# 第 8 章

# 栈 (STACK)

#### 本章内容

- 8.1 定义和应用
- 8.2 抽象数据类型
- 8.3 数组描述
- 8.4 链表描述
- 8.5 应用

#### 8.1 定义和应用

- 定义[栈]: 栈(stack)是一个线性表,其插入(也 称为添加)和删除操作都在表的同一端进行。
  - 其中允许插入和删除的一端被称为栈顶(top)
  - 另一端被称为栈底(bottom)

#### 栈结构

●栈是一个后进先出(LIFO (Last-In, First-Out))表.

#### 8.2 抽象数据类型

```
抽象数据类型 stack
实例
  元素线性表,一端为栈底,另一端为栈顶
操作
 empty(); //栈为空时返回true, 否则返回false
 size(); //返回栈中元素个数
 top(); //返回栈顶元素
 pop(); //删除栈顶元素
 push(x); //将元素x压入栈
```

#### C++抽象类stack

```
template <class T>
class stack
 public:
  virtual ~stack() { }
  virtual bool empty() const = 0;
       //栈为空时返回true, 否则返回false
  virtual int size() const = 0;
        //返回栈中元素个数
  virtual T& top() = 0;
        //返回栈顶元素
  virtual void pop() = 0;
         //删除栈顶元素
  virtual void push(const T& theElement) = 0;
        //将元素theElement压入栈
```

#### 栈的描述方法

- 栈可以使用任何一种线性表的描述方法
  - ■数组描述
  - 链表描述

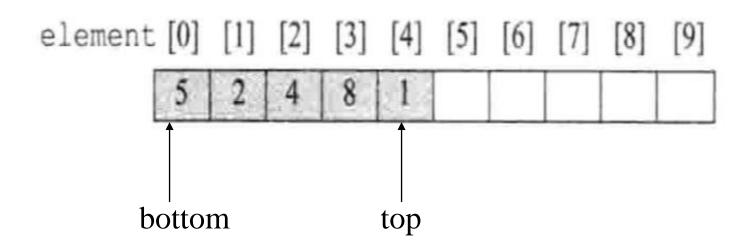
#### 8.3 数组描述

- 栈使用数组描述,有两种实现方法:
  - 1.使用数组描述的线性表arrayList,通过 arrayList类的派生得到数组描述的栈类 derivedArrayStack
  - 2.定制数组描述的栈类arrayStack类

## 8.3.1 从arrayList派生实现

```
template <class T>
class arrayList: public linearList<T>
public:
   arrayList(int initialCapacity = 10);
   bool empty() const;
   int size() const;
   T& get(int theIndex) const;
   int indexOf(const T& theElement) const;
   void erase(int theIndex);
   void insert(int theIndex, const T& theElement);
protected:
  T*element; //存储线性表元素的一维数组
   int arrayLength; //一维数组的容量
   int listSize; //线性表的元素个数
};
```

#### 从arrayList派生derivedArrayStack



- 栈顶元素的索引: arrayList<T>::size()-1
- 应用arrayList类中的方法实现

## 从arrayList派生derivedArrayStack

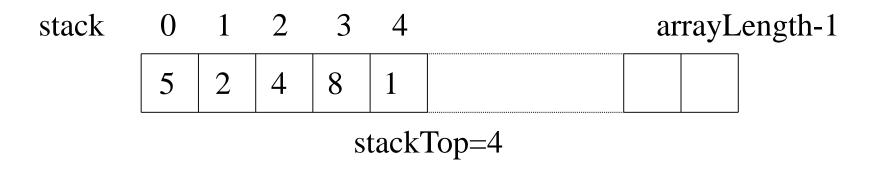
```
template<class T>
class derivedArrayStack: private arrayList <T>,
                           public stack<T>;
{public:
   derivedArrayStack(int initialCapacity = 10):
                 arrayList<T> (initialCapacity) {}
   bool empty() const {return arrayList<T>::empty();}
   int size() const {return (arrayList<T>::size();}
   T& top() {if (arrayList<T>::empty()) throw StackEmpty();
                   return get(arrayList<T>::size()-1);}
   void pop() {if (arrayList<T>::empty()) throw StackEmpty();
                 erase(arrayList<T>::size()-1);}
   void push(const T& theElement)
            {insert(arrayList<T>::size(), theElement);}
```

### 对类derivedArrayStack的评价

- 从arrayList派生derivedArrayStack:
  - 优点:
    - 大大减少了编码量。
    - 使程序的可靠性得到很大提高。
  - 缺点:
    - ■运行效率降低。
      - 例: push(const T& the Element)。

## 类arrayStack

■ 定制数组描述的栈



- 栈容量: arrayLength
- 栈中元素个数:stackTop+1
- 栈空: stackTop=-1
- 栈满: stackTop=arrayLength-1

### 8.3.2 类arrayStack

```
template<class T>
class arrayStack: public stack<T>;
              arrayStack(int initialCapacity = 10);
{public:
              ~ arrayStack() { delete [] stack; }
              bool empty() const { return stackTop == -1; }
              int size() const { return stackTop+1; }
              T\& top();
              void pop();
              void push(const T& theElement);
              int stackTop; //当前栈顶
 private:
              int arrayLength; //栈容量
              T*stack: //元素数组
};
```

### arrayStack构造函数

```
template<class T>
arrayStack<T>::arrayStack(int initialCapacity = 10);
{ // 构造函数
  if (initialCapacity < 1) ...../输出错误信息, 抛出异常
  arrayLength = initialCapacity;
  stack = new T[arrayLength];
  stackTop = -1;
```

### arrayStack方法top,pop

```
template<class T>
T& arraystack<T>::top()
       if (stackTop == -1) throw StackEmpty();
      return stack[stackTop];
template<class T>
void arrayStack<T>::pop()
 if (stackTop == -1) throw StackEmpty();
 stack[stackTop--].~T();//T的析构函数
```

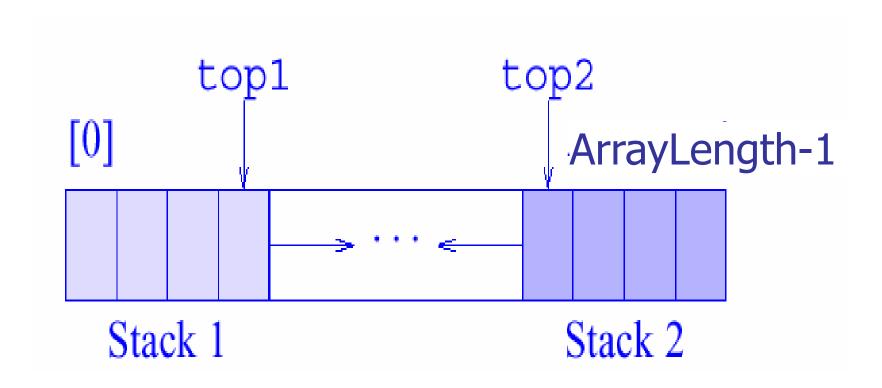
### arrayStack方法push

```
template<class T>
void arrayStack<T>:: push(const T& theElement);
 //如果栈已满,则容量加倍.
 if (stackTop == arrayLength-1)
     {changeLength1D(stack, arrayLength, 2*arrayLength);
      arrayLength*=2;}
  //在栈顶插入元素
  stack[++stackTop] = theElement;
```

- 当同时使用多个栈时:
  - ■浪费大量的空间
- 若仅同时使用两个栈,则是一种例外。

■ 如何在一个数组中描述两个栈?

### 在一个数组中描述两个栈



#### 8.4 链表描述

- 栈使用链表描述,有两种实现方法:
  - 1. 使用链表描述的线性表chain,通过chain类的派生得到链表描述的栈类derivedLinkedStack
  - 2.定制链表描述的栈类linkedStack类

#### 8.4.1类derivedLinkedStack

- 从chain派生类derivedLinkedStack
- 链表的哪一端对应于栈顶?



- 把链表的右端作为栈顶
  - stack: top()  $\rightarrow$  chain: get(size()-1)
  - stack: push(theElement) → chain: Insert(size(), theElement)
  - stack:  $pop() \rightarrow chain: erase(size()-1)$
  - 时间复杂性: **Θ**(size())

#### 8.4.1类derivedLinkedStack

- 从chain派生类derivedLinkedStack
- 链表的哪一端对应于栈顶?



- 把链表的左端作为栈顶
  - stack: top()  $\rightarrow$  chain: get(0)
  - stack: push(theElement) → chain: Insert(0, theElement)
  - stack:  $pop() \rightarrow chain: erase(0)$
  - 时间复杂性: Θ(1)

#### 8.4.2类LinkedStack

■ 定制链表栈

- 成员:
  - stackTop: 栈顶指针
  - stackSize: 栈中元素个数
- 空栈: stackTop=NULL, stackSize=0
- 栈顶元素: stackTop->element

#### 8.4.2类LinkedStack

```
stackTop
template<class T>
class LinkedStack: public stack<T>;
{ public: LinkedStack(int initialCapacity = 10);
                 {stackTop=NULL; stackSize=0; }
          ~ LinkedStack();
          bool empty() const { return stackSize == 0; }
          int size() const { return stackSize; }
          T& top();
          void pop();
          void push(const T& theElement);
             chainNode<T>* stackTop; //栈顶指针
  private:
                                                  读程序 8-5
             int stackSize; //栈中元素个数
```

#### 8.5 应用

- 8.5.1 括号匹配
- 8.5.2 汉诺塔
- 8.5.3 列车车厢重排
- 8.5.4 开关盒布线
- 8.5.5 离线等价类问题
- 8.5.6 迷宫老鼠

#### 8.5.1 括号匹配

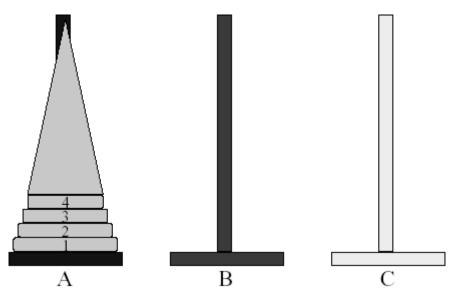
- 问题:匹配一个字符串中的左、右括号
- $\bullet (a*(b+c)+d)$

- -37
- -010

- -04
- –No match for right parenthesis at 5
- -811
- -No match for left parenthesis at 7

```
void PrintMatchedPairs(string expr)
{//括号匹配
 arrayStack<int>s;
 int length = (int) expr.size();
 // 扫描表达式expr, 寻找'(''和)'
 for (int i = 0; i < length; i++)
  {if (expr.at(i) = =' (') s.push(i);
                                                           ++ 实
    else if (expr.at(i) = =')'
      try {//从栈中删除匹配的左括号
           cout << s.top() <<' ' << i << endl;
           s.pop(); }
      catch (stackEmpty)
        { //栈空,没有匹配的左括号
         cout << "No match for right parenthesis" << " at " << i << endl; }
// 栈不为空, 栈中所剩下的左括号都是未匹配的
while(!s.empty()) {
   cout << "No match for left parenthesis at " << s.top() < endl;
   s.pop();
          山东大学软件学院
                       数据结构
                              第8章
                                                           27
```

#### 8.5.2 汉诺塔



- 已知n个碟子和3座塔。初始时所有的碟子按从大到小次序从塔A的底部堆放至顶部,我们需要把碟子都移动到塔C:
  - 每次移动一个碟子.
  - 任何时候都不能把大碟子放到小碟子的上面。

#### 汉诺塔

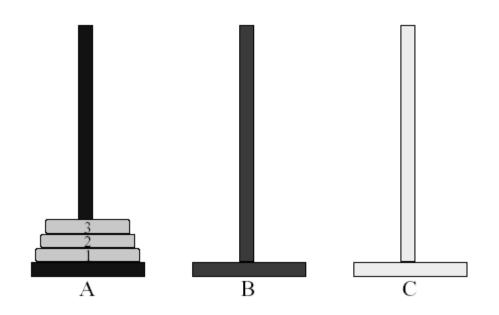
```
void towersOfHanoi(int n, int x, int y, int z)
{ / /把n 个碟子从塔x 移动到塔y,可借助于塔z
  if (n > 0) {
  towersOfHanoi(n-1, x,z,y);
  cout << "Move top disk from tower" << x
      <<" to top of tower " << y << endl;
 towersOfHanoi(n-l, z, y, x);}
```

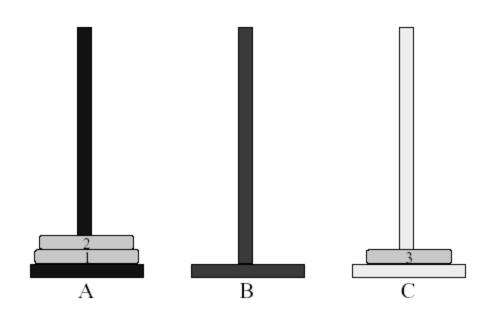
#### 汉诺塔

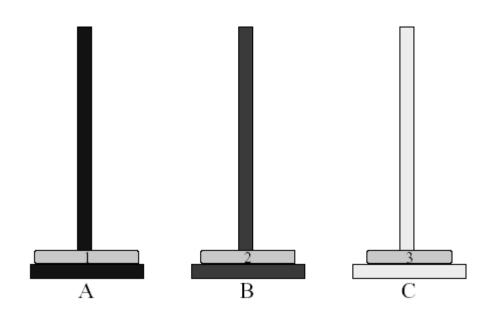
•碟子的移动次数:

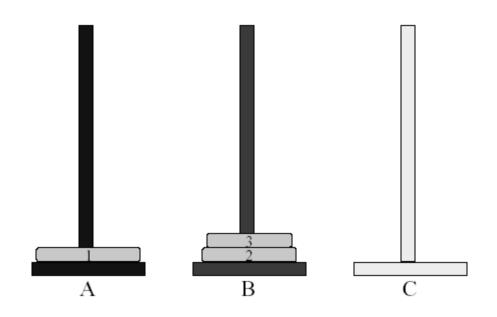
$$moves(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 2moves(n-1)+1 & n>0 \end{cases}$$

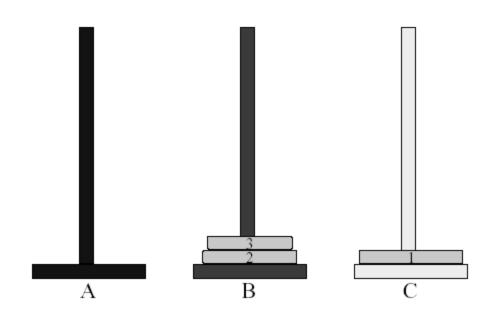
- $\bullet$  moves(n)=  $2^n$ -1
- 时间复杂性: **Θ**(2<sup>n</sup>)

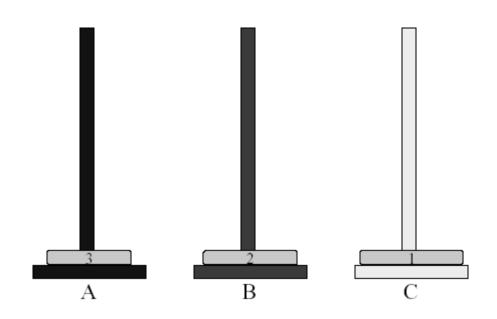




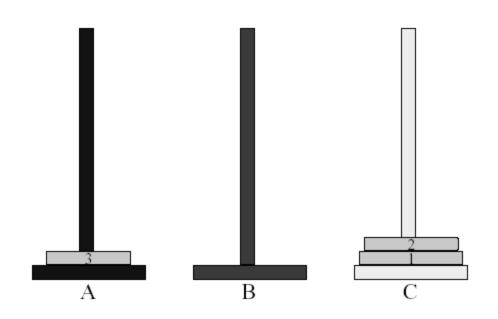




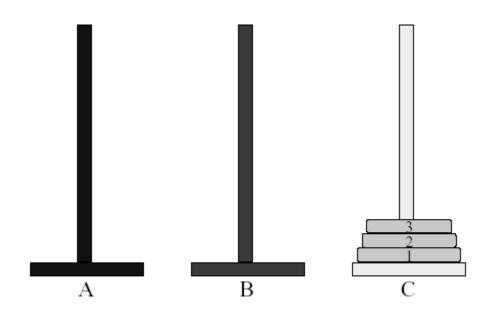




# 塔的布局



# 塔的布局



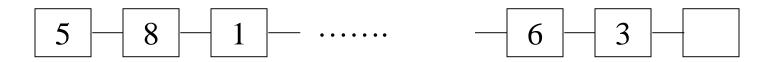
#### 汉诺塔

```
//全局变量, tower[1:3]表示三个塔
arrayStack<int> tower[4];
void moveAndShow(int n, int x, int y, int z);
void towersOfHanoi(int n)
{// 函数moveAndShow的预处理程序
  for (int d = n; d > 0; d--) // 初始化
      tower[1].push(d); // 把碟子d 放到塔1上
 //把塔1上的n个碟子移动到塔3上,借助于塔2的帮助
   moveAndShow(n, 1, 2, 3);
```

#### 汉诺塔

```
void moveAndShow(int n, int x, int y, int z)
{//把n个碟子从塔x移动到塔y,可借助于塔z
if (n > 0) {
   moveAndShow(n-l, x, z, y);
   int d= tower[x].top(); // 碟子编号
   tower[x].pop(); //从x中移走一个碟子
   tower[y].push(d); //把这个碟子放到y 上
   ShowState(); //显示塔的布局
   moveAndShow(n-1, z, y, x);
```

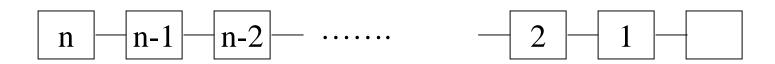
#### 8.5.3 列车车厢重排



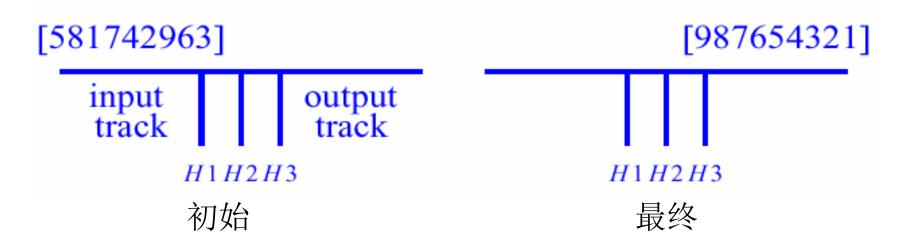
货运列车共有n节车厢,每节车厢将停放在不同的车站n个车站的编号分别为1到n

货运列车按照**第**n站至第1站的次序经过这些车站车厢的编号与它们的目的地相同。

重新排列车厢,使各车厢从前至后按编号1到n的次序排列。



#### 列车车厢重排例(3个缓冲铁轨)



- 缓冲铁轨是按照LIFO的方式使用的
- 在重排车厢过程中,仅允许以下移动:
  - 车厢可以从入轨的前部(即右端)移动到一个缓冲铁轨的顶部或出轨的左端。
  - 车厢可以从一个缓冲铁轨的顶部移动到出轨的左端。

#### 3个缓冲铁轨中间状态



- 选择缓冲铁轨的分配规则
  - 新的车厢u应送入这样的缓冲铁轨: 其顶部的车厢编号 v 满足v > u, 且v 是所有满足这种条件的缓冲铁轨顶部 车厢编号中最小的一个编号。
- k 个链表形式的栈来描述k 个缓冲铁轨。

#### 实现思路

```
int NowOut=1; // NowOut:下一次要输出的车厢号
for (int i=1;i<=n;i++) //从前至后依次检查的所有车厢
{1.车厢 p[i] 从入轨上移出
2.\text{If } (p[i] == \text{NowOut})
    ①把p[i]放到出轨上去; NowOut++;
    ② while (minH(当前缓冲铁轨中编号最小的车厢)==
    NowOut )
        {把minH 放到出轨上去;
        更新 minH ;NowOut++;}
  else 按照分配规则将车厢p[i]送入某个缓冲铁轨。
 读程序 8-9——8-12
```

#### 等价类:

- 一个对象(或成员)的集合,在此集合中所有对象应满足等价 关系。
- 一个集合 S 中的所有对象可以通过等价关系划分为若干个互不相交的子集 S1, S2, S3, ..., 它们的并就是 S。这些子集即为等价类

#### 等价关系:集合上的一个自反、对称、传递的关系

- 用符号 "="表示集合上的等价关系
- ◆ 等价关系具有以下特点:

自反性:  $x \equiv x$  (即等于自身)。

对称性: 若x = y,则y = x。

传递性: 若x = y且y = z,则x = z。

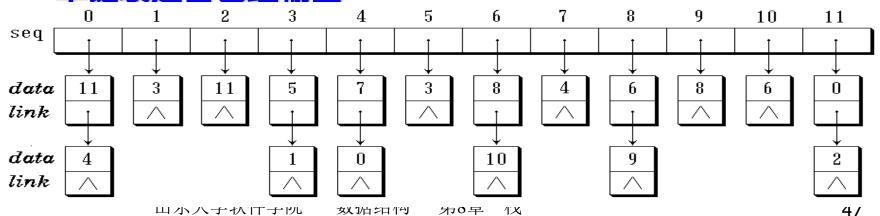
- 输入
  - 元素数目n
  - 关系数目r
  - r 对关系
- ■目标
  - 把n个元素分配至相应的等价类
- 方法
  - 第一步, 读入并存储所有的等价对(i,j)
  - 第二步,标记和输出所有的等价类

给定集合  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$ 

及如下等价对:  $0 \equiv 4, 3 \equiv 1, 6 \equiv 10, 8 \equiv 9, 7 \equiv 4,$ 

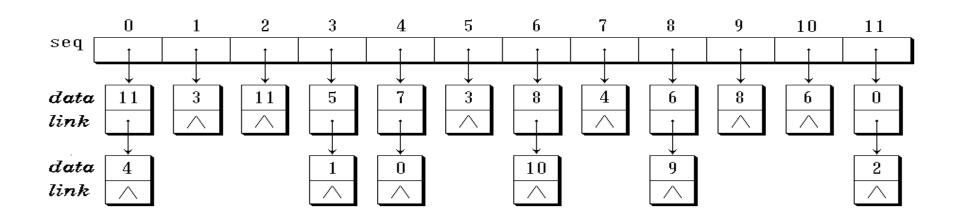
 $6 \equiv 8, 3 \equiv 5, 2 \equiv 11, 11 \equiv 0$ 

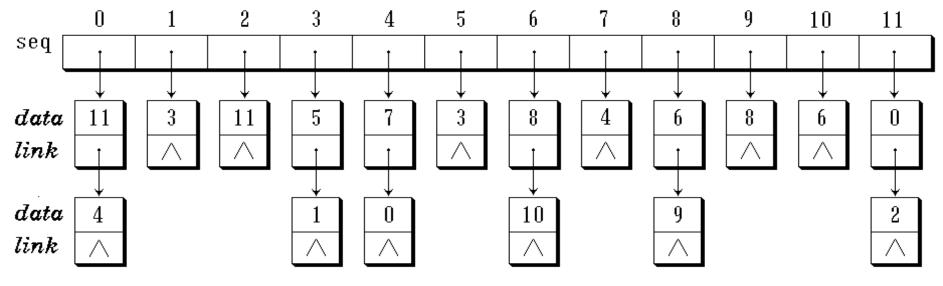
- 为集合的每一对象建立一个带表头结点的单链表
- 当输入一个等价对(i,j)后,就将集合元素 i 链入第 j 个单链表, 且将集合元素 j 链入第 i 个单链表
- 在输出时,设置一个布尔数组 out[n],用 out[i] 标记第 i 个 单链表是否已经输出



- ◆ 从编号 i = 0 的对象开始,对所有的对象进行检测。
  - 1. 在 i = 0 时,循第0个单链表先找出形式为(0,j)的等价对,把 0和 j作为同一个等价类输出。
  - 2. 再根据等价关系的传递性,找所有形式为(j,k)的等价对,把k 也纳入包含 0 的等价类中输出。
  - 如此继续,直到包含 0 的等价类完全输出为止。
- ◆ 接下来再找一个未被标记的编号,如 i = 1,该对象将属于一个新的等价类,我们再用上述方法划分、标记和输出这个等价类。

每次输出一个对象编号时,都要把这个编号进栈,记下以后还要检测输出的等价对象的单链表。





#### 输入所有等价对后的seq数组及各单链表的内容

)		等价	OUT	输	OUT	栈	链	等价	OUT	输	OUT	栈
2	序号	对	初态	出	终态		序号	对	初态	出	终态	
)	0		False	0	True		7	4	True		True	11
	0	11	False	11	True	11	11	0	True		True	
	0	4	False	4	True	11,4	11	2	False	2	True	2
	4	7	<b>False</b>	7	True	11,7	2	11	True	_	True	
	4	0	True		True	11,7						
		<u> </u>	·		<del>-</del>							

山东大学软件学院

数据结构

第8章 栈

## 离线等价类程序(1/4)

- void main(void)
- {// 离线等价类问题
- int n, r;
- //输入n 和r
- cout << "Enter number of elements" << endl;</p>
- cin >> n;
- if (n < 2) {cout << "Too few elements" << endl; return 1;}
- cout << "Enter number of relations" << endl;</li>
- cin >> r;
- if (r < 1) {cout << "Too few relations" << endl; return 1;}</p>

#### 离线等价类程序(2/4)

- //创建一个指向n个链表的数组
- ArrayStack<int> \* list= new ArrayStack<int> [n+1];
- //输入r个关系,并存入链表
- for (int i = 1;  $i \le r$ ; i++) {
- cout << "Enter next relation/pair" << endl;</li>
- int a, b;
- cin >> a >> b;
- list[a].push(0,b);
- list[b].push(0,a);
- } 时间复杂性Q(n+r)

#### 离线等价类程序(3/4)

- //对欲输出的等价类进行初始化
- ArrayStack<int> unprocessedList;
- bool \*out= new bool [n+1];
- for (int i = 1;  $i \le n$ ; i++)
- out[i] = false;
- //输出等价类
- for (int i = 1;  $i \le n$ ; i++)
- if (!out[i]) {//开始一个新的等价类
- cout << "Next class is: " << i << ' ';</pre>
- out[i] = true; 复杂性O(n)
- unprocessedList.push(i);

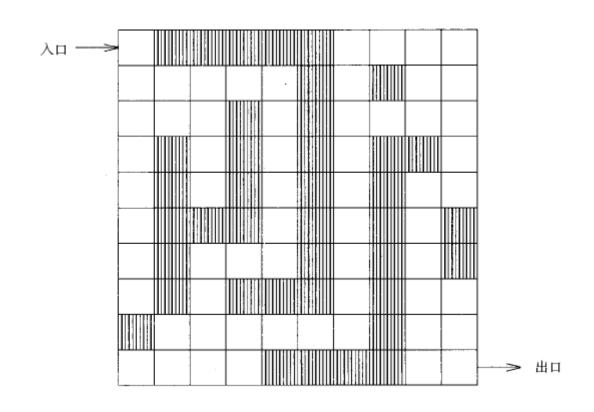
#### 离线等价类程序(4/4)

```
■ //从堆栈中取其余的元素
 while (! unprocessedList.empty()) {
    int j= unprocessedList.top();
    unprocessedList.pop();
   //表list[j]中的元素在同一个等价类中
                                         复杂性O(r)
    while (!list(j). Empty()){
          int q=list(j).top();
          list(j).pop();
          if (!out[q]) \{ cout << "q << ' '; out[q] = true; \}
                          unprocessedList.push(q); }}
  cout << endl;}
  cout << endl << "End of class list" << endl;
```

#### 8.5.6 迷宫老鼠

- 迷宫老鼠(rat in a maze)问题要求寻找一条从 入口到出口的路径。
- 路径是由一组位置构成的,每个位置上都没有障碍,且每个位置(第一个除外)都是前一个位置的东、南、西或北的邻居。

## 8.5.6 迷宫老鼠



■ 迷宫老鼠(rat in a maze)问题要求寻找一条从入口到出口的路径。

#### 迷宫的描述

- 假定用**n×m的矩阵**来描述**迷宫**,位置(1,1)表示入口, (n,m)表示出口, n和m分别代表迷宫的行数和列数。
- 迷宫中的每个位置都可用其行号和列号来指定。在矩阵中,当且仅当在位置(i,j)处有一个障碍时其值为1,否则其值为0。

## 迷宫的描述

```
1
    0
                               0
    0
                      0
                               0
                                   0
                                        0
1
    0
                               0
                                        0
    0
                      1
                               0
                                        0
1
```

#### 简化算法

- 对于迷宫内部的位置(非边界位置),有四种可能的移动方向:右、下、左和上。
- 对于迷宫的边界位置,只有两种或三种可能的移动。
- 为了避免在处理内部位置和边界位置时存在差别,可以在迷宫的周围增加一圈障碍物。

# 位置表示

- 可以定义一个相应的类Position来表示迷宫位置, 它有两个私有成员row和col。
- 为保存从入口到当前位置的路径,可以采用堆栈:
  ArraryStack (position);

#### 移动到相邻位置的方法

- 按一种固定的方式来选择可行的位置,将可以使问题得到简化。
- 例如,可以首先尝试向右移动,然后是向下,向 左,最后是向上。

移动	方向	offset[move].row	offset[mov].col
0	向右	0	1
1	向下	1	0
2	向左	0	-1
3	向上	-1	0

#### 寻找路径设计思路

- 首先把迷宫的入口作为当前位置。
- 如果当前位置是迷宫出口,那么已经找到了一条路径,搜索工作结束。
- 如果当前位置不是迷宫出口,则在当前位置上放置障碍物 ,以便阻止搜索过程又绕回到这个位置。
- 检查相邻的位置中是否有空闲的(即没有障碍物),如果有,就移动到这个新的相邻位置上,然后从这个位置开始搜索通往出口的路径。如果不成功,选择另一个相邻的空闲位置,并从它开始搜索通往出口的路径。在进入新的相邻位置之前,把当前位置保存在一个栈中,....。
- 如果相邻的位置中没有空闲的,则回退到上一位置。
- 如果所有相邻的空闲位置都已经被探索过,并且未能找到 路径,则表明在迷宫中不存在从入口到出口的路径。

#### bool FindPath()

```
{//寻找从位置(1,1)到出口(m,m)的路径增加一圈障碍物;
```

//对跟踪当前位置的变量进行初始化

```
Position here;
```

```
here.row = 1;
```

here.col = 1;

maze[1][1] = 1; // 阻止返回入口

```
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
      1
```

```
while (here不是出口) do {
选择here的下一个可行的相邻位置;
if (存在这样一个相邻位置neighbor) {
 把当前位置here 放入堆栈path;
 //移动到相邻位置,并在当前位置放上降
 here = neighbor;
 maze[here.row][here.col] = 1;
else {
 //不能继续移动,需回溯
 if (堆栈path为空) return false;
 回溯到path栈顶中的位置here; }
return true;
```

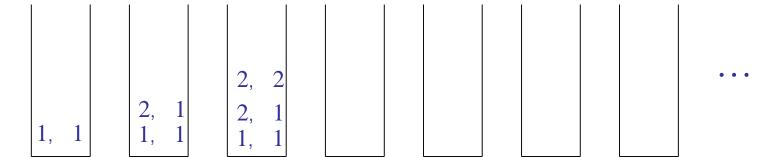
```
bool findPath()
(// 寻找一条从入口 (1,1) 到达出口 (size, size) 的路径
// 如果找到, 返回 true, 否则返回 false
  path = new arrayStack<position>;
  // 初始化偏移量
  position offset[4];
  offset[0].row = 0; offset[0].col = 1;
                                       11右
  offset[1].row = 1; offset[1].col = 0; // T
  11 -
  offset[3].row = -1; offset[3].col = 0;
  // 初始化迷宫外围的障碍墙
  for (int i = 0; i \le size + 1; i++)
                                        //底部和顶部
     maze[0][i] = maze[size + 1][i] = 1;
                                        11 左和右
    maze[i][0] = maze[i][size + 1] = 1;
```

```
position here;
here.row = 1;
here.col = 1;
                                           11 防止回到入口
maze[1][1] = 1;
                                           //下一步
int option = 0;
int lastOption = 3;
// 寻找一条路径
while (here.row != size || here.col != size)
{ // 没有到达出口
  // 找到要移动的相邻的一步
  int r, c;
   while (option <= lastOption)
     r = here.row + offset[option].row;
     c = here.col + offset[option].col;
     if (maze[r][c] == 0) break;
                                           // 下一个选择
     option++;
```

```
// 相邻的一步是否找到?
   if (option <= lastOption)
   {// 移到 maze[r][c]
     path->push (here);
     here.row = r;
     here.col = c;
                                           //设置1,以防重复访问
     maze[r][c] = 1;
     option = 0;
  else
   {//没有邻近的一步可走, 返回
      if (path->empty())
                                           11没有位置可返回
        return false;
     position next = path->top();
     path->pop();
      if (next.row == here.row)
        option = 2 + next.col - here.col;
     else option = 3 + next.row - here.row;
     here = next;
                                           // 到达出口
return true;
```

#### 老鼠游走过程

#### Path堆栈



 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1

#### 搜索迷宫路径复杂性分析

- 在最坏情况下,可能要遍历每一个空闲的位置
- 每个位置进入堆栈的机会最多有3次
- 每个位置从堆栈中被删除的机会也最多有3次
- 对于每个位置,需花费 Q( 1 )的时间来检查它的相邻位置
- 程序的时间复杂性应为O (unblocked)
- $O(unblocked) = O(m^2)$

## 作业

假设一数列的输入顺序为1234,若采用堆栈结构调整数列输出顺序,设计算法求出所有可能的输出序列(合法序列)。