



TD 1 – Contraintes : égalités, inégalités

✉ ▷ Exercice 1. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}((x_1 - 1)^2 + x_2^2) \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{cases}$$

paramétrisé par β dans \mathbb{R} .

1.1. Représenter graphiquement la contrainte et les équipotentialles associées au critère.

1.2. Déterminer les valeurs du paramètre pour lesquelles $x = (0, 0)$ est un minimum local.

✉ ▷ Exercice 2. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

2.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

2.2. Caractériser la solution.

2.3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $Az = b$ si et seulement si (x_1, x_2, x_3) est solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires à préciser.

✉ ▷ Exercice 3. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

avec a fixé dans \mathbb{R}^n .

3.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

3.2. Caractériser la solution.

✉ ▷ Exercice 4. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4.1. Le point $x = (1, 1, -1)$ est-il solution locale ? Globale ?

4.2. Donner l'ensemble des solutions locales, puis l'ensemble des solutions globales.

▷ Exercice 5. Déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface fixée celui de volume maximal.

▷ Exercice 6. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec $a = (1, \dots, 1)$.

6.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

6.2. Caractériser la solution.

▷ Exercice 7. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n a_i/(1+x_i) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ (b|x) = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

7.1. Montrer qu'on a existence et unicité et que la solution est caractérisée par la CN1.

Complexité

7.2. Quel est le nombre maximal de contraintes actives à la solution ? En déduire une caractérisation de la solution.

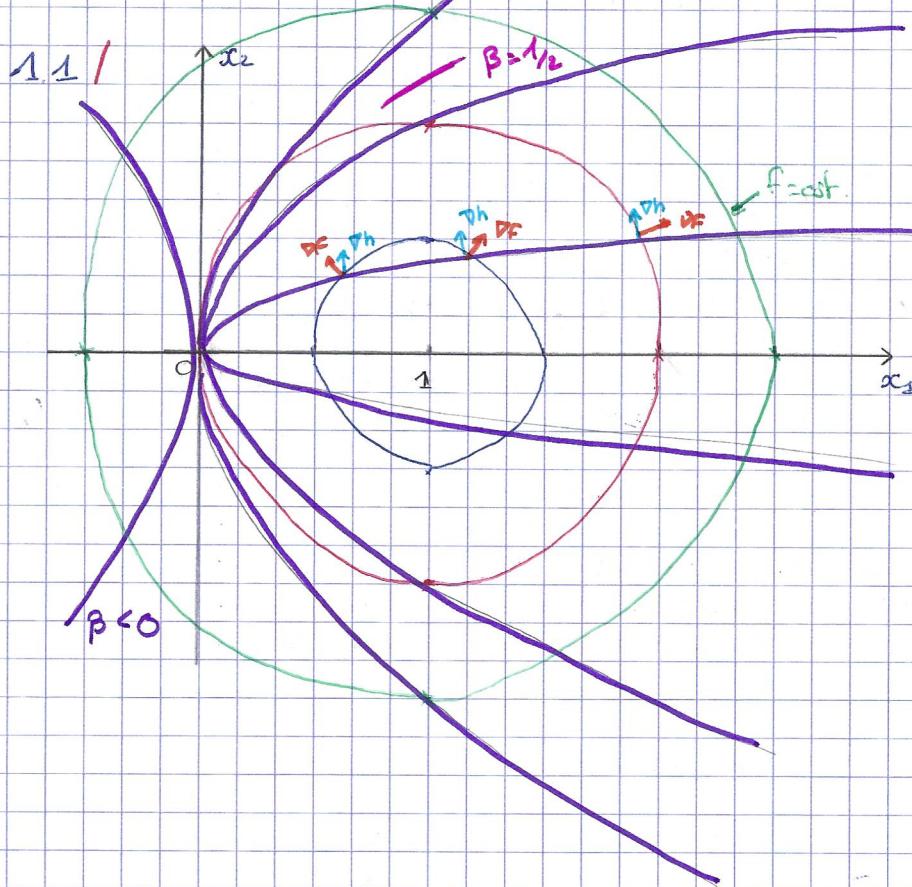
7.3. On prend $a = b = (1, \dots, 1)$. Déterminer l'ensemble des contraintes actives et calculer la solution.

Contraintes : égalités, inégalités.

Exercice 1 :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} ((x_1 - 1)^2 + x_2^2) \\ x \in G = h^{-1}(\{0\}) \end{cases}$$

avec $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto h(x) = -x_1 + \beta x_2^2, \beta \in \mathbb{R}$



$\beta = 1/2$ condition pour laquelle on passe de deux minima à un maximum à un seul minimum.

$$h=0, \beta > 1$$

1.2 / Déterminer les extrema locaux et globaux en fonction de β .

existence : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- coercive sur G fermé (car $h|G^\circ$ non vide ($0_{\mathbb{R}^2} \in G$)

→ Donc (P) admet une solution

On pose $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$$

- $f, h : \mathbb{R}^2$ sur \mathbb{R}^2

$$\bullet \nabla h(x) = (-1, 2\beta x_2) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ donc } HQC(x) \text{ vérifié } \forall x \in \mathbb{R}^2$$

↳ Hypothèse de qualification des contraintes

CN1 : Si x^* min alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) &= 0 = (x_1^* - (1 + \lambda^*), x_2^*(1 + 2\lambda^*\beta)) \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) &= 0 = h(x^*) = -x_1^* + \beta x_2^{*2} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \nabla L(x, \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, \lambda) = (0, 0, -1) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, \lambda_0).$$

ou

$$\beta \geq \frac{1}{2} \text{ et } (x, \lambda) = \left(\frac{2\beta-1}{2\beta}, \pm \sqrt{\frac{2\beta-1}{2\beta^2}}, -\frac{1}{2\beta} \right)$$

$$= \begin{cases} (x_-, \lambda_-) \\ (x_+, \lambda_+) \end{cases}$$

$$\text{Rq pour } \beta = \frac{1}{2}, (x_0, \lambda_0) = (x_-, \lambda_-) = (x_+, \lambda_+)$$

Donc pour $\beta > \frac{1}{2}$, on a 3 points critiques et pour $\beta \leq \frac{1}{2}$ on a 1 point critique.

Vérifions l'optimalité des points critiques

Cas $\beta \leq \frac{1}{2}$: on a 1 unique point critique $x_0 = (0, 0)$

comme le système admet une unique solution, x_0 est le minimum global.

$$\text{HQC vérifié : } T_L(\beta, x) = T(\beta, x)$$

- CS : ↳ Contraintes linéaires
- ↳ $\nabla h_i(x)$ (gradient linéairement indépendant)
 - ↳ si tt seul : ne pas être nul.

Cas $\beta > \frac{1}{2}$: On a 3 points critiques.

$$* f(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$* f(x_-) = f(x_+) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2\beta-1}{2\beta} - 1 \right)^2 + \left(\pm \sqrt{\frac{2\beta-1}{2\beta^2}} \right)^2 \right) = \frac{4\beta-1}{8\beta^2}$$

$$\text{or } \frac{4\beta-1}{8\beta^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\beta-1 < 4\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 4\beta^2 - 4\beta + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < (2\beta - 1)^2$$

$\Rightarrow x_-$ et x_+ sont les 2 minima globaux

Quid de x_0 ? (pour $\beta > \frac{1}{2}$)

$$T_L(G, x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla h(x_0))^\top d = 0\}$$

$$\nabla_{x \in L} L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

Soit $d \in T_L(G, x_0)$, $\boxed{d \neq 0}$ $d = (0, d_2)$ $d_2 \neq 0$.

CN2 / CS2 : En un point critique
h est F¹
HQG vérifiée.

$$(\nabla_{x \in L} L(x_0, \lambda_0))^\top d = d_2^2(1 - 2\beta) < 0$$

$\Rightarrow x_0$ est un max local. (si signe strict maxi/min local)

Exercice 2 :

$$(P) \quad \min_{x \in G = h_1^{-1}(0) \cap h_2^{-1}(0)} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$$

$$\text{avec } h_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto h_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 4$$

$$h_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto h_2(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2$$

- 2.1/ • $f|G^0$ est coercive sur G Ferré non vide
 $((1, 0, -3) \in G) \Rightarrow$ existence
- f strictement convexe ($f''(x) = 2I_3 > 0$)
sur G convexe \Rightarrow unique

2.2/ On pose $L: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda^\top h(x))$$

$$h = (h_1, h_2)$$

- $F \circ h|G^0$ sur \mathbb{R}^3
- HQC(G) vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}^3$ car h linéaire.
- Donc: x^* min de (P) $\Leftrightarrow \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^2$
 $\text{tel que } \nabla_L(x^*, \lambda^*) = 0$.
 $\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = h(x^*) = 0$.

$$\text{Or } \nabla L(x, \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$Az = b \quad z = (x, \lambda)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^* = A^{-1}b \text{ avec } z^* = (x^*, \lambda^*)$$

2.3 / On note $A = \begin{pmatrix} \bar{A} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} > 0, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ d \end{pmatrix}$$

car ses vp sont $3, 3 \pm \sqrt{3}$
car est à diagonale dominante

Posons : $(P) = \min_{x \in \mathbb{R}^3} Q(x) = \frac{1}{2} x^T \bar{A} x - \bar{b}^T x$
 $h(x) = Cx - d = 0$

- On note $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda^T h(x))$
 $= \frac{1}{2} x^T \bar{A} x - \bar{b}^T x + (\lambda^T C x - \lambda^T d)$

- $\nabla^2 f(x) = \dots > 0$ donc f (shrinkenent) convexe sur l'intervalle des contraintes
 $h=0$ convexe donc $|CN_1| = CNS$

- CN_1 = Si x^* est solution alors $\exists \lambda^* \text{ tq } \begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ \nabla_{\lambda} L(x^*, \lambda^*) = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\lambda} L(x, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A}x + C^T \lambda - \bar{b} = 0 \\ Cx - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Az = b.$

Exercice 3:

$$(P) \quad \min f(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

$x \in \mathbb{R}^n$ (si les contraintes sont perturbées par un ε , alors si $\varepsilon > 0$ on a tj des sol, mais si $\varepsilon < 0$, on se retrouve avec aucune solution)

3.1 @ existence : f \mathcal{G}° coercive sur l'espace des contraintes $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ ferme non vide donc (P) admet une solution.

⑥ unicité : On a $f'(x) v = (x - a)^T v$
 $f''(x)(v, v) = (v | v) = \|v\|^2 \geq 0$ si $v \neq 0$

$$\text{Rq } \nabla^2 f(x) = I_n \geq 0$$

$\Rightarrow f$ shrinkenent convexe donc (P) a au plus une solution.

① + ⑤ \Rightarrow (P) admet une unique solution.

3.2/ • f est C^2 sur G

- f convexe sur G convexe donc CN1 = CNS
- HQC vérifiée ? (on n'a pas de CS)
↳ T_L = T ?

HQC doit être vérifiée en la solution, mais on ne sait pas. Or la solution doit être dans P l'espace des contraintes.

$$\text{a)} \quad T_L(G, x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla h(x))(d) = 0\} \quad \text{avec } h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$

$$= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i d_i = 0\}.$$

donc pour $x \in G$, $T_L(G, x) = \mathbb{R}^n$
(car $x_i = 0 \forall i \in \{1, n-1\}$)

b) Calculons $T(G, x)$ pour $x \in G$

$$d \in T(G, x) \Leftrightarrow \exists (x_k) \text{ dans } G, x_k = x + \alpha_k d_k \quad \alpha_k > 0$$

$$\alpha_k \rightarrow 0, d_k \rightarrow d$$

$$\text{or } x_k \in G \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + \alpha_k d_{k,i})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_k^2 d_{k,i}^2) = 0 \quad \text{car } x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, n-1\}$$

$$\Leftrightarrow d_{k,i} = 0 \quad \forall i \in \{1, n-1\} \quad \text{car } \alpha_k > 0.$$

donc $T(G, x) \subset \boxed{\text{Ren.}}$ pour $x \in G$

donc $T(G, x) \neq T_L(G, x)$

donc HQC (G) pour $x \in G$ n'est pas vérifiée

Nouvelle Formulation de (P):

$$(P') \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2 \\ h(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

f₁, h ∈ C¹ sur G = \mathbb{R}^n .

HQC vérifiée car contraintes linéaires.
CN1 = CNS : pb convexe.

on note $\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$$

$$= \frac{1}{2} \|x - a\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

$$\text{CN1} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\nabla f(x) + h'(x)]^T \lambda = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0 \quad \quad \quad h(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i - a_i + \lambda_i = 0 & \forall i \in \{1, n-1\} \\ \lambda_n = \dots = \lambda_{n-1} = 0 \end{cases}$$

la solution est $x^* = (0, \dots, 0, a_n)$ avec $\lambda^* = (a_1, \dots, a_n)$

Comme multiplicateur de Lagrange associé.

Exercice 5:

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} = h(x)$$

5.1] HQC vérifiée : car contraintes linéaires.

$f, h \in \mathcal{C}^1$ sur \mathcal{G}

$$\bar{x} = (1, 1, -1) \in \mathcal{G}$$

On note $L: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, \lambda) \mapsto L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda) h(x)$$

CN1: si x^* sol alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ tq $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \Rightarrow \\ D_{\lambda} L(x, \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_2 + 6x_1x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_3 + 6x_1x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

On pose $\lambda = 0 \Rightarrow \nabla L(\bar{x}, \lambda) = 0$ donc \bar{x} vérifie la CN1

CN2: ... $\left(\begin{pmatrix} \bar{x}, \lambda \end{pmatrix} \mid d, d \right) \geq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{x}}(\mathcal{G}) ?$

$$(\nabla_{x, \lambda}^2 L(\bar{x}, \lambda) d | d) \geq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{x}}(\mathcal{G}) ?$$

$$d = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, -\alpha \right), \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 6:

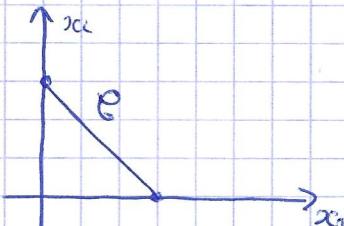
$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2 \\ x \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n \\ x \in h^{-1}(\log) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_+) \text{ avec} \\ h(x) = (a|x|) - 1 \text{ et } g(x) = -x. \end{cases}$$

$\mathcal{G} = h^{-1}(\log) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_+)$ avec

$$h(x) = (a|x|) - 1 \text{ et } g(x) = -x.$$

$$a = (1, \dots, 1)$$

6.1] $n=2$



a) existence:

- * \mathcal{G} fermé car $h, g \in \mathcal{C}^1$ et $\{0\}$, \mathbb{R}_+ fermés.
- * \mathcal{G} borné car $\forall i, 0 \leq x_i \leq 1$.

$\Rightarrow \mathcal{G}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathcal{G} compact non vide donc (P) admet une solution. (ou coercitif)

b) unicité:

\mathcal{G} convexe car h affine et g convexe

f strictement convexe car $f''(x) = \nabla^2 f(x) = I_n > 0$.

$\Rightarrow (P)$ admet au plus une solution

$\textcircled{a} + \textcircled{b} \Rightarrow (\text{P})$ a une unique solution.

6.2 | (P) est convexe donc "CN1 = CNS"

¶ Puisque (P) a une unique solution, alors la CN1 aussi

- $f, g, h \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}^n
- HQC vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}^n$ car h et g affines

HQC : ℓ° affines ou gradient lin. indép

\Rightarrow Si x^* est solution, alors $\exists (\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ multiplicateur pr les contraintes d' ℓ^*

multiplicateur pour les contraintes d' = 0

$$\begin{cases} \nabla_x \ell(x^*, \lambda^*, \mu^*) = (x - a) + \lambda a - \mu \\ h(x^*) = (a|x^*|) - 1 = 0 \\ g(x^*) \leq 0 \\ \mu^* \geq 0 \\ (\mu^* | g(x^*)|) = 0 \end{cases}$$

Condition de complémentarité

$$\text{avec } \ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda, \mu) \mapsto \frac{1}{2} \|x - a\|^2 + \lambda((a|x|) - 1) - (\mu|x|)$$

$$\ell(x, \lambda, \mu) = f(x) + (\lambda|h(x)|) - (\mu|x|)$$

Rappel dérivées :

$$\frac{1}{2} \|x - a\|^2 \rightarrow (x - a)$$

$$\lambda(a|x|) \rightarrow \lambda a$$

$$(\mu|x|) \rightarrow \mu$$

(On omet *).

- Puisque $(a|x|) - 1$ et $x \geq 0$, $\exists i_0 \in \{1, n\}$ tq $x_{i_0} > 0$ ($g_{i_0}(x) < 0$)

contrainte non saturante, elle ne sert à rien donc multiplicateur associé nul.

Donc $\mu_{i_0} = 0$ et on a $\lambda = 1 - x_{i_0}$.

- Supposons $\exists x_i = 0$

D'après $\nabla_x \ell = 0$, on a $\underset{x}{0} - 1 + \lambda = \mu_i = -x_{i_0} < 0$ ce qui est impossible donc $x_i \neq 0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, n\}, x_i > 0, \mu_i = 0$ et donc $x_i = 1 - \lambda = x_{i_0}$

$$\Rightarrow \forall i, x_i = \frac{1}{n} \quad (\text{car } (a|x|) - 1 \Rightarrow nx_{i_0} = 1)$$

$\Rightarrow (x^*, \lambda^*, \mu^*) = \left(\frac{a}{n}, 1 - \frac{1}{n}, 0_{\mathbb{R}^n} \right)$ est l'unique solution de la CN1 et comme (P) convexe, x^* est le min global.