

# Optimisation

Janvier 2020

Documents autorisés

Toute affirmation intuitive non argumentée sera à éviter

## Exercice 1. Multiplicateurs de Lagrange, cas égalité. 6 points

On considère les deux problèmes à deux variables suivants :

$$\mathcal{P}_1 : \min_{x_1=0} (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : \min_{x_1^2=0} (x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 1)^2$$

- (1) Dessiner pour chaque problème les lignes de niveau de la fonction et représenter les contraintes. Chercher graphiquement la solution de ces problèmes.
- (2) Démontrer l'existence de solution pour ces deux problèmes.
- (2) Former le Lagrangien pour chacun de ces problèmes. Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour retrouver les solutions obtenues en (1).

## Exercice 2. Un problème aux valeurs propres. 6 points

Soit  $A$  une matrice symétrique et  $y \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\|y\|_2 = 1$ . On s'intéresse à

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}x^T Ax. \\ x^T x = 1 \\ y^T x = 0 \end{cases}$$

- (1) Ce problème admet-il une solution ?
- (2) Ecrire le Lagrangien associé à ce problème.
- (3) Appliquer les conditions d'optimalité KKT au 1er ordre.
- (4) Montrer que toute solution du problème est un vecteur propre associé à la matrice  $(I - yy^T)A$ .
- (5) Bonus : traiter le cas où  $A$  n'est pas symétrique.

**Problème. Résolution par pénalisation extérieure. 10 points**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $C$  un sous-ensemble fermé non vide de  $\mathbb{R}^d$ .

On appelle pénalité extérieure (PE) associée à  $C$  toute fonction  $p$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes

- i)  $p$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$
- ii)  $\forall x \in \mathbb{R}^d, p(x) \geq 0$
- iii)  $p(x) = 0 \iff x \in C$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on définit sur  $\mathbb{R}^d$  la fonction  $\Phi_n$  par  $\Phi_n(x) = f(x) + np(x)$ , et on suppose dans cet exercice que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \Phi_{n_0}(x) = +\infty$ .

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} : \min_{x \in C} f(x) \text{ et } \mathcal{P}_n : \min_{x \in \mathbb{R}^d} \Phi_n(x).$$

On désire étudier le problème de l'approximation de minima *sous contrainte* (s'ils existent) de  $\mathcal{P}$  par la suite des minima *sans contrainte* de  $\mathcal{P}_n$  (à nouveau, s'ils existent).

(1) On considère  $p_1(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$ ,  $p_2(x) = \|g(x)\|_2^2$  (ici,  $g$  est une application continue de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^m$ ),  $p_3 = \|\max(-x, 0)\|_2^2$  (ici,  $\max(-x, 0)$  est le vecteur de composantes  $\max(-x_i, 0)$ ). Ces fonctions sont-elles des PE. Dans l'affirmative, préciser l'ensemble  $C$  associé.

(2) Montrer que  $\forall n \geq n_0, \lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \Phi_n(x) = +\infty$ . En déduire que l'on peut définir une suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  dont le terme de rang  $n$ ,  $x_n$ , est un minimum sur  $\mathbb{R}^d$  de la fonction  $\Phi_n$ .

(3) Montrer que  $\forall x \in C, \forall n \geq n_0, \Phi_{n_0}(x_n) \leq \Phi_n(x_n) \leq f(x)$ . En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  est bornée.

(4) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  admet au moins une valeur d'adhérence. On appelle alors  $(y_j)_{j \in J}$  une sous-suite de  $(x_n)_{n \geq n_0}$  convergent vers une telle valeur d'adhérence noté  $\bar{x}$ . On pose notamment  $y_j = x_{\theta(j)}$ , où  $\theta$  est la fonction strictement croissante de  $J$  dans  $\mathbb{N}$  permettant d'extraire la sous-suite.

(5) Montrer que pour tout  $x \in C, \Phi_{n_0}(y_j) + (\theta(j) - n_0)p(y_j) = \Phi_{\theta(j)}(y_j) \leq f(x)$ , puis que

$$p(y_j) \leq \frac{f(x) - \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \Phi_{n_0}(z)}{\theta(j) - n_0}.$$

En déduire que toute valeur d'adhérence  $\bar{x}$  de  $(x_n)_{n \geq n_0}$ , on a  $p(\bar{x}) = 0$ , et puis que  $\bar{x} \in C$ .

(6) Prendre  $x \in C$  et rappeler pourquoi  $\forall j \in \mathbb{N}, f(y_j) \leq f(x)$ . En déduire que  $\forall x \in C, f(\bar{x}) \leq f(x)$ . Conclure grâce aux questions précédentes que tout point d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  est une solution de  $\mathcal{P}$ .