Optimisation

Janvier 2018 **Documents autorisés**

Toute affirmation intuitive non argumentée sera à éviter

Exercice 1. Méthode des contraintes actives. 6 points

On considère le problème $\mathcal{P}$ de minimisation de $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ sous la contrainte $|x-1| + |y-1| \leq 1$.

(1) Montrer que $\mathcal{P}$ admet une solution.

(2) Sans aucun calcul, représenter précisément les contraintes, les isocontours de f, identifier graphiquement la solution.

(3) On considère le problème $\mathcal{Q}$ de minimisation de $f(x,y)$ sous les quatre contraintes simultanées suivantes : $x+y \leq 3$, $-x+y \leq 1$, $x-y \leq 1$ et $-x-y \leq -1$. Quel est le lien entre le problème $\mathcal{P}$ et le problème $\mathcal{Q}$.

(4) On considère le problème $\mathcal{Q}$. Sans aucun calcul, construire graphiquement le chemin des itérés de la méthode des contraintes actives vue en cours, en partant du point $(0,1)$ et pour un ensemble de contraintes actives de départ *vide*.

(5) Obtenir par le calcul les itérés de la question précédente.

Exercice 2. Multiplicateurs de Lagrange. 4 points

De tous les cylindres de surface 2π, quels sont ceux de de volume maximum ?

(1) Modéliser le problème comme un problème d'optimisation faisant apparaitre comme variables le rayon et la hauteur du cylindre. C'est donc un problème à deux variables sous contraintes.

(2) Résoudre ce problème à deux variables par la techniques des multiplicateurs de Lagrange en traitant rigoureusement les contraintes d'égalité et de positivité.

(3) Retrouver le résultat par l'élimination d'une des deux variables.

Problème. Résolution d'un problème de projection par pénalisation. 10 points

Dans cet exercice, $\|\bullet\|$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit C est une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^n$. On appelle Π l'opérateur de projection sur C qui est défini par le fait que $\Pi(y)$ est l'unique solution du problème de projection $\min_{x\in C} \|x-y\|$, où la norme $\|\bullet\|$ est la norme Euclidienne. On rappelle aussi que $\Pi(y)$ est défini pour tout y par

$$\forall x \in C,\ (y - \Pi(y))^T (x - \Pi(y)) \leq 0. \tag{1}$$

Soit $c \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème

$$\mathcal{P} \ : \ \min_{x\in\mathbb{R}^n, x^T c = \alpha} \frac{1}{2}\|x\|_2^2.$$

(1) Résolution graphique. Pour cette question uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$. Résoudre graphiquement le problème $\mathcal{P}$.

(2) Former le Lagrangien associé au problème $\mathcal{P}$ et appliquer la technique des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre le problème.

(3) Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\rho \geq 0$, on considère la fonction G définie par $G(x, \rho) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\rho(\alpha - x^T c)^2$.
(3.1) Pour $\rho \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto G(x, \rho)$ admet un minimum unique noté $x(\rho)$.
(3.2) Après avoir effectué le calcul

$$(I_n + \rho cc^T)(I_n - \frac{\rho}{1 + \rho\|c\|_2^2} cc^T),$$

donner une expression de $x(\rho)$ et calculer $\lim_{\rho \to +\infty} x(\rho) = x^\infty$. .

(4) Expliquer pourquoi $\mathcal{P}$ relève du théorème de la projection. Résoudre $\mathcal{P}$ en utilisant la caractérisation (1).

(5) Généralisation. On s'intéresse à

$$\mathcal{Q} \ : \ \min_{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b} \frac{1}{2}\|x\|_2^2,$$

où A est une matrice $m \times n$ de rang m et b est dans $\mathbb{R}^m$. On pose pour $\rho \geq 0$ fixé $G(x, \rho) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\rho\|Ax - b\|^2$.
(5.1) Résoudre le problème $\mathcal{Q}$ par la technique des multiplicateurs de Lagrange.
(5.2) Montrer que $x \mapsto G(x, \rho)$ admet un minimum unique noté $x(\rho)$ dont vous donnerez une expression en fonction de la matrice $(I + \rho A^T A)$ et du vecteur $A^T b$.
(5.3) A partir d'une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$, montrer que $I + \rho A^T A = I_n + \rho \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 v_i v_i^T$ et que $A^T b = \sum_{i=1}^m \sigma_i \, (u_i^T b) \, v_i$
(5.4) Evaluer

$$\left(I_n + \rho A^T A\right) \left(I_n - \sum_{i=1}^m \frac{\rho\sigma_i^2}{1 + \rho\sigma_i^2} v_i v_i^T\right).$$

(5.5) Calculer la limite $\lim_{\rho \to +\infty} x(\rho) = x^\infty$ et conclure en comparant à **(5.1)**.