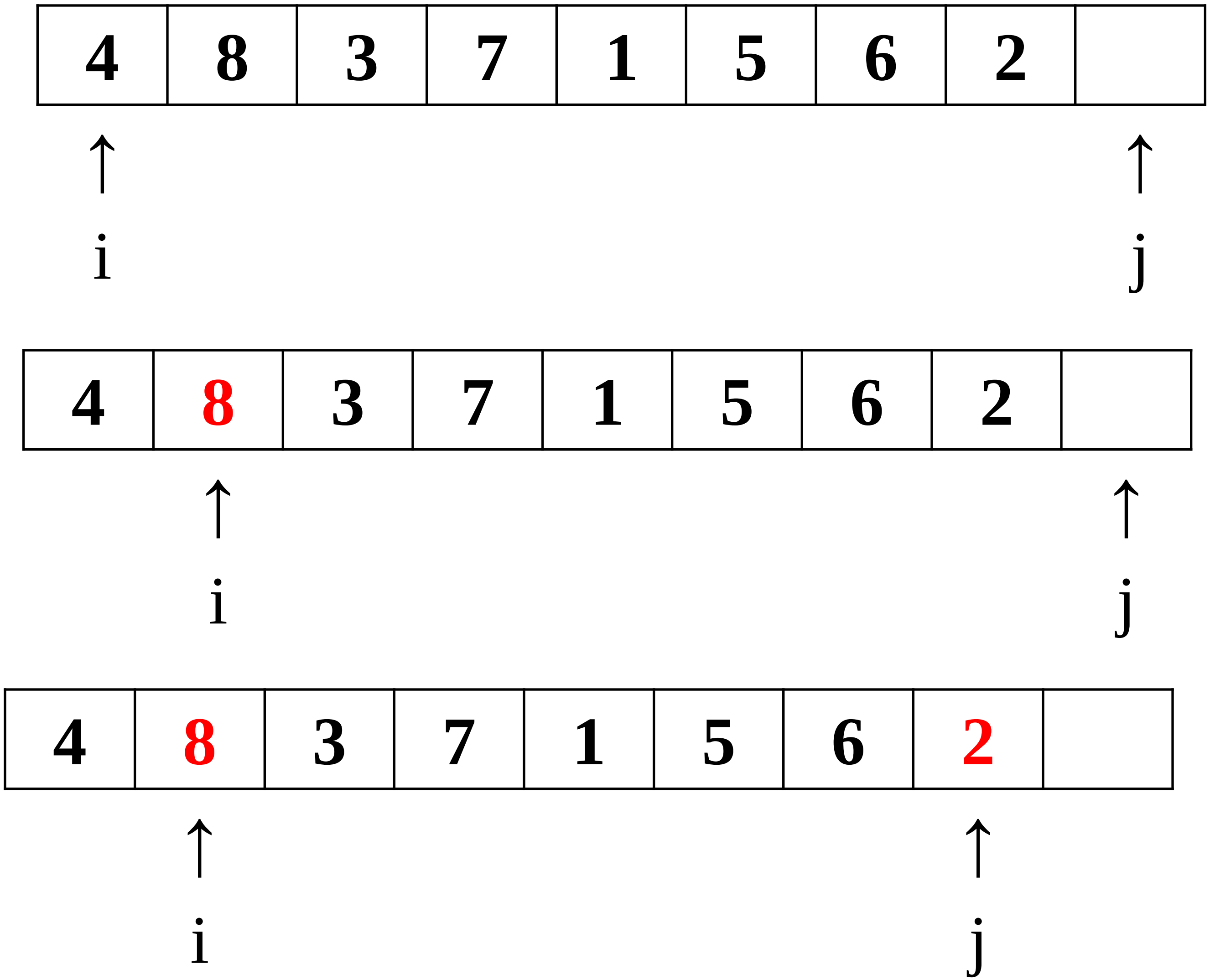
```
template<class T>
void quickSort(T a[], int n)
{// 对a[0:n-1] 进行快速排序; 要求a[n] 必须有最大关键值
 quickSort(a, 0, n-1);
}

template<class T>
void quickSort(T a[], int leftEnd, int rightEnd)
{//排序a[leftEnd : rightEnd]，a[rightEnd+1]有最大关键值
     if (leftEnd >= rightEnd) return;
     int leftCursor = leftEnd, // 从左至右的游标
          rightCursor = rightEnd+1; // 从右到左的游标
     T  pivot = a[leftEnd];
```

```
// 把左侧不小于pivot的元素与右侧不大于pivot 的元素进行交换
while (true) {
    do {// 在左侧寻找不小于pivot 的元素
        leftCursor = leftCursor+1;
        } while (a[leftCursor] <  pivot);
    do {// 在右侧寻找不大于pivot 的元素
        rightCursor = rightCursor-1;
        } while (a[rightCursor] > pivot);
    if (leftCursor >= rightCursor) break; // 未发现交换对象
    Swap(a[leftCursor], a[rightCursor]);
    }
//设置pivot
a[leftEnd] = a[rightCursor];
a[rightCursor] = pivot;
quickSort(a, leftEnd, rightCursor-1); // 对左段排序
quickSort(a, rightCursor+1, rightEnd); // 对右段排序
}
```

快速排序示例

4， 8， 3， 7， 1， 5， 6， 2

快速排序示例



快速排序示例

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
	↑						↑	
	i						j	

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
		↑					↑	
		i					j	

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
			↑				↑	
			i				j	

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
			↑			↑		
			i			j		

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
			↑		↑			
			i		j			

4	**2**	**3**	**7**	**1**	**5**	**6**	**8**	
			↑	↑				
			i	j				

4	2	3	1	7	5	6	8	
			↑	↑				
			i	j				

4	2	3	1	7	5	6	8	
				↑↑				
				ij				

4	2	3	1	7	5	6	8	
			↑	↑				
			j	i				

1	**2**	**3**	**4**	**7**	**5**	**6**	**8**	
			j	i				

【1	**2**	**3】**	**4**	**【7**	**5**	**6**	**8】**	

复杂性分析

- **空间复杂性：** 递归栈空间: O(n).
- **时间复杂性**
- 最坏情况:
  - 支点元素是数组中的最小元素或最大元素, *left* 总是为空(或right总是为空)
  - 时间：**$\Theta(n^2)$**
- 最好情况:
  - *left*和*right*中的元素数目大致相同。
  - 时间： **O(nlogn)**
- 快速排序的平均复杂性也是**Θ(nlogn).**

- 定理：快速排序的平均复杂性为Θ($n$log$n$)。
- 证明：
  - 设S为左端所含元素的个数，s有同等机会取0~n-1中的任何一个值。

$$t(n) \le cn + \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}[t(s) + t(n-s+1]$$

$$= cn + \frac{2}{n}\sum_{s=0}^{n-1}[t(s)]$$

$$\le cn + \frac{4d}{n} + \frac{2}{n}\sum_{s=2}^{n-1}[t(s)]$$

- 归纳法可证明：t(n) ≤knlog$_e$n

快速排序

- 稳定排序？

中值快速排序

- 中值快速排序(median-of-three quick sort) 算法有更好的平均性能。
  - 不必使用a[1eftEnd]做为支点
  - 取{a[1eftEnd],

    a[(1eftEnd +rightEnd)/2],

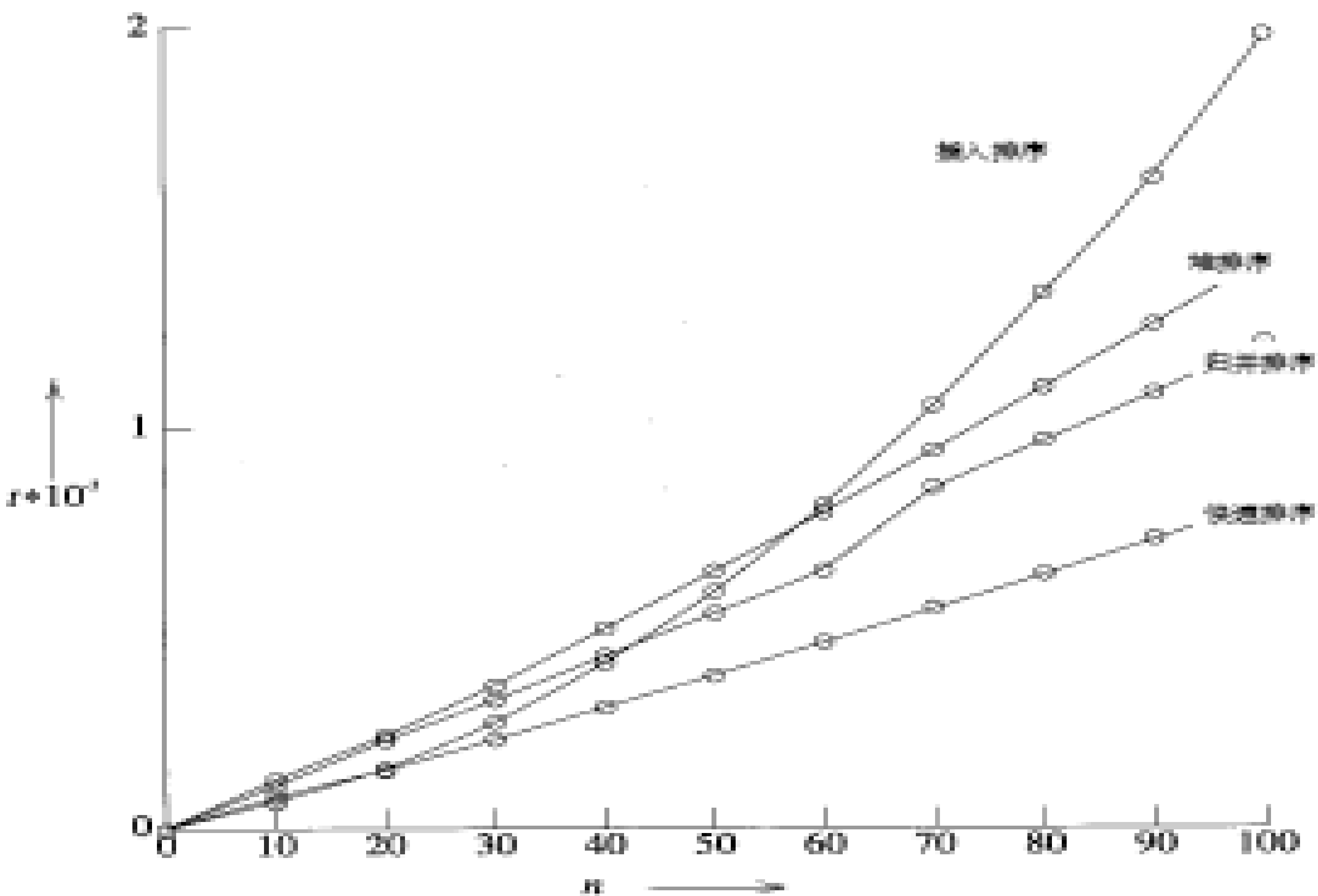
    a[rightEnd]}

  中大小居中的那个元素作为支点。

各种排序算法的比较

方法	最坏复杂性	平均复杂性
冒泡排序	n^2	n^2
基数排序	n	n
插入排序	n^2	n^2
选择排序	n^2	n^2
堆排序	nlogn	nlogn
归并排序	nlogn	nlogn
快速排序	n^2	nlogn

各排序算法平均时间曲线



18.2.4 选择(Selection)

- 对于给定的n个元素的数组a[0:n-1]，要求从中找出第k小的元素。当a[0:n-1]被排序时，该元素就是a[k-1]。
- 方法1.
  - 对这n个元素进行排序(如使用堆排序式或归并排序)，
  - 取出a[k-1]中的元素
  - 时间:O(nlogn)

选择

- 方法2. 使用快速排序:
- a[leftEnd] a[leftEnd+1] …… a[ ] …… a[rightEnd]

rightCursor

rightCursor-leftEnd+1

rightCursor-leftEnd+1 = k:

rightCursor-leftEnd+1 > k: 左面部分第k小的元素

rightCursor-leftEnd+1 < k: 右面部分第

(k - (rightCursor-leftEnd+1))小的元素

程序18-7 寻找第k个元素

```
template<class T>
T select(T a[], int n, int k)
    {//返回a[0:n-1]中第k小的元素
    // 假定a[n] 是一个伪最大元素
    if (k < 1 || k > n) throw ……..;
    return select(a, 0, n-1, k);
    }

template<class T>
T select(T a[], int leftEnd, int rightEnd, int k)
{//在a[leftEnd : rightEnd]中选择第k小的元素
if (leftEnd >= rightEnd) return a[leftEnd];
int leftCursor = leftEnd, // 从左至右的游标
    rightCursor = rightEnd+1; // 从右到左的游标
```

```
T pivot = a[leftEnd];
// 把左侧>= pivot的元素与右侧<= pivot 的元素进行交换
while (true) {
    do {// 在左侧寻找>= pivot 的元素
        leftCursor=leftCursor+1;
        } while (a[leftCursor] < pivot);
    do {// 在右侧寻找<= pivot 的元素
        rightCursor=rightCursor-1;
        } while (a[rightCursor]>pivot);
    if (leftCursor>=rightCursor) break; // 未发现交换对象
    Swap(a[leftCursor], a[rightCursor]);
    }
if (rightCursor-leftEnd+1= =k) return pivot;
```

```
//设置pivot
a[leftEnd] = a[rightCursor];
a[rightCursor] = pivot;
// 对一个段进行递归调用
if (rightCursor-leftEnd+1 < k)
return select(a, rightCursor+1, rightEnd,
                      k-rightCursor+leftEnd-1);
else return select(a, leftEnd, rightCursor-1, k);
}
```

可以获得更好的平均性能，尽管该算法有一个比较差的渐近复杂性$O(n^2)$。

练习

- 设要将序列〈12，2，16，30，28，10，16*，20，6，18〉中的关键码按字母序的升序进行排序，写出：
- （1）分别给出冒泡排序、插入排序、选择排序、基数排序、归并排序、以第一个元素为支点的快速排序第一趟结束时的序列（或每趟排序后的结果）；
- （2）堆排序初始建堆的结果，堆排序的过程。