Optimisation Numérique 2A - TD1

mardi 22 septembre 2020
09:32

▷ **Exercice 1.** Étudier le problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} Min & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n. & \end{array}\right.$$

pour les application suivantes :

1.1.

$$f_1: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & 2\,(x_1+x_2+x_3-3)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2. \end{array}$$

1.2.

$$f_1: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & 100\,(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2. \end{array}$$

- Propriétés = différentiabilité - convexité -
- Existence de sol°s. locales / globales
- Caractérisation des solutions CN1 / (CN2/CS2)

Exo 1.1 : f_1 est $\mathcal{C}^\infty$ car polynôme des diverses variables.

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 4(x_1+x_2+x_3-3) + 2(x_1-x_2) \\ 4(x_1+x_2+x_3-3) - 2(x_1-x_2) + 2(x_2-x_3) \\ 4(x_1+x_2+x_3-3) - 2(x_2-x_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 12 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 12 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1(x) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} = H$$

diag >0, à diag dominante large

et la ligne 2 est à diagonale dominance stricte.

$$\boxed{\text{ligne } i : \quad a_{ii} \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|}$$

$\Rightarrow \nabla^2 f_1(x)$ est définie positive.

f_1 est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (qui est convexe)

- ($\mathbb{R}^n$ non compact.)

  $\mathbb{R}^n$ (convexe et) fermé

  f_1 est-elle $\nearrow$ à l'∞ (f_1 continue)

f_1 est quadratique : $f_1(x) = \frac{1}{2}\underbrace{x^T H x}_{} + \underbrace{b^T x}_{cs} + c$ $\quad$ (H sym)

$$f_1(x) \geq \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_{min}(H)}_{}\|x\|_2^2 - \|b\|_2\|x\|_2 + c$$

>0 car H est def. pos.

$\hookrightarrow$ poly de d°2 en $\|x\|_2$ de terme de + h^t d° >0

$\Rightarrow \longrightarrow +\infty$

f_1 est $\nearrow$ à l'∞ ., et donc elle admet un min global sur $\mathbb{R}^3$. qui est unique à cause de la stricte convexité.

$\|x\| \to +\infty$

$g(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c$

$$g'(x).h = (\underbrace{Hx + b}_{}|h) = (\nabla g(x) \mid h)$$

$$g''(x)(h,k) = h^T H k$$

$$\nabla^2 g(x) = H.$$

- Caractérisation : dans le cas convexe, la CN1 est une CNS d'optimum global.

CN1 : $\nabla f_1(x) = 0 \iff Hx = -b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

qui admet une solution unique car H définie positive.

solution $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \longmapsto 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

- f_2 est polynômiale donc $\mathcal{C}^\infty$.
- $\nabla f_2(x) = \begin{bmatrix} -400 x_1 (x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 x_1^3 - 400 x_1 x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200 x_1^2 + 200 x_2 \end{bmatrix}$

$$\nabla^2 f_2(x) = \begin{bmatrix} (1200 x_1^2 - 400 x_2 + 2) & -400 x_1 \\ -400 x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$: $\nabla^2 f_2(x) = \begin{bmatrix} -398 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$ indéfinie

$\longrightarrow$ f_2 non convexe sur $\mathbb{R}^2$.

notons $x_1^2 = z_1$, $x_2 = z_2$: $f_2(x_1, x_2) = 100(z_2 - z_1)^2 + 1 + z_2 - 2\sqrt{z_1}$

Caractérisation :

Caractérisation :

CN1 : $\nabla f_2(x) = 0 \iff \begin{cases} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 = 0 \\ -200x_1^2 + 200x_2 = 0 . \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1^2 = x_2 \\ \cancel{400x_1^3} - \cancel{400x_1^3} + 2x_1 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$\iff \boxed{\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}}$

1 seul point stationnaire : $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

CN2
CS2 $\quad \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$ $\quad$ 2x2

trace = 1002 > 0

det = $802 \times 200 - (400)^2$
$402 \times 400 - 400 \times 400 = 800$

$\hookrightarrow \Rightarrow \lambda_1$ et $\lambda_2 > 0$

$\downarrow$

définie positive $\Rightarrow$ CS2 de minimum local strict

de plus

$f_2(\bar{x}) = 100(1-1^2)^2 + (1-1)^2 = 0$

et on sait que $f_2 \geq 0$ (somme de 2 carrés)

donc $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un min global (aussi) de f_2.

Exo 2

mardi 22 septembre 2020
09:33

▷ **Exercice 2.** Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$, et de la norme euclidienne associée. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On considère alors l'application

$$f_a : \begin{array}{rcl} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_a(x) = -\ln(1 - \|x\|^2) + < a, x > . \end{array}$$

2.1. Montrer que f_a est deux fois dérivable sur Ω.

2.2. Exprimer $\nabla f_a(x)$ et $\nabla^2 f_a(x)$ en tout point de Ω.

2.3. Montrer que f_a est strictement convexe sur Ω.

2.4. Discuter en fonction de a des solutions du problème d'optimisation :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} Min & f_a(x) \\ x \in \Omega & \end{array} \right. .$$

2.5. Même question en imposant $\|x\| < 1/2$.

- Sur Ω : $z = 1 - \|x\|_2^2 \in]0, 1]$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

  $\ln(z)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+_*$

  $q : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \|x\|_2^2 \end{array}$ est une forme quadratique $\mathcal{C}^\infty$.

Donc par composition, f_a est $\mathcal{C}^\infty$. (sachant bien entendu que $x \mapsto <a, x>$ est $\mathcal{C}^\infty$ car linéaire.)

- $\forall x \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$f_a'(x) \cdot h = -\frac{1}{1 - \|x\|_2^2} \cdot (\underbrace{q'(x) \cdot h}) + <a, h>$$

$$= -\frac{1}{1 - \|x\|_2^2} \left(-2<x, h> \right) + <a, h>$$

$$= \left< \underbrace{\frac{2x}{1 - \|x\|_2^2} + a}, h \right>$$

$$= < \nabla f_a(x), h >$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\ln\left(1 - \sum_k x_k^2\right) \right) = -\frac{1}{1 - \sum x_k^2} (-2x_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k a_k x_k \right) = a_i$$

$$\nabla f_a : \begin{array}{rcl} \Omega \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{1 - \|x\|_2^2} + a \end{array}$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$

$$\nabla f_a(x)' \cdot h = \frac{2h}{1 - \|x\|_2^2} - \frac{2x \cdot (-2<x, h>)}{(1 - \|x\|_2^2)^2}$$

$$- \quad 2 \quad h \quad , \quad 4\, x x^T h$$

$$= \frac{2}{1-\|x\|_2^2} h + \frac{4\, x x^T h}{(1-\|x\|_2^2)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot h = \frac{(f'(x) \cdot h)}{g(x)} - f(x) \times \frac{(g'(x) \cdot h)}{g(x)^2}}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{2\, I_n}{1-\|x\|_2^2} + \frac{4\, x x^T}{(1-\|x\|_2^2)^2} \right]}_{\nabla^2 f_a(x)} h$$

$$\nabla^2 f_a(x) = \boxed{\Big(\underbrace{\frac{2}{1-\|x\|_2^2}}_{>0}\Big) I_n} + \underbrace{\frac{4}{(1-\|x\|_2^2)^2}}_{>0} \underbrace{x x^T}$$

définie positive

matrice de rang 1
semi - définie positive.

$\left(\text{car } \underbrace{h^T x}\underbrace{x^T h} = \langle x, h \rangle^2 \geq 0 \right)$

donc $\nabla^2 f_a(x)$ est définie positive.

mais ⚠, f_a non définie sur $\mathbb{R}^n$. mais sur Ω

Il faut vérifier au préalable que Ω <u>est un convexe</u>.

en effet, c'est sûr car Ω est la boule ouverte de rayon 1.

$\boxed{\text{Sur cet ouvert convexe, } f_a \text{ est donc strictement convexe}}$

2.4 : sur Ω, ouvert, on <u>est sans contraintes</u>

et alors f_a étant strictement convexe sur Ω,

la CN1 est une CNS de min global. (qui sera unique s'il existe)

CN1 : $\nabla f_a(x) = 0 \iff \boxed{\frac{2}{1-\|x\|_2^2} x + a = 0}$ (1)

$\Rightarrow$ x solution de (1) est nécessairement colinéaire à a.

donc $\begin{cases} x = \alpha a \\ \text{et } \underline{\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2\|a\|_2^2} + 1\right)} a = 0 \end{cases}$

- Soit $a = 0$ et $x = 0$
- Soit $a \neq 0$ et alors α doit vérifier $-\alpha^2\|a\|^2 + 2\alpha + 1 = 0$

• Soit $a \neq 0$ et alors

$\downarrow$

2 racines $\neq$

et on cherche la racine < 0.

la solu° c'est donc $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{1 + \|a\|_2^2}}{\|a\|_2^2}$

et $x = \alpha a = \dfrac{1 - \sqrt{1 + \|a\|^2}}{\|a\|^2} a$ $\quad \in \Omega$?

$\|x\| = \left| \dfrac{1 - \sqrt{1 + \|a\|^2}}{\|a\|} \right| < 1$ (?) . $\quad$ ($< 1/2$ (?))

$\sqrt{1 + \|a\|^2} - 1 < \|a\|$?

$\sqrt{1 + \|a\|^2} < 1 + \|a\|$?

$1 + \|a\|^2 < (1 + \|a\|)^2 = 1 + 2\|a\| + \|a\|^2$ $\quad$ oui

(car $a \neq 0$)

donc tjs vrai $x = \alpha a \in \Omega$ sans condition sur a ($\neq 0$).

2.5) On impose cette fois-ci $\|x\| < 1/2$ $\quad$ ça change l'ouvert

(qui reste convexe néanmoins)

même raisonnement

$\leadsto$ solu° existe de norme $< 1/2$

ssi $\|a\| \leq \frac{3}{4}$.

▷ **Exercice 3.** Démontrer le lemme

Lemme 1. *Soit q la forme quadratique $q(s) = g^\top s + \frac{1}{2} s^\top H s$, H symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. *q atteint un minimum si et seulement si H est semi-définie positive et $g \in \operatorname{Im} H$ et dans ce cas tout point solution de $\boxed{Hs = -g \text{ est}}$ un minimum global de q.*
2. *q a un unique minimum si et seulement si H est définie positive.*

$q(s) = \frac{1}{2} s^T H s + g^T s$ (H sym)

q est une forme quadratique $\mathcal{C}^\infty$.

$$\begin{cases} \nabla q(s) = Hs + g \\ \nabla^2 q(s) = H \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si}}$ q admet un min local en un point $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$

nécessairement CN1 : $\nabla q(\bar{s}) = H\bar{s} + g = 0$

et CN2 : $\nabla^2 q(\bar{s}) = H \geq 0$.

mais si $H \geq 0$ alors q est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

et $\bar{s}$ est un min global de q.

$\boxed{\text{Si}}$ $H \geq 0$ q est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et la CN1 devient une CNS de min global sur $\mathbb{R}^n$.

CN1 : $Hs = -g$ d'où l'équivalence 1.

2 . si H est déf positive, alors H inversible

donc il existe tjs une solution à la CN1 : $Hs = -g$

et en + q est strictement convexe

donc c'est un min. global.