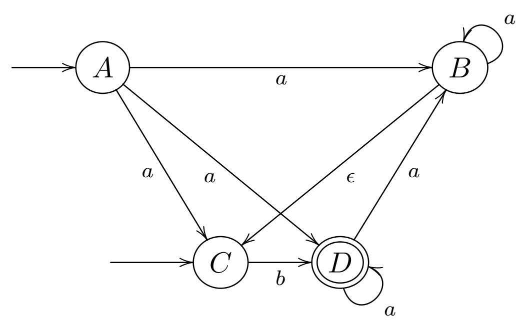
Automates et Théorie des Langages – Session 1 – 10/12/2019 – 1h30

Seul document autorisé : formulaire inclu dans le sujet

Calculatrice, Téléphone Portable, Ordinateur Interdits

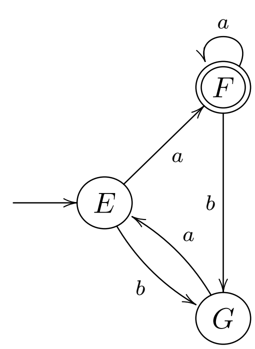
Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Si vous trouvez dans le sujet un élément qui vous semble erroné, signalez le sur votre copie, indiquez les hypothèses que vous faites, et poursuivez la composition.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.

Exercice 1 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{A, C\}, \{D\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



1. $\mathcal{E}$ est-il déterministe ? Justifier votre réponse. S'il ne l'est pas, le déterminiser.
2. Donner la table de transition de l'automate déterministe.

Exercice 2 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{E, F, G\}, \{a, b\}, \{E\}, \{F\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



1. Construire le système d'équations sur les expressions régulières associé à l'automate $\mathcal{E}$;
2. Résoudre ce système et donner une expression régulière décrivant le langage reconnu par l'automate $\mathcal{E}$.

Exercice 3 Calculer par la méthode des dérivées un automate acceptant le même langage que l'expression régulière $\Big((b\,a \mid b^\star)\,a\Big)^\star b$.

Exercice 4 Soit la grammaire décrivant un identificateur qualifié, c'est à dire une suite d'identificateurs séparés par `::`, $G = (A, V, Q, P)$ composée des non-terminaux $V = \{Q, N\}$, de l'axiome Q, des terminaux $A = \{\mathtt{l}, \mathtt{d}\}$ (`l` est une lettre, `d` est `::`) et de l'ensemble P de règles suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1. & Q \to Q\ \mathtt{d}\ N \\
2. & Q \to N \\
3. & N \to \mathtt{l} \\
4. & N \to \mathtt{l}\ N
\end{array}$$

1. Transformer G en une grammaire régulière (de la forme $X \to c\, Y$ ou $Z \to \Lambda$) décrivant le même langage en utilisant des transformations de grammaire préservant le langage reconnu (substitution, factorisation et élimination récursivité gauche) ;

2. Construire l'automate déterministe fini équivalent à la grammaire obtenue ;

3. Si cela est possible, proposer un automate plus petit en nombre d'états qui accepte le même langage. Justifier cette simplification en vous appuyant sur la grammaire régulière associée à l'automate.

Exercice 5 Soit une grammaire simplifiée du langage LISP $G = (A,\, V,\, S,\, P)$ composée des non-terminaux $V = \{S, L\}$, de l'axiome S, des terminaux $A = \left\{\mathtt{id}, ., (,)\right\}$ et de l'ensemble P de règles suivantes pour lesquelles nous donnons les symboles directeurs associés :

$$\begin{array}{llr}
1. & S \to \mathtt{id} & \{\mathtt{id}\} \\
2. & S \to (\ S\ L\ ) & \{(\} \\
3. & L \to .\ S & \{.\} \\
4. & L \to S\ L & \{\mathtt{id}, (\} \\
5. & L \to \Lambda & \{)\}
\end{array}$$

1. Pourquoi est ce que cette grammaire est LL(1) ?

2. Donner un programme CaML réalisant l'analyse descendante récursive pour le nom terminal L de cette grammaire selon une des approches suivies en séance de travaux pratiques (vous supposerez que vous disposez de la fonction d'analyse du non terminal S si nécessaire).

Equivalence entre expressions régulières : L'opérateur de concatenation/juxtaposition . est implicite pour ne pas surcharger l'écriture des expressions : $e_1.e_2$ est notée $e_1\,e_2$.

$$\begin{array}{ll}
\emptyset\, e = e\,\emptyset = \emptyset & \Lambda\, e = e\,\Lambda = e \\
e \mid \emptyset = \emptyset \mid e = e & e \mid e = e \\
e_1\,(e_2\,e_3) = (e_1\,e_2)\,e_3 & e_1 \mid (e_2 \mid e_3) = (e_1 \mid e_2) \mid e_3 \\
e_1\,(e_2 \mid e_3) = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) & (e_1 \mid e_2)\,e_3 = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) \\
e_1 \mid e_2 = e_2 \mid e_1 & \emptyset^\star = \Lambda^\star = \Lambda \\
e^\star = \Lambda \mid e^+ & e^+ = e\,e^\star = e^\star\,e \\
e^\star\,e^\star = e^\star & e^{\star\star} = e^\star \\
e = e^\star \Leftrightarrow e = e\,e & e\,e^\star = e^\star \Leftrightarrow \Lambda \in L(e) \\
(e_1^\star\,e_2^\star)^\star = (e_1 \mid e_2)^\star = (e_1^\star \mid e_2^\star)^\star & \\
(e_1^\star\,e_2)^\star\,(e_1^\star) = (e_1 \mid e_2)^\star = e_1^\star\,(e_2\,(e_1^\star))^\star &
\end{array}$$

ϵ-fermeture : L'ϵ-fermeture d'un ensemble d'états E est la fermeture réflexive et transitive de la relation de transition sur ϵ. Il s'agit de l'union de E et de tous les états accessibles depuis les états de E en suivant un nombre quelconque de transitions sur ϵ.

Théorème de Arden : Soient x une variable, e_1 et e_2 des expressions régulières, l'équation $x = e_1\,x \mid e_2$ admet au moins une solution : $x = e_1^\star\,e_2$

Dérivation des expressions régulières :

$$\begin{array}{ll}
D_a(a) = \Lambda & D_a(b) = \emptyset \\
D_a(\emptyset) = \emptyset & D_a(\Lambda) = \emptyset \\
D_a(e^\star) = D_a(e)\,e^\star & D_a(e_1 \mid e_2) = D_a(e_1) \mid D_a(e_2) \\
D_a(e_1\,e_2) = D_a(e_1)\,e_2 \mid \delta(e_1)\,D_a(e_2) & \\
\delta(\emptyset) = \emptyset & \delta(\Lambda) = \Lambda \\
\delta(a) = \emptyset \text{ si } a \in A & \delta(e^\star) = \Lambda \\
\delta(e_1\;e_2) = \delta(e_1)\;\delta(e_2) & \delta(e_1 \mid e_2) = \delta(e_1) \mid \delta(e_2)
\end{array}$$

Soit la grammaire non contextuelle $G = (A, V, S, P)$:

Calcul des Premiers :

$$\begin{array}{l}
\text{Premiers}(\Lambda) = \{\Lambda\} \\
\text{Premiers}(a\;\alpha) = \{a\} \text{ avec } a \in A \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X) = \displaystyle\bigcup_{X \to \gamma \in P} \text{Premiers}(\gamma) \text{ avec } X \in V \text{ et } \gamma \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X\;\alpha) = \text{Premiers}(X)\,\underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup\ \text{Premiers}(\alpha)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(X)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
\end{array}$$

Calcul des Suivants :

$$\text{Suivants}(X) = \bigcup_{Y \to \alpha\,X\,\beta \in P} \text{Premiers}(\beta)\,\underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(Y)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\beta)}\,\underbrace{\cup\{\$\}}_{\text{si } X = S} \text{ avec } X, Y \in V \text{ et } \alpha, \beta \in (A \cup V)^\star$$

Calcul des Symboles Directeurs :

$$\text{Directeurs}(X \to \alpha) = \text{Premiers}(\alpha)\,\underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(X)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\alpha)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star$$