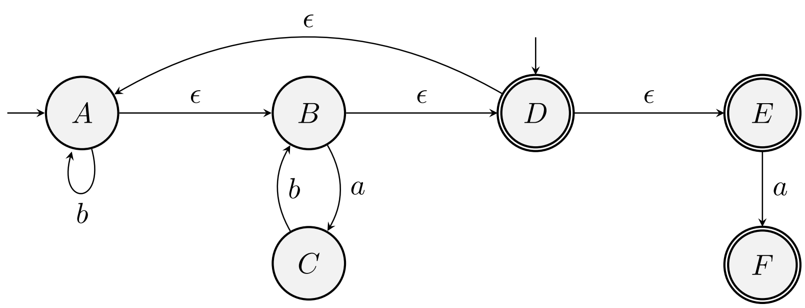
Automates et Théorie des Langages – Session 1 – 25/11/2022 – 1h30

Seul document autorisé : formulaire inclu dans le sujet

Calculatrice, Téléphone Portable, Ordinateur Interdits

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Si vous trouvez dans le sujet un élément qui vous semble erroné, signalez le sur votre copie, indiquez les hypothèses que vous faites, et poursuivez la composition.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.

Exercice 1 Soit l'automate fini $\mathcal{E}$, avec ϵ-transitions, tel que $\mathcal{E} = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{a, b\}, \{A, D\}, \{D, E, F\}, \delta_{\mathcal{E}})$ et dont la fonction de transition est définie par le diagramme suivant :



1. Donnez la liste des mots de longueur 2 qui sont dans le langage de $\mathcal{E}$.
2. L'automate $\mathcal{E}$ est-il déterministe ? Justifier votre réponse.
3. S'il ne l'est pas, le déterminiser. Dessiner l'automate déterministe obtenu.
4. Un de vos encadrants de TD vous dit que le langage de l'automate $\mathcal{E}$ est l'ensemble des mots ne contenant pas deux a consécutifs. Qu'en pensez-vous ? Quelle méthode pourriez-vous utiliser pour vérifier si cette affirmation est vraie ?

Exercice 2 On considère l'expression régulière $E = (a \mid b)^\star\, a\, a\, (a \mid b)^\star$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Décrivez le langage correspondant à l'expression E.
2. Calculez par la méthode des dérivées un automate ($\mathcal{A}$) acceptant le même langage que l'expression E. (Pensez à simplifier vos résultats en utilisant les identités remarquables entre expressions régulières, par exemple $e \mid e = e$.)
3. Par construction, l'automate $\mathcal{A}$ est déterministe. Est-il minimal ? Si non, minimisez le.
4. Dessinez un automate, $\mathcal{A}^\perp$, reconnaissant le *langage complémentaire* de $\mathcal{A}$. En particulier, un mot w est accepté par $\mathcal{A}^\perp$ si et seulement si w n'est pas accepté par $\mathcal{A}$.
5. Construire le système d'équations sur les expressions régulières associé à l'automate $\mathcal{A}^\perp$.
6. Résoudre ce système et donner une expression régulière décrivant le langage reconnu par l'automate.

Exercice 3 On considère la grammaire $G_1 = (\Sigma, V, S, P)$, d'axiome S, d'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, et définie à partir des non-terminaux $V = \{S, A, B\}$ et de l'ensemble P des règles de production suivantes:

$$\begin{array}{ll} 1. & S \to A\,B \\ 2. & A \to a\,A\,b \\ 3. & A \to \Lambda \\ 4. & B \to b\,B\,a \\ 5. & B \to \Lambda \end{array}$$

1. Donnez une séquence de règles de production qui permet de dériver le mot $a\,a\,b\,b\,b\,a$.

2. Décrivez le langage généré par G_1.

Exercice 4 On considère la grammaire $G_2 = (\Sigma, V, S, P)$, d'axiome S, d'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, et définie à partir des non-terminaux $V = \{S, A\}$ et de l'ensemble P de règles de production suivantes:

$$\begin{array}{ll} 1. & S \to S\,a\,b \\ 2. & S \to A \\ 3. & A \to a \\ 4. & A \to A\,a \end{array}$$

1. Transformer G_2 en une grammaire équivalente dans laquelle vous avez éliminé la récursivité gauche sur le non-terminal A.

2. Transformer G_2 en une grammaire régulière (contenant uniquement des productions de la forme $X \to w\,Y$ ou $Z \to \Lambda$, avec w un mot de $\Sigma^\star$), décrivant le même langage, en utilisant des transformations de grammaire préservant le langage reconnu (substitution, factorisation et élimination récursivité gauche).

3. Dessinez un automate reconnaissant le même langage que G_2.

4. Donnez une expression régulière décrivant le langage généré par G_2.

Exercice 5 On considère la grammaire $G_3 = (A,\ V,\ S,\ P)$ qui correspond à un langage simplifié d'expressions (augmenté du symbole de terminaison "\$") de la forme "`a(a();a(()))$`". La grammaire est formée des non-terminaux $V = \{S', S, L, F\}$, de l'axiome S', des terminaux $A = \left\{\mathtt{a}, (,), ;, \$\right\}$ et de l'ensemble P de règles suivantes:

$$\begin{array}{ll} 1. & S' \to S\ \$ \\ 2. & S \to \mathtt{a}\,(\,L\,) \\ 3. & L \to S\ F \\ 4. & L \to \Lambda \\ 5. & F \to ;\ S\ F \\ 6. & F \to \Lambda \end{array}$$

1. Indiquez si les non-terminaux S, L ou F sont *nullable*. On dit que le non-terminal X est nullable s'il est possible de trouver une séquence de dérivation telle que $X \to^\star \epsilon$.

2. Calculez les ensembles des Premiers et des Suivant pour les non-terminaux S, L et F. Vous trouverez des règles de calcul pour ces ensembles à la page suivante. On rappelle que l'ensemble Premiers(α), où α est un mot de $(A \cup V)^\star$, est l'ensemble des symboles $a \in V$ qui peuvent apparaître au début d'une production démarrant de α. C'est-à-dire tel que $\alpha \to^\star a\,\gamma$. Le suivant d'un non-terminal X est l'ensemble des symboles qui peuvent apparaître après X dans une production depuis l'axiome; c'est-a-dire l'ensemble des symboles $a \in V$ tel que $S' \to^\star \alpha\,X\,a\,\gamma$.

3. Calculez les symboles directeurs de chaque règle de production de G_3 et expliquez pourquoi cette grammaire est LL(1) ?

Equivalence entre expressions régulières : L'opérateur de concatenation/juxtaposition . est implicite pour ne pas surcharger l'écriture des expressions : $e_1.e_2$ est notée $e_1\,e_2$.

$$
\begin{array}{ll}
\emptyset\, e = e\, \emptyset = \emptyset & \Lambda\, e = e\, \Lambda = e \\
e \mid \emptyset = \emptyset \mid e = e & e \mid e = e \\
e_1\,(e_2\,e_3) = (e_1\,e_2)\,e_3 & e_1 \mid (e_2 \mid e_3) = (e_1 \mid e_2) \mid e_3 \\
e_1\,(e_2 \mid e_3) = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) & (e_1 \mid e_2)\,e_3 = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) \\
e_1 \mid e_2 = e_2 \mid e_1 & \emptyset^\star = \Lambda^\star = \Lambda \\
e^\star = \Lambda \mid e^+ & e^+ = e\,e^\star = e^\star\,e \\
e^\star\,e^\star = e^\star & e^{\star\star} = e^\star \\
e = e^\star \Leftrightarrow e = e\,e & e\,e^\star = e^\star \Leftrightarrow \Lambda \in L(e) \\
(e_1^\star\,e_2^\star)^\star = (e_1 \mid e_2)^\star = (e_1^\star \mid e_2^\star)^\star & \\
(e_1^\star\,e_2)^\star\,(e_1^\star) = (e_1 \mid e_2)^\star = e_1^\star\,(e_2\,(e_1^\star))^\star &
\end{array}
$$

ϵ-fermeture : L'ϵ-fermeture d'un ensemble d'états E est la fermeture réflexive et transitive de la relation de transition sur ϵ. Il s'agit de l'union de E et de tous les états accessibles depuis les états de E en suivant un nombre quelconque de transitions sur ϵ.

Théorème de Arden : Soient x une variable, e_1 et e_2 des expressions régulières, l'équation $x = e_1\,x \mid e_2$ admet au moins une solution : $x = e_1^\star\,e_2$

Dérivation des expressions régulières :

$$
\begin{array}{ll}
D_a(a) = \Lambda & D_a(b) = \emptyset \\
D_a(\emptyset) = \emptyset & D_a(\Lambda) = \emptyset \\
D_a(e^\star) = D_a(e)\,e^\star & D_a(e_1 \mid e_2) = D_a(e_1) \mid D_a(e_2) \\
D_a(e_1\,e_2) = D_a(e_1)\,e_2 \mid \delta(e_1)\,D_a(e_2) & \\
\delta(\emptyset) = \emptyset & \delta(\Lambda) = \Lambda \\
\delta(a) = \emptyset \text{ si } a \in A & \delta(e^\star) = \Lambda \\
\delta(e_1\ e_2) = \delta(e_1)\ \delta(e_2) & \delta(e_1 \mid e_2) = \delta(e_1) \mid \delta(e_2)
\end{array}
$$

Soit la grammaire non contextuelle $G = (A, V, S, P)$:

Calcul des Premiers :

$$
\begin{array}{l}
\text{Premiers}(\Lambda) = \{\Lambda\} \\
\text{Premiers}(a\,\alpha) = \{a\} \text{ avec } a \in A \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X) = \bigcup\limits_{X \to \gamma \in P} \text{Premiers}(\gamma) \text{ avec } X \in V \text{ et } \gamma \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X\,\alpha) = \text{Premiers}(X) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup\ \text{Premiers}(\alpha)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(X)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
\end{array}
$$

Calcul des Suivants :

$$
\text{Suivants}(X) = \bigcup_{Y \to \alpha\,X\,\beta \in P} \text{Premiers}(\beta) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(Y)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\beta)} \underbrace{\cup\{\$\}}_{\text{si } X = S} \text{ avec } X, Y \in V \text{ et } \alpha, \beta \in (A \cup V)^\star
$$

Calcul des Symboles Directeurs :

$$
\text{Directeurs}(X \to \alpha) = \text{Premiers}(\alpha) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(X)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\alpha)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
$$